中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040403

「棋」開得勝

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高一　朱普巖	鄭景文
高一　林婷薇	李　中
高一　劉仲恩	

關鍵詞：搶棋、目標棋數、分治法

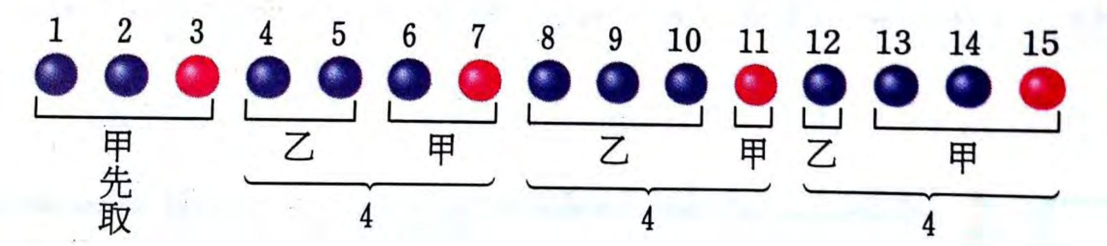
摘要

在我們一次數學課程中，一題搶到最後棋子的人獲勝的題目，勾起了我們的好奇心，在這個看似公平的遊戲，裡面卻暗藏著許多的不公平，所以我們希望能看透箇中奧秘，觀察之間的關連，並進一步歸納是否有必勝的方法。

壹、研究動機

根據我們曾學過的數學章節:等差、等比級數，當時我們看到一個題目很有趣，題目描述如下:「桌面上放了１５粒棋子，甲、乙兩人輪流取棋子，每次至少拿一粒，至多拿三粒，規定：拿到最後一粒棋子的人獲勝。你有致勝的策略嗎？」

結果我們發現只要找到它的致勝點就會贏，而這個致勝點恰好是個等差數列，我們先設想棋子排成一列，並給們編號：１，２，３，…１５．你想拿到第１５粒，前一回就必須搶到第１１粒；要搶到１１就要先搶到７；要搶到７就要先搶到３；這些點３，７，１１，１５形成一個等差數列，公差爲４，我們稱３，７，１１，１５爲致勝點。所以只要拿到某一個「致勝點」的棋子，就有必勝的把握，如下圖所示：



這看似簡單亂玩的遊戲，竟然隱藏著一個尋常的規律，引起了我們偌大的興趣，假設我們將遊戲規模擴大，例如取棋到１００的話會怎樣？是否還是有所謂的致勝點？是否致勝點還是個等差數列？如果我們將能取的棋子數從至多３粒增加成至多５粒，結果又會怎樣？若新增一個「不能連續取相同數目」規則增加遊戲難度，結果又會怎樣？

貳、研究目的

一、找出遊戲的必勝方法

二、歸納出其規律性

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、高一數學課本

肆、研究過程或方法

一、有１到１００粒棋子（目標棋數），每次只能搶１到５粒（搶數），而且不能連續拿相同數目，先搶到目標棋數者獲勝，超過目標棋數者輸。

二、前提為甲、乙二人實力旗鼓相當，甲先搶完，乙再搶。

三、一開始以窮舉法列出排列組合後之所有方法數：

目標棋數	甲先搶	乙後搶
1	1	X
2	1 2	X X
3	1 2 3	2 1 X
4	1 2 3 4	3 1 1 X
5	1 2 3 4 5	4 3 2 1 X

表一

我們觀察以上表一之情況發現：當目標棋數小於或等於搶數，故先搶者必贏。

目標棋數	甲先搶	乙後搶
6	1 2 3 4 5	5 4 X 2 1
7	1 2 3 4 5	3 5 4 3 2

８	１	Ｘ
	２	３
	３	５
	４	Ｘ
	５	３
９	１	４
	２	Ｘ
	３	Ｘ
	４	５
	５	４
１０	１	２、３
	２	１、４
	３	Ｘ
	４	３
	５	Ｘ
１１	１	３、５
	２	３
	３	１、４
	４	Ｘ
	５	３
１２	１	４
	２	３、５
	３	２、３
	４	１、４
	５	Ｘ
１３	１	５
	２	４
	３	５
	４	２、３
	５	１、４
１４	１	Ｘ
	２	５
	３	４
	４	３、５
	５	２、３
１５	１	Ｘ
	２	Ｘ
	３	５

	4 5	X 3
16	1 2 3 4 5	2、4 1 X 5 4
17	1 2 3 4 5	3 1、4 1 X X
18	1 2 3 4 5	4、5 3 1、2、4 1 X

表二

(一)我們觀察以上表二之情況，發現當目標棋數為6時：

1.甲先搶1的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為5的情況(6-1=5)，所以對乙而言直接搶5即得勝。

2.甲先搶2的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為4的情況(6-2=4)，所以對乙而言直接搶4即得勝。

3.甲先搶3的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為3的情況(6-3=3)，所以對乙而言直接搶3即得勝，但卻違反規則，則此情況乙必輸，此種情況我們稱之「**規則致勝點**」。

4.甲先搶4的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為2的情況(6-4=2)，所以對乙而言直接搶2即得勝。

5.甲先搶5的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為1的情況(6-5=1)，所以對乙而言直接搶1即得勝。

(二)我們觀察以上表二之情況，發現當目標棋數為7時：

1.甲先搶1的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為6的情況(7-1=6)，所以對乙而言，直接搶3為規則致勝點即得勝。

2.甲先搶2的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為5的情況(7-2=5)，所以對乙而言直接搶5即得勝。

3.甲先搶3的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數為4的情況(7-3=4)，

所以對乙而言直接搶 4 即得勝。

4.甲先搶 4 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 3 的情況(7-4=3)，所以對乙而言直接搶 3 即得勝。

5.甲先搶 5 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 2 的情況(7-5=2)，所以對乙而言直接搶 2 即得勝。

⋮

⋮

(三)我們觀察以上表二之情況，發現當目標棋數爲 15 時：

1.甲先搶 1 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 14 的情況 (15-1=14)，所以對乙而言直接搶 1 即得勝，但因甲搶到規則致勝點，故乙必輸。

2.甲先搶 2 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 13 的情況 (15-2=13)，所以對乙而言必輸。

3.甲先搶 3 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 12 的情況 (15-3=12)，所以對乙而言直接搶 5 即得勝。

4.甲先搶 4 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 11 的情況 (15-4=11)，所以對乙而言直接搶 4 即得勝，但因甲搶到規則致勝點，故乙必輸。

5.甲先搶 5 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 10 的情況 (15-5=10)，所以對乙而言直接搶 3 即得勝。

⋮

⋮

此時觀察出的情況爲:有些致勝點不止一個，有些甚至到了兩個或三個，雖然看似有點規律但我們還是沒辦法妄下定論，爲了確定我們的想法，我們繼續將研究的範圍擴大如下:

目標棋數	甲先搶	乙後搶
19	1	5
	2	4、5
	3	X
	4	1、2
	5	1
20	1	3
	2	5
	3	4、5
	4	3
	5	1、2、4

２１	１ ２ ３ ４ ５	X ３ ５ ５ ３
２２	１ ２ ３ ４ ５	X X X ５ ４
２３	１ ２ ３ ４ ５	２、３ １ X ３ X
２４	１ ２ ３ ４ ５	５ １、３ １ X ３
２５	１ ２ ３ ４ ５	４ ３、５ １、２ １ X
２６	１ ２ ３ ４ ５	５ ４ ５ １、２、３ １
２７	１ ２ ３ ４ ５	X ５ ４ ３、５ １、２、３
２８	１ ２ ３	X X ５

	4 5	X 3
2 9	1 2 3 4 5	2、4 1 X 5 4
3 0	1 2 3 4 5	3 1、4 1 X X
3 1	1 2 3 4 5	4、5 3 1、2、4 1 X

表三

(一)我們觀察以上表三之情況，發現當目標棋數爲１９時：

1.甲先搶 1 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 18 的情況(19-1=18)，所以對乙而言直接搶５即得勝。

2.甲先搶 2 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 17 的情況(19-2=17)，所以對乙而言直接搶 4 即得勝，或直接搶 5(規則致勝點)，即得勝。

3.甲先搶 3 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 16 的情況(19-3=16)，所以對乙而言直接搶 3 即得勝。

4.甲先搶 4 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 15 的情況(19-4=15)，所以對乙而言直接搶 2 即得勝，或直接搶 1 或是 4(規則致勝點)，即得勝。

5.甲先搶 5 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 14 的情況(19-5=14)，所以對乙而言直接搶 1 即得勝。

(二)我們觀察以上表三之情況，發現當目標棋數爲２０時：

1.甲先搶 1 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 19 的情況(20-1=19)，所以對乙而言，直接搶 3 爲規則致勝點即得勝。

2.甲先搶 2 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 18 的情況(20-2=18)，所以對乙而言直接搶 5 即得勝。

3.甲先搶 3 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 17 的情況(20-3=17)，所以對乙而言直接搶 4 即得勝，或直接搶 5 爲規則致勝點，即得勝。

4.甲先搶 4 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 16 的情況(20-4=16)，

所以對乙而言直接搶 3 即得勝。

5.甲先搶 5 的先決情況下，再換乙下時，變成目標棋數爲 15 的情況(20-5=15)，
所以對乙而言直接搶 2 即得勝，或直接搶 1 或是 4(規則致勝點)，即得勝。

⋮

目標棋數	甲先搶	乙後搶
３２	１	５
	２	４、５
	３	X
	４	１、２
	５	１
３３	１	３
	２	５
	３	４、５
	４	３
	５	１、２、４
３４	１	X
	２	３
	３	５
	４	５
	５	３
３５	１	X
	２	X
	３	X
	４	５
	５	４
３６	１	２、３
	２	１
	３	X
	４	３
	５	X
３７	１	５
	２	１、３
	３	１
	４	X
	５	３
３８	１	４
	２	３、５

	3 4 5	1、2 1 X
39	1 2 3 4 5	5 4 5 1、2、3 1
40	1 2 3 4 5	X 5 4 3、5 1、2、3
41	1 2 3 4 5	X X 5 X 3
42	1 2 3 4 5	2、4 1 X 5 4
43	1 2 3 4 5	3 1、4 1 X X
44	1 2 3 4 5	4、5 3 1、2、4 1 X

表四

縱觀表一、表二、表三、表四，我們得到一個結論:當目標棋數超過 18 以後，當甲先搶完棋後，換乙搶棋時，有時候會有超過一種以上的致勝方法，兩個致勝點或者是三個致勝點，這就讓我們匪夷所思，究竟有沒有存在著一個規律性，後來經我們細細推敲以及沙盤推演，確實存在著一種規則，在下一節呈現。

伍、研究結果

組別	目標棋數	必勝點
A'	1	1
	2	1、2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	3
	7	X
B'	8	1、4
	9	2、3
	10	3、5
	11	4
	12	5
	13	X
A	14	1
	15	1、2、4
	16	3
	17	4、5
	18	5
	19	3
	20	X
B	21	1
	22	1、2、3
	23	3、5
	24	4
	25	5
	26	X
A	27	1
	28	1、2、4
	29	3
	30	4、5
	31	5
	32	3
	33	X
B	34	1

不穩定區域

	３５	１、２、３
	３６	３、５
	３７	４
	３８	５
	３９	X
A	４０	１
	４１	１、２、４
	４２	３
	４３	４、５
	４４	５
	４５	３
	４６	X
B	４７	１
	４８	１、２、３
	４９	３、５
	５０	４
	５１	５
	５２	X
A	５３	１
	５４	１、２、４
	５５	３
	５６	４、５
	５７	５
	５８	３
	５９	X
B	６０	１
	６１	１、２、３
	６２	３、５
	６３	４
	６４	５
	６５	X
A	６６	１
	６７	１、２、４
	６８	３
	６９	４、５
	７０	５
	７１	３
	７２	X

B	7 3	1
	7 4	1、2、3
	7 5	3、5
	7 6	4
	7 7	5
	7 8	X
A	7 9	1
	8 0	1、2、4
	8 1	3
	8 2	4、5
	8 3	5
	8 4	3
	8 5	X
B	8 6	1
	8 7	1、2、3
	8 8	3、5
	8 9	4
	9 0	5
	9 1	X
A	9 2	1
	9 3	1、2、4
	9 4	3
	9 5	4、5
	9 6	5
	9 7	3
	9 8	X
B	9 9	1
	1 0 0	1、2、3

表五

由我們歸納的結果如上表五表示，我們可以觀察致勝點的情形，推敲出一個結論來:其中存在著兩種規律，可分爲 A 種規律以及 B 種規律，A 種規律其個數爲 7 個，B 種規律其個數爲 6 個，全部情況循著 A、B、A、B...交錯排列，每 13 個爲一組週期循環。我們將所有的情況列舉如下:

(一)A 組成員

1.可表示成一個集合:$\{13K+J \mid 1 \le K, 1 \le J \le 7\}$

2.兩個致勝點的成員爲:$\{13K+4 \mid 1 \le K\}$

3.三個致勝點的成員爲:$\{13K+2 \mid 1 \le K\}$

4.無致勝點必輸的成員爲:$\{13K+7 \mid 1 \le K\}$

5.靠規則致勝點得勝的成員爲: $\{13K+6 \mid 1 \le K\}$

(二)B 組成員

1.可表示成一個集合:$\{13K+Q \mid 1 \le K, 8 \le Q \le 13\}$

2.兩個致勝點的成員爲:$\{13K+10 \mid 1 \le K, 8 \le Q \le 13\}$

3.三個致勝點的成員爲:$\{13K+9 \mid 1 \le K, 8 \le Q \le 13\}$

4.無致勝點必輸的成員爲:$\{13K+13 \mid 1 \le K\}$

經由上面推論，我們可以將所有目標棋數超過搶數的問題集合切割成許多子集合，子集合可以再切成子集合，子集合可以再切割成子集合，等到切到最小子集合時，就可經由查表方式，得知必勝的方法。其中當目標棋數介於 1~13 時，致勝點依然正確，但兩個或三個致勝點的規律些許不同，因此我們稱之爲不穩定區域，但這些不穩定區域包含了最基本小問題的所有解答。

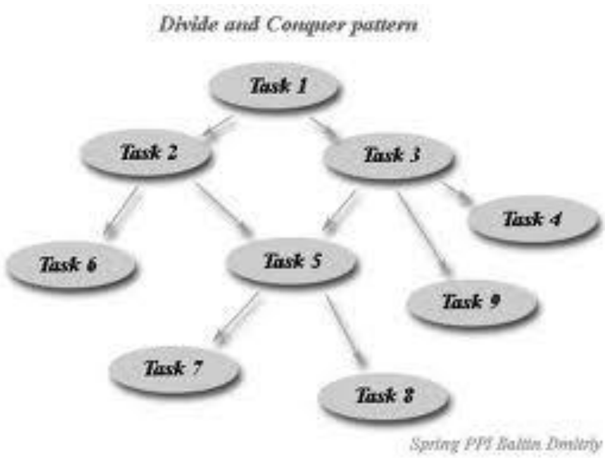
陸、討論

組別	M (目標棋數)	N (主要致勝點)	其餘致勝點
A	14	1	
	15	2	1、4
	16	3	
	17	4	5
	18	5	
	19		3
	20		X
B	21	1	
	22	2	1、3
	23	3	5
	24	4	
	25	5	
	26		X
A	27	1	
	28	2	1、4
	29	3	
	30	4	5
	31	5	
	32		3
	33		X
B	34	1	
	35	2	1、3
	36	3	5
	37	4	
	38	5	
	39		X

表六

根據資訊工程類演算法之一的分治法(Divide And Conquer)如下圖所示，將一個大任務分成幾個中任務，中任務再分成幾個小任務，小任務就可以解之，如此一來，就如遞迴般的，將大任務給解決了。

我們可以將表六中的M(目標棋數)這個大問題分割成數個子問題，子問題可以再分割成子問題，再逐一找出致勝點。



柒、結論

根據上述討論，得 M(目標棋數)與 N(主要必勝點)之間的關連：

(一)A 組：N≡(M) mod 13　(N≦5)

(二)B 組：N≡(M-7) mod 13　(N≦5)

由於我們搶數只限定在 1~5 個棋子數，故 N 只會介於 1~5 之間，所以會造成 A 組規律內第六個成員按照我們規律順序來推論，應該致勝點爲 6，而第七個成員的致勝點爲 7，礙於搶數的限定，所以在第六個成員時，變成只有使用規則致勝點可以唯一得勝之方法，而第七爲成員則就是必輸的情況。同理可得知，在 B 組第六位成員照我們推論，應該致勝點也可能爲 6。坦若搶數增加(N＞5)，A 組與 B 組的成員應該會隨 N 的增加而增加。

我們只有討論 1~100 的目標棋數，雖然不能保證我們討論到最後會絕對正確，未來希望可以學會使用程式語言，利用電腦來協助我們跑到 10000 筆或是更多的資料幫助我們驗證，甚至將目標棋數 M 以及搶數可以推廣到至無窮大，並且找其規律性，列出一個通式，看是否能應用在商業以及經濟上，成爲一個市場的法則。

捌、參考資料與其他

(一)高中第一冊數學課本南一版(88)第三章數列與級數例題五

(二)http://www.imoptimizer.com/tag/procrastination/

【評語】040403

1. 作品有不錯的分析與歸納思維，但於關鍵處無法作有效且清楚的交待，導致後續結論不易理解。

2. 作者群對於作品的表達能力稍嫌不足，無法釐清符號及用詞等具體定義容易造成論述過程的混淆。

3. 整體而言，利用日常生活的遊戲帶入主題頗為實際；但作為「科學展覽」作品無法有效的呈現「展覽」上的需求，另學術性與科學方法之適切性亦不高。