中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第一名

040406

連續正整數的鈍角三角形劃分

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 呂彥德	李宗熹

關鍵詞：三元集、平方和

得獎感言

嗯……，這整個學期下來真的很累。

先談談做專題的過程好了。從學期初開始，每週六堂的專題課就是不停的面對電腦、計算紙，或許有許多人羨慕我們可以有那麼多時間花在這上面，但相信經過做到後來沒想法只能發呆、開始自己報告和聽同學報告這樣一整學期的疲勞轟炸後就不會這樣想了。

再來就是很痛苦的一部分—拿作品去投稿。從學期中開始，我們就開始要投稿一堆比賽像比較有名的：青培、中獎、科展等等計畫。老實說我很不建議後進這樣做。可能老師或其他人的想法是說都有成果出來了，那多去給別人看看啊，而且這也能當作一個經驗。但這樣絕對會累到吃不消，你要準備一堆投稿相關的文件，有時候不同比賽要求的格式還會不一樣，甚至放學後或是週休時還得花一堆時間處理其他麻煩事，說實話這樣完全是在浪費人生。倒不如一直專注在你喜歡的專題上，如果有閒那就投一個有興趣的計劃，專心把他弄好，也才不會落到太貪心最後沒有把握好自己初衷的下場。

最後，得不得獎只是別人對於你作品的觀感罷了，我覺得當個科學人最重要的還是要忠於自己的作品，真正的好不好只有自己能夠決定。幾年後、幾十年後再回來看這一段路，或許一切都會不一樣。

連續正整數的鈍角三角形劃分

摘要

對於集合 $S=\{k,k+1,\ldots,k+3n-1\}$，考慮其所有三元子集的劃分，我們研究在其中所有子集皆含有的一致性：鈍角三角形。文中給出了對於初始值 k 尋找 n 的方法，並證明其存在性。對於所有 k 我們都能給出 n 的下界，並且發現這下界其實是相當緊的，如果能給出遞增性並且將極小值都構造出來，我們即可將所有 n 最小值之上下界差皆壓至 1。在文末我們期望能夠從解析方面來對這問題進行更深的剖析，所以對於一類鈍角三角的的劃分方式給出了其必要條件的限制，並且同時作出關於全體鈍角三角形的等價類分組方式。

壹、研究動機

一次偶然的機會在書上看到這樣的題目：考慮集合 $S=\{2,3,\dots,3n+1\}$，試證明：可將其分成 n 個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。這題目相當有趣，我們打算研究還擁有這樣性質的集合，本文中，我們將先證明原命題並將其推廣至另外的集合：$\{k,k+1,\dots,3n+k-1\}$，我們好奇的是什麼樣的 k 值會使得這樣的集合也能分出鈍角三角形的子集，文中不斷利用組合數學中分組的方法。

貳、研究目的

一、給定 n 值求出 k 的最小值的上下界。

二、給定 n 值求出 k 的所有值的上下界。

三、給定 n、k 時構造出其鈍角三角形的劃分。

參、研究設備及器材

筆、紙

肆、研究方法

4.1 名詞定義

給定正整數 k，如果可以將$\{k,k+1,\dots,3n+k-1\}$分割成n 個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。將所有這樣的 n 的集合記為 A_k。那麼：

1. M_k 為 A_k中的最小正整數。
2. U_k 為使得他之後的整數都在 A_k中的最小正整數。
3. 為方便我們定義集合：

$A_{k,n}=\{k\,,k+1\,,\dots,k+n-1\}$

$B_{k,n}=\{k+n\,,k+n+1\,,\dots,k+2n-1\}$

$C_{k,n}=\{k+2n\,,k+2n+1\,,\dots,k+3n-1\}$

4. 正規劃分：對劃分中所有三角形滿足：$\{(a_i\,,b_i\,,c_i)|\forall i, a_i\in A, b_i\in B, c_i\in C\}$
5. 數 $d_{D'}$：其值為集合 D'中所有三角形最長邊的平方減去另兩邊平方的總和。
6. 數 L_a：其值為以 a 為鈍角三角形最短邊長的所有可能三角形中減去另兩邊平方的最小值。
7. 對給定的非負整數 a,y (y<a)，稱(a, a+x+y, 2a+x)是(a,y)本原解，其中 x 是使其為鈍角三角形的最小整數。
8. 數 O_a：為以 a 為最短邊的鈍角三角形所形成之集合。

4.2 原始命題

在此之前，我們需要引理：

引理 0：*若* $(a_i\,, b_i\,, c_i)$ $(c_i$ *最大)是鈍角三角形，則* $(a_i\,, b_i + k, c_i + k)$ *亦是。*

[證明] 顯然 $a_i + (b_i + k) > (c_i + k)$，且 $(c_i + k)^2 > {a_i}^2 + (b_i + k)^2$，故得證。

接著我們開始證明原命題：

首先 $n = 1, 2, 3$ 時，

我們易驗證 $\{(2,3,4)\}$, $\{(2,4,5),(3,6,7)\}$, $\{(2,5,6),(3,7,8),(4,9,10)\}$ 滿足

現在考慮 $n \geq 4$ 時：

(1) $2 \mid n$

考慮 $D = \{\, 2 + \frac{1}{2}n\,, 2 + \frac{1}{2}n + 1\,, \ldots, 2 + n - 1\,,$

$2 + 2n\,, 2 + 2n + 1\,, \ldots, 2 + \frac{5}{2}n - 1\,,$

$2 + \frac{5}{2}n\,, 2 + \frac{5}{2}n + 1\,, \ldots, 2 + 3n - 1\}$

分成三元集 $\{(\, 2 + \frac{1}{2}n + k\,, 2 + 2n + k\,, 2 + \frac{5}{2}n + k)\,\}$

由於 $\left(2 + \frac{1}{2}n + k\right) + (2 + 2n + k) > \left(2 + \frac{5}{2}n + k\right)$，故能形成三角形

能形成鈍角等價於 $\left(2 + \frac{5}{2}n + k\right)^2 > \left(2 + \frac{1}{2}n + k\right)^2 + (2 + 2n + k)^2$

又等價於 $2n^2 > (2 + k)^2\ \ \forall\ \ 0 \leq k \leq \frac{1}{2}n - 1$，這只需 $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)n > 1$，顯然成立。

故 D 可構出鈍角三角形的劃分。

(2) $2 \nmid n$

考慮 $D = \{\, 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\,, 2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\,, \ldots, 2 + n - 1\,,$

$2 + 2n - 1\,, 2 + 2n + 1\,, \ldots, 2 + \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}\,,$

$2 + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}\,, 2 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}\,, \ldots, 2 + 3n - 1\}$

分成三元集 $\{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + k\,, 1 + 2n + k\,, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}n + k)\,\}$

由於 $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + k\right) + (1 + 2n + k) > \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}n + k\right)$，故能形成三角形

能形成鈍角等價於 $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}n+k\right)^2 > \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n+k\right)^2+(1+2n+k)^2$

又等價於 $2n^2+2n>(1+k)^2\ \forall\ 0\le k\le\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ ，這只需 $\frac{7}{4}n^2+\frac{3}{2}n>\frac{1}{4}$,顯然成立。

故 D 可構出鈍角三角形的劃分。

接著，我們將 S 中剩下的數看作是 S' 中的數同時加上某正數，再一次進行討論，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將遞降回 $n=1,2,3$ 時的情況，再來由 **引理 0** 將其他三元數對變換回 S 中，我們便得到了 $S=\{2,3,\dots,3n+1\}$ 的鈍角三角形的劃分，綜上得證。

為方便理解，在這邊我們給出一個例子： $S=\{2,3,\dots,37\}$

首先由於 $\mathrm{n}(=12)$ 為偶數，我們考慮

$$\begin{aligned}D=\{\,&8,9,10,11,12,13\\&26,27,28,29,30,31\\&32,33,34,35,36,37\,\}\end{aligned}$$

將其分成三元集

$\{(8,26,32),(9,27,33),(10,28,34),(11,29,35),(12,30,36),(13,31,37)\,\}$

易驗證此時所有三元數對皆能形成鈍角三角形。接下來將

$\{2,3,4,5,6,7,14,15,16,\dots,25\}$ 看作是 $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,\dots,19\}$ 的後12 數每數都加上 6，再一次對 $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,\dots,19\}$ 進行討論。

同上分成 $\{(5,14,17),(6,15,18),(7,16,19)\,\}$ ，接下來將 $\{2,3,4,8,9,\dots,13\,\}$ 看作是 $\{2,3,4,5,6,\dots,10\,\}$ 的後 6 數每數都加上 3，再一次對 $\{2,3,4,5,6,\dots,10\,\}$ 進行討論。現在變回 $n=3$ 的作法：分成 $\{(2,5,6),(3,7,8),(4,9,10)\,\}$。最終我們得到了 $\{(5,14,17),(6,15,18),(7,16,19)\}$ 及 $\{(2,5,6),(3,7,8),(4,9,10)\,\}$ 這兩組不在 S 中的三元數對集，現在要用 **引理 0** 將其變換回 S 中，會變成 $\{(5,14+6,17+6),(6,15+6,18+$
6, 7, 16+6, 19+6 以及 *2, 5+6+3, 6+6+3,3, 7+6+3, 8+6+3, 4, 9+6+ 3, 10+6+3* 。

最後我們就得到了原集的鈍角三角形的劃分：

$\{(2,14,15),(3,16,17),(4,18,19),(5,20,23),(6,21,24),(7,22,25),(8,26,32),$
$(9,27,33),(10,28,34),(11,29,35),(12,30,36),(13,31,37)\,\}$。

4.3 推廣命題

4.3.1 存在性以及上下界估計

引理1: $\{k,k+1,\dots,k+m-1\}\cup\{k+2m,k+2m+1,\dots,k+4m-1\}$*存在某數* W *使* $m\ge W$ *時總存在鈍角三角形的劃分*

[證明]

(1) $2\mid m$

考慮 $D=\{\,k+\frac{1}{2}m\,,k+\frac{1}{2}m+1\,,\dots,k+m-1\,,$

$k+3m\,,k+3m+1\,,\ldots,k+\frac{7}{2}m-1\,,$

$k+\frac{7}{2}m\,,k+\frac{7}{2}m+1\,,\ldots,k+4m-1\}$

分成三元集 $\{(\,k+\frac{1}{2}m+t\,,k+3m+t\,,k+\frac{7}{2}m+t)\,\}$

由於 $\left(k+\frac{1}{2}m+t\right)+(k+3m+t)>\left(k+\frac{7}{2}m+t\right)$，故能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $\left(k+\frac{7}{2}m+t\right)^2>\left(k+\frac{1}{2}m+t\right)^2+(k+3m+t)^2$

又等價於 $3m^2>(k+t)^2\ \forall\ 0\le t\le\frac{1}{2}m-1$，這只需 $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)m>k-1$，顯然存在某一數 X 使得當 $m\ge X$ 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

(2) $2\nmid m$

考慮 $D=\{\,k+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\,,k+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\,,\ldots,k+m-1\,,$

$k+3m-1\,,k+3m+1\,,\ldots,k+\frac{7}{2}m-\frac{3}{2}\,,$

$k+\frac{7}{2}m-\frac{1}{2}\,,k+\frac{7}{2}m+\frac{1}{2}\,,\ldots,k+4m-1\}$

分成三元集 $\{(\,k+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}+t\,,k+3m-1+t\,,k+\frac{7}{2}m-\frac{1}{2}+t)\,\}$

因 $\left(k+\frac{m-1}{2}+t\right)+(k+3m-1+t)>\left(k+\frac{7m-1}{2}+t\right)$ 故能形成三角形

能成鈍角等價於 $\left(k+\frac{7m-1}{2}+t\right)^2>\left(k+\frac{m-1}{2}+t\right)^2+(k+3m-1+t)^2$

又等價於 $3m^2+3m>(k+t-1)^2\ \forall\ 0\le t\le\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}$ 。

顯然存在某一數 Y 使得當 $m\ge Y$ 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。接著，我們將 S 中剩下的數看作是 S' 中的數同時加上一正數，再一次進行討論 (此時我們需要用到 **引理 0**)，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將得到集合 $\{k\,,k+1\,,\ldots,k+s\}\cup\{k+2m\,,k+2m+1\,,\ldots,k+2m+2s+1\}$，將其分成 $\{(k+t,k+2m+2t,k+2m+2t+$ *1* 顯然存在某數 Z 使得當 $m\geq Z$ 時這之中任一個集合都能形成鈍角三角形的劃分。綜上， m 為不小於 $max\ \{X,Y,Z\}$ 之整數時，原集合存在鈍角三角形的劃分。

有了這個引理，便可以開始證明 U_k 的存在性了(顯然 U_k 存在則 M_k 必存在)

定理 1：$\forall\ k\ge 2\,,\exists\ U_k$

[**證明**]

(1)當我們取 $2 \mid n$ 時

考慮 $D=\{\, k+\frac{1}{2}n\,, k+\frac{1}{2}n+1\,, \dots, k+n-1\,,$

$k+2n\,, k+2n+1\,, \dots, k+\frac{5}{2}n-1\,,$

$k+\frac{5}{2}n\,, k+\frac{5}{2}n+1\,, \dots, k+3n-1\}$

分成三元集 $\{(\, k+\frac{1}{2}n+t\,, k+2n+t\,, k+\frac{5}{2}n+t)\,\}$

由於 $\left(k+\frac{1}{2}n+t\right)+(k+2n+t)>\left(k+\frac{5}{2}n+t\right)$，故必能形成三角形

能形成鈍角等價於 $\left(k+\frac{5}{2}n+t\right)^2>\left(k+\frac{1}{2}n+t\right)^2+(k+2n+t)^2$，又等價於

$2n^2>(k+t)^2\ \forall\ 0\le t\le \frac{1}{2}n-1$，這只需 $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)n>k$，顯然存在 X 使得當 $n\ge$ X 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

剩下 $\{k, k+1, \dots, k+\frac{1}{2}n-1\}\cup\{k+n\,, k+n+1\,, \dots, k+2n-1\}$，

將其看作是 $S_{k,\frac{n}{2}}$ 的末 n 個數同時都加 $\frac{n}{2}$ 。由**引理1** 知存在某一數 X' 使得當 $n\ge X'$時此集合存在鈍角三角形的劃分。

綜上，當 n 為不小於 $max\ \{X, X'\}$ 之偶數時，$S_{k,n}$ 存在鈍角三角形的劃分。

(2)當我們取 $2 \nmid n$ 時

考慮 $D=\{\, k+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\,, k+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\,, \dots, k+n-1\,,$

$k+2n-1\,, k+2n+1\,, \dots, k+\frac{5}{2}n-\frac{3}{2},$

$k+\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}\,, k+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}\,, \dots, k+3n-1\}$

分成三元集 $\{((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\,, (k-1)+2n+t\,, (k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t)\,\}$

因 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)+((k-1)+2n+t)>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)$，故必能形成三角形。

又 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)^2>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)^2+((k-1)+2n+t)^2$

等價於 $2n^2+2n>(k+t-1)^2\ \ \forall\ \ 0\le t\le \frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$，我們知 $2n^2>(k+t-1)^2$ 時此式成立。顯然存在某一數 Y 使得當 $n\ge Y$ 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。剩下 $\left\{k,k+1,\dots,k+\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}\right\}\cup\{k+n\,,k+n+1\,,\dots,k+2n-2\}$，將其看作是 $S_{k,\frac{n-1}{2}}$ 的末 $n-1$ 個數同時都加 $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ 。綜合 **引理 0 以及引理1** ，知存在某一數 Y'使得當 $n\ge Y'$時此集合能構出鈍角三角形的劃分。

綜上，當 n 為不小於 $max\ \{Y,Y'\}$ 之奇數時，$S_{k,n}$ 存在鈍角三角形的劃分。

綜上所述， U_k 存在。

我們現在知道了 U_k 的存在性，而以下將給出 M_k 的下界、 U_k 的上界：

引理 2： *若 $S_{k,n}$ 可構出鈍角三角形的劃分，則*

$$\sum_{a=k+2n}^{k+3n-1}a^2\ge\sum_{a=k}^{k+2n-1}a^2+n$$

[證明] 設 $D=\{(a_i\,,b_i\,,c_i\,)\mid i=1\,,2\,,\dots\,,n\}$ 為其鈍角三角形的劃分，則 ${c_i}^2>{a_i}^2+{b_i}^2$，故 ${c_i}^2\ge{a_i}^2+{b_i}^2+1$ ，兩邊求和並取極值即得。

由此引理我們有 $22n^2+(6k-3)n+(-6k^2+6k-7)\ge 0$ ，即有 M_k 的下界。

在我們嘗試估計 U_k 的上界之前，必須要先證明**引理1** 的強化：

引理1 (強形式): $\{k\,,k+1\,,\dots,k+m-1\}\cup\{k+2m\,,k+2m+1\,,\dots,k+4m-1\}$*當*

$$m\ge\left\lceil\frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil \text{時總存在鈍角三角形的劃分}$$

[證明] 在原本**引理1** 證明過程所分的第一種情況：$2\mid m$ 時只要 $m\ge\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil$，就能讓 D 構出鈍角三角形的劃分，而在$2\nmid m$ 時當 $m\ge\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil$ 帶入條件式中亦可知 D 能構出鈍角三角形的劃分，所以知道 $m\ge\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil$ 時 D 能構出鈍角三角形的劃分，此時可將原集合作出劃分，最後將遞降回集合 $\{k\,,k+1\,,\dots,k+s\}\cup\{k+2m\,,k+2m+$

$1,\dots,k+2m+2s+1\}$ $\left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil+1}{2}\right\rceil-1\le s\le\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil-1\right.$，這就有 $s<k-1)$，

將其分成 $\{(k+t,k+2m+t,k+2m+t+s+1)\}$ $(t=0\sim s)$。
能形成三角形等價於 $(k+t)+(k+2m+t)>(k+2m+t+s+1)$，
即 $k+t>s+1$ $(\forall\, 0\le t\le s)$，這由 $s<k-1$ 可知其必成立。
能形成鈍角等價於 $(k+2m+t+s+1)^2>(k+t)^2+(k+2m+t)^2$，展開將其視作關於 t 的二次方程：$(4s+4)m>t^2+(2k-2s-2)t+f(k,s)$
(其中$f(k,s)$只與 k,s 有關)，由於領導係數及一次項係數為正，故左式在 $t=s$ 時取到最大值。將 $t=s$ 帶入此式得 $(4s+4)m>k^2-2k-(2s^2+4s+1)$，

又等價於 $m>\frac{(k-1)^2}{4(s+1)}-\frac{s+1}{2}$。……(1)式

由於 k 為定值，故左式在 s 最小時取到最大值。

將左式 s 以 $\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil+1}{2}\right\rceil-1$ 帶入、右式 m 以$\left\lceil\frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil$帶入，並用高斯函數基本性質化

簡得(1)式的充分條件為 $\frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}>\frac{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})(k-1)^2}{2(k-\frac{3}{2}+\sqrt{3})}-\frac{k-\frac{3}{2}+\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-\frac{1}{2})}$。

又可再化簡為 $\left(2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)k^2+\left(2\sqrt{3}+4\right)k+(-\sqrt{3}-\frac{5}{4})>0$，而此式恆成立。得證。

定理 2：$U_k\le 2\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil+1$

[**證明**] 我們只需證 $S_{k,c}$ $\left(\forall c\ge 2\left\lceil\frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\right\rceil+1\right)$可以劃分出鈍角三角形劃分即可。先讓我們

回顧一下 **定理 1**：在證明過程所分的第一種情況：$2\mid c$ 時我們只須 $c\ge\left\lceil\frac{k}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}\right\rceil$，就

能讓 D 構出鈍角三角形的劃分，剩下$\left\{k,k+1,\dots,k+\frac{1}{2}c-1\right\}\cup\{k+c,k+c+$

$1,\dots,k+2c-1\}$，將其看作是 $S_{k,\frac{c}{2}}$ 的末 c 個數同時加上 $\frac{c}{2}$。由**引理1** 知當

$\frac{c}{2} \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 此集合可構出鈍角三角形的劃分，即當 c 為不小於$2\left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$之偶數時 $S_{k,c}$ 存在鈍角三角形的劃分。而在第二種情況 $2 \nmid c$ 時當 $c \geq \left\lceil \frac{k}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 帶入條件式中亦可知 D 能構出鈍角三角形的劃分，剩下$\left\{k, k+1, \ldots, k+\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}\right\} \cup \{k+c\,, k+c+1\,, \ldots, k+2c-2\}$，將其看作是 $S_{k,\frac{c-1}{2}}$ 的末 $c-1$個數同時加上 $\frac{c}{2}+\frac{1}{2}$ 。綜合**引理1 (強形式) 以及 引理 0**，知當 $\frac{c-1}{2} \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 此集可構出鈍角三角形的劃分，即 c為不小於$2\left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1$ 之奇數時，$S_{k,c}$ 存在鈍角三角形的劃分。

綜上所述，$\forall c \geq 2\left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1$，$S_{k,c}$ 可以劃分出鈍角三角形。

4.3.2 實際值以及構造

首先我們由 **引理 2** 給出的不等式先估計，並給出構造：

(1) $M_3\,, M_4\ \geq 2$
$S_{3,2}$ 可做出如 $\{\,(3,5,7)\,,(4,6,8)\,\}$ 的鈍角三角形劃分
$S_{4,2}$ 可做出如 $\{\,(4,6,8)\,,(5,7,9)\,\}$ 的鈍角三角形劃分

(2) $M_5 \geq 2$
雖然不等式推得下界為 2，但我們發現 $S_{5,2}$ 是不存在鈍角三角形的劃分的。
考慮 $S_{5,2}$ 的任一三元集劃分：
(I) $5, 6$ 被分至同一組
由於 $5, 6, 7$ 不能形成鈍角三角形，故 7 被分在另一組
但此時另一組最短兩邊平方和至少是 $49 + 56 > 100$，不能形成鈍角
(II) $5, 6$ 不在同一組
此時 6 那組最短兩邊平方和至少是 $36 + 49 > 81$，知只能是 $6, 7, 10$
另一組為 $5, 8, 9$ 不能形成鈍角
綜上得 $M_5 \geq 3$

(3) $M_5, M_6, M_7 \geq 3$

$S_{5,3}$ 可做出如 $\{(5,10,12),(6,8,11),(7,9,13)\}$ 的鈍角三角形劃分

$S_{6,3}$ 可做出如 $\{(6,11,13),(7,9,12),(8,10,14)\}$ 的鈍角三角形劃分

$S_{7,3}$ 可做出如 $\{(7,12,14),(8,10,13),(9,11,15)\}$ 的鈍角三角形劃分

(4) $M_8, M_9, M_{10} \geq 4$

我們沿用構造 $S_{5,3}$ 時的劃分的想法易做出：

$S_{8,4}$：$\{(8,12,16),(9,15,18),(10,13,17),(11,14,19)\}$

$S_{9,4}$：$\{(9,13,17),(10,16,19),(11,14,18),(12,15,20)\}$

而劃分 $S_{10,4}$ 時必須改變模式：

$S_{10,4}$：$\{(10,16,19),(11,14,18),(12,17,21),(13,15,20)\}$

(5) $M_{11}, M_{12} \geq 5$

我們沿用構造 $S_{10,4}$ 時的劃分的想法易做出：

$S_{11,5}$：$\{(11,16,21),(12,19,23),(13,17,22),(14,20,25),(15,18,24)\}$

$S_{12,5}$：$\{(12,17,22),(13,20,24),(14,18,23),(15,21,26),(16,19,25)\}$

(6) $M_{13}, M_{14}, M_{15} \geq 6$

一樣沿用構造 $S_{10,4}$ 時的劃分的想法易做出：

$$S_{13,6}：\left\{\begin{matrix}(13,19,25),(14,20,26),(15,23,28),(16,21,27)\\ ,(17,24,30),(18,22,29)\end{matrix}\right\}$$

$$S_{14,6}：\left\{\begin{matrix}(14,20,26),(15,21,27),(16,24,29),(17,22,28)\\ ,(18,25,31),(19,23,30)\end{matrix}\right\}$$

雖然不等式推得下界為 6，但我們發現 $S_{15,6}$ 是不存在鈍角三角形的劃分的。

為方便證明，在此先引入數 $d_{D'}$：其值為集合 D' 中所有三角形最長邊的平方減去另兩邊平方的總和。數 L_a：其值為以 a 為鈍角三角形最短邊長的所有可能三角形中最長邊的平方減去另兩邊平方的最小值。易知若 T 是鈍角三角形的劃分，則對其任一子集 T'，都必須要有$d_{T'} \geq |T'|$ 以及 $\sum_{a \in T'} L_a \leq 3d_{T'}$。

考慮 $S_{15,6}$ 的任一三元集劃分：

(I) 存在某一組數不為 (A,B,C) 的形式

易驗證不可能有 $(B,B,C),(B,C,C)$ 形式的組，此時不為 (A,B,C) 的組，其形式只能為 $(A,A,B),(A,A,C),(A,B,B),(A,C,C)$，由於 A,B,C 元素各數相等，易計算知只能為 $(A,B,B),(A,C,C)$ 此二種形式。考慮 (A,B,B) 這組數，易算出其只能為 $(15,21,26)$，再考慮(A,C,C) 這組數，此時易算出其只能為 $(16,27,32)$ 或 $(17,27,32)$。我們考慮剩下的數組所定義出的 $d_{D'}$ 值，計算知其 < 0，矛盾！

(II) 任一組數皆為 (A,B,C) 的形式

則我們有$\sum_{a=15}^{20} L_a = d_T$，但計算知 $L_{20}=16$、$L_{19}=10$、$L_{18}=12$、$L_{17}=11$、$L_{16}=9$，
而$d_T = (27^2 + 28^2 + \cdots + 32^2) - (15^2 + 16^2 + \ldots + 26^2) = 53 < \sum_{a=15}^{20} L_a$
，矛盾！

$$S_{15,7}:\left\{\begin{matrix}(15,22,29),(16,23,30),(17,24,31),(18,27,33)\\ ,(19,25,32),(20,28,35),(21,26,34)\end{matrix}\right\}$$

(7) $M_{16}, M_{17} \ge 7$
沿用構造 $S_{15,7}$ 時的劃分的想法易做出：

$$S_{16,7}:\left\{\begin{matrix}(16,23,30),(17,24,31),(18,25,32),(19,28,34)\\ ,(20,26,33),(21,29,36),(22,27,35)\end{matrix}\right\}$$

$S_{17,7}$ 時我們人工構造出：

$$S_{17,7}:\left\{\begin{matrix}(17,29,34),(18,31,36),(19,23,30),(20,28,35)\\ ,(21,24,32),(22,26,33),(25,27,37)\end{matrix}\right\}$$

要注意到 $S_{17,7}$ 的劃分法相當特殊，這原因可合理推測是因為 d_T 值太小且無法找到良好的匹配。

由於更大的集合想要構造出鈍角三角形的劃分是不容易的，所以討論暫到此為止。

定理 3: $M_k \le \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$

[**證明**] 對集合 $S_{k,n}$，我們證明 $n = \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$ 時此集合必有鈍角三角形的劃分

考慮 $\{(k+t, k+n+t, k+2n+t)\}(0 \le t \le n-1)$。
因 $(k+t) + (k+n+t) > (k+2n+t)$，能形成三角形。
為鈍角等價於 $(k+2n+t)^2 > (k+n+t)^2 + (k+t)^2$，又等價於

$$\big(3n - (k+t)\big)\big(n + (k+t)\big) > 0$$

而因 $n = \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$，故上式成立，因此此劃分必是鈍角三角形劃分。

另外注意這也給出了所有 $S_{k,n}$ ($\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \le n \le k-1$)的劃分。

(1) $U_3, U_4 = 2$
首先 $S_{3,2}$ 以及 $S_{4,2}$ 我們已於上方給出了構造，而 $n = 3$ 時分別可以給出：
$\{(3,8,10),(4,6,9),(5,7,11)\}$ 以及 $\{(4,9,11),(5,7,10),(6,8,12)\}$。
接下來考慮 $n \ge 4$ 的情形：
(I)當我們取 $2 \mid n$ 時

考慮 $D=\{\,k+\frac{1}{2}n\,,k+\frac{1}{2}n+1\,,\dots,k+n-1\,,$

$k+2n\,,k+2n+1\,,\dots,k+\frac{5}{2}n-1\,,$

$k+\frac{5}{2}n\,,k+\frac{5}{2}n+1\,,\dots,k+3n-1\}$ (其中 $k=3$ 或 4)

分成三元集 $\{(\,k+\frac{1}{2}n+t\,,k+2n+t\,,k+\frac{5}{2}n+t)\,\}$

由於 $\left(k+\frac{1}{2}n+t\right)+(k+2n+t)>\left(k+\frac{5}{2}n+t\right)$，故必能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $\left(k+\frac{5}{2}n+t\right)^2>\left(k+\frac{1}{2}n+t\right)^2+(k+2n+t)^2$，又等價於

$2n^2>(k+t)^2\ \ \forall\ \ 0\le t\le\frac{1}{2}n-1$，這只需 $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)n+1>k$。

當 $n\ge 4$ 時此式對 $k=$ 3 或 4 均成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

(II)當我們取 $2\nmid n$ 時

考慮 $D=\{\,k+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\,,k+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\,,\dots,k+n-1\,,$

$k+2n-1\,,k+2n+1\,,\dots,k+\frac{5}{2}n-\frac{3}{2},$

$k+\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}\,,k+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}\,,\dots,k+3n-1\}$ (其中 $k=3$ 或 4)

分成三元集 $\{((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\,,(k-1)+2n+t\,,(k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t)\,\}$

由於 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)+((k-1)+2n+t)>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)$

故必能形成三角形。

又 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)^2>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)^2+((k-1)+2n+t)^2$

等價於 $2n^2+2n>(k+t-1)^2\ \ \forall\ \ 0\le t\le\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$，計算知 $n\ge 5$ 時此式能成立。

此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

接著，我們將 S 中剩下的數看作是 S' 中的數同時加上某正數 c，再一次進行討論，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將遞降回 $n=1,2,3$ 時的情況，再來由**引理 0** 將其他三元數對變換回 S 中，便得到了 $\{k,k+1,\dots,k+3n-1\}$ $(k=3$ 或 4)的鈍角三角形的劃分，綜上得證。

(2) $U_5\,,U_6\,,U_7\,=3$

首先我們先證明一個引理：

引理 3：*給定 k，若存在 $x \le k-1$，使得 $S_{k,x}$ 存在正規劃分，則對所有 $x \le x' \le k-1$，$S_{k,x'}$ 均存在正規劃分。*

[證明] 我們只須證明若對於 $y \le k-2$，$S_{k,y}$ 存在滿足鈍角三角形劃分，則 $S_{k,y+1}$ 亦是即可。假設 $D = \{ (a_i, b_i, c_i) | \, i = 1 \sim y \}$ 是 $S_{k,y}$ 一組滿足性質的鈍角三角形的劃分，我們考慮：$D' = \{ (a_i+1, b_i+2, c_i+3) | \, i = 1 \sim y \} \cup \{(k, k+y+1, k+2y+2)\}$，易見他構成了 $S_{k,y+1}$ 的一組滿足性質的鈍角三角形的劃分，故得證。

在上面的例子中，我們對於 $S_{5,3}, S_{6,3}, S_{7,3}$ 所給出的鈍角三角形的劃分都是正規劃分，所以我們可用 **引理** 3 給出 $S_{5,4}, S_{6,4}, S_{6,5}, S_{7,4}, S_{7,5}, S_{7,6}$ 的鈍角三角形的劃分。而
$\{ (5,11,15), (6,13,17), (7,10,16), (8,14,19), (9,12,18) \}$、
$\{ (5,16,20), (6,13,18), (7,11,17), (8,12,19), (9,14,21), (10,15,22) \}$、
$\{ (6,14,19), (7,14,20), (8,12,19), (9,15,21), (10,17,22), (11,16,20) \}$、
分別是 $S_{5,5}, S_{5,6}, S_{6,6}$ 的鈍角三角形的分劃。
接下來我們考慮 $n \ge 7$ 的情形：
(I)當我們取 $2 \mid n$ 時

考慮 $D = \{ k+\frac{1}{2}n, k+\frac{1}{2}n+1, \dots, k+n-1,$

$k+2n, k+2n+1, \dots, k+\frac{5}{2}n-1,$

$k+\frac{5}{2}n, k+\frac{5}{2}n+1, \dots, k+3n-1\}$ (其中 $k=5$ 或 6 或 7)

分成三元集 $\{(k+\frac{1}{2}n+t, k+2n+t, k+\frac{5}{2}n+t)\}$

由於 $\left(k+\frac{1}{2}n+t\right)+(k+2n+t) > \left(k+\frac{5}{2}n+t\right)$，故必能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $\left(k+\frac{5}{2}n+t\right)^2 > \left(k+\frac{1}{2}n+t\right)^2 + (k+2n+t)^2$

又等價於 $2n^2 > (k+t)^2 \;\forall\; 0 \le t \le \frac{1}{2}n-1$，這只需 $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)n+1 > k$。當 $n \ge 8$ 時此式對 $k=5$ 或 6 或 7 均成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

(II)當我們取 $2 \nmid n$ 時

考慮 $D = \{ k+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \dots, k+n-1,$

$k+2n-1, k+2n, \dots, k+\frac{5}{2}n-\frac{3}{2},$

$k+\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}, k+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}, \dots, k+3n-1\}$(其中 $k=5$ 或 6 或 7)

分成三元集 $\{((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\,,(k-1)+2n+t\,,(k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t)\}$

由於 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)+((k-1)+2n+t)>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)$

故必能形成三角形。

又 $\left((k-\frac{1}{2})+\frac{5}{2}n+t\right)^2>\left((k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}n+t\right)^2+((k-1)+2n+t)^2$，等價於

$2n^2+2n>(k+t-1)^2\ \forall\ 0\le t\le\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$，計算知 $n\ge 7$ 時此式能成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

接著，我們將 S 中剩下的數看作是 S' 中的數同時加上某正數 c，再一次進行討論，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將遞降回 $n=\ 3,4,5,6$ 時的情況，再來由 **引理** 0 將其他三元數對變換回 S 中，我們便得到了 $S=\{k,k+1,\dots,k+3n-1\}$ ($k=5$ 或 6 或 7)的鈍角三角形的劃分，綜上得證。

由上方的證明我們可以看出，思路為從**引理** 3 出發，再配合構造法，我們想辦法證明 $S_{k,M_k}\sim S_{k,c}$ ($c>\ 2M_k-1$)都可給出鈍角三角形的劃分，再使用 **定理** 1 來證明。事實上我們用這種方法可以證明出對於小的 k 值，都有 $M_k=U_k$，但是對於大的 k 值，我們想要構造出 $S_{k,c}$ 的鈍角三角形的劃分是相當困難的，這其實和找 M_k 的情況是類似的，我們期望未來能找到一般性的方法。

接著我們考慮了不一樣的刻劃鈍角三角形的方式，我們希望找的是一個能夠分類並有效計算鈍角三角形的定義，所以自然有以下：

定義：對給定的非負整數 a,y (y<a)，稱(a, a+x+y, 2a+x)是(a,y)本原解，其中 x 是使其為鈍角三角形的最小整數。

引理 4： O_a 中所有元素可由**引理 1**及所有(a,y)本原解生成。

並且若(a,y) ≠ (a',y')，則(a,y)生成解≠(a',y')生成解。

我們同時宣稱 $x=\max\{-y+1,\left\lfloor\dfrac{y^2+2ay-2a^2}{2a-2y}\right\rfloor+1\}$。

[證明] 首先若(a,y) ≠ (a',y')，但有某一組(a,y)生成解=(a',y')生成解，亦即存在 x, x'使得(a, a+x+y, 2a+x)=(a', a'+x'+y', 2a'+x')，但由 a=a'及 2a+x=2a'+x'得到(a,x,y)=(a',x',y')，矛盾。並且由此引理可以把全體鈍角三角形分成等價類(equivalent class)。

另外由 $(2a+x)^2>(a+x+y)^2+(a)^2$，以及 $a+x+y>a$ 得到 x 的值。

定理 3：給定 k,n，若 $S_{k,n}$ 存在正規劃分，則存在非負整數 $y_0\sim y_{n-1}$，使得 $y_i<k+i$ (對所有 i)，

$$\sum y_i = \frac{(k-2n-1)n}{2} \text{ ，} \sum x_i \le \frac{(-2k+3n-1)n}{2} \text{ 。}$$

[證明] 我們考慮 $S_{k,n}$ 的這組正規劃分，注意到(a,y)生成解的最長兩邊差即為 a-y，因此會有 $\sum(k+i-y_i) = C$中數總和 $- B$中數總和。並且由於我們取本原解時 x 是使其為鈍角三角形的最小整數，再由**引理 0** 我們知道必定有 $\sum x_i \le \frac{(-2k+3n-1)n}{2}$ (否則由鴿籠原理將有至少一個 x_i 不是$(k+i, y_i)$本原解對應到的 x 值，這時這組數不可能是鈍角三角形)。

伍、研究結果

一、給出原題證明並且構造。

二、$\frac{-(6k-3)+\sqrt{141(2k-1)^2+484}}{44} \le M_k \le \left\lceil \frac{3}{2} \left\lceil \frac{\sqrt{2}k+1}{3} \right\rceil \right\rceil$

三、$\frac{-(6k-3)+\sqrt{141(2k-1)^2+484}}{44} \le U_k \ \le 2\left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1$

四、利用引理給出的不等式找出前幾個 M_k 的值，給出了 $M_2 \sim M_{17}$ 的值，並且最大作出到 M_{26} 的值。

五、利用引理和定理給出前幾個 U_k 的值(k=2,3,…,7)。

六、給出全體鈍角三角形的一個等價類劃分，針對正規劃分給出限制。

陸、討論

一、目前有個直觀的想法： U_k 、 M_k 都遞增。

現在發現當以不等式估出的 M_k 增加時，對於其第一個增大的值 k， S_{k,M_k} 都較易構造出來，如果我們證明出遞增性，那麼馬上把許多 M_k 值的上下界之差壓到只剩 1。

二、計算 M_k 。

目前暴力搜尋法我們只能找到複雜度 $O(n!)$ 的方法，實在太大所以沒有寫程式，也要想辦法改進，如果可以像 $S_{15,6}$ 時做一樣的討論，那我們就有辦法將複雜度降至 $O(n^4)$，能有效算出 M_k 的值。

三、研究 $S_{k,n}$ 可構出幾種相異的鈍角三角形劃分。

當我們把 $S_{k,1}$ 、$S_{k,2}$ 、… 、$S_{k,n}$ 、…的值列出，則第一個不為零的值即是 M_k ， U_k 則是使後無窮項皆不為零的最小值，雖然這讓難度增大許多，不過卻可以觀察一整個數列的規律。

四、猜測: $M_k = U_k$。

這在我們觀察小的 k 值時都是成立的，而且對於之後 k 值，由**定理** 3 可以構造出正規劃分，我們就可以配合 **引理** 3 以及**定理** 1 的想法，證明出 $M_k = U_k$！

柒、結論

目前的研究我們已證明出， U_k 、 M_k 的上下界，但是兩者是以不同方法解出，這可能刻畫出 U_k 的複雜程度，也可能暗示出 U_k 的劃分方法是固定的，所以他的上界沒辦法做到下修。

在給出 M_k 得更好的上界時，我們使用的是另一種不同的劃分方法，雖然他無法推到更大的情況，卻仍大幅的降低了上下界的範圍，這讓我們開始探討：U_k 、M_k 是否在夠大的數時會不相等？

最後注意到我們在構造鈍角三角形劃分的方法其實具有一般化的想法，所以事實上我們已能給出 U_k 的計算方法。

捌、參考資料及其他

[1]解題的藝術網站 http://www.artofproblemsolving.com/。

[2]Imo-official, 52nd IMO Problem Shortlist with Solutions, 76pages, 2012。

【評語】040406

1. 本作品海報所呈現的數學內涵，數學術語、用詞及字體大小等都恰到好處，值得參賽者效法。

2. 口頭報告中，作者曾經提到 NP-Completeness 一詞，可惜未能夠進一步作詳細解說。作者亦沒有進一步採用其他(非數學)方法來獨立驗證上、下界的數值的正確性。

3. (作品海報中)參考資料所提及 IMO 2012 Short List of Problems 似乎為 IMO 2011 Short List of Problems 之筆誤。該問題及解答公開出現於網路上雖已有一段時間，然而本題尚待開發成為具有啟發性的數學實驗。