中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040404

逆光飛行－穿越封鎖線

學校名稱：高雄市立三民高級中學

作者：	指導老師：
高二 巫鴻廷	蘇啟天

關鍵詞：三層波、齊次遞迴關係、k 階等差數列

作品名稱：逆光飛行-穿越封鎖線

摘　　要

逆光飛行意謂著光線的反射，由於光線在穿過透明板時會產生反射或穿越，倘若只有一層透明板時，光線穿過透明板只有一種方式，但如果將透明板的數目增加到三層或四層時，光線就有可能反射 0 次、2 次、4 次...或 $2n$ 次($n \in N$)後穿越所有的透明板。同樣數目的透明板，假如固定反射次數時，穿越所有的透明板的方法數會有幾種？它們之間的關聯性即為我們想要探討的主題。

壹、 研究動機

在高雄大學上數學研究營時，聽到游森棚教授提到一個關於光在穿過四層透明板時，所有產生出的路徑及變化，我覺得很特別，那時和同學討論這件事情時，原本有找到一個規律，但是換個變數又不對了，那種規律是一個我完全沒想過的可能，然後直覺上就覺得好像可以把這個和某種東西連在一起，所以就想找出在這之中的關聯性。

貳、 研究目的

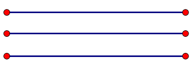
(1) 找出解決問題的規律
(2) 發現 m 層波數列
(3) 求出穿越四層透明板構成的 3 層波數列的第 n 項
(4) 求出 k 階等差數列的一般項

參、 研究設備及器材

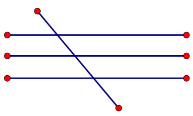
1.個人電腦（軟體：Microsoft Word、Math Type、GSP4.04）
2.鉛筆、計算紙、直尺、

肆、 研究過程及方法

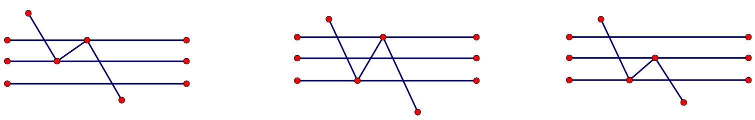
一、　　找出規律：

1. 三層板：

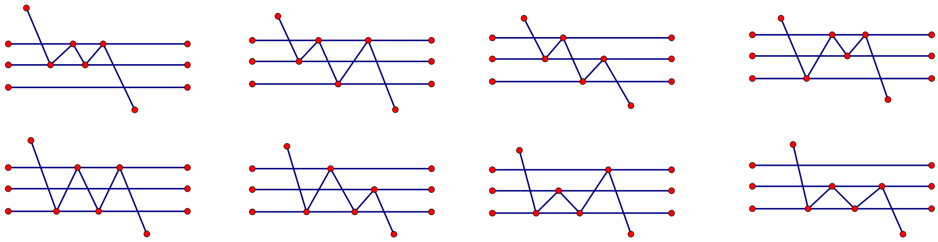
(1)因為光線要穿過所有透明板，所以反射次數必為偶數次

(i)光反射 0 次有 1 種可能 

(ii)光反射 2 次有 3 種可能(如下圖)

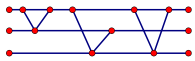


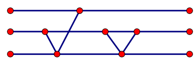
(iii)至於光反射 4 次→先反射 2 次再反射 2 次有 8 種可能(如下圖)



(2)要歸納出反射 $2n$ 次的路線 a_{2n} 有幾種，可令三層板  依序爲 l_1 、l_2 、l_3 ，定義 b_{2n} 爲從 l_2 出發後反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數；而 a_{2n} 也可以把它看成光線由 l_1 出發後反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數

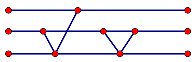
(i)光線反射 0 次有 1 種可能故 $a_0=1, b_0=1$ 。

反射 2 次一定由 l_1 板出發，所以→  有 3 種，故 $a_2=3$ 。

反射 4 次→因爲 4 次會先反射 2 次再反射 2 次，由上行的圖可看出又第一次反射 2 次之後，有 2 次從 l_1 板出發，1 次從 l_2 板出發（ l_2 板出發  $b_2=2$ 種）。

所以→ $a_4=2\times3+1\times2=8=2a_2+b_2$

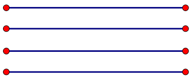
（反射 2 次後，之後反射點在 l_1 板有 2 種，之後反射點在 l_2 板有 1 種）

(ii)由 l_2 板出發，反射 4 次穿越三層板的方法數可由圖形  看出反射 2 次後，反射點在 l_1 板有 1 種，反射點在 l_2 板有 1 種，故 $b_4=1\times3+1\times2=5=a_2+b_2$

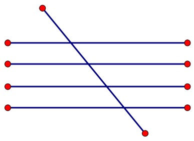
(iii)反射 6 次時，先反射 4 次後再反射 2 次，因此由 l_1 、 l_2 去看可以以此類推

反射次數↓	a_{2n}	b_{2n}
0〈n=0〉	1	1
2〈n=1〉	3	2
4〈n=2〉	8	5=（2+3）
6〈n=3〉	21	13=（5+8）
8〈n=4〉	55	34
.....	.....	.....

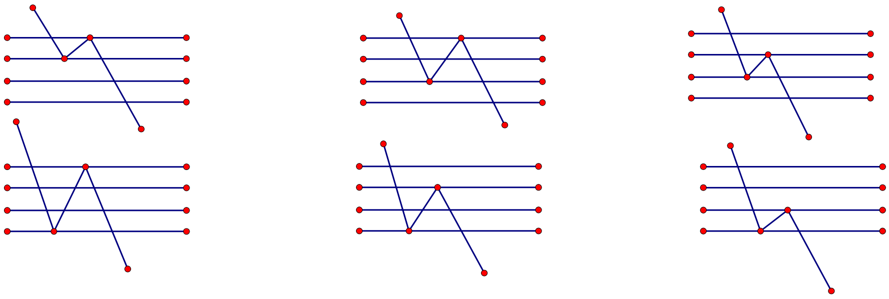
因此可以歸納得到 $\begin{matrix} a_{2n}=2a_{2n-2}+b_{2n-2} \\ b_{2n}=a_{2n-2}+b_{2n-2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{bmatrix}, a_0=1, b_0=1$

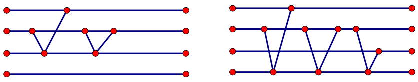
2. 四層板中： 令四層板依序爲 l_1、l_2、l_3、l_4 板

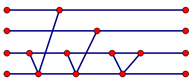
定義 a_{2n} 爲光線由 l_1 出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數；b_{2n} 爲從 l_2 出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數；而 c_{2n} 爲光線由 l_3 出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數。

(1)光反射 0 次有 1 種可能 $a_0 = 1$  ，且 $b_0 = 1$，$c_0 = 1$。

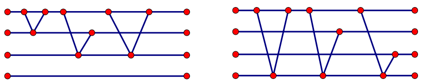
(2)光反射 2 次有 6 種可能 $a_2 = 6$

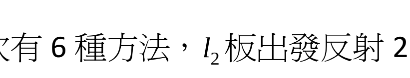


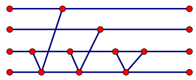
(3) l_2 板出發反射 2 次，有 5 種可能 $b_2 = 5$ 

(4) l_3 板出發反射 2 次，有 3 種可能 $c_2 = 3$ 

(5)光反射 4 次→ 先反射 2 次再反射 2 次

先反射 2 次由 l_1 板出發  有 6 種方法，其中反射 2 次後，之後反射點在 l_1 板有 3 種，之後反射點在 l_2 板有 2 種，之後反射點在 l_3 板有 1 種，又 l_1 板出發反射 2 次有 6 種方法，l_2 板出發反射 2 次有 5 種方法，l_3 板出發反射 2 次有 3 種方法；因此 3x6＋2x5+1x3＝31 $= a_4 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$。

(6)由 l_2 板出發有 5 種方法  其中反射 2 次後，之後反射點在 l_1 板有 2 種，之後反射點在 l_2 板有 2 種，之後反射點在 l_3 板有 1 種，又 l_1 板出發反射 2 次有 6 種方法，l_2 板出發反射 2 次有 5 種方法，l_3 板出發反射 2 次有 3 種方法；因此 $b_4 =$ 2x6＋2x5+1x3＝25 $= 2a_2 + 2b_2 + c_2$。

(7)由 l_3 板出發有 3 種方法  其中反射 2 次後，之後反射點在 l_1 板有 1 種，之後反射點在 l_2 板有 1 種，之後反射點在 l_3 板有 1 種，又 l_1 板出發反射 2 次有 6 種方法，l_2 板出發反射 2 次有 5 種方法，l_3 板出發反射 2 次有 3 種方法；因此

$c_4 = 1\times6 + 1\times5 + 1\times3 = 14 = a_2 + b_2 + c_2$ 。

可以歸納得到

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 3a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + c_{2n-2} \\ b_{2n} &= 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + c_{2n-2} \\ c_{2n} &= a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \end{bmatrix}, a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$$

看成表格如下

反射次數↓	a_{2n}	b_{2n}	c_{2n}
0〈n=0〉	1	1	1
2〈n=1〉	6	5	3
4〈n=2〉	31	25	14
6〈n=3〉	157	126	70
8〈n=4〉	793	636	353
.....	.....	.....	.....

二、 發現 m 層波數列：

1.三層板：$\begin{aligned} a_{2n} &= 2a_{2n-2} + b_{2n-2} \\ b_{2n} &= a_{2n-2} + b_{2n-2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{bmatrix}$

由於我們在討論規律時，找出上列式子，但如果經由這個式子，想要找到更多項時，不是很好運算，於是經由上面的式子，在反覆思考後，我們發現可以經由下面的方法去推出整個數列：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & \rightarrow & 2 & & & \rightarrow & 5 & & & \rightarrow & 13 & & \\ \downarrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \cdots\cdots \\ 1 & & & \rightarrow & 3 & & & \rightarrow & 8 & & & \rightarrow & 21 \end{array}$$

我們將這個數列的型式稱爲二層波，而二層波的底層恰好就是穿越三層板的方法數所成的數列(有趣的是這個數列而恰好是 Fibonacci Sequence 的偶數項)。

證明：設從第二層出發的光線反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數爲 b_{2n}

光線反射 $2n$ 次後穿越三層透明板的方法數爲 a_{2n}

將 $a_0,\cdots,a_{2n};b_0,\cdots,b_{2n}$ 取代數字後，可以得到以下型式：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
b_0 & \rightarrow & b_2=a_0+b_0 & & & \rightarrow & \cdots & & & \rightarrow & b_{2n}=a_{2n-2}+b_{2n-2} & & \\
\downarrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
a_0 & & & \rightarrow & a_2=2a_0+b_0 & & & \rightarrow & \cdots & & & \rightarrow & a_{2n}=2a_{2n-2}+b_{2n-2}
\end{array}$$

因此可以證明出二層波數列的底層就是光線穿越三層板的方法數所成數列

而第一層形成的數列，則爲從第二層出發的光線反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數。

2. 四層板：
$$\begin{aligned} a_{2n}&=3a_{2n-2}+2b_{2n-2}+c_{2n-2}\\ b_{2n}&=2a_{2n-2}+2b_{2n-2}+c_{2n-2}\\ c_{2n}&=a_{2n-2}+b_{2n-2}+c_{2n-2}\end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n}\\ b_{2n}\\ c_{2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{2n-2}\\ b_{2n-2}\\ c_{2n-2}\end{bmatrix}, a_0=1, b_0=1, c_0=1$$

將二層波再加一層，再仿造二層波的模式，我們得到下面的式子：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 3 & & & \rightarrow & 14 & & & \rightarrow & 70 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 25 & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 126\cdots\cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 6 & & & \rightarrow & 31 & & & \rightarrow & 157
\end{array}$$

我們將這個數列的型式稱爲三層波，而三層波的底層恰好就是穿越四層板的方法數所成的數列，光線從第二層透明板出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數所成的數列就是三層波的中間層奇數項；而光線由第三層透明板出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數所成的數列就是三層波的第一層。

證明：設從第二層出發的光線反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數爲 b_{2n}

從第三層出發的光線反射 $2n$ 次後穿越三層板的方法數爲 c_{2n}

光線反射 $2n$ 次後穿越三層透明板的方法數爲 a_{2n}

將 $a_0,\cdots,a_{2n};b_0,\cdots,b_{2n};c_0,\cdots c_{2n}$ 取代數字後，可以得以下型式：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
c_0 & \rightarrow & c_2 & \cdots & & \rightarrow & c_{2n-2} & & & \rightarrow & c_{2n}=a_{2n-2}+b_{2n-2}+c_{2n-2} & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
b_0 & \rightarrow & a_0+b_0 & \rightarrow & b_2 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & b_{2n-2} & \rightarrow & b_{n-2}=a_{2n-2}+b_{2n-2} & \rightarrow & b_{2n}=2a_{2n-2}+2b_{2n-2}+c_{2n-2} \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
a_0 & & & \rightarrow & a_2 & & \cdots & \rightarrow & a_{2n-2} & & & \rightarrow & a_{2n}=3a_{2n-2}+2b_{2n-2}+c_{2n-2}
\end{array}$$

因此可以證明出三層波的底層就是光線穿越四板的方法數所成數列；而三層波第一層形成的數列，則爲從第三層出發的光線反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數；三層波第二層形成的數列的奇數項，就是光線由第二層透明板層出發後反射 $2n$ 次後穿越四層板的方法數。

3. 透明板再增加時：

(1) 經過前面的討論及證明我們可以用同樣的方法推出四層波的底層就是光線反射 $2n$ 次後穿越五層板的方法數所成數列：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 4 & & & \rightarrow & 30 & & & \rightarrow & 246 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 26 & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 216 & \rightarrow & 462 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 19 & \rightarrow & 75 & \rightarrow & 160 & \rightarrow & 622 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 10 & & & \rightarrow & 85 & & & \rightarrow & 707
\end{array}
$$

證明方式也是和前面相同，將 $a_0,\cdots,a_{2n};b_0,\cdots,b_{2n};c_0,\cdots c_{2n};d_0,\cdots d_{2n}$ 取代數字後，可以得以下型式：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
d_0 & \rightarrow & d_2 & & \cdots & \rightarrow & d_{2n-2} & & & \rightarrow & d_n = a_{2n-2}+b_{2n-2}+c_{2n-2}+d_{2n-2} & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
c_0 & \rightarrow & a_0+b_0+c_0 & \rightarrow & c_2 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & c_{2n-2} & \rightarrow & a_{2n-2}+b_{2n-2}+c_{2n-2} & \rightarrow & c_n = 2a_{2n-2}+2b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2} \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
b_0 & \rightarrow & a_0+b_0 & \rightarrow & b_2 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & b_{2n-2} & \rightarrow & a_{2n-2}+b_{2n-2} & \rightarrow & b_n = 3a_{2n-2}+3b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2} \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
a_0 & & & \rightarrow & a_2 & & & \rightarrow & a_{2n-2} & & & \rightarrow & a_n = 4a_{2n-2}+3b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2}
\end{array}
$$

而且可以經由這個方法，輕易得到數列的關係：

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= 4a_{2n-2}+3b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2} \\
b_{2n} &= 3a_{2n-2}+3b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2} \\
c_{2n} &= 2a_{2n-2}+2b_{2n-2}+2c_{2n-2}+d_{2n-2} \\
d_{2n} &= a_{2n-2}+b_{2n-2}+c_{2n-2}+d_{2n-2}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \\ d_{2n} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \\ d_{2n-2} \end{bmatrix}
$$

(2) 光線穿越 $m+1$ 層透明板的方法數，就是 m 層波的底層

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,0} & \rightarrow & a_{1,2} & & \cdots & \rightarrow & a_{1,2n-2} & & & \rightarrow & a_{1,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2} & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
a_{2,0} & \rightarrow & a_{2,0}+\cdots+a_{m,0} & \rightarrow & a_{2,2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & a_{2,2n-2} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j+1,2n-2} & \rightarrow & a_{2,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2}+\sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{m-1,0} & \rightarrow & a_{m,0}+a_{m-1,0} & \rightarrow & a_{m-1,2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & a_{m-1,2n-2} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{2} a_{m-j+1,2n-2} & \rightarrow & a_{m-1,2n}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
a_{m,0} & & & \rightarrow & a_{m,2} & & \cdots & \rightarrow & a_{m,2n-2} & & & \rightarrow & a_{m,2n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2}
\end{array}
$$

得到底層數列的關係如下：

$$
\begin{bmatrix} a_{m,2n} \\ a_{m-1,2n} \\ \cdots \\ a_{2,2n} \\ a_{1,2n} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} m & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ m-1 & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{m,2n-2} \\ a_{m-1,2n-2} \\ \vdots \\ a_{2,2n-2} \\ a_{1,2n-2} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
a_{m,2n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{m-1,2n}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\vdots \\
a_{2,2n}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{1,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2}
\end{array}
$$

因此我們解決了不論透明板層數增加到多少，都可以藉由同樣的方法找出數列的關係。

伍、研究結果

一、求出穿越四層透明板構成的 3 層波底層的第 n+1 項

1.定義及定理

定義 1.1：假設 $\{a_n\}$ 是一個數列，而對於 $n>n_0$，每一個 a_n 與它前面的項 a_i，$i<n$，滿足方程式 $f(a_n,a_{n-1},\cdots)=0$ 稱爲**遞迴關係**；型如 $f(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k})=0$ 的遞迴關係，稱爲 k **階**遞迴關係。

定義 1.2：型如 $c_0(n)a_n+c_1(n)a_{n-1}+\cdots+c_k(n)a_{n-k}=f(n)$，$c_0(n),c_k(n)\neq 0$ 的遞迴關係，稱爲 k **階線性**遞迴關係。

定義 1.3：設 $n\geq k, k\in N=\{1,2,\cdots\}$，若 $c_0,c_1,\cdots,c_k\in R$，其中 $c_0,c_k\neq 0$，則型如 $c_0a_n+c_1a_{n-1}+\cdots+c_ka_{n-k}=f(n)$ 的遞迴關係，稱爲 k 階**常係數**線性遞迴關係。

定義 1.4：如果 $a_n=a_{n-1}=\cdots=0$ 是遞迴關係 $f(a_n,a_{n-1},\cdots)=0$ 的一個解，則稱 $f(a_n,a_{n-1},\cdots)=0$ 爲**齊次**遞迴關係。

定義 1.5：將具有型式 $a_n = A\alpha^n$ 代入**齊次**遞迴關係 $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n) = 0$ 中，可以得到 $c_0 A\alpha^n + c_1 A\alpha^{n-1} + \cdots + c_k A\alpha^{n-k} = 0 \Rightarrow A\alpha^{n-k}(c_0\alpha^k + c_1\alpha^{k-1} + \cdots + c_k) = 0$，我們稱 $c_0\alpha^k + c_1\alpha^{k-1} + \cdots + c_k = 0$ 為該遞迴關係式的特徵方程式，且稱 α 為特徵根。

定理 1.1：在定義 1.4 的**齊次**遞迴關係中，假設 $\alpha_i, i = 1,2,\cdots k$ 為其特徵根，則

$$a_n = t_1{\alpha_1}^n + t_2{\alpha_2}^n + \cdots + t_k{\alpha_k}^n$$

為此遞迴關係式的解，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 為常數。

證明：因為 $\alpha_i, i = 1,2,\cdots k$ 為其特徵根，代入原方程式可得

$$c_0{\alpha_i}^k + c_1{\alpha_i}^{k-1} + \cdots + c_k = 0$$

將式兩邊同乘 $t_i{\alpha_i}^{n-k}$,則

$$c_0 t_i{\alpha_i}^n + c_1 t_i{\alpha_i}^{n-1} + \cdots + c_k t_i{\alpha_i}^{n-k} = 0$$

將 $i = 1,2,\cdots k$ 代入上式並加總

$$\begin{array}{r} c_0 t_1{\alpha_1}^n + c_1 t_1{\alpha_1}^{n-1} + \cdots + c_k t_1{\alpha_1}^{n-k} = 0 \\ c_0 t_2{\alpha_2}^n + c_1 t_2{\alpha_2}^{n-1} + \cdots + c_k t_2{\alpha_2}^{n-k} = 0 \\ \vdots \\ \underline{+)\quad c_0 t_k{\alpha_k}^n + c_1 t_k{\alpha_k}^{n-1} + \cdots + c_k t_k{\alpha_k}^{n-k} = 0} \end{array}$$

可得到 $c_0(t_1{\alpha_1}^n + \cdots + t_k{\alpha_k}^n) + c_1(t_1{\alpha_1}^{n-1} + \cdots + t_k{\alpha_k}^{n-1}) + \cdots + c_k(t_1{\alpha_1}^{n-k} + \cdots + t_k{\alpha_k}^{n-k}) = 0$ ，

故 $a_n = t_1{\alpha_1}^n + t_2{\alpha_2}^n + \cdots + t_k{\alpha_k}^n$ 為此遞迴關係式 $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$ 的解。

2. 找出二層波底層的遞迴關係：

(1)二層波：

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 2a_{n-2} + b_{n-2} \\ b_{2n} &= a_{n-2} + b_{n-2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{bmatrix}$ 的增廣矩陣為

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & a_{2n} \\ 1 & 1 & b_{2n} \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{2n} - b_{2n} \\ 1 & 1 & b_{2n} \end{bmatrix}$ 故可得到

$$\begin{cases} a_{2n-2} = a_{2n} - b_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} = b_{2n} \end{cases} \Rightarrow b_{2n} = a_{2n} - a_{2n-2}$$

$$\therefore a_{2n} = 2a_{2n-2} + b_{2n-2} = 2a_{2n-2} + a_{2n-2} - a_{2n-4} = 3a_{2n-2} - a_{2n-4}$$

推得遞迴關係式爲 $a_{2n} = 3a_{2n-2} - a_{2n-4}$，

由定義 1.5 可以得到特徵方程式：$x^2 - 3x + 1 = 0$

此式亦可由特徵矩陣算出來：$\det\begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

因此，遞迴關係爲$\begin{cases} a_0 = 1, a_2 = 3, \\ a_{2n} = 3a_{2n-2} - a_{2n-4}, n \geq 2 \end{cases}$。

(2)三層波：

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 3a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + c_{2n-2} \\ b_{2n} &= 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + c_{2n-2} \\ c_{2n} &= a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{bmatrix}$的增廣矩陣爲

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & a_{2n} \\ 2 & 2 & 1 & b_{2n} \\ 1 & 1 & 1 & c_{2n} \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_3+R_2]{(-1)R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{2n} - b_{2n} \\ 1 & 1 & 0 & b_{2n} - c_{2n} \\ 1 & 1 & 1 & c_{2n} \end{bmatrix}$故可得到

$$\begin{cases} a_{2n-2} = a_{2n} - b_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} = b_{2n} - c_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} = c_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b_{2n} &= a_{2n} - a_{2n-2} \\ c_{2n} &= b_{2n} - a_{2n-2} - b_{2n-2} \\ &= a_{2n} - 3a_{2n-2} + a_{2n-4} \end{aligned}$$

$$\therefore a_{2n} = 3a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + c_{2n-2} = 6a_{2n-2} - 5a_{2n-4} + a_{2n-6}$$

推得遞迴關係式爲 $a_{2n} = 6a_{2n-2} - 5a_{2n-4} + a_{2n-6}$

由定義 1.5 可以得到特徵方程式：$x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$

此式亦可由特徵矩陣算出來：$\det\begin{bmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$

因此，遞迴關係爲$\begin{cases} a_0 = 1, a_2 = 6, a_4 = 31, \\ a_{2n} = 6a_{2n-2} - 5a_{2n-4} + a_{2n-6}, n \geq 3 \end{cases}$

(3)四層波：

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 4a_{2n-2} + 3b_{2n-2} + 2c_{2n-2} + d_{2n-2} \\ b_{2n} &= 3a_{2n-2} + 3b_{2n-2} + 2c_{2n-2} + d_{2n-2} \\ c_{2n} &= 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} + 2c_{2n-2} + d_{2n-2} \\ d_{2n} &= a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} + d_{2n-2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \\ d_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \\ d_{2n-2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \\ c_{2n-2} \\ d_{2n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \\ d_{2n} \end{bmatrix}$的增廣矩陣爲

$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & a_{2n} \\ 3 & 3 & 2 & 1 & b_{2n} \\ 2 & 2 & 2 & 1 & c_{2n} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d_{2n} \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)R_4+R_3]{\substack{(-1)R_2+R_1 \\ (-1)R_3+R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{2n}-b_{2n} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_{2n}-c_{2n} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & c_{2n}-d_{2n} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d_{2n} \end{array}\right]$故可得到

$$\begin{cases} a_{2n-2} = a_{2n} - b_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} = b_{2n} - c_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} = c_{2n} - d_{2n} \\ a_{2n-2} + b_{2n-2} + c_{2n-2} + d_{2n-2} = d_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b_{2n} &= a_{2n} - a_{2n-2} \\ c_{2n} &= b_{2n} - a_{2n-2} - b_{2n-2} = a_{2n} - 3a_{2n-2} + a_{2n-4} \\ d_{2n} &= c_{2n} - a_{2n-2} - b_{2n-2} - c_{2n-2} = a_{2n} - 6a_{2n-2} + 5a_{2n-4} - a_{2n-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2n} &= 4a_{2n-2} + 3b_{2n-2} + 2c_{2n-2} + d_{2n-2} \\ &= 4a_{2n-2} \\ &\quad + 3a_{2n-2} - 3a_{2n-4} \\ &\quad + 2a_{2n-2} - 6a_{2n-4} + 2a_{2n-6} \\ &\quad + a_{2n-2} - 6a_{2n-4} + 5a_{2n-6} - a_{2n-8} = 10a_{2n-2} - 15a_{2n-4} + 7a_{2n-6} - a_{2n-8} \end{aligned}$$

由定義 1.5 可以得到特徵方程式：$x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 7x + 1 = 0$

亦可由特徵矩陣算出：$\det\begin{bmatrix}4-x & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3-x & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2-x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-x\end{bmatrix}=0\Rightarrow x^4-10x^3+15x^2-7x+1=0$

因此，遞迴關係為$\begin{cases}a_0=1,a_2=10,a_4=85,a_6=707,\\ a_{2n}=10a_{2n-2}-15a_{2n-4}+7a_{2n-6}-a_{2n-8},n\geq 4\end{cases}$

(如果要再算出多一層，算式相當令人眼花瞭亂，我們將它列在附錄)

3.求出二層波底層的第 n+1 項a_{2n}：

遞迴關係為$\begin{cases}a_0=1,a_2=3,\\ a_{2n}=3a_{2n-2}-a_{2n-4},n\geq 2\end{cases}$

因此特徵方程式為$x^2-3x+1=0\Rightarrow \alpha=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

由定理 1.1 可得到$\begin{matrix}1=c_1+c_2\\ 3=\alpha c_1+\beta c_2\end{matrix}\Rightarrow (c_1,c_2)=\left(\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & \beta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}}\right)=\left(\dfrac{\beta-3}{\alpha-\beta},\dfrac{3-\alpha}{\alpha-\beta}\right)$

故$a_{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})^{n+1}],n\in\{0,1,2,\cdots\}$

4. 求出三層波底層的第 n 項a_{2n-2}：

(1) 原遞迴關係為 $\begin{cases}a_0=1,a_2=6,a_4=31,\\ a_{2n}=6a_{2n-2}-5a_{2n-4}+a_{2n-6},n\geq 3\end{cases}$

(2)因此特徵方程式為$x^3-6x^2+5x-1=0$,平移消去二次項得到

$(x-2)^3-7(x-2)-7=0$

令$x-2=X=u+v$

$(u+v)^3=7(u+v)+7=u^3+v^3+3uv(u+v)$比較係數得

$$3uv=7,u^3+v^3=7\Rightarrow u^3v^3=\frac{343}{27},u^3+v^3=7$$

令$u^3=t_1,v^3=t_2$

則t_1,t_2爲$t^2-7t+\frac{343}{27}=0$的兩根

$$\Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times\frac{343}{27}}}{2}$$

$$\therefore X=x-2=u+v=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2},\sqrt[3]{t_1}\omega+\sqrt[3]{t_2}\omega^2,\sqrt[3]{t_1}\omega^2+\sqrt[3]{t_2}\omega$$

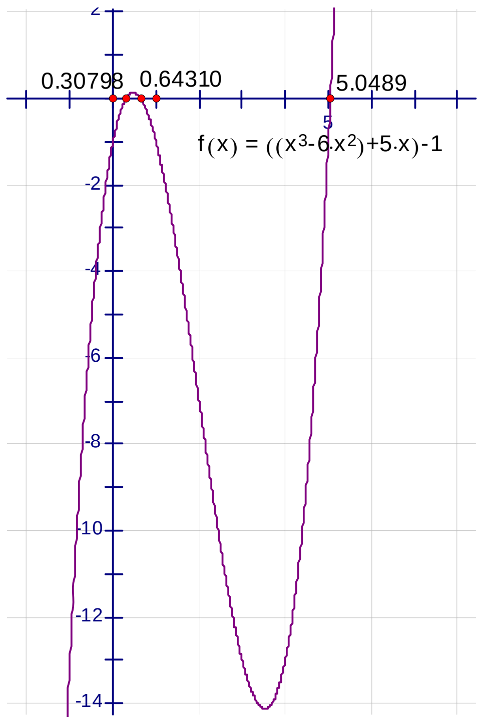
其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore x=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}+2\vee\sqrt[3]{t_1}\omega+\sqrt[3]{t_2}\omega^2+2\vee\sqrt[3]{t_1}\omega^2+\sqrt[3]{t_2}\omega+2$$

$x^3-6x^2+5x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 整理後三根爲

$$\alpha=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[-\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}+\sqrt{3}i(\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i})]+2,$$
$$\beta=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[-\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}-\sqrt{3}i(\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i})]+2$$
$$\gamma=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}]+2,$$

其中$\alpha<\beta<\gamma$ ，下圖爲三個根的近似值(by gsp4.01)



(3) $x^3-6x^2+5x-1=0=(x-2)^3-7(x-2)-7=0$

若 $X^3-7X-7=0$ 之三根爲 p,q,r

則 $(p-q)^2(q-r)^2(r-p)^2=(p^2-2pq+q^2)(q^2-2qr+r^2)(r^2-2rp+p^2)$

$$
\begin{aligned}
&=(14-r^2-\frac{14}{r})(14-p^2-\frac{14}{p})(14-q^2-\frac{14}{q})\\
&=\frac{(-p^3+14p-14)(-q^3+14q-14)(-r^3+14r-14)}{pqr}\\
&=\frac{(-7+7p-14)(-7+7q-14)(-7+7r-14)}{7}\\
&=49(3-p)(3-q)(3-r)=49\\
&=(\alpha-2-\beta+2)^2(\beta-2-\gamma+2)^2(\gamma-2-\alpha+2)^2\\
&=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2\\
\therefore\ &(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=7
\end{aligned}
$$

(4)爲使計算簡化將數列向前推一項得到

$b_0=0,b_2=1,b_4=6,b_6=31\ b_{2n}=6b_{2n-2}-5b_{2n-4}+b_{2n-6},n\ge 3$

由定理 1.1

$$
\because\ \begin{aligned}0&=c_1+c_2+c_3\\1&=\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3\\6&=\alpha^2c_1+\beta^2c_2+\gamma^2c_3\end{aligned}\ \Rightarrow(c_1,c_2,c_3)=\left(\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\1&\beta&\gamma\\6&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\\alpha&1&\gamma\\\alpha^2&6&\gamma^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\\alpha&\beta&1\\\alpha^2&\beta^2&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{-\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)},\frac{-\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\frac{-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\right)\\
&=\left(\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{7},\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{7},\frac{\gamma(\beta-\alpha)}{7}\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore b_{2n}=\frac{(\gamma-\beta)\alpha^{n+1}}{7}+\frac{(\alpha-\gamma)\beta^{n+1}}{7}+\frac{(\beta-\alpha)\gamma^{n+1}}{7},n\ge 0$

故 $a_{2n-2}=b_{2n}=\frac{(\gamma-\beta)\alpha^{n+1}}{7}+\frac{(\alpha-\gamma)\beta^{n+1}}{7}+\frac{(\beta-\alpha)\gamma^{n+1}}{7},n\ge 1,n\in N$

(5)由於 $b_{2n}=\frac{(\gamma-\beta)\alpha^{n+1}}{7}+\frac{(\alpha-\gamma)\beta^{n+1}}{7}+\frac{(\beta-\alpha)\gamma^{n+1}}{7},n\ge 0$ 這個式子有點抽象，因此我們用近値驗算看看結果是否相符：

$\alpha \doteq 0.30798, \beta \doteq 0.64310, \gamma \doteq 5.0489$

$b_0 \doteq \frac{1}{7}(1.3568944 - 3.0489187 + 1.6920243) = 0$

$b_2 \doteq \frac{1}{7}(0.4179 - 1.9608 + 8.5429) = 1 = a_0$

$b_4 \doteq \frac{1}{7}(0.1287 - 1.2610 + 43.1323) = 6 = a_2$

$b_6 \doteq \frac{1}{7}(0.04 - 0.81 + 217.77) = 31 = a_4$

……

驗算結果都符合我們的結論。

二、若想要找出更多層透明板被光線穿越的方法數也是用相同的方法，只是因爲更多層時，數字會更大，算式更加煩索，而在這個作品中，我們的目只是找到解決的方法，在此我們已完成任務，如果透明板的層數增加，透過電腦的輔助，就可以算出來；在此我們用同樣的方式，將 m 層波遞迴關係式的算法表示如下：

$$\begin{aligned}
a_{m,2n} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{m-1,2n} &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
&\vdots \\
a_{2,2n} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{1,2n} &= \sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} a_{m,2n} \\ a_{m-1,2n} \\ \cdots \\ a_{2,2n} \\ a_{1,2n} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} m & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ m-1 & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{m,2n-2} \\ a_{m-1,2n-2} \\ \vdots \\ a_{2,2n-2} \\ a_{1,2n-2} \end{bmatrix}$$

的增廣矩陣爲

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
m & m-1 & m-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 & a_{m,2n} \\
m-1 & m-1 & m-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 & a_{m-1,2n} \\
m-2 & m-2 & m-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 & a_{m-2,2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 & 1 & a_{3,2n} \\
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 & a_{2,2n} \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & a_{1,2n}
\end{array}\right]
\xrightarrow[(-1)R_m + R_{m-1}]{\substack{(-1)R_2 + R_1 \\ (-1)R_3 + R_2 \\ \vdots}}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{m,2n} - a_{m-1,2n} \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{m-1,2n} - a_{m-2,2n} \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{m-2,2n} - a_{m-3,2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & a_{3,2n} - a_{2,2n} \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & a_{2,2n} - a_{1,2n} \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & a_{1,2n}
\end{array}\right]$$

$$a_{m-1,2n}=a_{m,2n}-a_{m,2n-2}$$
$$a_{m-2,2n}=a_{m-1,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}=a_{m,2n}-3a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}$$
$$a_{m-3,2n}=a_{m-2,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}-a_{m-2,2n-2}=a_{m,2n}-6a_{m,2n-2}+5a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$a_{m-4,2n}=a_{m-3,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}-a_{m-2,2n-2}-a_{m-3,2n-2}$$
$$=a_{m,2n}-10a_{m,2n-2}+15a_{m,2n-4}-7a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$a_{m-5,2n}=a_{m-4,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}-a_{m-2,2n-2}-a_{m-3,2n-2}-a_{m-4,2n-2}$$
$$=a_{m,2n}-15a_{m,2n-2}+35a_{m,2n-4}-28a_{m,2n-6}+9a_{m,2n-8}-a_{m,2n-10}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將上列式子代入 $a_{m,2n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i+1}a_{m-j+1,2n-2}=\sum_{j=1}^{m}(m-j+1)a_{m-j+1,2n-2}$ 即可求出 m 層波底層遞迴數列的遞迴關係式。或者也可以直接求出 m 層波數列的特徵方程式，令 m 層波數列的特徵方程式為 $f_m=0$ ，規定 $f_0=1, f_1=x-1$ ，可以繼續推導出

$$f_2=x^2-(2xf_0+f_1)=x^2-3x+1$$

$$f_3=x^3-(3x^2f_0+2xf_1+f_2)=x^3-6x^2+5x-1$$

$$f_4=x^3-(4x^3f_0+3x^2f_1+2xf_2+f_3)=x^4-10x^3+15x^2-7x+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m=x^m-[mx^{m-1}f_0+(m-1)x^{m-2}f_1+\cdots+2xf_{m-2}+f_{m-1}]=x^m-\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)x^{m-k}f_{k-1}$$

陸、討論

一、延伸想法，k 階等差數列：

就在我們解決了三層波底層數列之後，突然有一個想法，如果反射數相同，而透明板層數改變的時候，它們所形成的數列會有什麼樣的關係？

於是我們將二層波、三層波、四層波……一一列出，結果發現了一個有趣的現象，這些數列真的有規律，它恰好是之前我書上有看到的 k 階等差數列，這個發現相當令人興奮，所以我們就把這個有趣的發現，作為這個作品的結尾：

1.定義及定理

定義 2.1： $n,k,j\in N$ ，對於數列 $\{a_n\}$ 規定：

(1) $\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$ 稱為 $\{a_n\}$ 的 1 級差分。

(2) $\Delta^2 a_k=\Delta a_{k+1}-\Delta a_k$ 稱為 $\{a_n\}$ 的 2 級差分。

(3) $\Delta^{j+1} a_k=\Delta^j a_{k+1}-\Delta^j a_k$ 稱為 $\{a_n\}$ 的 j+1 級差分。

定義 2.2：若數列$\{a_n\}$的每一個k級差分皆爲相等的定值，則稱此數列爲k階等差數列，而其所定義之級數則稱爲k階等差級數。

[註] 若$\{a_n\}$爲k階等差數列，則$\Delta^{k+1}a_i = 0, i$爲自然數，且$\Delta^{k+p}a_i = 0, p$爲自然數。

由定義：我們可以把數列$\{a_n\}$與其各級差分之關係列表如下：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \\
& \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & & \\
& \Delta a_1 & & \Delta a_2 & & \Delta a_3 & & \Delta a_4 & \cdots & & \\
& & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & & & \\
& & \Delta^2 a_1 & & \Delta^2 a_2 & & \Delta^2 a_3 & & \cdots & & \\
& & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & & & & \\
& & & \Delta^3 a_1 & & \Delta^3 a_2 & & & \cdots & & \\
& & & & \searrow\nearrow & & & & & & \\
& & & & \Delta^4 a_1 & & & & \cdots & & \\
& & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

定理 2.1：對於固定的自然數k恆有$\Delta^n a_k = C_0^n a_{k+n} - C_1^n a_{k+n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n a_k, \forall n \in N$。

說明：$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - a_{k+1} - a_{k+1} + a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k$$

$$\Delta^3 a_k = \Delta^2 a_{k+1} - \Delta^2 a_k = a_{k+3} - 2a_{k+2} + a_{k+1} - a_{k+2} + 2a_{k+1} - a_k$$

$$= C_0^3 a_{k+3} - C_1^3 a_{k+2} + C_2^3 a_{k+1} - C_3^3 a_k$$ 再由數學歸納法證明成立。

定理 2.2：$\Delta a_n = C_0^{n-1}\Delta a_1 + C_1^{n-1}\Delta^2 a_1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\Delta^n a_1, \forall n \in N$

說明：$\Delta a_2 = \Delta a_1 + \Delta^2 a_1$

$$\Delta a_3 = \Delta a_2 + \Delta^2 a_2 = \Delta a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^2 a_2 = \Delta a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$$

$$= \Delta a_1 + 2\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$$ 再由數學歸納法證明成立。

定理 2.3：$a_n = C_0^{n-1} a_1 + C_1^{n-1}\Delta a_1 + C_2^{n-1}\Delta^2 a_1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\Delta^{n-1} a_1, \forall n \in N, n \ge 2$

說明：$a_2 = a_1 + a_2 - a_1 = a_1 + \Delta a_1$

$$a_3 = a_2 + \Delta a_2 = a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_1 + \Delta^2 a_1$$

$$= a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1 = C_0^2 a_1 + C_1^2 \Delta a_1 + C_2^2 \Delta^2 a_1$$ 再由數學歸納法證明成立。

2.列出二、三、四、五、六、七層波：

(1) 二層波：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & & \rightarrow & 5 & & & \rightarrow & 13 & & \\
\downarrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
1 & & & \rightarrow & 3 & & & \rightarrow & 8 & & & \rightarrow & 21
\end{array}
$$

(2) 三層波：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 3 & & & \rightarrow & 14 & & & \rightarrow & 70 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 25 & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 126 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 6 & & & \rightarrow & 31 & & & \rightarrow & 157
\end{array}$$

(3) 四層波：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 4 & & & \rightarrow & 30 & & & \rightarrow & 246 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 26 & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 216 & \rightarrow & 462 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 19 & \rightarrow & 75 & \rightarrow & 160 & \rightarrow & 622 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 10 & & & \rightarrow & 85 & & & \rightarrow & 707
\end{array}$$

(4) 五層波：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 5 & & & \rightarrow & 55 & & & \rightarrow & 671 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 50 & \rightarrow & 105 & \rightarrow & 616 & \rightarrow & 1287 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 41 & \rightarrow & 146 & \rightarrow & 511 & \rightarrow & 1798 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 14 & \rightarrow & 29 & \rightarrow & 175 & \rightarrow & 365 & \rightarrow & 2163 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 15 & & & \rightarrow & 190 & & & \rightarrow & 2353
\end{array}$$

(5) 六層波：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 6 & & & \rightarrow & 91 & & & \rightarrow & 1547 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 85 & \rightarrow & 176 & \rightarrow & 1456 & \rightarrow & 3003 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 74 & \rightarrow & 250 & \rightarrow & 1280 & \rightarrow & 4283 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 59 & \rightarrow & 309 & \rightarrow & 1030 & \rightarrow & 5313 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 20 & \rightarrow & 41 & \rightarrow & 350 & \rightarrow & 721 & \rightarrow & 6034 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 21 & & & \rightarrow & 371 & & & \rightarrow & 6405
\end{array}
$$

(6) 七層波：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 7 & & & \rightarrow & 140 & & & \rightarrow & 3164 & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
1 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 13 & \rightarrow & 133 & \rightarrow & 273 & \rightarrow & 3024 & \rightarrow & 6188 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 120 & \rightarrow & 393 & \rightarrow & 2751 & \rightarrow & 8939 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 22 & \rightarrow & 102 & \rightarrow & 495 & \rightarrow & 2358 & \rightarrow & 11297 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 25 & \rightarrow & 80 & \rightarrow & 575 & \rightarrow & 1863 & \rightarrow & 13160 \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 27 & \rightarrow & 55 & \rightarrow & 630 & \rightarrow & 1288 & \rightarrow & 14448 \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
1 & & & \rightarrow & 28 & & & \rightarrow & 658 & & & \rightarrow & 15106
\end{array}
$$

3.製作表格：

層波數	1	2	3	4	5	6	7
層板數	2	3	4	5	6	7	8
直接穿越 a_0	1	1	1	1	1	1	1
反射 2 次 a_2	1	3	6	10	15	21	28
反射 4 次 a_4	1	8	31	85	190	371	658
反射 6 次 a_6	1	21	157	707	2353	6405	15106
反射 8 次 a_8	1	55	793	5864	29056	110254	345775

4. 數列與其各級差分之關係列表，並由定理 2.3 求出一般項：

(1)反射2次: 1 3 6 10

↘↗ ↘↗ ↘↗

2 3 4

↘↗ ↘↗

1 1

↘↗

0

$$T_n = C_0^{n-1} + 2C_1^{n-1} + C_2^{n-1}, T_1 = 1, T_2 = 3, n \geq 3$$

(2)反射4次: 1 8 31 85 190 371

↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗

7 23 54 105 181

↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗

16 31 51 76

↘↗ ↘↗ ↘↗

15 20 25

↘↗ ↘↗

5 5

↘↗

0

$$F_n = C_0^{n-1} + 7C_1^{n-1} + 16C_2^{n-1} + 15C_3^{n-1} + 5C_4^{n-1}, F_1 = 1, F_2 = 8, F_3 = 31, F_4 = 85, n \geq 5$$

(3)反射 6 次：

1 21 157 707 2353 6405 15106

↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗

20 136 550 1646 4052 8701

↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗

116 414 1096 2406 4649

↘↗ ↘↗ ↘↗ ↘↗

298 682 1310 2243

↘↗ ↘↗ ↘↗

384 628 933

↘↗ ↘↗

244 305

↘↗

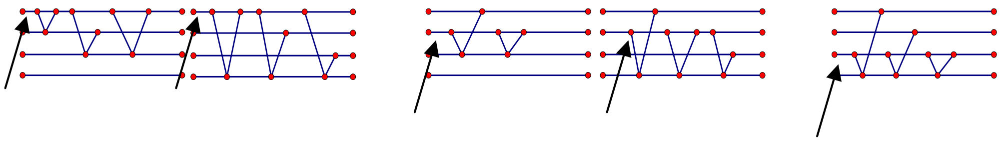
61

$$X_n = C_0^{n-1} + 20C_1^{n-1} + 116C_2^{n-1} + 298C_3^{n-1} + 384C_4^{n-1} + 244C_5^{n-1} + 61C_6^{n-1},$$
$$X_1 = 1, X_2 = 21, X_3 = 157, X_4 = 707, X_5 = 2353, X_6 = 6405, n \geq 7$$

二、進行至此，僅剩下一個問題：有些人會問：那麼這個數列 a_{2n} 的奇數項呢?
因為我們這個研究的主題是在光"穿越"的方法數，反射次數必為偶數，為了不偏離主題，我們只有歸納出反射 $2n$ 次的方法；但是以數學的觀點而言，奇數項沒有找出來，總是好像不太完整，因此我們再往下推論，得到下面結果。

1. 事實上，解決反射 $2n-1$ 次的方法數與反射 $2n$ 次的方法數大同小異，當有四層板時 (Page 4)，光線在**穿越** l_1 後反射 $2n-1$ 次的方法數所成的數列，恰好就在三層波數列的第一層中，因為只要將光線看成從最下層進入，就等於多一次反射，如下圖所示，(參照說明書的第 4 頁圖)

$a_2=6$ $\qquad$ $b_2=5$ $\qquad$ $c_2=3$



$\therefore c_4=a_2+b_2+c_2=14$，所以可以推得：

$\langle a_{2n}\rangle$ 中加入的奇數項 $a_{m,2n-1}=a_{1,2n}=\sum_{j=1}^{m}a_{m-j+1,2n-2}$ 為 m 層波數列的第一層(P8)

如此就可以把這個主題**廣義化**，變成"光**進入**透明板，反射 n 次後**脫離透明板**(Escape)的不同路徑方法數為 E_n"。

2. 以四層板的反射情形為例，與找偶數項的方法相同，得到其奇數項為：
$c_2=3=a_1, c_4=14=a_3, c_6=70=a_5, a_{2n-1}=6a_{2n-3}-5a_{2n-5}+a_{2n-7}, n\in\{4,5,6,\cdots\}$

合併之後 $\langle E_n\rangle=1,3,6,14,31,70,157,353,793,1782,4004,8997,\cdots\cdots$

設 $E_{n+3}=mE_{n+2}+nE_{n+1}+lE_n$，(因為奇、偶項有相同的遞迴關係式)可推得：

$$\begin{cases}14=6m+3n+l\\ 31=14m+6n+3l\\ 70=31m+14m+6l\end{cases}\Rightarrow (m,n,l)=(2,1,-1)$$

可以得到一個新的遞迴關係：$\begin{cases}E_1=1, E_2=3, E_3=6,\\ E_{n+3}=2E_{n+2}+E_{n+1}-E_n, n\in N\end{cases}$

3. 這個新數列我們將它命名為**逃脫數列(sequence of escaping)**，如果是在 m 層波中找的逃脫數列就定義為 m 階(費波那西數列恰為二階逃脫數列)。

4. 求出三階逃脫數列的第 n 項：(由於和前面第 12 頁算法一樣，所以僅簡單說明)

(1)遞迴關係為 $\begin{cases}E_1=1, E_2=3, E_3=6,\\ E_{n+3}=2E_{n+2}+E_{n+1}-E_n, n\in N\end{cases}$

(2)因此特徵方程式為$x^3-2x^2-x+1=0$，其三根為α,β,γ

即$x^3-2x^2-x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

其中$\alpha \doteq -0.801938 < \beta \doteq 0.554958 < \gamma \doteq 2.24698$ ，

(且此三根的平方恰為$x^3-6x^2+5x-1=0$的三根)

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6\\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=5\\ \alpha^2\beta^2\gamma^2=1\end{cases}$$

(3)因為$x^3-2x^2-x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

用第 14 頁的方法同樣可以得到

$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=7$

(4)為使計算簡化將數列向前推兩項得到

$b_0=0,b_1=1,b_2=1,b_3=3\ b_{2n}=2b_{2n-2}+b_{2n-4}-b_{2n-6},n\ge 3$

由定理 1.1

$$\because \begin{array}{r}0=c_1+c_2+c_3\\ 1=\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3\\ 1=\alpha^2c_1+\beta^2c_2+\gamma^2c_3\end{array} \Rightarrow (c_1,c_2,c_3)=\left(\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\1&\beta&\gamma\\1&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\\alpha&1&\gamma\\\alpha^2&1&\gamma^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\\alpha&\beta&1\\\alpha^2&\beta^2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)},\frac{1-\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\frac{1-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\right)$$

$$=\left(\frac{(\beta-\gamma)(1-\alpha)}{7},\frac{(\gamma-\alpha)(1-\beta)}{7},\frac{(\alpha-\beta)(1-\gamma)}{7}\right)$$

$$\therefore b_n=\frac{(\beta-\gamma)(1-\alpha)\alpha^n}{7}+\frac{(\gamma-\alpha)(1-\beta)\beta^n}{7}+\frac{(\alpha-\beta)(1-\gamma)\gamma^n}{7},n\ge 0$$

$$故\ E_n=b_{n+2}=\frac{(\beta-\gamma)(1-\alpha)\alpha^{n+2}}{7}+\frac{(\gamma-\alpha)(1-\beta)\beta^{n+2}}{7}+\frac{(\alpha-\beta)(1-\gamma)\gamma^{n+2}}{7},n\in N\cup\{0\}$$

出乎意料之外的給這個主題又找到一個完美的結論。

柒、結論

一、光線穿越 $m+1$ 層透明板的方法數，就是 m 層波的底層

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,0} & \rightarrow & a_{1,2} & & \cdots & \rightarrow & a_{1,2n-2} & & & \rightarrow & a_{1,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2} & & \\
\downarrow & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & & & \uparrow & \searrow & \\
a_{2,0} & \rightarrow & a_{2,0}+\cdots+a_{m,0} & \rightarrow & a_{2,2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & a_{2,2n-2} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j+1,2n-2} & \rightarrow & a_{2,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2}+\sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{m-1,0} & \rightarrow & a_{m,0}+a_{m-1,0} & \rightarrow & a_{m-1,2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & a_{m-1,2n-2} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{2} a_{m-j+1,2n-2} & \rightarrow & a_{m-1,2n}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\
a_{m,0} & & & \rightarrow & a_{m,2} & & \cdots & \rightarrow & a_{m,2n-2} & & & \rightarrow & a_{m,2n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2}
\end{array}
$$

底層數列的關係如下：

$$
\begin{bmatrix} a_{m,2n} \\ a_{m-1,2n} \\ \cdots \\ a_{2,2n} \\ a_{1,2n} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} m & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ m-1 & m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{m,2n-2} \\ a_{m-1,2n-2} \\ \vdots \\ a_{2,2n-2} \\ a_{1,2n-2} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
a_{m,2n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{m-1,2n}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
\vdots \\
a_{2,2n}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m-i+1} a_{m-j+1,2n-2} \\
a_{1,2n}=\sum_{j=1}^{m} a_{m-j+1,2n-2}
\end{array}
$$

二、遞迴關係：

反射次數	2 次 a_2	4 次 a_4	6 次 a_6	$\cdots$	a_{2n}
2 層透明板	1	1	1	$\cdots$	1
3 層透明板	1	3	8	$\cdots$	$a_0=1, a_2=3, a_{2n}=3a_{2n-2}-a_{2n-4}, n\geq 2$
4 層透明板	1	6	31	$\cdots$	$a_0=1, a_2=6, a_4=31,$ $a_{2n}=6a_{2n-2}-5a_{2n-4}+a_{2n-6}, n\geq 3$
5 層透明板	1	10	85	$\cdots$	$a_0=1, a_2=10, a_4=85, a_6=707, n\geq 4$ $a_{2n}=10a_{2n-2}-15a_{2n-4}+7a_{2n-6}-a_{2n-8}$

三、四層透明板時的 a_{2n}

(1)原遞迴關係爲：$\begin{cases} a_0=1, a_2=6, a_4=31, \\ a_{2n}=6a_{2n-2}-5a_{2n-4}+a_{2n-6}, n\geq 3 \end{cases}$

(2) 因此特徵方程式爲 $x^3-6x^2+5x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$$\alpha=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[-\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}+\sqrt{3}i(\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i})]+2,$$

$$\beta=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[-\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}-\sqrt{3}i(\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}-\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i})]+2$$

$$\gamma=\frac{\sqrt[3]{84}}{12}[\sqrt[3]{9+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{9-\sqrt{3}i}]+2,$$

其中 $\alpha<\beta<\gamma$

(3)故 $a_{2n}=\dfrac{(\gamma-\beta)\alpha^{n+2}}{7}+\dfrac{(\alpha-\gamma)\beta^{n+2}}{7}+\dfrac{(\beta-\alpha)\gamma^{n+2}}{7},n=0,1,2,\cdots\cdots$

四、k 階等差數列：

層板數	2	3	4	$\cdots$	$m+1$
直接穿越 a_0	1	1	1	$\cdots$	1
反射 2 次 a_2	1	3	6	$\cdots$	$T_1=1,T_2=3,\ T_m=C_0^{m-1}+2C_1^{m-1}+C_2^{m-1},m\ge 3$
反射 4 次 a_4	1	8	31	$\cdots$	$F_m=C_0^{m-1}+7C_1^{m-1}+16C_2^{m-1}+15C_3^{m-1}+5C_4^{m-1}$ $,F_1=1,F_2=8,F_3=31,F_4=85,m\ge 5$
反射 6 次 a_6	1	21	157	$\cdots$	$X_m=1+20C_1^{m-1}+116C_2^{m-1}+298C_3^{m-1}+384C_4^{m-1}+244C_5^{m-1}+61C_6^{m-1},$ $X_1=1,X_2=21,X_3=157,X_4=707,X_5=2353,X_6=6405,m\ge 7$

五、**逃脫數列(sequence of escaping)**：α,β,γ 爲 $x^3-2x^2-x+1=0$ 的三根

$$E_n=b_{n+2}=\frac{(\beta-\gamma)(1-\alpha)\alpha^{n+2}}{7}+\frac{(\gamma-\alpha)(1-\beta)\beta^{n+2}}{7}+\frac{(\alpha-\beta)(1-\gamma)\gamma^{n+2}}{7},n\in N\cup\{0\}$$

$x^3-2x^2-x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ，$\alpha\doteq-0.801938<\beta\doteq 0.554958<\gamma\doteq 2.24698$ ，

捌、參考資料

林福來譯(1984)。組合理論(*Combinatorics by N.Ya.Vilenkin*)。台北市：正中。

張福春、莊淨惠。線性遞迴關係之求解(上)。數學傳播，33 卷 4 期，P47-62。

張福春、莊淨惠。線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播，34 卷 1 期，P35-57。

※附錄：

$$a_{m-1,2n}=a_{m,2n}-a_{m,2n-2}$$

$$
\begin{aligned}
a_{m-2,2n}&=a_{m-1,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}\\
&=a_{m,2n}-a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}=a_{m,2n}-3a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{m-3,2n}&=a_{m-2,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}-a_{m-2,2n-2}\\
&=a_{m,2n}-a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}=a_{m,2n}-6a_{m,2n-2}+5a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{m-4,2n}&=a_{m-3,2n}-a_{m,2n-2}-a_{m-1,2n-2}-a_{m-2,2n-2}-a_{m-3,2n-2}\\
&=a_{m,2n}-a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}\\
&\qquad -a_{m,2n-2}+a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}\\
&\qquad\qquad +a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}\\
&\qquad\qquad\qquad -a_{m,2n-6}\\
&\qquad\qquad\qquad -a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}\\
&=a_{m,2n}-10a_{m,2n-2}+15a_{m,2n-4}-7a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{m-5,2n} = a_{m-4,2n} - a_{m,2n-2} - a_{m-1,2n-2} - a_{m-2,2n-2} - a_{m-3,2n-2} - a_{m-4,2n-2} \\
= a_{m,2n} - a_{m,2n-2} \\
-a_{m,2n-2} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
-a_{m,2n-2} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-2} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-6} + a_{m,2n-8} \\
-a_{m,2n-2} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-6} \\
-a_{m,2n-6} + a_{m,2n-8} \\
-a_{m,2n-2} + a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} \\
+a_{m,2n-4} - a_{m,2n-6} \\
+a_{m,2n-4}
\end{aligned}
$$

$$+a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$+a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$+a_{m,2n-4}$$
$$+a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$+a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$+a_{m,2n-4}-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$-a_{m,2n-6}$$
$$-a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$-a_{m,2n-6}+a_{m,2n-8}$$
$$+a_{m,2n-8}$$
$$+a_{m,2n-8}-a_{m,2n-10}$$
$$=a_{m,2n}-15a_{m,2n-2}+35a_{m,2n-4}-28a_{m,2n-6}+9a_{m,2n-8}-a_{m,2n-10}$$

全文完

【評語】040404

作者表達清晰，結論也完整．建議可再進一步計算 n 很大時，穿越與不穿越的比率。就遞迴式得出 2n 次反射而穿越，與 2n-1 次不穿越的關係數學性稍嫌薄弱，所以可以再增加適當的題目條件，增加數學的內容會更好。