中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040405

大珠小珠落玉盤－正多邊形的兩個性質

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高三 邱刓璒 高三 林薏馨 高三 張芷芹	楊玉星

關鍵詞：正多邊形、內切圓、三角恆等式

摘要

從原始的題目「正三角形和正五邊形的兩個性質」出發，發現「這兩個性質」的橋樑其實是「直角三角形內切圓定理」，換句話說，「這兩個性質」是等價的，只要性質一成立，性質二必同時成立，若考慮其它奇數邊(2n＋1)正多邊形，我們進一步發現，性質一的代數意義是 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(n\in N\right)$。

又 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0$，

因此原式等價於 $\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}\left(n\in N\right)$，又因為此式為三角恆等式，所以「這兩個性質」適用於任意奇數邊正多邊形。

接著考慮偶數邊(2n＋2)正多邊形，處理方法分成兩類：(1)邊數 2(2k)；(2)邊數 2(2k＋1)，
第一類「這兩個性質」源自於「各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。
第二類「這兩個性質」源自於「各對角線兩側的線段會兩兩對稱相等」。
因為任意偶數邊正多邊形均具備上述特性，所以「這兩個性質」同樣適用於任意偶數邊正多邊形。

壹、研究動機

有一天在圖書館找書的時候，意外發現一本「數學傳播季刊」，大致瀏覽了一下，其中有一篇由劉步松教授所寫的「正三角形和正五邊形的兩個性質」特別引起我們的注意，設想如果是其它邊數為奇數的正多邊形，是否也有這兩個性質？ 而邊數為偶數的正多邊形又如何？於是我們便開始著手研究這個問題。

貳、研究目的

探討哪些正多邊形具有「這兩個性質」，並找出「這兩個性質」之間的關係，及其背後所代表的意義。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra、頭腦

肆、研究過程或方法

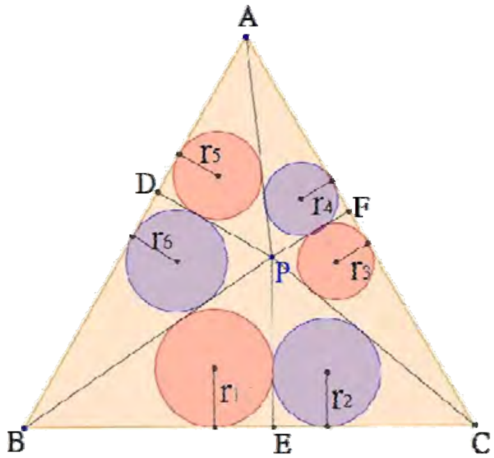
我們研究這個問題時，先將此問題的對象分成奇數邊正多邊形和偶數邊正多邊形兩類，先利用數學軟體 GeoGebra 驗證「這兩個性質」的正確性，再設法一一證明，並試著證明此性質適用於任意正多邊形。而原始的題目只探討「正三角形和正五邊形的兩個性質」如下：

一、正三角形

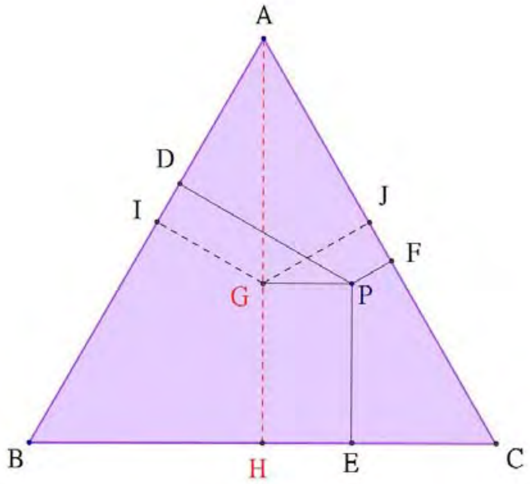
如圖一，設△ABC 為正三角形，P 為其內部一點，由 P 分別向正三角形的三邊作垂線，垂足分別是 D、E、F，連接 PA、PB、PC，則△ABC 被分成 6 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6，則有如下兩個結論：

(1) $AD+BE+CF=DB+EC+FA$；

(2) $r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$。



圖一



圖二

【證明】

(1)如圖二，過 A 作 AH⊥BC，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，垂足為 G，

由 G 點分別作 AB、AC 的垂線，垂足分別是 I、J，

則 $AD+BE+CF=(AI-DI)+(BH+EH)+(CJ-FJ)$

$=(AI+BH+CJ)+(-DI+EH-FJ)$ ……①

$DB+EC+FA=(BI+DI)+(CH-EH)+(AJ+FJ)$

$=(BI+CH+AJ)+(DI-EH+FJ)$ ……②

由圖形對稱性可知：$AI=AJ, BI=CJ, BH=CH$

將①－②得 $(AD+BE+CF)-(DB+EC+FA)=2(EH-DI-FJ)$

因此要證明性質(1)成立，只需證明 $2(EH-DI-FJ)=0$，

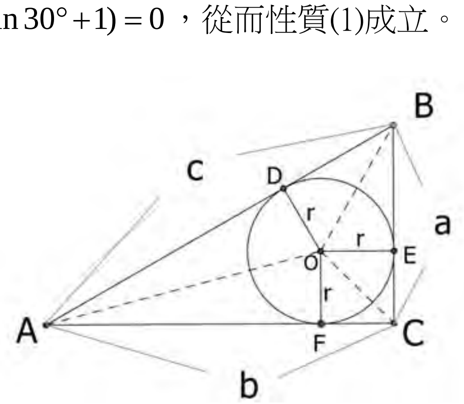
由圖二可知：$\angle PGJ=\angle HGJ-\angle HGP=120°-90°=30°=\angle GPD$ 且 $EH=PG$。

則有 $EH-DI-FJ=PG-PG\sin 30°-PG\sin 30°=PG(-2\sin 30°+1)=0$，從而性質(1)成立。

(2)<u>直角三角形內切圓定理</u>：

如圖三，設直角三角形的兩直角邊為 a 和 b，

斜邊長為 c，內切圓半徑為 r，則有 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$。



圖三

由圖一及上述定理可得

$r_1=\dfrac{BE+PE-PB}{2}$，$r_3=\dfrac{CF+PF-PC}{2}$，$r_5=\dfrac{AD+PD-PA}{2}$，

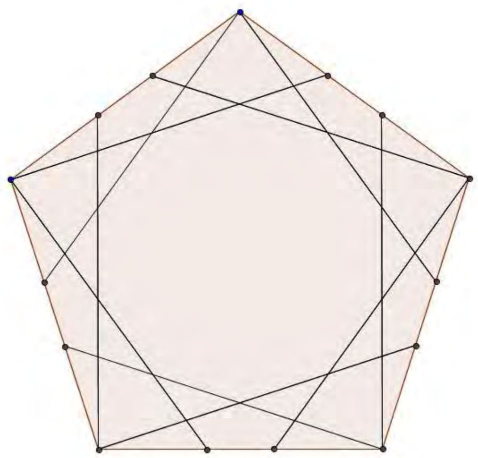
$r_2=\dfrac{EC+PE-PC}{2}$，$r_4=\dfrac{FA+PF-PA}{2}$，$r_6=\dfrac{DB+PD-PB}{2}$。

推得 $(r_1+r_3+r_5)-(r_2+r_4+r_6)=\dfrac{1}{2}[(AD+BE+CF)-(DB+EC+FA)]$，

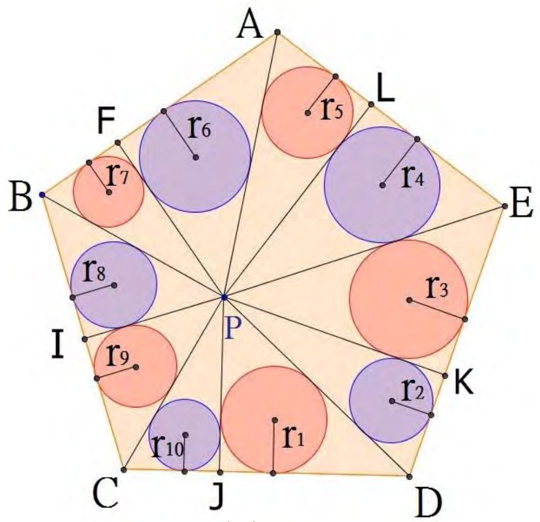
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，即 $r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$，性質(2)也成立。

二、正五邊形

設 P 為正五邊形 ABCDE 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制。如圖四，過正五邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 10 條垂線在正五邊形內部圍成一個正十邊形，當 P 點在這個正十邊形內部時，由 P 點向正五邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖四



圖五

如圖五，設正五邊形 ABCDE 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 F、I、J、K、L，連接 PA、PB、PC、PD、PE，則正五邊形被分成 10 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}，則有如下兩個結論：

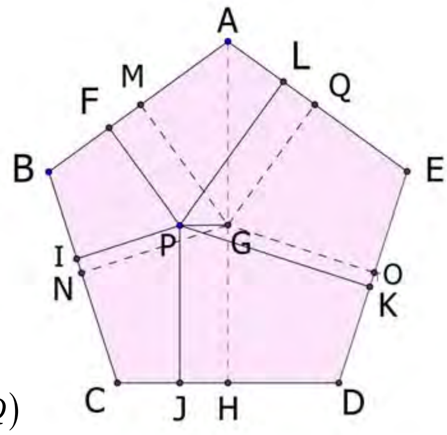
(1) $AF+BI+CJ+DK+EL=FB+IC+JD+KE+LA$；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$。

【證明】

(1)如圖六，過 A 作 AH⊥CD，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、BC、DE、EA 的垂線，垂足分別是 M、N、O、Q，則

$$\begin{aligned}&AF+BI+CJ+DK+EL\\&=(AM+FM)+(BN-IN)+(CH-JH)+(DO-KO)+(EQ+LQ)\\&=(AM+BN+CH+DO+EQ)+(FM-IN-JH-KO+LQ)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$



圖六

$FB+IC+JD+KE+LA$

$=\left(BM-FM\right)+\left(CN+IN\right)+\left(DH+JH\right)+\left(EO+KO\right)+\left(AQ-LQ\right)$

$=\left(BM+CN+DH+EO+AQ\right)+\left(-FM+IN+JH+KO-LQ\right)$ ……②

由圖形對稱性可知：AM＝AQ，BN＝EO，CH＝DH，DO＝CN，EQ＝BM，將①－②得

$\left(AF+BI+CJ+DK+EL\right)-(FB+IC+JD+KE+LA)\quad=2\left(FM-IN-JH-KO+LQ\right)$

從而要證明性質(1)成立，只需證明$2\left(FM-IN-JH-KO+LQ\right)=0$，即證明$FM-IN-JH-KO+LQ=0$即可。

∵正五邊形的內角為$108°$，∴$\angle \mathrm{NGH}=180°-108°=72°$，
由此得$\angle PGN=90°-\angle NGH=90°-72°=18°$，
同樣可以算出$\angle GPK=18°$，$\angle PGM=54°$，$\angle GPL=54°$。

則有$FM-IN-JH-KO+LQ$

$=PG\sin 54°-PG\sin 18°-PG-PG\sin 18°+PG\sin 54°$

$=PG\left(2\sin 54°-2\sin 18°-1\right)$

這樣就只需證明$2\sin 54°-2\sin 18°-1=0$即可。

由於$\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，利用三倍角公式得：

$\sin 54°=3\sin 18°-4\sin^3 18°=\dfrac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}-4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^3=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$。

這樣便有$2\sin 54°-2\sin 18°-1=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}-1=0$，從而性質(1)成立。

(2)利用和正三角性質(2)同樣的證明方法，可以得到：

$(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9)-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10})$

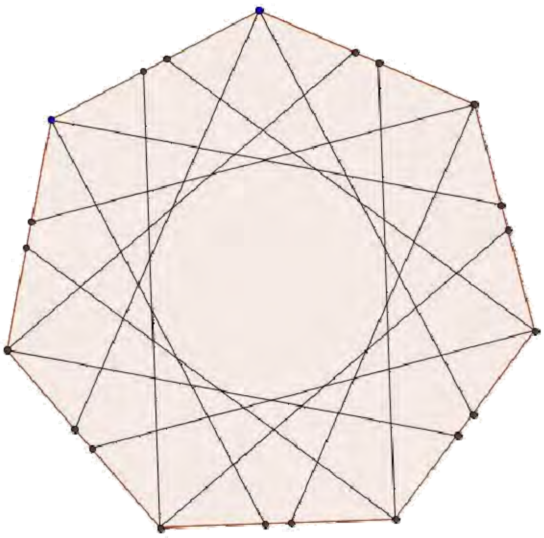
$=\dfrac{1}{2}\left[\left(AF+BI+CJ+DK+EL\right)-\left(FB+IC+JD+KE+LA\right)\right]$，

由於性質(1)成立，從而上式中括弧內為零，即$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$，性質(2)也成立。

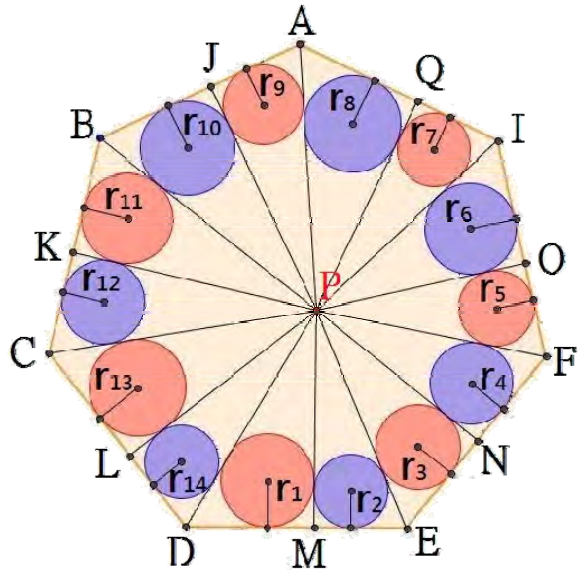
接著我們試著探討正七邊形和正九邊形的情形如下：

三、正七邊形

設 P 為正七邊形 ABCDEFI 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制，如圖七，過正七邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 14 條垂線在正七邊形內部圍成一個正十四邊形，當 P 點在這個正十四邊形內部時，由 P 點向正七邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖七

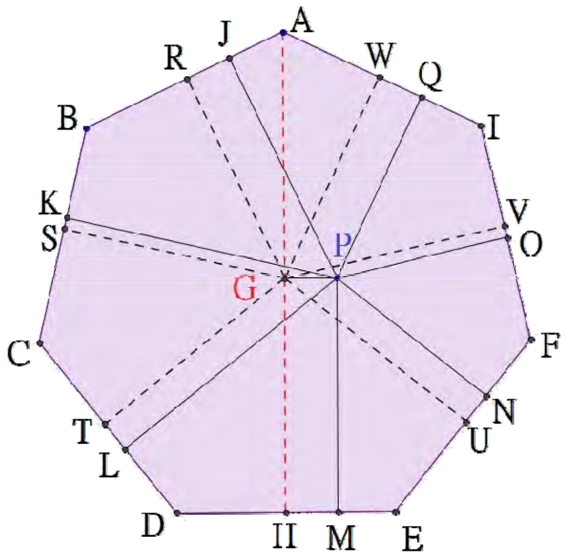


圖八

如圖八，設正七邊形 ABCDEFI 內部一點 P(P 點向各邊作垂線時都能得到垂足)，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別是 J、K、L、M、N、O、Q，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI，則正七邊形被分成 14 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}，則有如下兩個結論：

(1) $AJ+BK+CL+DM+EN+FO+IQ=JB+KC+LD+ME+NF+OI+QA$；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}$ 。



圖九

【證明】

(1)如圖九，過 A 作 AH⊥DE，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、BC、CD、DE、EF、FI、IA 的垂線，垂足分別是 R、S、T、H、U、V、W，則

$$\begin{aligned}&AJ+BK+CL+DM+EN+FO+IQ\\&=(AR-JR)+(BS-KS)+(CT+LT)+(DH+MH)+(EU+NU)+(FV-OV)+(IW-QW)\\&=(AR+BS+CT+DH+EU+FV+IW)+(-JR-KS+LT+MH+NU-OV-QW)\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&JB+KC+LD+ME+NF+OI+QA\\&=(BR+JR)+(CS+KS)+(DT-LT)+(EH-MH)+(FU-NU)+(IV+OV)+(AW+QW)\\&=(BR+CS+DT+EH+FU+IV+AW)+(JR+KS-LT-MH-NU+OV+QW)\cdots\cdots②\end{aligned}$$

由圖形對稱性可知： $AR=AW, BS=IV, CT=FU, DH=EH, EU=DT, FV=CS, IW=BR,$ 將①－②得

$$\begin{aligned}&(AJ+BK+CL+DM+EN+FO+IQ)-(JB+KC+LD+ME+NF+OI+QA)\\&=2(-JR-KS+LT+MH+NU-OV-QW)\end{aligned}$$ 。

從而要證明性質(1)成立，只需證明 $2(-JR-KS+LT+MH+NU-OV-QW)=0$ ，即 $LT+MH+NU=JR+KS+OV+QW$ 。

∵正七邊形的內角為 $\frac{900°}{7}$ ，∴ $\angle GPL=90°-\angle MPL=90°-\left(360°-2\times90°-\frac{900°}{7}\right)=\frac{270°}{7}$ ，

由此得 $\angle GPK=\angle KPL-\angle GPL=\left(360°-2\times90°-\frac{900°}{7}\right)-\frac{270°}{7}=\frac{90°}{7}$ ，

$\angle JPG=\angle KPJ+\angle GPK=\left(360°-2\times90°-\frac{900°}{7}\right)+\frac{90°}{7}=\frac{450°}{7}$ ，

同樣可以算出： $\angle WGP=\frac{450°}{7}$ ， $\angle PGV=\frac{90°}{7}$ ， $\angle UGP=\frac{270°}{7}$ ，

則有

$$\begin{aligned}&-JR-KS+TL+HM+UN-OV-QW\\&=PG\left(-\sin\frac{450°}{7}-\sin\frac{90°}{7}+\sin\frac{270°}{7}+1+\sin\frac{270°}{7}-\sin\frac{90°}{7}-\sin\frac{450°}{7}\right)\\&=PG\left(-2\sin\frac{450°}{7}-2\sin\frac{90°}{7}+2\sin\frac{270°}{7}+1\right)\end{aligned}$$ 。

這樣我們就只需證明 $-2\sin\frac{450°}{7}-2\sin\frac{90°}{7}+2\sin\frac{270°}{7}+1=0$ 即可，

也就是 $1=2\sin\frac{450°}{7}+2\sin\frac{90°}{7}-2\sin\frac{270°}{7}=2\left(\sin\frac{450°}{7}+\sin\frac{90°}{7}-\sin\frac{270°}{7}\right)$

$=2\left(\cos\frac{180°}{7}+\cos\frac{540°}{7}+\cos\frac{900°}{7}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)$ ，

因此，設法證明 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ 就對了，

又 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=0$ ，

故 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$ ，

令 $S=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}S &= 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\ &=\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)\\ &=-\sin\frac{\pi}{7}\end{aligned}$$

$\Rightarrow S=-\frac{1}{2}$ ，

因此得 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$ ，推得 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ 。

$\therefore \sin\frac{450^\circ}{7}+\sin\frac{90^\circ}{7}-\sin\frac{270^\circ}{7}=\frac{1}{2}$ ，得 $-2\sin\frac{450^\circ}{7}-2\sin\frac{90^\circ}{7}+2\sin\frac{270^\circ}{7}+1=0$ ，

從而 AJ＋BK＋CL＋DM＋EN＋FO＋IQ＝JB＋KC＋LD＋ME＋NF＋OI＋QA 成立。

(2) 利用和正三角性質(2)同樣的證明方法，可以得到：

$(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13})-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14})$

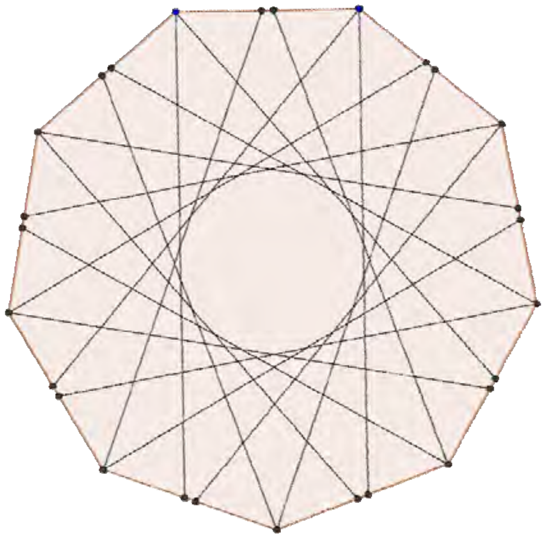
$=\frac{1}{2}[(\mathrm{AJ}+\mathrm{BK}+\mathrm{CL}+\mathrm{DM}+\mathrm{EN}+\mathrm{FO}+\mathrm{IQ})-(\mathrm{JB}+\mathrm{KC}+\mathrm{LD}+\mathrm{ME}+\mathrm{NF}+\mathrm{OI}+\mathrm{QA})]$

由於性質(1)成立，從而上式中括弧內為零，

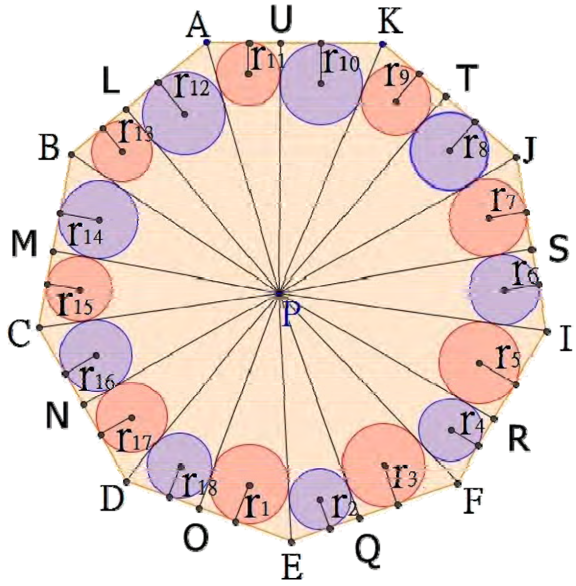
即 $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}$，性質(2)也成立。

四、正九邊形

設 P 為正九邊形 ABCDEFIJK 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制，如圖十，過正九邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 18 條垂線在正九邊形內部圍成一個正 18 邊形，當 P 點在這正 18 邊形內部時，由 P 點向正九邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖十

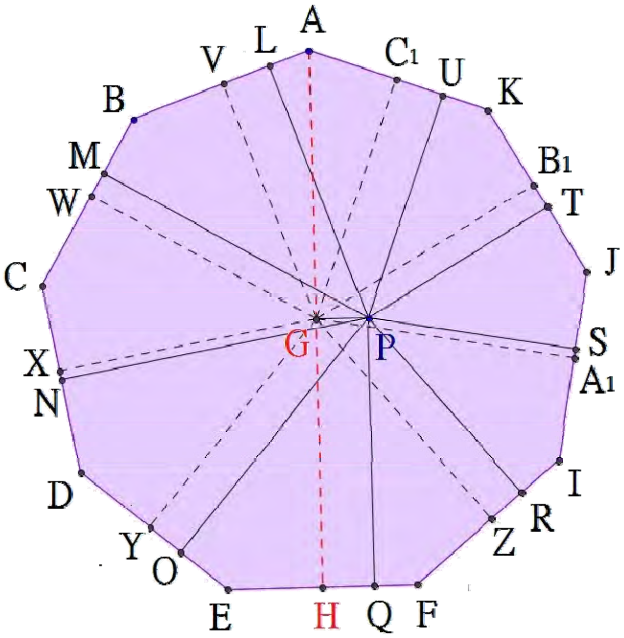


圖十一

如圖十一，設正九邊形 ABCDEFIJK 內部一點 P(P 點向各邊作垂線時都能得到垂足)，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別是 L、M、N、O、Q、R、S、T、U，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI、PJ、PK，則正九邊形被分成 18 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}、r_{17}、r_{18}，則有如下兩個結論：(1)AL＋BM＋CN＋DO＋EQ＋FR＋IS＋JT＋KU

＝LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}$。



圖十二

【證明】

(1) 如圖十二，過 A 作 AH⊥EF，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，由 G 點分別作 AB、BC、CD、EF、FI、IJ、JK、KA 的垂線，垂足分別是 V、W、X、Y、H、Z、A_1、B_1、C_1，則：

AL＋BM＋CN＋DO＋EQ＋FR＋IS＋JT＋KU

＝(AV－LV)＋(BW－MW)＋(CX＋NX)+(DY＋OY)＋(EH＋QH)＋(FZ＋RZ)＋(IA_1＋SA_1)＋(JB_1－TB_1)＋(KC_1－UC_1)

＝(AV＋BW＋CX＋DY＋EH＋FZ＋IA_1＋JB_1＋KC_1)

+(－LV－MW＋NX＋OY＋QH＋RZ＋SA_1－TB_1－UC_1) ……①

LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA

＝(BV＋LV)＋(CW＋MW)＋(DX－NX)＋(EY－OY)＋(FH－QH)＋(IZ－RZ)＋(JA_1－SA_1)＋(KB_1＋TB_1)＋(AC_1＋UC_1)

＝(BV＋CW＋DX＋EY＋FH＋IZ＋JA_1＋KB_1＋AC_1)

＋(LV＋MW－NX－OY－QH－RZ－SA_1＋TB_1＋UC_1) ……②

由圖形對稱性可知：AV＝IZ，BW＝JA_1，CX＝KB_1，DY＝AC_1，EH＝FH，FZ＝BV，IA_1＝CW，JB_1＝DX，KC_1＝EY，

將①－②得(AL＋BM＋CN＋DO＋EQ＋FR＋IS＋JT＋KU)

－(LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA)

＝2(－LV－MW＋NX＋OY＋QH＋RZ＋SA_1－TB_1－UC_1)

從而要證明性質(1)成立，只需證明 2(－LV－MW＋NX＋OY＋QH＋RZ＋SA_1－TB_1－UC_1)=0，，即 NX＋OY＋QH＋RZ＋SA_1＝LV＋MW＋TB_1＋UC_1。

∵正九邊形的內角為$140°$，$\therefore \angle GPN = 90° - \angle QPN = 90° - (540° - 2\times 90° - 2\times 140°) = 10°$，

由此得$\angle GPM = \angle MPN - \angle GPN = (360° - 2\times 90° - 140°) - 10° = 30°$，

$\angle GPL = \angle GPM + \angle LPM = 30° + (360° - 2\times 90° - 140°) = 70°$，

$\angle GPO = \angle GPN + \angle NPO = 10° + (360° - 2\times 90° - 140°) = 50°$，

同樣可以算出，$\angle C_1GP = 70°$，$\angle B_1GP = 30°$，$\angle A_1GP = 10°$，$\angle ZGP = 50°$，

則有

－LV－MW＋NX＋OY＋QH＋RZ＋SA_1－TB_1－UC_1

$= PG(-\sin 70° - \sin 30° + \sin 10° + \sin 50° + 1 + \sin 50° + \sin 10° - \sin 30° - \sin 70°)$

$= PG(-2\sin 70° - 2\sin 30° + 2\sin 10° + 2\sin 50° + 1)$

這樣我們就只需證明$(-2\sin 70° - 2\sin 30° + 2\sin 10° + 2\sin 50° + 1) = 0$即可，

$1 = 2\sin 70° + 2\sin 30° - 2\sin 10° - 2\sin 50° = 2(\sin 70° + \sin 30° - \sin 10° - \sin 50°)$

$= 2\left(\cos\frac{180°}{9} + \cos\frac{540°}{9} + \cos\frac{900°}{9} + \cos\frac{1260°}{9}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\right)$

因此，設法證明$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}$就對了，

又$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=0$，

故$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}$，

令$S=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{9}S &= 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}+2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\\ &=\left(\sin\frac{3\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{9}-\sin\frac{3\pi}{9}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}\right)+\left(\sin\frac{9\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\right)\\ &=-\sin\frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

$\Rightarrow S=-\frac{1}{2}$，

因此得$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}$，推得$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$。

$\therefore\sin70°+\sin30°-\sin10°-\sin50°=\frac{1}{2}$，得$-2\sin70°-2\sin30°+2\sin10°+2\sin50°+1=0$。

從而　AL＋BM＋CN＋DO＋EQ＋FR＋IS＋JT＋KU

＝LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA 成立。

(2)利用和正三角性質(2)同樣的証明方法，可以得到：

$(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17})-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18})$

$=\frac{1}{2}$[(AL＋BM+CN+DO+EQ+FR+IS+JT+KU)

－(LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA)]

由於性質(1)成立，從而上式中括弧內為零，

即 $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}$，性質(2)也成立。

五、十一邊以上的奇數邊正多邊形

1. 想證明正三角形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是$-2\sin30°+1=0$，

   即$\sin30°=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos60°=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$。

2. 想證明正五邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是$-2\sin54°+2\sin18°+1=0$，

   即$\sin\frac{270°}{5}-\sin\frac{90°}{5}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{180°}{5}+\cos\frac{540°}{5}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$。

3. 想證明正七邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是

   $-2\sin\frac{450°}{7}-2\sin\frac{90°}{7}+2\sin\frac{270°}{7}+1=0$，即$\sin\frac{450°}{7}+\sin\frac{90°}{7}-\sin\frac{270°}{7}=\frac{1}{2}$

   $\Leftrightarrow\cos\frac{180°}{7}+\cos\frac{540°}{7}+\cos\frac{900°}{7}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$。

4. 想證明正九邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是

$$-2\sin\frac{630°}{9}-2\sin\frac{270°}{9}+2\sin\frac{90°}{9}+2\sin\frac{450°}{9}+1=0$$，

即 $\sin\frac{630°}{9}+\sin\frac{270°}{9}-\sin\frac{90°}{9}-\sin\frac{450°}{9}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{180°}{9}+\cos\frac{540°}{9}+\cos\frac{900°}{9}+\cos\frac{1260°}{9}=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$ 。

從上述的關鍵的條件，我們不難發現：想證明正十一邊形具備「這兩個性質」，

關鍵的條件是 $-2\sin\frac{810°}{11}-2\sin\frac{450°}{11}-2\sin\frac{90°}{11}+2\sin\frac{270°}{11}+2\sin\frac{630°}{11}+1=0$ ，

即 $\sin\frac{810°}{11}+\sin\frac{450°}{11}+\sin\frac{90°}{11}-\sin\frac{270°}{11}-\sin\frac{630°}{11}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{180°}{11}+\cos\frac{540°}{11}+\cos\frac{900°}{11}+\cos\frac{1260°}{11}+\cos\frac{1620°}{11}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ 。

因此，「這兩個性質」如果對任意奇數邊(2n+1)正多邊形都成立的話，

設法證明 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$ 就對了，

又 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=0$ ，

故 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$ ，

令 $S=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{2n+1}S=2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}+2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

$$=\left(\sin\frac{3\pi}{2n+1}-\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{2n+1}-\sin\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}-\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{2n+1}$$

$\Rightarrow S=-\frac{1}{2}$ ，

因此得 $\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$ ，

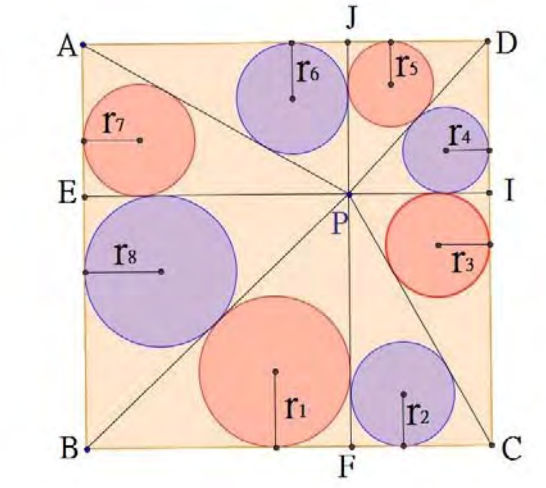
推得 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$ 。

故這「這兩個性質」對任意奇數邊正多邊形都成立，當然十一邊以上的奇數邊正多邊形也成立。

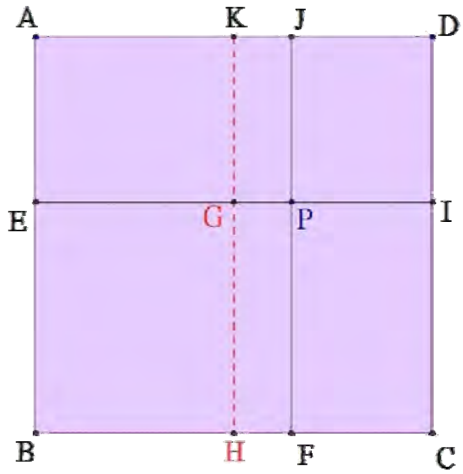
然而，「這兩個性質」對任意偶數邊(2n＋2)正多邊形也成立嗎？ 我們試著探討如下：

六、正方形

如圖十三，設 P 為正方形 ABCD 內任一點，則過 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足。



圖十三



圖十四

如圖十四，設正方形 ABCD 內部一點 P，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 E、F、I、J，連接 PA、PB、PC、PD，則正方形被分成 8 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8，則有如下兩個結論：

(1) AE＋BF＋CI＋DJ＝EB＋FC＋ID＋JA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7=r_2+r_4+r_6+r_8$。

【證明】

(1)如圖十四，作 AD 垂直平分線 KH，交對邊 BC 於 H，再過 P 作 PG⊥KH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、BC、CD、DA 的垂線，垂足分別是 E、H、I、K，則

AE＋BF＋CI＋DJ＝AE＋(BH＋FH)＋CI＋(DK－JK)

＝(AE＋BH＋CI＋DK)＋(FH－JK) ……①

EB＋FC＋ID＋JA＝EB＋(CH－FH)＋ID＋(AK＋JK)

＝(EB＋CH＋ID＋AK)＋(－FH＋JK) ……②

由圖形對稱性可知：AE＝ID，BH＝CH，CI＝EB，DK＝AK，

將①－②得 (AE＋BF＋CI＋DJ)－(EB＋FC＋ID＋JA)

＝(FH－JK)－(－FH＋JK)

＝2(FH－JK)

又 FH＝JK ，∴ 2(FH－JK)＝0，從而性質(1)成立。

(2)由直角三角形內切圓定理可知：

$$r_1=\frac{BF+PF\text{-}PB}{2},\quad r_3=\frac{CI+PI\text{-}PC}{2},\quad r_5=\frac{DJ+PJ\text{-}PD}{2},\quad r_7=\frac{AE+PE\text{-}PA}{2},$$

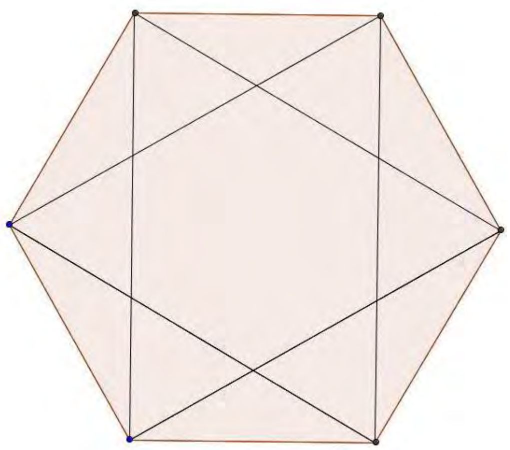
$$r_2=\frac{FC+PF\text{-}PC}{2},\quad r_4=\frac{ID+PI\text{-}PD}{2},\quad r_6=\frac{JA+PJ\text{-}PA}{2},\quad r_8=\frac{EB+PE\text{-}PB}{2},$$

$$(r_1+r_3+r_5+r_7)-(r_2+r_4+r_6+r_8)=\frac{1}{2}[(AE+BF+CI+DJ)-(EB+FC+ID+JA)]$$

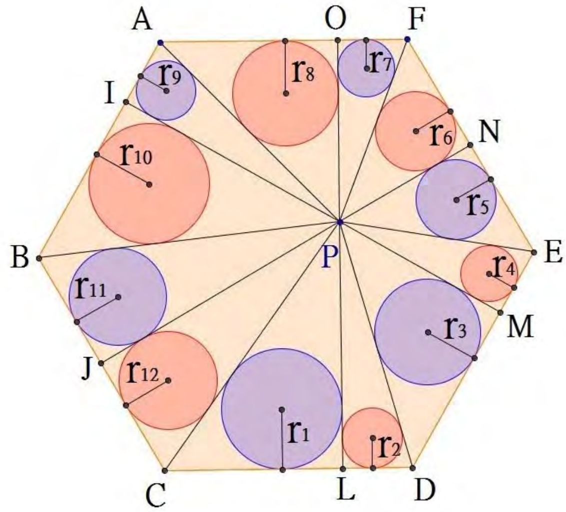
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，即 $r_1+r_3+r_5+r_7=r_2+r_4+r_6+r_8$，性質(2)也成立。

七、正六邊形

設 P 為正六邊形 ABCDEF 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制。如圖十五，過正六邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 12 條垂線在正六邊形內部圍成另一個正六邊形，當 P 點在這個正六邊形內部時，由 P 點向原正六邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖十五

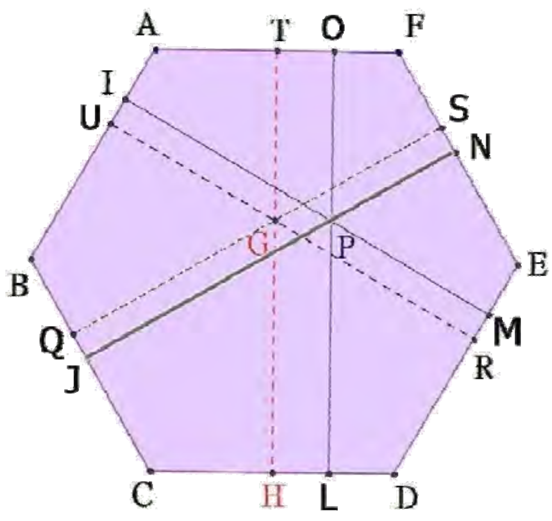


圖十六

如圖十六，設正六邊形 ABCDEF 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 I、J、L、M、N、O，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF，則正六邊形被分成 12 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}，則有如下兩個結論：

(1) $AI+BJ+CL+DM+EN+FO=IB+JC+LD+ME+NF+OA$；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}$。



圖十七

【證明】

(1)如圖十七，作 AF 的垂直平分線 TH，交對邊 CD 於 H，再過 P 作 $PG\perp TH$，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的垂線，垂足分別是 U、Q、H、R、S、T，

則 $AI+BJ+CL+DM+EN+FO$
$=(AU-IU)+(BQ+JQ)+(CH+LH)+(DR+MR)+(ES-NS)+(FT-OT)$
$=(AU+BQ+CH+DR+ES+FT)+(-IU+JQ+LH+MR-NS-OT)\cdots\cdots$①

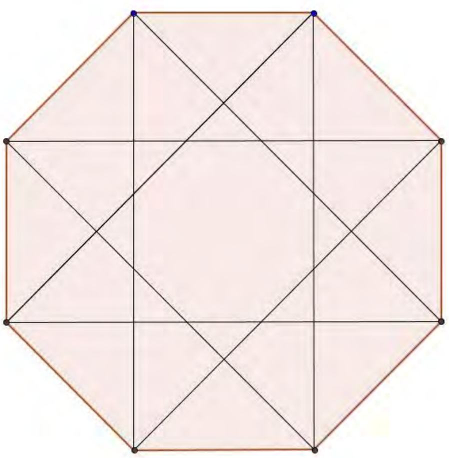
$IB+JC+LD+ME+NF+OA$
$=(BU+IU)+(CQ-JQ)+(DH-LH)+(ER-MR)+(FS+NS)+(AT+OT)$
$=(BU+CQ+DH+ER+FS+AT)+(IU-JQ-LH-MR+NS+OT)\cdots\cdots$②

由圖形對稱性可知： $AU=ER, BQ=FS, CH=AT, DR=BU, ES=CQ, FT=DH$
將①－②得
$(AI+BJ+CL+DM+EN+FO)-(IB+JC+LD+ME+NF+OA)$
$=2(-IU+JQ+LH+MR-NS-OT)$
又 $\because IU=MR, JQ=NS, LH=OT$ ，$\therefore 2(-IU+QJ+LH+RM-NS-OT)=0$ ，
從而性質(1)成立。

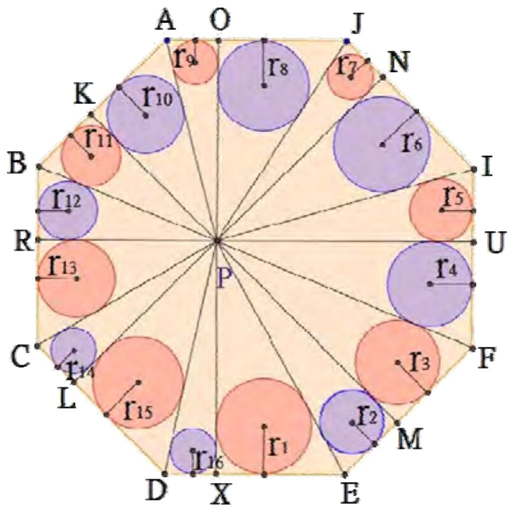
(2)利用和正方形性質(2)同樣的證明方法，可以得到：
$(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11})-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12})$
$=\frac{1}{2}[(AI+BJ+CL+DM+EN+FO)-(IB+JC+LD+ME+NF+OA)]$
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，
即 $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}$，性質(2)也成立。

八、正八邊形

設 P 為正八邊形 ABCDEFIJ 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制。如圖十八，過正八邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 16 條垂線在正八邊形內部圍成另一個正八邊形，當 P 點在這個正八邊形內部時，由 P 點向原正八邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖十八

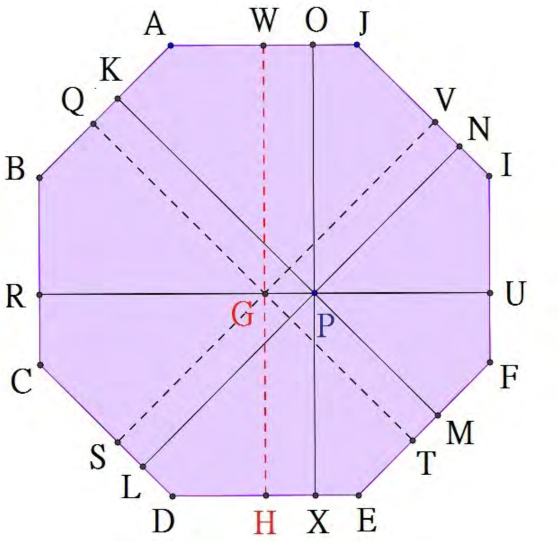


圖十九

如圖十九，設正八邊形 ABCDEFIJ 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 K、R、L、X、M、U、N、O，連接 PA、PB、PC、PD、 PE、PF、PI、PJ，則正八邊形被分成 16 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}，則有如下兩個結論：

(1) AK＋BR＋CL＋DX＋EM＋FU＋IN＋JO＝KB＋RC＋LD＋XE＋MF＋UI＋NJ＋OA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}$。



圖二十

【證明】

(1)如圖二十，作 AJ 垂直平分線 WH，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥WH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、BC、CD、DE、EF、FI、IJ、JA 的垂線，垂足分別是 Q、R、S、H、T、U、V、W，則

AK＋BR＋CL＋DX＋EM＋FU＋IN＋JO

＝(AQ－KQ)＋BR＋(CS＋LS)＋(DH＋XH)＋(ET＋MT)＋FU＋(IV－NV)＋(JW－OW)

＝(AQ＋BR＋CS＋DH＋ET＋FU＋IV＋JW)＋(－KQ＋LS＋XH＋MT－NV－OW) ……①

KB＋RC＋LD＋XE＋MF＋UI＋NJ＋OA

＝(BQ＋KQ)＋RC＋(DS－LS)＋(EH－XH)＋(FT－MT)＋UI＋(JV＋NV)＋(AW＋OW)

＝(BQ＋RC＋DS＋EH＋FT＋UI＋JV＋AW)＋(KQ－LS－XH－MT＋NV＋OW) ……②

由圖形對稱性可知： AQ＝FT，BR＝UI，CS＝JV，DH＝AW，ET＝BQ，FU＝RC，IV＝DS，JW＝EH

將①－②得

(AK＋BR＋CL＋DX＋EM＋FU＋IN＋JO)－(KB＋RC＋LD＋XE＋MF＋UI＋NJ＋OA)

＝2(XH＋MT－NV－OW－KQ＋LS)

又∵ XH＝OW，MT＝KQ，NV＝LS， ∴ 2(XH＋MT－NV－OW－KQ＋LS)＝0，

從而性質(1)成立。

(2)利用和正方形性質(2)同樣的證明方法，可以得到：

$$(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16})-(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15})$$

$$=\frac{1}{2}[(AK+BR+CL+DX+EM+FU+IN+JO)$$

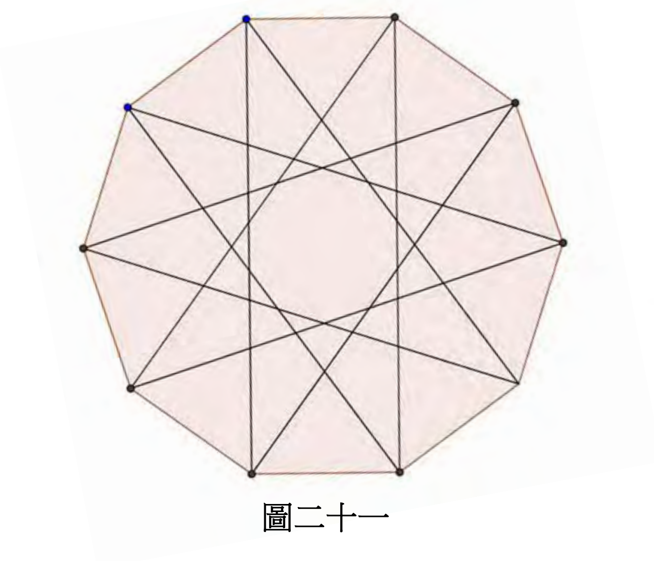
$$-(KB+RC+LD+XE+MF+UI+NJ+OA)]$$

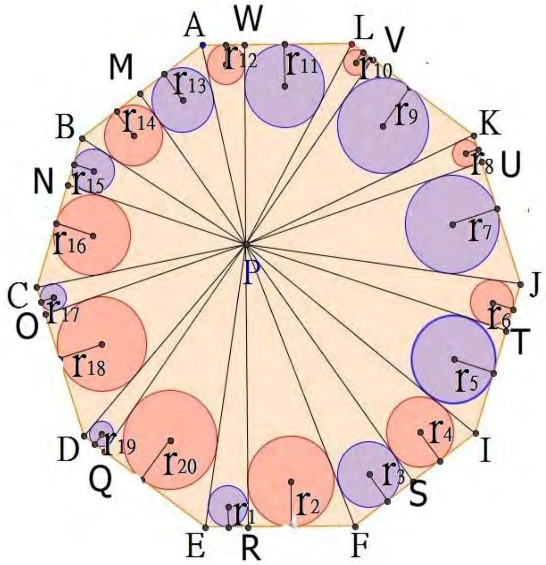
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，

即 $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}$，性質(2)也成立。

九、正十邊形

設 P 為正十邊形 ABCDEFIJKL 內一點，為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足，我們對 P 點的範圍加上一些限制。如圖二十一，過正十邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，則這 20 條垂線在正十邊形內部圍成另一個正十邊形，當 P 點在這個正十邊形內部時，由 P 點向原正十邊形各邊作垂線時都能得到垂足。


圖二十一

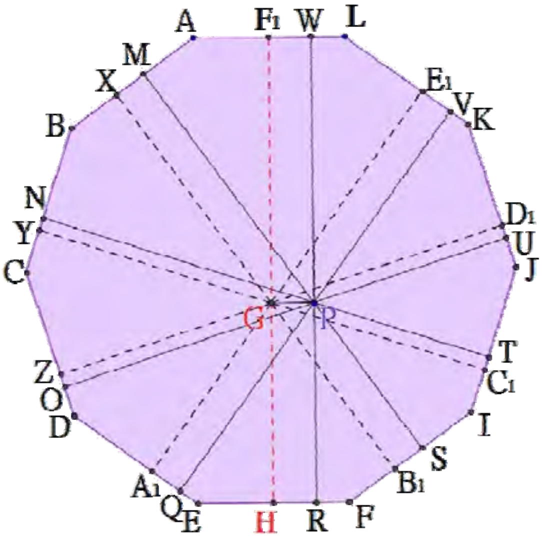


圖二十二

如圖二十二，設正十邊形 ABCDEFIJKL 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 M、N、O、Q、R、S、T、U、V、W，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI、PJ、PK、PL，則正十邊形被分成 20 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}、r_{17}、r_{18}、r_{19}、r_{20}，則有如下兩個結論：

(1)AM＋BN＋CO＋DQ＋ER＋FS＋IT＋JU＋KV＋LW
　＝MB＋NC＋OD＋QE＋RF＋SI＋TJ＋UK＋VL＋WA；

(2)$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}+r_{19}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}+r_{20}$。



圖二十三

【證明】

(1)如圖二十三，作 AL 垂直平分線 F_1H，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥F_1H，由 G 點分別作 AB、BC、CD、DE、EF、FI、IJ、JK、KL、LA 的垂線，垂足分別是 X、Y、Z、A_1、H、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1，

則 $AM+BN+CO+DQ+ER+FS+IT+JU+KV+LW$
$=(AX-MX)+(BY-NY)+(CZ+OZ)+(DA_1+QA_1)+(EH+RH)+(FB_1+SB_1)+$
$(IC_1+TC_1)+(JD_1-UD_1)+(KE_1-VE_1)+(LF_1-WF_1)$
$=(AX+BY+CZ+DA_1+EH+FB_1+IC_1+JD_1+KE_1+LF_1)+$
$(-MX-NY+OZ+QA_1+RH+SB_1+TC_1-UD_1-VE_1-WF_1)$ ……①

$MB+NC+OD+QE+RF+SI+TJ+UK+VL+WA$
$=(BX+MX)+(CY+NY)+(DZ-OZ)+(EA_1-QA_1)+(FH-RH)+(IB_1-SB_1)+$
$(JC_1-TC_1)+(KD_1+UD_1)+(LE_1+VE_1)+(AF_1+WF_1)$
$=(BX+CY+DZ+EA_1+FH+IB_1+JC_1+KD_1+LE_1+AF_1)+$
$(MX+NY-OZ-QA_1-RH-SB_1-TC_1+UD_1+VE_1+WF_1)$ ……②

由圖形對稱性可知： $AX=IB_1$，$BY=JC_1$，$CZ=KD_1$，$DA_1=LE_1$，$EH=AF_1$，$FB_1=BX$，
$IC_1=CY$，$JD_1=DZ$，$KE_1=EA_1$，$LF_1=FH$

將①－②得
$=(AM+BN+CO+DQ+ER+FS+IT+JU+KV+LW)$
$-(MB+NC+OD+QE+RF+SI+TJ+UK+VL+WA)$
$=2(-MX-NY+OZ+QA_1+RH+SB_1+TC_1-UD_1-VE_1-WF_1)$
又∵ $MX=SB_1$，$NY=TC_1$，$OZ=UD_1$，$QA_1=VE_1$，$RH=WF_1$，
∴ $2(-MX-NY+OZ+QA_1+RH+SB_1+TC_1-UD_1-VE_1-WF_1)=0$。

(2)利用和正方形性質(2)同樣的證明方法，可以得到：

$(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}+r_{19})-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}+r_{20})$

$=\frac{1}{2}[(AM+BN+CO+DQ+ER+FS+IT+JU+KV+LW)$

$-(MB+NC+OD+QE+RF+SI+TJ+UK+VL+WA)]$

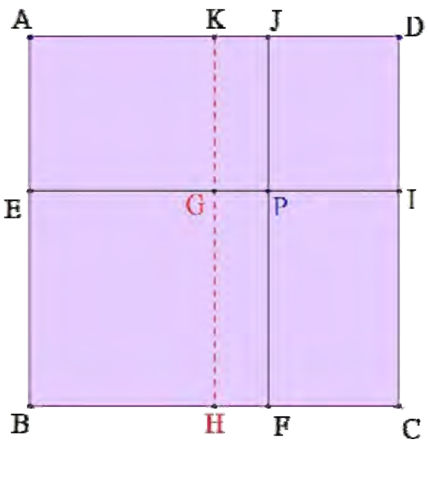
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，

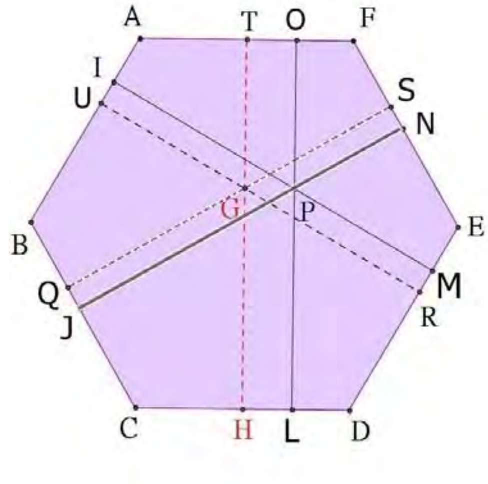
即 $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}+r_{19}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}+r_{20}$，

性質(2)也成立。

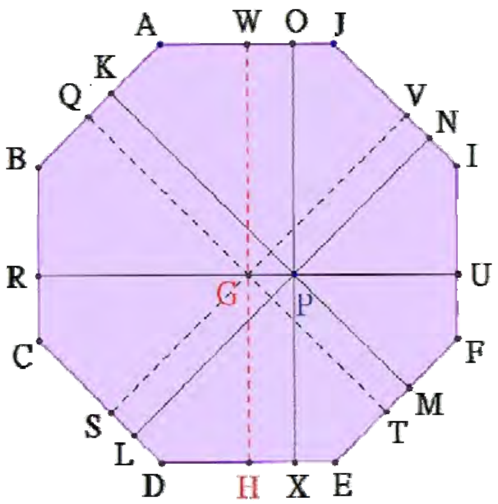
十、十二邊以上的偶數邊正多邊形

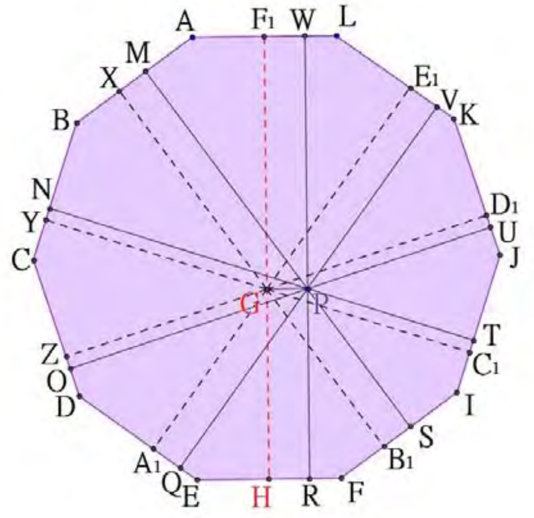
1. 想證明正方形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是「$AE=ID$，$BH=CH$，$CI=EB$，$DK=AK$，$FH=JK$」，即「正方形各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。





2. 想證明正六邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是
「 $AU = ER, BQ = FS, CH = AT, DR = BU, ES = CQ, FT = DH$ ，$IU = MR, JQ = NS, LH = OT$ 」，即「正六邊形各對角線 AD、BE、CF 兩側的線段會兩兩對稱相等」。





3. 想證明正八邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是
「AQ＝FT，BR＝UI，CS＝JV，DH＝AW，ET＝BQ，FU＝RC，IV＝DS，JW＝EH，XH＝OW，MT＝KQ，NV＝LS」，即「正八邊形各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

4. 想證明正十邊形具備「這兩個性質」，關鍵的條件是「$AX=IB_1$，$BY=JC_1$，$CZ=KD_1$，$DA_1=LE_1$，$EH=AF_1$，$FB_1=BX$，$IC_1=CY$， $JD_1=DZ$，$KE_1=EA_1$，$LF_1= FH$，$MX=SB_1$，$NY=TC_1$，$OZ=UD_1$，$QA_1=VE_1$，$RH=WF_1$」，即「正十邊形各對角線 AF、BI、CJ、DK、EL 兩側的線段會兩兩對稱相等」。

接著考慮一般的偶數邊正多邊形，我們不妨將偶數邊(2n＋2)正多邊形分成以下兩類：
從上述的關鍵的條件，我們不難發現：
(1)邊數 2(2k)：關鍵的條件是正多邊形「各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。
(2)邊數 2(2k+1)：關鍵的條件是正多邊形「各對角線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

因為任意偶數邊正多邊形均具備上述特性，所以「這兩個性質」對任意偶數邊正多邊形都成立，當然十二邊以上的偶數邊正多邊形也成立。

伍、研究結果

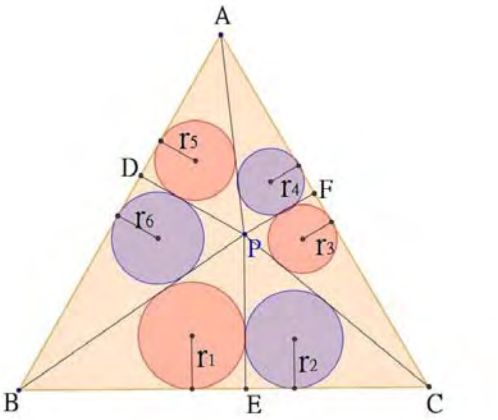
一、正三角形

如圖，設△ABC 為正三角形，P 為其內部一點，由 P 分別向正三角形的三邊作垂線，垂足分別是 D、E、F，連接 PA、PB、PC，則△ABC 被分成 6 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6，

則有如下兩個結論：

(1)$AD+BE+CF=DB+EC+FA$；

(2)$r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$。



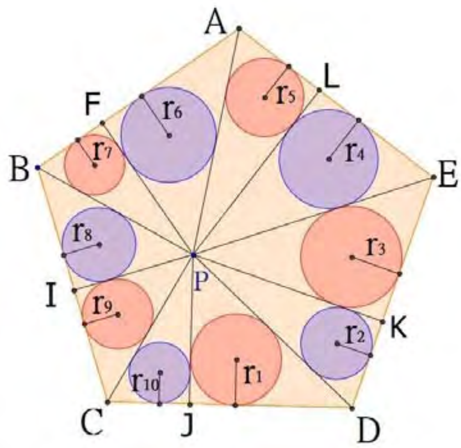
二、正五邊形

如圖，設正五邊形 ABCDE 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 F、I、J、K、L，連接 PA、PB、PC、PD、PE，則正五邊形被分成 10 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}，

則有如下兩個結論：

(1)$AF+BI+CJ+DK+EL=FB+IC+JD+KE+LA$；

(2)$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$。



三、正七邊形

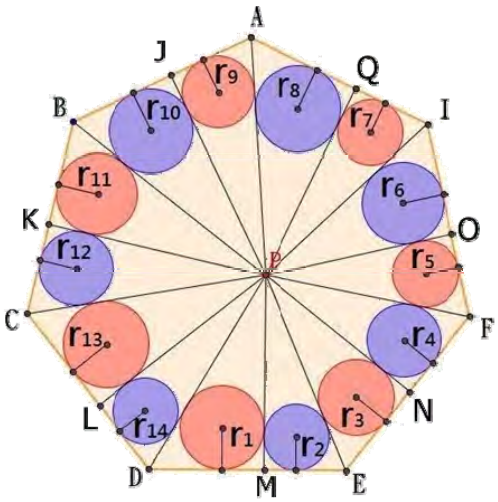
如圖，設正七角形 ABCDEFI 內部一點 P (P 點向各邊作垂線時都能得到垂足)，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別是 J、K、L、M、N、O、Q，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI，則正七邊形被分成 14 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}，

則有如下兩個結論：

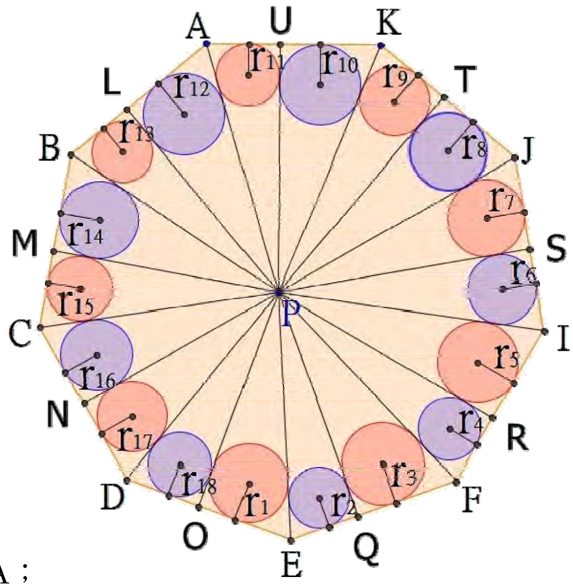
(1)$AJ+BK+CL+DM+EN+FO+IQ$

$=JB+KC+LD+ME+NF+OI+QA$；

(2)$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}$。



四、正九邊形



如圖，設正九邊形 ABCDEFIJK 內部一點 P (P 點向各邊作垂線時都能得到垂足)，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別是 L、M、N、O、Q、R、S、T、U，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI、PJ、PK，則正九邊形被分成 18 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}、r_{17}、r_{18}，則有如下兩個結論：

(1)AL＋BM＋CN＋DO＋EQ＋FR＋IS＋JT＋KU
　＝LB＋MC＋ND＋OE＋QF＋RI＋SJ＋TK＋UA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}$。

五、十一邊以上的奇數邊正多邊形

1. 正三角形的「這兩個性質」，等價於「 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 」。

2. 正五邊形的「這兩個性質」，等價於「 $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$ 」。

3. 正七邊形的「這兩個性質」，等價於「 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ 」。

4. 正九邊形的「這兩個性質」，等價於「 $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$ 」。

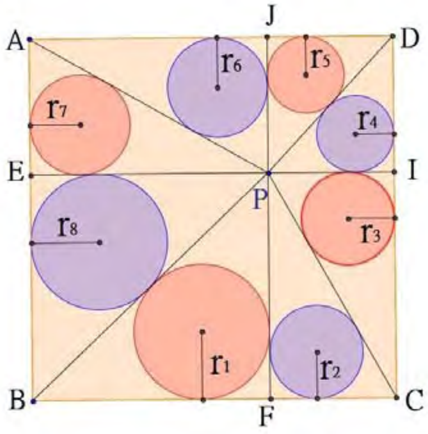
5. 正十一邊形的「這兩個性質」，等價於「 $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ 」。

6. 奇數邊(2n＋1)正多邊形的「這兩個性質」，等價於

「 $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$ 」。

因此，任意奇數邊正多邊形都具備「這兩個性質」。

六、正方形



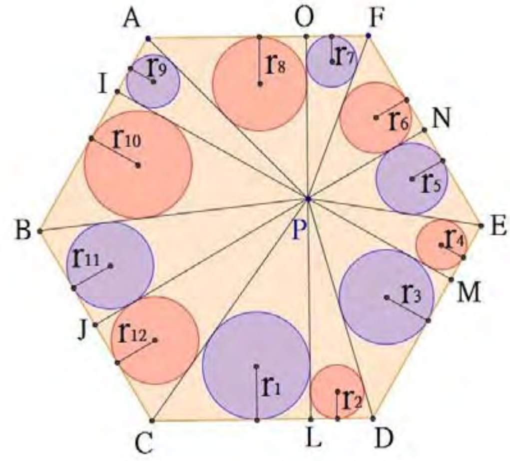
　如圖，設正方形 ABCD 內部一點 P，由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 E、F、I、J，連接 PA、PB、PC、PD，則正方形被分成 8 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8，則有如下兩個結論：

(1) AE＋BF＋CI＋DJ＝EB＋FC＋ID＋JA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7=r_2+r_4+r_6+r_8$。

七、正六邊形

如圖，設正六邊形 ABCDEF 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 I、J、L、M、N、O，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF，則正六邊形被分成 12 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}，則有如下兩個結論：



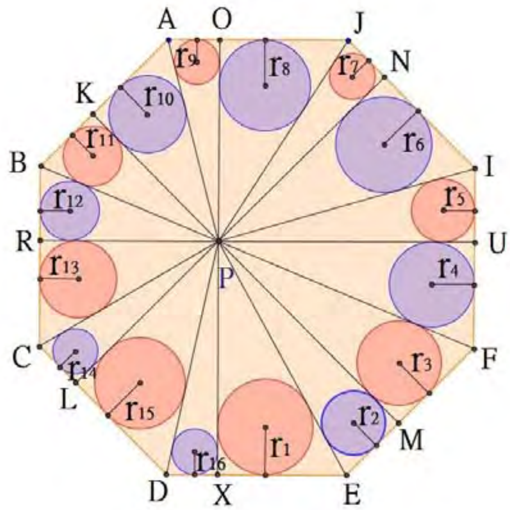
(1) AI＋BJ＋CL＋DM＋EN＋FO

＝IB＋JC＋LD＋ME＋NF＋OA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}$。

八、正八邊形

如圖，設正八邊形 ABCDEFIJ 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 K、R、L、X、M、U、N、O，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI、PJ，則正八邊形被分成 16 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}，則有如下兩個結論：



(1) AK＋BR＋CL＋DX＋EM＋FU＋IN＋JO

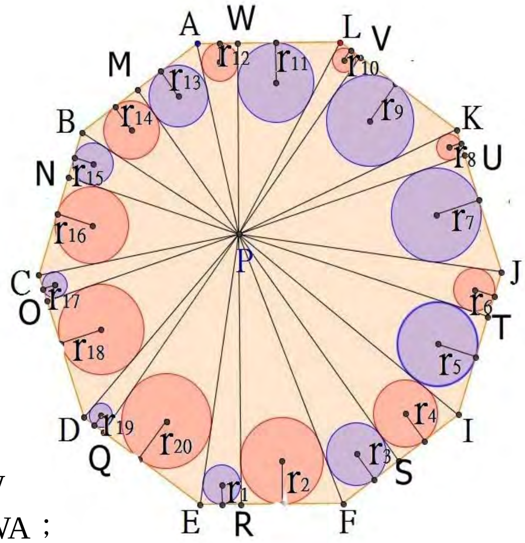
＝KB＋RC＋LD＋XE＋MF＋UI＋NJ＋OA；

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}$

$=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}$。

九、正十邊形

如圖，設正十邊形 ABCDEFIJKL 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設垂足分別為 M、N、O、Q、R、S、T、U、V、W，連接 PA、PB、PC、PD、PE、PF、PI、PJ、PK、PL，則正十邊形被分成 20 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}、r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}、r_{16}、r_{17}、r_{18}、r_{19}、r_{20}，則有如下兩個結論：



(1)AM＋BN＋CO＋DQ＋ER＋FS＋IT＋JU＋KV＋LW

＝MB＋NC＋OD＋QE＋RF＋SI＋TJ＋UK＋VL＋WA；

(2)$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9+r_{11}+r_{13}+r_{15}+r_{17}+r_{19}=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}+r_{12}+r_{14}+r_{16}+r_{18}+r_{20}$。

十、十二邊以上的偶數邊正多邊形

1. 正方形具備「這兩個性質」，源自於「正方形各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

2. 正六邊形具備「這兩個性質」，源自於「正六邊形各對角線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

3. 正八邊形具備「這兩個性質」，源自於「正八邊形各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

4. 正十邊形具備「這兩個性質」，源自於「正十邊形各對角線兩邊的線段會兩兩對稱相等」。

5. 正十二邊形具備「這兩個性質」，源自於「正十二邊形各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

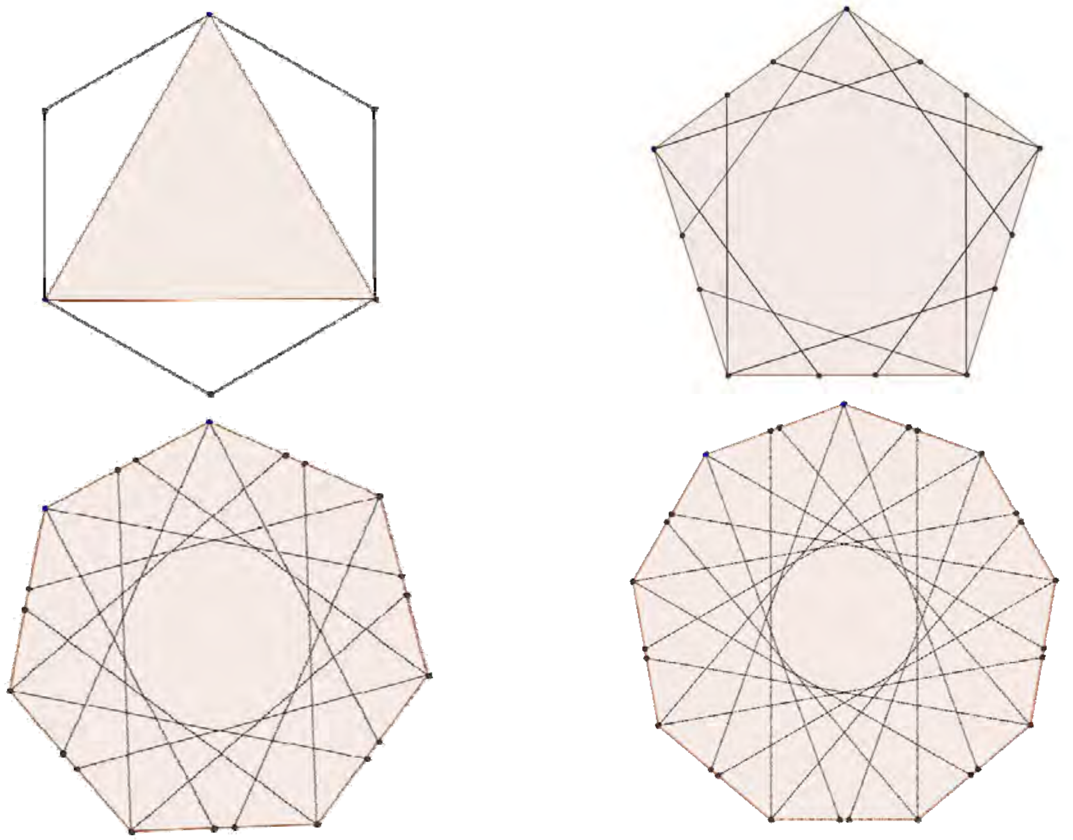
6. 將偶數邊(2n＋2)正多邊形分成以下兩類：
   (1)邊數 2(2k)：「這兩個性質」，源自於「各組對邊中點連線兩側的線段會兩兩對稱相等」。
   (2)邊數 2(2k＋1)：「這兩個性質」，源自於「各對角線兩側的線段會兩兩對稱相等」。

因此，任意偶數邊正多邊形也都具備「這兩個性質」。

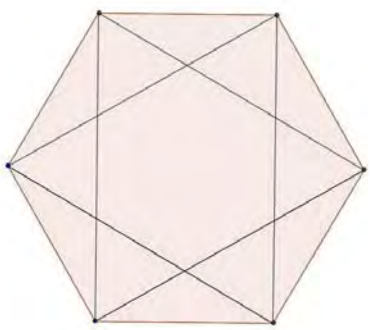
陸、討論

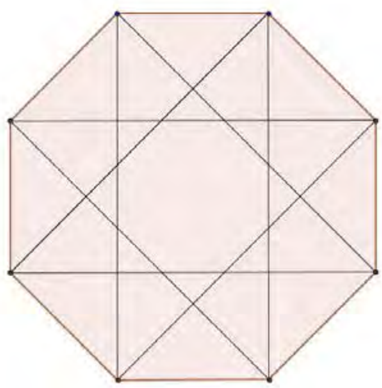
一、為了使 P 點向正多邊形各邊作垂線時都能得到垂足，我們會對 P 點的範圍加上一些限制，過正多邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線，依邊數奇偶情形討論如下：

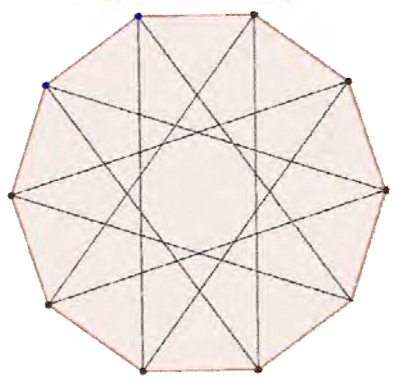
1. 如下圖，奇數邊(2n＋1)正多邊形時，這些垂線會圍成一個邊數為 4n＋2 的正多邊形，而這些垂線正好是以原正多邊形的中心為圓心，邊長為半徑的圓之包絡線。



2. 如下圖，偶數邊(2n＋2)正多邊形時，這些垂線會圍成一個邊數也是 2n＋2 的正多邊形，而這些垂線正好是以原正多邊形的中心為圓心，邊長為半徑的圓之包絡線。







當 P 點在「這些垂線所圍成的正多邊內部」時，由 P 點向原正多邊形各邊作垂線時都能得到垂足。

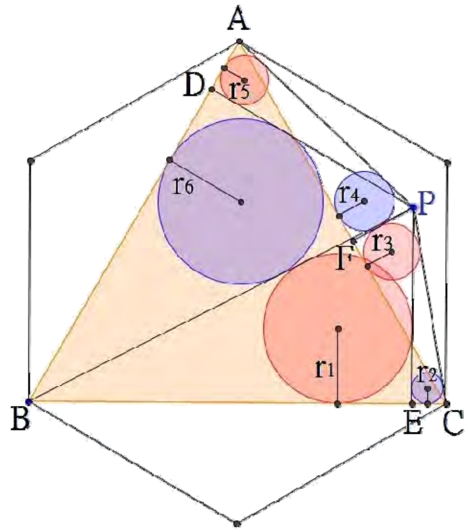
二、若將上述「這些垂線所圍成的正多邊形內部」稱為「可行解區域」，則 P 點在可行解區域內都有「這兩個性質」。但可行解區域不一定在正多邊形內部，正三角形是唯一的反例，就依 P 點還有可能的位置討論如下：

1. 當 P 點在可行解區域內但在正三角形外側時，「這兩個性質」仍然成立。

如圖二十四，設△ABC 為正三角形，P 為其外部一點，由 P 分別向正三角形的三邊作垂線，垂足分別是 D、E、F，連接 PA、PB、PC，則會形成 6 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6，則有如下兩個結論：

(1)$AD+BE+CF=DB+EC+FA$；

(2)$r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$。



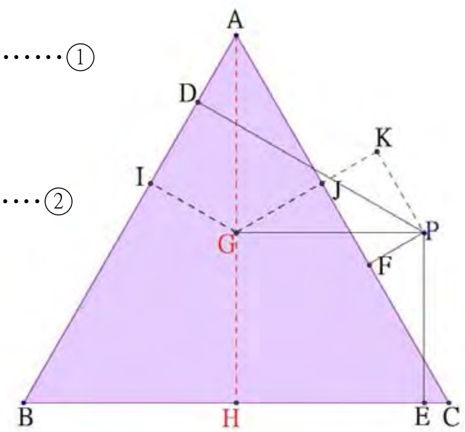
圖二十四

【證明】

(1)如圖二十五，過 A 作 AH⊥BC，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、AC 的垂線，垂足分別是 I、J，則

$$AD+BE+CF=(AI-DI)+(BH+EH)+(CJ-FJ)$$
$$=(AI+BH+CJ)+(-DI+EH-FJ) \quad \cdots\cdots①$$

$$DB+EC+FA=(BI+DI)+(CH-EH)+(AJ+FJ)$$
$$=(BI+CH+AJ)+(DI-EH+FJ) \quad \cdots\cdots②$$



圖二十五

由圖形對稱性可知：$AI=AJ, BI=CJ, BH=CH$

將①－②得

$$(AD+BE+CF)-(DB+EC+FA)=2(EH-DI-FJ)$$

因此要證明性質(1)成立，只需證明 $2(EH-DI-FJ)=0$，

由圖二十五可知：$\angle PGJ=\angle HGJ-\angle HGP=120°-90°=30°=\angle GPD$ 且 $EH=PG$。

過 P 作 PK⊥GJ，交 GJ 的延長線於 K，則有 FJ＝PK＝$PG\sin 30°$，

推得 $EH-DI-FJ=PG-PG\sin 30°-PG\sin 30°=PG(-2\sin 30°+1)=0$，

從而性質(1)成立。

(2)由圖二十四及<u>直角三角形內切圓定理</u>可得

$$r_1=\frac{BE+PE-PB}{2}，r_3=\frac{CF+PF-PC}{2}，r_5=\frac{AD+PD-PA}{2}，$$

$$r_2=\frac{EC+PE-PC}{2}，r_4=\frac{FA+PF-PA}{2}，r_6=\frac{DB+PD-PB}{2}。$$

推得 $(r_1+r_3+r_5)-(r_2+r_4+r_6)=\frac{1}{2}[(AD+BE+CF)-(DB+EC+FA)]$，

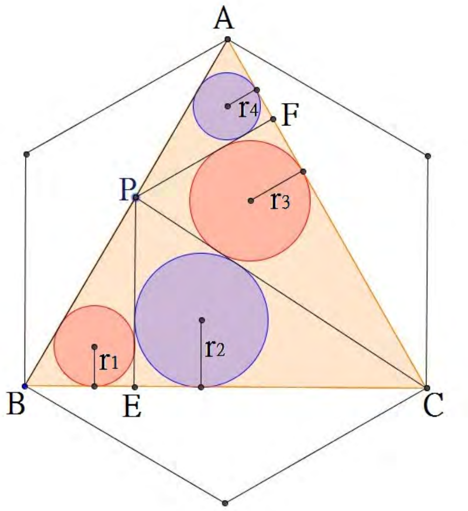
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，即 $r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$，性質(2)也成立。

2. 當 P 點在可行解區域內但在正三角形邊上時，「這兩個性質」仍然成立。

如圖二十六，設△ABC 為正三角形，P 為其邊上一點，由 P 分別向正三角形的三邊作垂線，垂足分別是 P、E、F，連接 PC，則△ABC 被分成 4 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4，則有如下兩個結論：

(1) $AP+BE+CF=PB+EC+FA$；

(2) $r_1+r_3=r_2+r_4$。



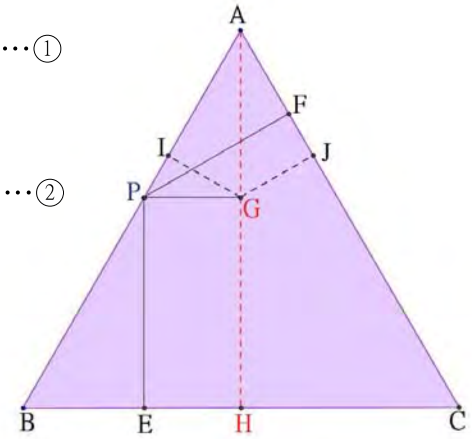
圖二十六

【證明】

(1)如圖二十七，過 A 作 AH⊥BC，垂足為 H，再過 P 作 PG⊥AH，垂足為 G，由 G 點分別作 AB、AC 的垂線，垂足分別是 I、J，則

$$AP+BE+CF=(AI+PI)+(BH-EH)+(CJ+FJ)$$
$$=(AI+BH+CJ)+(PI-EH+FJ) \quad \cdots\cdots①$$

$$PB+EC+FA=(BI-PI)+(CH+EH)+(AJ-FJ)$$
$$=(BI+CH+AJ)+(-PI+EH-FJ) \cdots\cdots②$$



圖二十七

由圖形對稱性可知：$AI=AJ, BI=CJ, BH=CH$

將①－②得

$$(AP+BE+CF)-(PB+EC+FA)=2(PI-EH+FJ)$$

因此要證明性質(1)成立，只需證明 $2(PI-EH+FJ)=0$，

由圖二十七可知：

$\angle PGI=\angle HGI-\angle HGP=120°-90°=30°=\angle GPF$ 且 $EH=PG$。

則有 $PI-EH+FJ=PG\sin 30°-PG+PG\sin 30°=PG(2\sin 30°-1)=0$，

從而性質(1)成立。

(2)由圖二十六及直角三角形內切圓定理可得

$r_1=\dfrac{BE+PE-PB}{2}$，$r_3=\dfrac{CF+PF-PC}{2}$，$r_2=\dfrac{EC+PE-PC}{2}$，$r_4=\dfrac{FA+PF-PA}{2}$。

推得 $(r_1+r_3)-(r_2+r_4)=\frac{1}{2}[(AP+BE+CF)-(PB+EC+FA)]$，

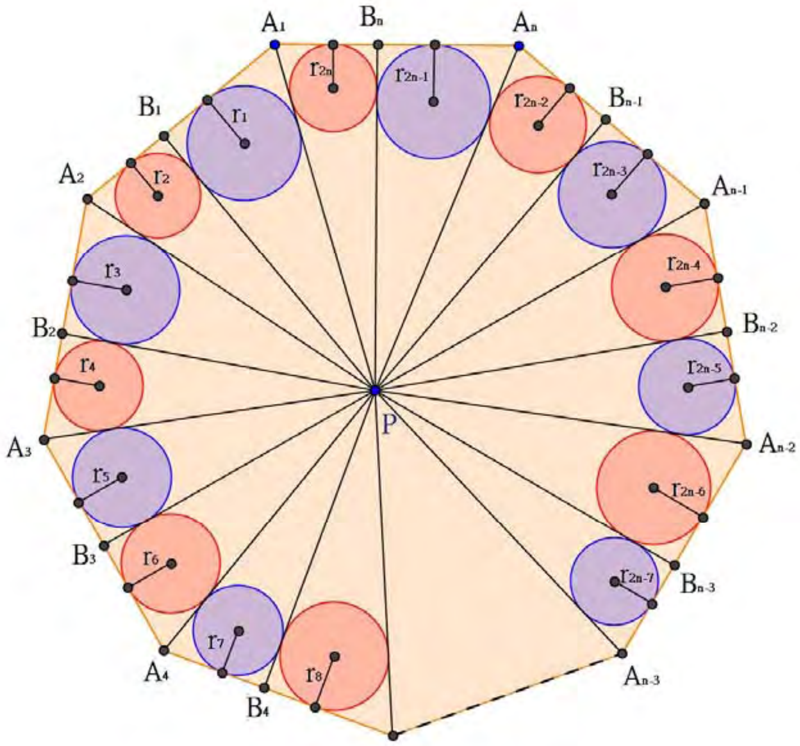
由於性質(1)成立，從而上式括號內為零，即 $r_1+r_3=r_2+r_4$，性質(2)也成立。

柒、結論

如圖二十八，設正 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 內部一點 P（P 點向各邊作垂線時都能得到垂足），由 P 點向各邊作垂線，設其在 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、⋯、$A_{n-2}A_{n-1}$、$A_{n-1}A_n$、A_nA_1 的垂足分別為 B_1、B_2、B_3、⋯、B_{n-2}、B_{n-1}、B_n，連接 PA_1、PA_2、PA_3、⋯、PA_{n-1}、PA_n，則正 n 邊形被分成 2n 個直角三角形，設這些直角三角形的內切圓半徑依次為 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、⋯、r_{2n-3}、r_{2n-2}、r_{2n-1}、r_{2n}，則有如下兩個結論：

(1) $A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\cdots+A_{n-1}B_{n-1}+A_nB_n=B_1A_2+B_2A_3+B_3A_4+\cdots+B_{n-1}A_n+B_nA_1$；

(2) $r_1+r_3+r_5+\cdots+r_{2n-3}+r_{2n-1}=r_2+r_4+r_6+\cdots+r_{2n-2}+r_{2n}$。



圖二十八

上述「這兩個性質」之間的橋樑是「直角三角形內切圓定理」，故兩性質是相互依存的。其中奇數邊(2n＋1)正多邊形具備「這兩個性質」，原因在「這兩個性質」等價於三角恆等式

「$\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$」。

偶數邊(2n＋2)正多邊形具備「這兩個性質」，原因在「這兩個性質」源自其有「對稱於對邊中點連線與對角線」的特性。

捌、參考資料

1. 許志農主編(100 年)。高中數學課本第三冊(初版)。台北市：龍騰文化事業股份有限公司，P46~56、P118~133。
2. 劉步松(101 年 3 月)。正三角形和正五邊形的兩個性質。數學傳播 36 卷 1 期，中央研究院數學研究所，P93~96。

【評語】040405

本作品對正 n 多邊形從內部一點向各邊作垂線，分成 2n 個小三角形，討論其內切圓半徑之一有趣關係，由看到有關正三角形及正五邊形的結果,便猜測正 n 多邊形亦有類似性質,對中學生而言，為一不錯的推廣。作品先做正五邊形，再正七、正九邊形，然後正十一邊形以上，略嫌繁瑣。若能更精簡些，將增加其可讀性。