中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040407

撲克牌遊戲中的數學原理

學校名稱：新北市立新莊高級中學

作者：	指導老師：
高一　張哲綱 高一　李汪其	田明弘

關鍵詞：約瑟夫問題、不動點

撲克牌遊戲中的數學原理

摘要

我們這個作品想討論2個關於次序變化的問題, 第一個是約瑟夫問題的公式. 原始的約瑟夫問題是說, 將正整數1,2,⋯,n 依序排成一圈, 從1開始1,2,1,2,⋯報數,不斷去掉報數為”2”的數字, 求出最後剩下的數字, 細節在Knuth教授的著作: 具體數學 (參考文獻[1]) 被完整的得出. 我們參考文獻[2]了解以前這個問題的進展程度, 並試著用我們的方法推導出以下問題的公式. 問題如下: 給定n個數字及正整數L, 在報數規則為”留1去L”時 (從1開始1,2,⋯,L+1,1,2,⋯,L+1,⋯報數, 報數為2~L+1的就去掉, 不斷重複此過程), 在第x次被刪除的數字的公式, 並應用此公式找出不動點 x 滿足: 第x次去掉第x個數字. 在一般的”留 α 去 β “的情況, 我們則推導出一個便於計算的迭代關係.

壹、研究動機

老師提問: 牌堆中有2008張牌由上而下依序編號1,2,…,2008, 重複執行以下操作: (1)將最上方的牌移到牌堆最底部 (2)將新的最上方的牌移到旁邊桌子,由左而右依序放好.請問最後移除的牌是幾號?

貳、研究目的

討論約瑟夫問題的一種推廣: 在”留 1 去 L” (從 1 開始 1,2,⋯,L+1,1,2,⋯,L+1,⋯報數, 報數為 2~L+1 的就去掉, 不斷重複此過程), 對於任意正整數 n 以及正整數 x≤ n, 定義第 x 次去掉的數字為 $J_{1,L}(n,x)$. 我們可以用 L,n,x 清楚表示 $J_{1,L}(n,x)$. 並利用此公式, 求出此種操作的不動點, 也就是, $J_{1,L}(n,x)=x$ 存在的充分必要條件. 至於在一般的留 α 去 β 的情況, 我們則推導出一個便於計算的迭代關係.

參、研究材料

紙, 筆, 一副撲克牌.

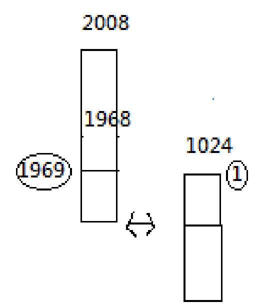
肆、研究過程與方法

約瑟夫問題:

老師問了一個問題: 牌堆中有2008張牌由上而下依序編號1,2,…,2008, 重複執行以下操作: (1)將最上方的牌移到牌堆最底部 (2)將新的最上方的牌移到旁邊桌子,由左而右依序放好.

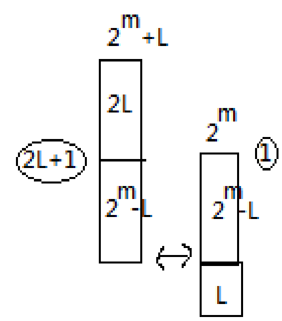
請問最後移除的牌是幾號? 經過許久的思考後, 我們提出的作法如下:

只要張數是$2^n, n \geq 1$ 時, 最後移除的牌必為第1張, 因此 1024 張牌時最後移除第1張. 我們只要找出這個1號是從2008張牌的第幾張移動過來的? 參考右圖. 因為2008-1024=984, 從2008張牌上方移除984*2=1968 張牌, 它的下一張, 第1969號就是最後剩下的牌.



我們想要把上面問題公式化, 也就是說,將 1,2,….,2n 張牌按照上述操作, 求出最後移除的是幾號牌?公式為: 設張數2n=$2^m + L,\ 0 \leq L < 2^m$, 則最後移除第 2L+1號牌

說明: 依照上面想法, 設 2n=$2^m + L,\ 0 \leq L < 2^m$. 已知在 2^m 張牌中1號是最後移除的牌, 這個1號是從$2^m + L$中的第幾號移過來的呢? 參考右邊的圖示我們從$2^m + L$ 張牌上方移除 1~2L號, 將這些牌的奇數號放到牌組下方, 將偶數號移除, 此時牌組變成了2^m 張, 而最上方的1號牌是由原來的第 2L+1 個位置移來的. ■



我們發現這問題叫作Josephus problem , 而在文獻[1]中作者使用了遞迴關係求出解答. 我們也把這個遞迴關係列出如下:

令 J(n)=有n張牌時最後移除的號碼, 則有以下關係:

$$J(1) = 1;\ J(2n) = 2J(n)\text{- } 1, \text{當 } n \geq 1;\ J(2n + 1) = 2J(n) + 1, \text{當 } n \geq 1 .$$

利用這些關係, 文獻[1] 得到了 J($2^m + L$)= 2L+1, $0 \leq L < 2^m$.

令[y]=不大於y的最大整數, 此公式可以寫成

$$\text{J(n)} = 2\left(\text{n} - 2^{[\log_2 n]}\right) + 1 = 2\text{n} + 1 - 2^{[\log_2 n]+1}$$

在文獻[1]中也說明了這樣的移動過程可以想成: 將數字由1~2n順時針排在圓周上, 留下第1張,刪去第2張,

重複此過程. 我們將上述”留下第1張,去掉第2張”的過程稱為”留1去1”. 以下我們將討論更一般的規則.

定義1: 已知有n張牌.

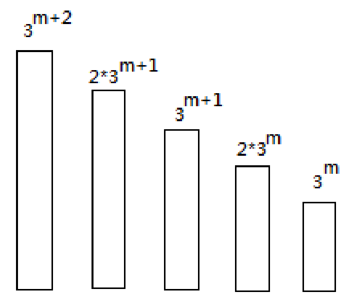
(1) 給定正整數L, “留1去L”的規則為: 留下第1張,去掉第2,3,…L+1張, 重複此過程.
令$J_{1,L}$(n)=在此規則下,最後移除的號碼.

(2) 一般來說, 給定正整數L, α, β, “留 α 去 β” 的規則為: 留下1,2,…, α 張,去掉$\alpha+1,\ldots,\alpha+\beta$張, 重複過程.
令 $J_{\alpha,\beta}(n)$=在此規則下,最後移除的號碼.

現在$J_{1,L}(n)$ 的公式如 定理1, 2,3 所述 :

定理1: 設m是任意非負整數, 則
$$\begin{cases} J_{1,2}(3^m)=J_{1,2}(2\times 3^m)=1 \ldots (1) \\ J_{1,2}(3^m+2k)=1+3k,\ \text{對所有 } 0\le k<3^m \ldots (2) \\ J_{1,2}(2\times 3^m+2k)=1+3k,\ \text{對所有 } 0\le k<2\times 3^m \ldots (3) \end{cases}$$

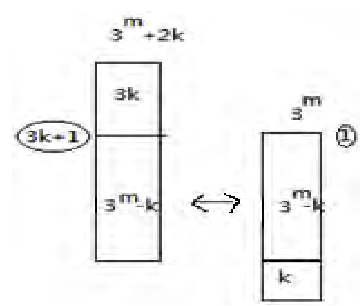
我們用右圖說明這個公式: 第(1)式代表右圖中的5個數$3^m, 2\times 3^m$, …,3^{m+2} 其 $J_{1,2}$ 值均為1. 第(2)式可得到$3^m\sim 3^{m+1}$ 之間所有奇數的 $J_{1,2}$值. 第(3)式可得到$2\times 3^m\sim 2\times 3^{m+1}$ 之間所有偶數的 $J_{1,2}$值. 當 m=0,1,2,… 時可以得到所有正整數n的 $J_{1,2}(n)$值.



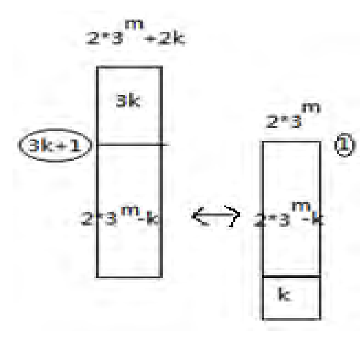
我們證明的想法主要還是一開始用到的想法: ”遞迴關係”+”逆推” 如下,

證明(1): 按照規則, 很明顯的 $J_{1,2}(3^m)=1$. 如果一開始有2×3^m個牌成一圈: 1,2,…, 2×3^m. 則操作一圈後剩下$2\times 3^{m-1}$個, 號碼為 1,4,7,10,…, $2\times 3^m-2$, 每個數都是 3k-2的形式, 因此我們得到關係: $J_{1,2}(2\times 3^m)=3\times J_{1,2}(2\times 3^{m-1})-2$. 容易驗證 $J_{1,2}(2)=1$, 由數學歸納法, 對任意非負整數m, $J_{1,2}(2\times 3^m)=1$.

證明(2):已知 $J_{1,2}(3^m)=1$, 我們想研究, 當個數從3^m 增加到 3^m+2k 時, 第一張會跑到新牌堆中的第幾張, 而那個號碼就是最後移除的號碼. 我們從 3^m+2k 張的頂部移除 3k 張, 因此下方剩下3^m-k 張. 再把其中的 k 張除以3餘1的數 (1,4,7,….) 經由操作移到牌堆下方, 此時牌堆有$3^m-k+k=3^m$ 張, 而原來的第 1張牌位在新牌堆的第 3k+1 張,得證. 右圖為操作示意圖:



證明(3): 已知 $J_{1,2}(2\times 3^m)=1$, 我們想研究, 當個數從2×3^m 增加到 $2\times 3^m+2k$ 時, 第一張會跑到新牌堆中的第幾張, 而那個號碼就是最後移除的號碼. 我們從 $2\times 3^m+2k$ 張的頂部移除 3k 張, 因此下方剩下$2\times 3^m-k$ 張. 再把其中的 k 張除以3餘1的數 (1,4,7,….) 經由操作移到牌堆下方, 此時牌堆有$2\times 3^m-k+k=2\times 3^m$ 張, 而原來的第 1張牌位在新牌堆的第 3k+1 張,得證. 右圖為操作示意圖: ■



將上述 ”留1去2” 的規則改成另外2種 “留1去2” 的規則如下: (A) 去掉1,2,張留下第3張, 不斷重複; 或是 (B) 去掉1,3,張留下第2張, 不斷重複; 並令 $J_{1,2,A}(n), J_{1,2,B}(n)$ 分別代表有n張牌時, 按照規則A或B 移到最後剩下的號碼. 則 $J_{1,2,A}, J_{1,2,B}$ 與上述 $J_{1,2}$ 有如下關係, 因而可以由定理2求出 $J_{1,2,A}(n)$, $J_{1,2,B}(n)$.

引理1: (A) $J_{1,2,A}(n) = J_{1,2}(n-2) + 2, n \geq 3$ (B) $J_{1,2,B}(n) = J_{1,2}(n-1) + 1, n \geq 2$

證明: (A) 將數字 1,2,3,4,…,n 順時針依序排在圓周上, 則上述過程相當於在圓周上的操作. 按照規則先刪去1,2, 接著從 3,4,5,6,…n開始, 留下第一個(3), 刪除第2,3個 (4,5), 不斷重複. 由於3~n有 n-2個 , 因此最後刪除數字為這 n-2 個數字, 按照 $J_{1,2}$ 的規則刪到最後所剩數字再加2 (因為從3開始數). 因此

$$J_{1,2,A}(n) = J_{1,2}(n-2) + 2.$$

(B) 按規則先刪去1, 接著從2,3,4,…n開始, 留下第一個(2), 刪除第2,3個 (3,4), 不斷重複. 由於2~n有 n-1 個 , 因此最後刪除數字為這 n-1 個數字, 按照 $J_{1,2}$ 的規則刪到最後所剩數字再加1 (因為從2開始數). 因此 $J_{1,2,B}(n) = J_{1,2}(n-1) + 1.$ ■

<附註>: 以後討論 ”留1去2”,…,”留1去L” 等都是指 “留下第1張”. 至於留下第2張, 留下第3張,…的公式. 易由”留下第1張”的公式+引理1的推廣去得到, 因此當討論”留1去L”的公式, 只需討論”留下第1張” 的公式.

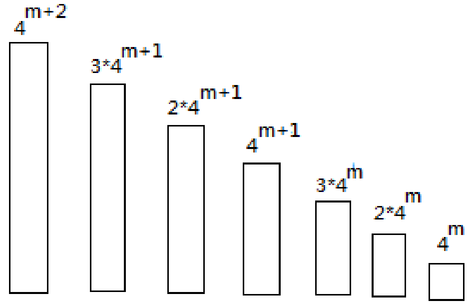
我們繼續試試 ”留1去3”的情況, 令$J_{1,3}(n)$ =操作n張牌,最後剩下的牌號碼.

定理2: 設m是任意非負整數, 則
$$\begin{cases} J_{1,3}(4^m) = J_{1,3}(2\times 4^m) = J_{1,3}(3\times 4^m) = 1 \ldots (1) \\ J_{1,3}(4^m + 3k) = 1 + 4k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < 4^m \ldots (2) \\ J_{1,3}(2\times 4^m + 3k) = 1 + 4k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < 2\times 4^m \ldots (3) \\ J_{1,3}(3\times 4^m + 3k) = 1 + 4k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < 3\times 4^m \ldots (4) \end{cases}$$

更一般的, 給定正整數L, 令$J_{1,L}(n)$ =”留1去L”操作, 最後剩下的牌號碼.

定理3: 設m是任意非負整數, 則
$$\begin{cases} J_{1,L}((L+1)^m) = J_{1,L}(2\times(L+1)^m) = \cdots = J_{1,L}(L\times(L+1)^m) = 1 \ldots (1) \\ J_{1,L}((L+1)^m + Lk) = 1 + (L+1)k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < (L+1)^m \ldots (2) \\ J_{1,L}(2\times(L+1)^m + Lk) = 1 + (L+1)k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < 2\times(L+1)^m \ldots (3), \ldots, \\ J_{1,L}(L\times(L+1)^m + Lk) = 1 + (L+1)k,\ \text{對所有 } 0 \leq k < L\times(L+1)^m \ldots (L+1) \end{cases}$$

我們用右圖說明定理2的公式: 第(1)式代表右圖中的7個數4^m~4^{m+2} 其 $J_{1,3}$ 值均為1.



第(2)式可得到從 4^m開始到 4^{m+1}, 公差為3的所有數的 $J_{1,3}$值.

第(3)式可得到2×4^m開始到$2\times 4^{m+1}$, 公差為3的所有數的 $J_{1,3}$值. 第(4)式可得到3×4^m開始到 $3\times 4^{m+1}$, 公差為3的所有數的 $J_{1,3}$值. 當 m=0,1,2,…時可以得到所有正整數n的 $J_{1,3}(n)$值.

證明(1): 按照規則, 很明顯的 $J_{1,3}(4^m)=1$. 如果一開始有2×4^m個牌成一圈: 1,2,…, 2×4^m. 則操作一圈

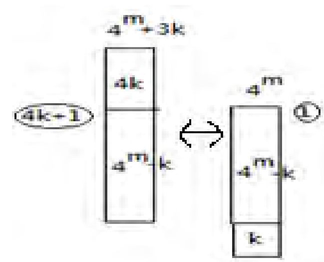
後剩下$2\times 4^{m-1}$個, 號碼為 1,5,9,…, $2\times 4^m-3$, 每個數都是 4k-3的形式, 因此我們得到關係:

$J_{1,3}(2\times 4^m)=4\times J_{1,3}(2\times 4^{m-1})-3$. 容易驗證 $J_{1,3}(2)=1$,因此由數學歸納法

$J_{1,3}(2\times 4^m)=4\times\ 1-3=1$成立. 同理可證$J_{1,3}(3\times 4^m)=1$

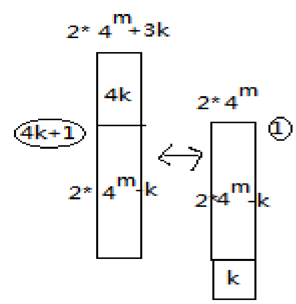
證明(2): 已知 $J_{1,3}(4^m)=1$, 我們想研究, 當個數從4^m 增加到 4^m+3k 時, 第一張會跑到新牌堆中的第幾張, 而那個號碼就是最後移除的號碼. 我們從 4^m+3k 張的頂部移除 4k 張, 因此下方剩下4^m-k 張. 再把其中的 k 張除以4餘1的數 (1,5,9,….) 經由操作移到牌堆下方, 此時牌堆有$4^m-k\ +k=4^m$ 張,

而原來的第 1張牌位在新牌堆的第 4k+1 張,得證. 右圖為操作示意圖:



證明(3): 已知 $J_{1,3}(2\times 4^m)=1$, 我們想研究, 當個數從2×4^m 增加到 $2\times 4^m+3k$ 時, 第一張會跑到新牌堆中的第幾張, 而那個號碼就是最後移除的號碼. 我們從 $2\times 4^m+3k$ 張的頂部移除 4k 張, 因此下方剩下$2\times 4^m-k$ 張. 再把其中的 k 張除以4餘1的數 (1,5,9,….) 經由操作移到牌堆下方, 此時牌堆有$2\times 4^m-k\ +k=2\times 4^m$ 張,

而原來的第 1張牌位在新牌堆的第 4k+1 張,得證. 右圖為操作示意圖:



證明(4): 將上述2×4^m 改成3×4^m即得證.
定理3的證明則是完全仿照定理2. ■

我們接下來想要知道, 對任意1~n之間的正整數x, 第x次操作被移除的號碼為何. 仿照上面令 J(n,x)= 有n張牌, 在”留1去1”的規則下, 第x次操作被移除的號碼.

我們想要仿照文獻[1], 利用J(n,x)的遞迴關係推出J(n,x)的公式, 下面將敘述這些結果.

定理4: 對n張牌進行"留1去1"的操作, 設x是1~n之間的正整數, 則第x次操作移除的號碼為

$$J(n,x)=\begin{cases}(1)2x\,,\ \ x\le[n/2]\\(2)\ \ 2n+1-(2n-2x+1\,).\left(2^{\left[\log_2\frac{n}{2n-2x+1}\right]+1}\right),\left[\frac{n}{2}\right]<\ x\le n\end{cases}$$

<注意>:(1)可求出從1開始數到n, 被去掉的號碼. (2) 可求出從n的下1個開始數到結束,被去掉的號碼.

舉例來說, 當 x=n 時, 2n-2x+1=1, 因此J(n)=J(n,n)= $2n+1-2^{[\log_2 n]+1}$, 與文獻[1]公式相符.

我們利用實際操作得出一些J(n,x)如下表, 其中橫的列數為 n=1,2,3,…; 直的行數為 x=1,2,….,n.

n	J(n,x)																
1	1																
2	2	1															
3	2	1	3														
4	2	4	3	1													
5	2	4	1	5	3												
6	2	4	6	3	1	5											
7	2	4	6	1	5	3	7										
8	2	4	6	8	3	7	5	1									
9	2	4	6	8	1	5	9	7	3								
10	2	4	6	8	10	3	7	1	9	5							
11	2	4	6	8	10	1	5	9	3	11	7						
12	2	4	6	8	10	12	3	7	11	5	1	9					
13	2	4	6	8	10	12	1	5	9	13	7	3	11				
14	2	4	6	8	10	12	14	3	7	11	1	9	5	13			
15	2	4	6	8	10	12	14	1	5	9	13	3	11	7	15		
16	2	4	6	8	10	12	14	16	3	7	11	15	5	13	9	1	
17	2	4	6	8	10	12	14	16	1	5	9	13	17	7	15	11	3

<觀察>利用上表我們觀察到一些重要現象:

(1) 當 x=1,2,…, $[\frac{n}{2}]$, J(n,x)=2,4,…,2*$[\frac{n}{2}]$; 因此每一列的前 $[\frac{n}{2}]$ 個J(n,x)恰為偶數 2,4,…

(2) 在斜率 -1 的對角線上相鄰的J(n,x)差2 (但1的相鄰數除外)

(3) 每一條對角線上最左上角的1 的位置必為: J(m, $\frac{m+1}{2}$)=1, 其中m=1,3,5,…為任一奇數

(4) 設J(k,x)=1, 則沿著對角線往右下, 下一個1出現在第 2k 列 (對所有k成立)

第(4)點說明如下:
設J(k,x)=1. 設下一個1出現在第 k+h 列, 即J(k+h,*)=1. 由(2),J(k+h,*)=1+2h (除以k+h 的餘數).因此 1+2h=k+h+1, h=k. 因此下1個1出現在 k+h=2k 列.

第(2)點說明如下:
引理2: 設 2 ≤ x ≤ n, 則

J(n,1)=2; J(n,x)= $\begin{cases}1,\ 若\ J(n-1,x-1)=n-1\\J(n-1,x-1)+2,\ 若\,J(n-1,x-1)\le n-2\end{cases}$

(用同餘的符號來說, 就是 J(n,x) ≡ $J(n-1,x-1)+2\ (mod\ n)$)

證明引理2: 由操作過程第1次必移除2號, 得證第一式. 現在牌堆由上而下編號為3,4,…,n,1共n-1張. 設 $J(n-1,x-1)=g$, 則編號1,2,…,n-1 的牌堆在第 x-1次去掉編號 g , 因此編號3,4,…,n,1的牌堆在第 x-1次去掉編號 g+2 (當 g≤ $n-2$) 或去掉編號1 (當 g= $n-1$). 加上第1次移除總共 x次, 因此

$$J(n,x)=\begin{cases} 1, \text{ 若 } J(n-1,x-1)=n-1 \\ J(n-1,x-1)+2, \text{ 若 } J(n-1,x-1)\le n-2 \end{cases}. \quad \blacksquare$$

證明定理4:

當 $x \le [n/2]$ 時按照操作, J(n,x)=2x. 假設$\left[\frac{n}{2}\right] < x \le n.$ 首先尋找 J(n,x)所在斜率 -1 的對角線上最左上角的1 的位置J(m, $\frac{m+1}{2}$). m必定滿足: n-m = x- $\frac{m+1}{2}$, 解得m=2n-2x+1. 由觀察(4), 接下來的1出現的列數為 2m, 2^2m, 2^3m,… . 解不等式$2^f.m \le n$ 得到最大整數解為f = $[\log_2 \frac{n}{m}]$. 由上述構造得知:

(1) J($2^f.m,*$) = 1 (2)在對角線上, J($2^f.m,*$) 和J(n,x)之間沒有1出現

由觀察(2)得知, J(n,x)=J($2^f.m,*$) + $2\times(\mathrm{n}-2^f.m) = 2\mathrm{n}+1-2^{f+1}.m$, 將 m=2n-2x+1, f = $[\log_2 \frac{n}{m}]$ 代入即為定理4所求. ■

我們要把”留1去1” 的 J(n,x) 公式推廣到 ”留1去L”的公式. 首先定義如下: 設有n張牌, 給定任兩個正整數 $1 \le \mathrm{L}, \mathrm{x} \le \mathrm{n}$. 則在”留1去L”的規則下, 第x次被去掉的號碼定義為 $J_{1,L}(n,x)$.

定理5: 留1去2 的 $J_{1,2}(n,x)$公式如下 :

(1) 當$1 \le \mathrm{x} \le \frac{2n}{3}$, 令x=2k+1或2k+2(奇數或偶數), 則

$$\begin{cases} J_{1,2}(n,2k+1)=3k+2, 0\le k\le \frac{n-2}{3} \\ J_{1,2}(n,2k+2)=3k+3, 0\le k\le \frac{n-3}{3} \end{cases}$$

(2) 當 $\ge \frac{2n+1}{3}$, 令$m=\begin{cases} 3(n-x)+1, \text{若x為奇數} \\ 3(n-x)+2, \text{若x為偶數} \end{cases}$, 則 $J_{1,2}(n,x)=\frac{1}{2}\times\left(3n+2-3^{\left[\log_3\frac{n}{m}\right]+1}\times m\right)$

下一頁我們列出一些$J_{1,2}(n,x)$的數值以便觀察規律.

n	$J_{1,2}(n,x)$																						
1	1																						
2	2	1																					
3	2	3	1																				
4	2	3	1	4																			
5	2	3	5	$\boxed{1}$	4																		
6	2	3	5	6	4	1																	
7	2	3	5	6	1	$\boxed{4}$	7																
8	2	3	5	6	8	1	7	4															
9	2	3	5	6	8	9	4	$\boxed{7}$	1														
10	2	3	5	6	8	9	1	4	10	7													
11	2	3	5	6	8	9	11	1	7	$\boxed{10}$	4												
12	2	3	5	6	8	9	11	12	4	7	1	10											
13	2	3	5	6	8	9	11	12	1	4	10	$\boxed{13}$	7										
14	2	3	5	6	8	9	11	12	14	1	7	10	4	13									
15	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	4	7	13	$\boxed{1}$	10								
16	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	1	4	10	13	7	16							
17	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	1	7	10	16	$\boxed{4}$	13						
18	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	4	7	13	16	10	1					
19	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	1	4	10	13	19	$\boxed{7}$	16				
20	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	1	7	10	16	19	13	4			
21	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	4	7	13	16	1	$\boxed{10}$	19		
22	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	1	4	10	13	19	22	16	7	
23	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	1	7	10	16	19	4	$\boxed{13}$	22
24	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	4	7	13	16	22	1	19
25	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	1	4	10	13	19	22	7
26	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	26	1	7	10	16	19	25
27	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	26	27	4	7	13	16	22
28	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	26	27	1	4	10	13	19
29	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23	24	26	27	29	1	7	10	16

左表為 n=1~29, x=1~23 的 $J_{1,2}$ 數值

<注意>:公式(1)只是找出 2,3,5,6,8,9,11,12,14,15,…的規律. 也就是從1開始數到n, 被去掉的號碼,
公式(2) 可求出從n的下一個開始數到結束,被去掉的號碼.

<觀察>利用上表我們觀察到一些重要現象:

(1) 每一列的前 $[\frac{2n}{3}]$ 個$J_{1,2}$ 數值必為數列2,3,5,6,8,9,11,12,14,15,…的前幾項.

(2) 在斜率 -1 的對角線上, **每2個一數**的$J_{1,2}$ (n,x)差3 (但是遇到1除外)

(3) 每一條斜率 -1的對角線上最左上角的2個1 的位置必為: $J_{1,2}(3k+1,\ 2k+1)= J_{1,2}(3k+2,\ 2k+2)=1$,
其中 k=0,1,2,….

(4) 若第 k 列出現1, 則沿著對角線往右下, **每2個一數,** 下一個1出現在第 3k 列

<舉例>:以最上方對角線來說, $J_{1,2}(1,1)=1$, 以Ⓙ代表每2個一數的$J_{1,2}$ 值, 則在第1,3,9,27列,…恰都是1.
又如$J_{1,2}(2,2)=1$, 以$\boxed{J}$代表每2個一數的$J_{1,2}$ 值, 則在第2,6,18,54列,…恰都是1, 因此滿足(4)的規律.
另一方面來說, 從最上方對角線開始, "第1個1"出現的位置依序為(n,x)=(1,1),(4,3),(7,5),(10,7),(13,9),…;
而"第2個1"出現的位置依序為(n,x)=(2,2),(5,4),(8,6),(11,8),(14,10),… 因此滿足(3)的規律.

第(4)點說明如下:
設$J_{1,2}(k,x)=1$. 設下一個1出現在第 k+h 列, 即$J_{1,2}(k+h,*)=1$. 由(2), $J_{1,2}(k+h,*)=1+\frac{3}{2}h$ (除以k+h 的餘數).
因此 $1+\frac{3}{2}h= k+h+1$, h=2k. 因此下1個1出現在 k+h=3k 列.

第(2)點說明如下:
引理3: $J_{1,2}(n,1)=2$, $J_{1,2}(n,2)=3$. 若 $3 \le x \le n$, 則

$$J_{1,2}(n,x)=\begin{cases} 1, \text{ 若} J_{1,2}(n-2,x-2)=n-2 \\ J_{1,2}(n-2,x-2)+3, \text{ 若} J_{1,2}(n-2,x-2)\le n-3 \end{cases}$$

(用同餘的符號來說, 就是 $J_{1,2}(n,x) \equiv J_{1,2}(n-2,x-2)+3 \pmod{n}$)

證明引理3: 由操作過程第1,2次必移除2,3號, 得證第一式. 現在牌堆由上而下編號為4,5…,n,1共n-2張. 設 $J_{1,2}(n-2,x-2)=g$, 則編號1,2,…,n-2 的牌堆在第 x-2次去掉編號 g , 因此編號4,…,n,1的牌堆在第

x-2次去掉編號 g+3 (當 $g\le n-3$) 或去掉編號1 (當 $g= n-2$). 加上前2次移除總共 x次, 因此

$$J_{1,2}(n,x)=\begin{cases} 1, \text{ 若 } J_{1,2}(n-2,x-2)=n-2 \\ J_{1,2}(n-2,x-2)+3, \text{ 若} J_{1,2}(n-2,x-2)\le n-3 \end{cases}$$, 故得證. ■

證明定理5:
(1) 由於每3個去掉2個, 因此當$1 \le x \le \frac{2n}{3}$ 時一定正在執行從1數到n 之間的操作. 此時去掉的數字形成規律的數列 2,3,5,6,8,9,11,12,14,15,…因此可求得(1)的公式.

(2) 當 $x \ge \frac{2n+1}{3}$ 時.由上面**<觀察>** (3), 設$J_{1,2}(n,x)$所在斜率 -1 的對角線上最左上角的2個1 的位置為 $J_{1,2}(3k+1,2k+1)= J_{1,2}(3k+2,2k+2)=1$. 由斜率 -1得到 n-(3k+1)=x-(2k+1), 因此k=n-x. 容易驗證下列

關係:$\begin{cases} n \equiv 3(n-x)+1 \pmod{2}, \text{若x為奇數} \\ n \equiv 3(n-x)+2 \pmod{2}, \text{若x為偶數} \end{cases}$

令$m=\begin{cases} 3(n-x)+1, \text{若x為奇數} \\ 3(n-x)+2, \text{若x為偶數} \end{cases}$, 則m 就是最左上角的那2個1所在的列數, 且m 與 n 相差2的倍數.

由觀察(4), 接下來的1出現的列數為 3m, 3^2m, 3^3m,… . 解不等式$3^f.m \le n$ 得到最大整數解為
$f = [\log_3 \frac{n}{m}]$. 由上述構造得知:

(1) $J_{1,2}(3^f.m, *)=1$ (2)在斜率 -1的對角線上, $J_{1,2}(3^f.m, *)$ 和$J_{1,2}(n,x)$之間沒有1出現

由觀察(2)得知, 從$3^f.m$ 列開始數, 每多2列, $J_{1,2}$ 數值多3. 因此

$J_{1,2}$ (n,x)= $J_{1,2}(3^f.m,*)+\frac{3}{2}\times(\mathrm{n}-3^f.m)=\frac{1}{2}\times(3\mathrm{n}+2-3^{f+1}.m)$,

將 m, f = $[\log_3\frac{n}{m}]$ 代入得證定理5. ■

繼續考慮L=3的情況得到"留1去3" 的公式:

定理6: $J_{1,3}(n,x)$的值如下:

(1) 當$1\leq \mathrm{x}\leq\frac{3n}{4}$, 令x=3k+1或3k+2或3k+3, 則

$$\begin{cases} J_{1,3}(n,3k+1)=4k+2, 0\leq k\leq\frac{n-2}{4} \\ J_{1,3}(n,3k+2)=4k+3, 0\leq k\leq\frac{n-3}{4} \\ J_{1,3}(n,3k+3)=4k+4, 0\leq k\leq\frac{n-4}{4} \end{cases}$$

(2)當$x\geq\frac{3n+1}{4}$, 令$m=\begin{cases} 4(n-x)+1,\ 若\ x\equiv1(mod\ 3) \\ 4(n-x)+2,\ 若\ x\equiv2(mod\ 3) \\ 4(n-x)+3,\ 若\ x\equiv3(mod\ 3) \end{cases}$, 則$J_{1,3}(n,x)=\frac{1}{3}\times\left(4n+3-4^{\left[\log_4\frac{n}{m}\right]+1}\times m\right)$

n	$J_{1,3}$(n,x)																						
1	1																						
2	2	$\boxed{1}$																					
3	2	3	1																				
4	2	3	4	1																			
5	2	3	4	1	$\boxed{5}$																		
6	2	3	4	6	$\boxed{1}$	5																	
7	2	3	4	6	7	1	5																
8	2	3	4	6	7	8	5	$\boxed{1}$															
9	2	3	4	6	7	8	1	5	9														
10	2	3	4	6	7	8	10	$\boxed{1}$	5	9													
11	2	3	4	6	7	8	10	11	1	9	$\boxed{5}$												
12	2	3	4	6	6	8	10	11	12	5	9	1											
13	2	3	4	6	7	8	10	11	12	1	5	9	13										
14	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	$\boxed{1}$	5	13	$\boxed{9}$									
15	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	1	9	13	5								
16	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	5	9	13	1							
17	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	1	5	9	17	$\boxed{13}$						
18	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	1	5	13	17	9					
19	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	1	9	13	17	5				
20	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	5	9	13	1	$\boxed{17}$			
21	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	1	5	9	17	21	13		
22	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	1	5	13	17	21	9	
23	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	1	9	13	17	5	$\boxed{21}$

左表為 n=1~29, x=1~23 的 $J_{1,3}$ 數值

24	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	5	9	13	21	1
25	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	1	5	9	17	21
26	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	26	1	5	13	17
27	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	26	27	1	9	13
28	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	26	27	30	5	9
29	2	3	4	6	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	24	26	27	30	1	5

<注意>:公式(1)只是找出 2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16…的規律. 也就是從1開始數到n, 被去掉的號碼,

公式(2) 可求出從n的下一個開始數到結束,被去掉的號碼.

<觀察>利用上表我們觀察到一些重要現象:

(1) 每一列的前 $[\frac{3n}{4}]$ 個$J_{1,3}$ 數值必為數列 2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16…的前幾項.

(2) 在斜率 -1 的對角線上, **每3個一數**的$J_{1,3}$ (n,x)差4 (但是遇到1除外)

(3) 每一條斜率 -1的對角線上最左上角的3個1 的位置必為: $J_{1,3}$(4k+1,3k+1)= $J_{1,3}$(4k+2, 3k+2)= $J_{1,3}$(4k+3, 3k+3)=1, 其中 k=0,1,2,….

(4) 若第 k 列出現1, 則沿著對角線往右下, **每3個一數,** 下一個1出現在第 4k 列

<舉例>:以最上方對角線來說, $J_{1,3}$(1,1)=1, 以ⓙ代表每3個一數的$J_{1,3}$ 值, 則在第1,4,16,64列,…恰都是1.

又如$J_{1,3}$(2,2)=1, 以$\boxed{J}$代表每3個一數的$J_{1,2}$ 值會在第2,8,32,128列,…恰都是1, 因此滿足(4)的規律.

另一方面來說, 從最上方對角線開始, "第1個1"出現的位置依序為(n,x)=(1,1),(5,4),(9,7),(13,10),…; 而"第2個1"出現的位置依序為(n,x)=(2,2),(6,5),(10,8),(14,11),…因此滿足(3)的規律.

第(4)點說明如下:

設$J_{1,3}$(k,x)=1. 設下一個1出現在第 k+h 列, 即$J_{1,3}$(k+h,*)=1. 由(2), $J_{1,3}$(k+h,*)=1+$\frac{4}{3}$h (除以k+h 的餘數).

因此 1+ $\frac{4}{3}$h= k+h+1, h=3k. 因此下1個1出現在 k+h=4k 列.

第(2)點說明如下:

引理4: $J_{1,3}$(n,1)=2, $J_{1,3}$(n,2)=3, $J_{1,3}$(n,3)=4. 若 $4 \le x \le n$, 則

$$J_{1,3}(n,x)=\begin{cases} 1, \text{ 若 } J_{1,3}(n-3,x-3)=n-3 \\ J_{1,3}(n-3,x-3)+4 \text{ 若 } J_{1,3}(n-3,x-3)\le n-4 \end{cases}$$

(用同餘的符號來說, 就是 $J_{1,3}(n,x) \equiv J_{1,3}(n-3,x-3)+4 \ (mod\ n)$)

證明引理4: 由操作過程第1,2,3次必移除2,3,4號, 得證第一式. 現在牌堆由上而下編號為5,6…,n,1共 n- 3張. 設$J_{1,3}(n-3,x-3)=g$, 則編號1,2,…,n-3 的牌堆在第 x-3次去掉編號 g , 因此編號5,6,…,n,1的牌堆在第 x-3次去掉編號 g+4 (當 g≤ $n-4$) 或去掉編號1 (當 g= $n-3$). 加上前3次移除總共 x次, 因此

$J_{1,3}$ (n,x)= $\begin{cases} 1,\ 若\ J_{1,3}\ (n-3, x-3) = n-3 \\ J_{1,3}(n-3, x-3)+4,\ 若\ J_{1,3}\ (n-3, x-3) \le n-4 \end{cases}$, 故得證. ■

證明定理6:

(1) 由於每4個去掉3個, 因此當$1 \le x \le \frac{3n}{4}$時一定正在執行從1數到n 之間的操作. 此時去掉的數字形成規律的數列2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16…因此可求得(1)的公式.

(2) 當 $x \ge \frac{3n+1}{4}$ 時.由上面<**觀察**> (3), 設$J_{1,3}$ (n,x)所在斜率 -1 的對角線上最左上角的3個1 的位置為 $J_{1,3}$ (4k+1,3k+1)= $J_{1,3}$ (4k+2,3k+2)= $J_{1,3}$ (4k+3,3k+3)=1. 由斜率 -1得到 n-(4k+1)=x-(3k+1), 因此k=n-x.

容易驗證下列關係:

$$\begin{cases} n \equiv 4(n-x)+1\ (mod\ 3), 若 x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ n \equiv 4(n-x)+2\ (mod\ 3), 若 x \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ n \equiv 4(n-x)+3\ (mod\ 3), 若 x \equiv 3 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

令$m = \begin{cases} 4(n-x)+1, 若 x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 4(n-x)+2, 若 x \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 4(n-x)+3, 若 x \equiv 3 (\text{mod } 3) \end{cases}$, 則m 就是最左上角的那3個1所在的列數, 且m 與 n 差3的倍數.

由觀察(4), 接下來的1出現的列數為 4m, 4^2m, 4^3m,… . 解不等式$4^f . m \le n$ 得到最大整數解為 $f = [\log_4 \frac{n}{m}]$. 由上述構造得知:

(1) $J_{1,3}$ $(4^f . m,\ *) = 1$　(2)在斜率 -1的對角線上, $J_{1,3}$ $(4^f . m, *)$ 和$J_{1,3}$ (n,x)之間沒有1出現

由觀察(2)得知, 從$4^f . m$ 列開始數, 每多3列, $J_{1,3}$ 數值多4. 因此

$J_{1,3}$ (n,x)=$J_{1,3}(4^f . m,*) + \frac{4}{3} \times (\text{n} - 4^f . m) = \frac{1}{3} \times (4\text{n} + 3 - 4^{f+1} . m)$,

將 m, $f = [\log_4 \frac{n}{m}]$ 代入得證定理6. ■

仿照定理4,5,6,我們推出$J_{1,L}$ (n,x)的公式如下:

定理7: $J_{1,L}(n,x)$的值如下:

(1) 當$1 \le x \le \frac{Ln}{(L+1)}$, 令x=Lk+1, Lk+2,…,Lk+L, 則

$$\begin{cases} J_{1,L}(n, Lk+1) = (L+1)k+2, 0 \le k \le \frac{n-2}{L+1} \ldots (1) \\ J_{1,L}(n, Lk+2) = (L+1)k+3, 0 \le k \le \frac{n-3}{L+1} \ldots (2), \ldots \\ J_{1,L}(n, Lk+L) = (L+1)k+(L+1), 0 \le k \le \frac{n-(L+1)}{(L+1)} \ldots (L) \end{cases}$$

(2)當$x \geq \frac{Ln+1}{L+1}$, 令$m = \begin{cases} (L+1)(n-x)+1, \text{ 若 } x \equiv 1(mod\ L) \\ (L+1)(n-x)+2, \text{ 若 } x \equiv 2(mod\ L), \ldots, \\ (L+1)(n-x)+L, \text{ 若 } x \equiv L(mod\ L) \end{cases}$

則 $J_{1,L}(n,x) = \frac{1}{L} \times \left((L+1)n + L - (L+1)^{\left[\log_{(L+1)}\frac{n}{m}\right]+1} \times m\right)$

<注意>: 因為$\mathrm{m} \equiv \mathrm{n} - \mathrm{x} + \mathrm{x} \equiv \mathrm{n}(\mathrm{mod}\ \mathrm{L})$, 所以
$(L+1)n + L - (L+1)^{\left[\log_{(L+1)}\frac{n}{m}\right]+1} \times m \equiv n - m \equiv 0\ (mod\ L)$, 因此 $J_{1,L}(n,x)$ 是正整數.

證明: 只要利用之前的**<觀察>**(1)~(4)即可得證, 一般的敘述如下:

(1) 每一列的前 $[\frac{Ln}{L+1}]$ 個$J_{1,L}$ 數值必為數列 2,3,…,L+1, L+3,…,2L+2,2L+4,.的前幾項.

(2) 在斜率 -1 的對角線上, **每L個一數**的$J_{1,L}$ (n,x)差 L+1 (但是遇到1除外)

(3) 每一條斜率 -1的對角線上最左上角的 L 個1 的位置必為:

$J_{1,L}$ ((L+1)k+1,Lk+1)= $J_{1,L}$ ((L+1)k+2, Lk+2)= …=$J_{1,L}$ ((L+1)k+L, Lk+L)=1, 其中 k=0,1,2,….

(4) 若第 k 列出現1, 則沿著對角線往右下, **每L個一數,** 下一個1出現在第 (L+1)k 列 ■

接下來我們討論定理4,5,6,7的應用, 如下所述.

定理 4 附表

n	J(n,x)																
1	1																
2	2	1															
3	2	1	3														
4	2	4	3	1													
5	2	4	1	5	3												
6	2	4	6	3	1	5											
7	2	4	6	1	5	3	7										
8	2	4	6	8	3	7	5	1									
9	2	4	6	8	1	5	9	7	3								
10	2	4	6	8	10	3	7	1	9	5							
11	2	4	6	8	10	1	5	9	3	11	7						
12	2	4	6	8	10	12	3	7	11	5	1	9					
13	2	4	6	8	10	12	1	5	9	13	7	3	11				
14	2	4	6	8	10	12	14	3	7	11	1	9	5	13			
15	2	4	6	8	10	12	14	1	5	9	13	3	11	7	15		
16	2	4	6	8	10	12	14	16	3	7	11	15	5	13	9	1	
17	2	4	6	8	10	12	14	16	1	5	9	13	17	7	15	11	3

我們稱一次 “Josephus 操作” 是把 n 張牌經由 Joseohus 問題的操作 (留 1 去 1) n 次後全放到桌上, 再依照置順序由上而下組成一個新的牌堆, 我們想要找出 Josephus 操作之後位置不變的號碼 x , 也就是, J(n,x)=x 的解. 回顧定理 4 的表(如上), 我們發現, n ≤ 17 時, 1,3,4,7,7,10,10,15,16,17 是 J(n,x)=x 有解的情況 (7,7 代表 n=7 有兩個解 x). 我們接著證明下列定理.

定理 8: J(n,x)=x 有解的充分必要條件是存在非負整數 k 使得 $2^{k+2}-1$ 整除 2n+1. 此外, 對於固定的 n, 此種 k 的個數恰為 J(n,x)=x 解的個數.

舉例: 當 n=7 時, 只有 k=0 或 k=2 使得 $2^{k+2}-1$ 整除 2n+1=15, 因此在定理 4 附表中,J(7,x) = x 有兩解 x=5,7.

證明: 由定理 4, 因為 2x=x 無解, 只需解方程式$2n+1-(2n-2x+1).\left(2^{\left[\log_2\frac{n}{2n-2x+1}\right]+1}\right) = x$, 也就是

$$2n+1-x = (2n+1-2x).\left(2^{\left[\log_2 \frac{n}{2n-2x+1}\right]+1}\right) \ldots (*).$$

設$\left[\log_2 \frac{n}{2n-2x+1}\right] = k \geq 0$, 由上式解 x 得 $(2^{k+2}-1)x = (2^{k+2}-2)n + (2^{k+1}-1)$, 整理得

$$x = \frac{(2^{k+1}-1)\times(2n+1)}{2^{k+2}-1},$$

可以推得 $x \leq \frac{(2^{k+1}-0.5)\times(2n+1)}{2^{k+2}-1} = n + \frac{1}{2}$. 因此只要 x 是整數, 則 x 必定≤ n 而有意義. 那麼 x 何時為整數呢? 令(n,m) 代表 n 和 m 的最大公因數, 已知 (n,n+1)=1 對所有正整數 n. 因此 $(2^{k+2}-1, 2^{k+1}-1) =$

$= (2^{k+2}-1, 2*(2^{k+1}-1)) = (2^{k+2}-1, 2^{k+2}-2) = 1.$ 因此 x 是整數的充分必要條件是: $2^{k+2}-1$ 整除 2n+1.

此外, 對於固定的 n, 由式子 (*) 可以看出, 不同的 k 值解出不同的整數 x, 因此定理 8 得證. ■

定理 9: (1) $J_{1,2}(n,x)=x$ 有偶數解: $x \equiv 0 \pmod 2$ 的充分必要條件是存在非負整數 k 使得 $3^{k+2}-2$ 整除 3n+2.

(2) $J_{1,L}(n,x)=x$ 有解: $x \equiv 0 \pmod L$ 的充分必要條件是存在非負整數 k 使得 $(L+1)^{k+2}-L$ 整除(L+1)n+L.

證明: (1) 由定理 5 第一部分, 當$x \leq \frac{2n}{3}$ 時 $J_{1,2}(n,x)$=x 必無解, 只需考慮當$x \geq \frac{2n+1}{3}$ 時,

$J_{1,2}(n,x) = \frac{1}{2}\times\left(3n+2-3^{\left[\log_3 \frac{n}{m}\right]+1}\times m\right) = x$ 的解. 假設 x 是偶數, 則 m=3n-3x+2, 代入整理得

$$3n+2-2x = (3n+2-3x).\left(3^{\left[\log_3 \frac{n}{3n-3x+2}\right]+1}\right).$$

設$\left[\log_3 \frac{n}{3n-3x+2}\right] = k \geq 0$, 由上式解 x 得 $(3^{k+2}-2)x = (3^{k+2}-3)n + (2*3^{k+1}-2)$, 整理得

$$x = \frac{(3^{k+1}-1)\times(3n+2)}{3^{k+2}-2},$$

可以推得 $x \leq \frac{(3^{k+1}-1)\times(3n+2)}{3^{k+2}-3} = n + \frac{2}{3}$. 因此只要 x 是偶數, 則 x 必定≤ n 而有意義. 那麼 x 何時為偶數呢? 因為 $(3^{k+2}-2, 3^{k+1}-1) = (3^{k+2}-2, 3*(3^{k+1}-1)) = (3^{k+2}-2, 3^{k+2}-3) = 1.$ 因此 x 有偶數解的充分必要條件是: $3^{k+2}-2$ 整除 3n+2.

(2) 當$x \geq \frac{Ln+1}{L+1}$ 時, 若$x \equiv 0 (mod\ L)$, 由定理 7, $J_{1,L}(n,x) = \frac{1}{L}\times\left((L+1)n + L - (L+1)^{\left[\log_{(L+1)} \frac{n}{m}\right]+1}\times m\right)$, 其中 m=(L+1)(n-x)+L. 解 $\frac{1}{L}((L+1)n + L - (L+1)^{k+1}\times[(L+1)(n-x)+L]) = x$ 得到

$x = \frac{[(L+1)^{k+1}-1]\times[(L+1)n+L]}{(L+1)^{k+2}-L}$. 因為

$$((L+1)^{k+2}-L, (L+1)^{k+1}-1) = ((L+1)^{k+2}-L, (L+1)^{k+2}-(L+1)) = (Y, Y-1) = 1,$$

因此 x 有整數解滿足 $x \equiv 0 (mod\ L)$ 的充分必要條件是$(L+1)^{k+2}-L$ 整除(L+1)n+L. ■

對於任意正整數 n, α, β , 第 3 頁的定義 1 說明了”留α 去 β" 的操作 以及 $J_{\alpha,\beta}(n)$= 最後剩下的數字. 我們接下來要導出一個 特殊的遞迴關係 (迭代關係)用來計算 $J_{\alpha,\beta}(n)$. 我們可以把數字 1~n 順時鐘排成一圈數數, 數到 n 後再從頭開始數. 現在我們規定,

當報數到 n 後, 下一個報數以 n+1 代表, 再下 1 個以 n+2 代表, …,也就是報數一直增加.

舉例來說, $\alpha = 2, \beta = 3, n = 31$, 最後剩下 12 號如下: (留下 1,2, 去掉 3,4,5)

<第一輪> 1 2 ~~3 4 5~~ 6 7 ~~8 9 10~~ 11 12 ~~13 14 15~~ 16 17 ~~18 19 20~~ 21 22 ~~23 24 25~~ 26 27 ~~28 29 30~~ 31

<第 2 輪> 32 ~~33 34 35~~ 36 37 ~~38 39 40~~ 41 42 ~~43 44~~

<第 3 輪> ~~45~~ 46 47 ~~48 49~~

<第 4 輪> ~~50~~ 51

<第 5 輪> 52

<第 6 輪> ~~53~~

觀察 11→36→46 的規律如下: 已知 $\alpha + \beta = 5$.

(1) 11→36 本來應增加 31 (=n), 但是中間卻漏掉了 3,4,5,8,9,10 這 6 個位置. 注意 11= $(\alpha + \beta) * 2 + 1$, 6= 2* β. 因此總共增加了 31-6= n- 2 β

(2) 36→46 本來應增加 31 (=n), 但是中間卻漏掉了 13~15,18~20, 23~25,28~30,33~35,3~5,8~10 這 21 個位置. 注意 36= $(\alpha + \beta) * 7 + 1$, 21= 7 * β, 因此總共增加了 31-21= n- 7 β

(3) 46→50 本來應增加 31 (=n), 但是中間卻漏掉了 13~15,38~40,18~20, 23~25,28~30,43~45, 33~35,3~5,8~10 這 27 個位置. 注意 46= $(\alpha + \beta) * 9 + 1$, 27= 9 * β, 因此總共增加了 31-27 = n- 9 β

一般而言, 若某一輪有 1 個位置報數為 $(\alpha + \beta)k + r$, 其中 $1 \le r \le \alpha$, 則它在下一輪會留下, 而且報數會增加 n- βk

因此數字變化為: $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\mathbf{k} + \mathbf{r} \rightarrow (\alpha + \beta)k + r + (n - \beta k) = \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{k} + \mathbf{r}$ **,** 其中 $1 \le r \le \alpha$.

如果 N>n, 可利用上式找出在前一輪 N 代表的數字. 令 N= $n + \alpha k + r$ **,** 因此 $k = \left\lfloor \frac{N-n-1}{\alpha} \right\rfloor$, 而 N 的前一個數字為 $(\alpha + \beta)k + r = (\alpha + \beta)k + N - n - \alpha k = N - n + \beta k = N - n + \beta \times \left\lfloor \frac{N-n-1}{\alpha} \right\rfloor$. 也就是說,

$$\mathbf{N} - \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} \times \left\lfloor \frac{\boldsymbol{N - n - 1}}{\boldsymbol{\alpha}} \right\rfloor \rightarrow \boldsymbol{N}$$

另一方面, 計算最後一個被去掉的數字號碼如下 : $(\alpha = 2, \beta = 3)$

n	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
最後報數 J(n)	48	49	50	53	54	55	58	59	60	63

從此表可觀察規律: 當 n= $\beta k - r, 0 \le r < \beta$, 最後報數 J(n)= $\beta k \times \frac{\alpha+\beta}{\beta} - r = (\alpha + \beta)k - r$

現在我們可以寫下一個特殊的遞迴關係如下: (我們稱它為 “迭代關係”)

(1) N : = $(\alpha + \beta)k - r$ (設 n= $\beta k - r, 0 \le r < \beta$)

(2) 只要 N≥ $n + 1$, 令 N := $\mathbf{N} - \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} \times \left\lfloor \frac{\boldsymbol{N-n-1}}{\boldsymbol{\alpha}} \right\rfloor$

(3) 重複(2) 直到 $N \le n$, 此時 最後留下數字 $J_{\alpha,\beta}(n)$= N.

我們使用一個新的變數來簡化上面的過程. 設 n= $\beta k-r, 0\le r<\beta$, 起始值 $N_0 = (\alpha+\beta)k-r$, 設定

$$\mathbf{D := N_0 + 1 - N\ ,\ \ N := N - n + \beta \times \left\lfloor \frac{N-n-1}{\alpha} \right\rfloor}$$

我們利用上兩式把 N 全部用 D 替換, 得到 D 的迭代關係如下: 令 $\lceil y \rceil$ 代表大於等於 y 的最小整數

$D := N_0 + 1 - (N - n + \beta \times \left\lfloor \frac{N-n-1}{\alpha} \right\rfloor) = N_0 + 1 - (N_0 + 1 - D - n + \beta \times \left\lfloor \frac{N_0+1-D-n-1}{\alpha} \right\rfloor)$

$= n + D - \beta \times \left\lfloor \frac{N_0-D-n}{\alpha} \right\rfloor = n + D - \beta \times \left\lfloor \frac{\alpha k - D}{\alpha} \right\rfloor$

$= n + D - \beta k + \beta \left\lceil \frac{D}{\alpha} \right\rceil = -r + (D + \beta \times \left\lceil \frac{D}{\alpha} \right\rceil)$

D的起始值為 $N_0+1-N_0=1$, 又 $N \ge n+1 \Leftrightarrow D \le N_0 - n = \alpha k$. 因此我們把上面 N 的迭代關係改成 D 的迭代關係:

(1) D : = 1 (設 n= $\beta k - r, 0 \le r < \beta$; $N_0 = (\alpha+\beta)k - r$)

(2) 只要 D≤ αk , 令 D := $(D + \beta \times \left\lceil \frac{D}{\alpha} \right\rceil) - r$

(3) 重複(2) 直到 D> αk ，此時 最後留下數字 $J_{\alpha,\beta}(n) = N_0 + 1 - D$.

例: $\alpha=2, \beta=3, n=31= 3\times 11-2$, $N_0 = 5\times 11 - 2 = 53$, $\alpha k = 22$, D 的迭代如下:

D=1→ $(1+3.\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil) - 2 = 2$ →$(2+3.\left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil) - 2 = 3$ → $(3+3.\left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil) - 2 = 7$ → $(7+3.\left\lceil\frac{7}{2}\right\rceil) - 2 = 17$ →$(17+3.\left\lceil\frac{17}{2}\right\rceil) - 2 = 42$

因為 42>22 , 所以 $J_{2,3}(31) = 53+1-42 = 12$.

特例: 當$\beta = 1$ 時, r=0, n=k, $N_0 = (\alpha+1)n$, 則 “留α 去 1” 的迭代過程可簡化如下:

(1) D : = 1

(2) 只要 D≤ αn , 令 D := $\left\lceil \frac{\alpha+1}{\alpha} . D \right\rceil$

(3) 重複(2) 直到 D> αn ，此時 最後留下數字 $J_{\alpha,1}(n) = N_0 + 1 - D$.

例: $\alpha = 2, \beta = 1, n = 10, N_0 = 30, \alpha n = 20$, D 的迭代如下:

D=1→ $\left\lceil\frac{3}{2}.1\right\rceil = 2$ →$\left\lceil\frac{3}{2}.2\right\rceil = 3$ →$\left\lceil\frac{3}{2}.3\right\rceil = 5$→$\left\lceil\frac{3}{2}.5\right\rceil = 8$→$\left\lceil\frac{3}{2}.8\right\rceil = 12$→$\left\lceil\frac{3}{2}.12\right\rceil = 18$→$\left\lceil\frac{3}{2}.18\right\rceil = 27$.

因為27>20 , 所以 $J_{2,1}(10) = 30+1-27 = 4$.

伍、研究結果

1. 給定正整數L及n, 定義所謂”**留1去L**” 的約瑟夫操作: 將正整數1,2,⋯,n 依序排成一圈, 從1 開始1,2,⋯,L+1,1,2,⋯,L+1,⋯報數, 報數為2~L+1的就去掉, 不斷重複此過程, 令最後剩下的數字為 $J_{1,L}(n)$, 則 $\boldsymbol{J_{1,L}(n)}$ 有如下公式: 設m是任意非負整數, 則

$$\begin{cases} J_{1,L}((L+1)^m)=J_{1,L}(2\times(L+1)^m)=\cdots=J_{1,L}(L\times(L+1)^m)=1 \ldots(1) \\ J_{1,L}((L+1)^m+Lk)=1+(L+1)k,\text{ 對所有 } 0\le k<(L+1)^m \ldots(2) \\ J_{1,L}(2\times(L+1)^m+Lk)=1+(L+1)k,\text{ 對所有 } 0\le k<2\times(L+1)^m \ldots(3),\ldots, \\ J_{1,L}(L\times(L+1)^m+Lk)=1+(L+1)k,\text{ 對所有 } 0\le k<L\times(L+1)^m \ldots(L+1) \end{cases}$$

當m=0,1,2,...此公式可以求出所有正整數 n 的$J_{1,L}(n)$ 值.

2. 給定正整數L及n, 在”留1去L” 的約瑟夫操作下, 對於任意正整數 $1\le x\le n$, 令 $J_{1,L}(n,x)$ 為第 x次被去掉的數字, 則$J_{1,L}(n,x)$ 有如下公式: (1) 當$1\le x\le \frac{Ln}{(L+1)}$, 令x=Lk+1, Lk+2,…,Lk+L, 則

$$\begin{cases} J_{1,L}(n,Lk+1)=(L+1)k+2, 0\le k\le \dfrac{n-2}{L+1}\ldots(1) \\ J_{1,L}(n,Lk+2)=(L+1)k+3, 0\le k\le \dfrac{n-3}{L+1}\ldots(2), \\ J_{1,L}(n,Lk+L)=(L+1)k+(L+1), 0\le k\le \dfrac{n-(L+1)}{(L+1)}\ldots(L) \end{cases}$$

(2)當$x\ge\frac{Ln+1}{L+1}$, 令$m=\begin{cases}(L+1)(n-x)+1,\text{ 若 } x\equiv 1(mod\ L) \\ (L+1)(n-x)+2,\text{ 若 } x\equiv 2(mod\ L),\ldots, \\ (L+1)(n-x)+L,\text{ 若 } x\equiv L(mod\ L)\end{cases}$ 則

$$J_{1,L}(n,x)=\frac{1}{L}\times\left((L+1)n+L-(L+1)^{\left\lceil\log_{(L+1)}\frac{n}{m}\right\rceil+1}\times m\right)$$

3. (1) 令 J(n,x)=$J_{1,1}(n,x)$ 為”留1去1”第x次去掉的數字. 若存在正整數$1\le x\le n$ 滿足J(n,x)=x 時我們說 x 是一個”不動點”. 對於給定的n, 有不動點的充分必要條件為:存在非負整數 k 使得 $2^{k+2}-1$ 整除2n+1.

此外, 對於固定的n, 此種k 的個數恰為J(n,x)=x 解x的個數.

(2) 對於給定正整數L, “留1去L”的操作有不動點 x滿足 $J_{1,L}(n,x)=x$, 且$x\equiv 0(\text{mod } L)$ 的充分必要條件是: 存在非負整數 k 使得 $(L+1)^{k+2}-L$ 整除(L+1)n+L.

4. 一般 “留α 去 β” (留下 1,2,..., α , 去掉$\alpha+1,\alpha+2,\ldots,\alpha+\beta$, 不斷重複) 的最後留下數字 $J_{\alpha,\beta}(n)$, 可用下面的迭代關係計算: 令 $\lceil y\rceil$ 代表大於等於 y 的最小整數

(1) 留α 去 1: 令 $N_0 = (\alpha + 1)n$,

(1) D : = 1

(2) 只要 D≤ αn , 令 D := $\left\lceil \frac{\alpha+1}{\alpha} . D \right\rceil$

(3) 重複(2) 直到 D> αn ，此時 最後留下數字 $J_{\alpha,1}(n) = N_0 + 1 - D$.

(2) 留α 去 β：設 $n = \beta k - r, 0 \le r < \beta$; $N_0 = (\alpha + \beta)k - r$

(1) D : = 1

(2) 只要 D≤ αk , 令 D := $(D + \beta \times \left\lceil \frac{D}{\alpha} \right\rceil) - r$

(3) 重複(2) 直到 D> αk ，此時 最後留下數字 $J_{\alpha,\beta}(n) = N_0 + 1 - D$.

陸、討論

柒、結論(未來發展)

找出更多種“留α 去 β”的規律, 進而決定最後留下的號碼 $J_{\alpha,\beta}(n)$ 的一般式 (只需用α. β, n 代入即求出)

捌、參考文獻

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1989.

2. **葉佩雯, 約瑟夫數列的最後一章,第四十六屆中小學科學展覽會**

3. 初等數論, 潘承洞, 潘承彪

【評語】040407

定理一、定理二以及定理三只要細心觀察幾個特例都不難得出結果。其遞迴式亦然！定理四倒是有意思,給出被移除號碼的通式。特別是奇數的移除公式是較難得到的。本作品在實驗、觀察、數學嚴格推導的過程真實呈現，所得結論， 特別是定理九相當不錯。然而最可惜的是，最後作品轉成一筆畫問題太過牽強。其實，若能將此撲克牌遊戲加以多變化的延伸，就算只是做出幾個特例，仍然比硬轉成一筆畫問題為佳。