中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳團隊合作獎

040402

階梯路線大問哉，「階階」輾轉舉證來

學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者：	指導老師：
高一　楊念潔 高一　賴柔嘉 高一　蘇于涵	林鳳美

關鍵詞：樓梯問題、轉移矩陣、費氏數列

摘要

本篇研究首先針對「登n階層的樓梯，每一次跨$1\sim m$階登樓梯總方法數」深入探討，而先建構樓梯法則，則可得到生成路徑圖，如此可推得轉移矩陣與方法數矩陣，最後得出總方法數，再推廣若一次跨任意階，推得其方法數的遞迴關係式，同時再建構跨$p\sim m$階樓梯法則，必存在生成路徑圖與轉移矩陣，因而求得總方法數。另外探討指定步數總方法數，其分佈呈現斜方向巴斯卡三角形係數。

接著探討費氏數列$\{F_n\}$其彼此項數間具有因倍數的關係，並探討每一次跨$1\sim m$階所成樓梯數列每一項除以一正整數k後為餘數數列，探討其循環節個數的規律，同時每一項除以k後餘數數列呈現循環數列與有序性的餘數數列。

最後建構樓梯數列對應立體幾何圖形，呈現直觀看到立體樓梯作為本篇的應用範疇。

壹、研究動機

上「數學科學研究」課時，老師介紹臺北市第45屆中小學科展作品-**苔痕上階綠，階階似有律**的作品，對此篇相當感興趣，樓梯數列有何樓梯法則呢？進一步推廣似乎階階有規律，於是展開我們一連串的深入研究。

我們這次的研究靈活的使用了矩陣中轉移矩陣的概念，建構樓梯生成法則，進而破解樓梯數列的總方法數，並配合高中所學到的「等差數列」、「整數論」、「餘數性質」、「遞迴關係」、「數學歸納法」、「排列組合」和「矩陣理論」的知識，幫助我們推論以便釐清這一系列的問題。

貳、研究目的

一、樓梯數列跨$1\sim m$階時，如何建構樓梯法則呢？其必存在生成路徑圖與轉移矩陣呢？存在著等差數列嗎？

二、考慮登樓梯跨$1\sim m$階、跨奇數階、跨偶數階、跨等差$d=3$階與跨$p\sim m$階其共同規律與遞迴關係式為何?

三、推廣樓梯數列跨$p\sim m$階時，如何建構樓梯法則嗎？其必存在生成路徑圖與轉移矩陣嗎？

四、找出樓梯數列奇偶數的分佈情形，及其規律為何?偶數分佈與奇數分佈個數比值會趨近於無限大嗎？

五、費氏數列其彼此項數間具有因倍數的關係為何？若樓梯數列每一項除以一正整數k後之餘數數列，其k倍數餘數數列循環節個數的規律為何？餘數數列是循環數列嗎？

六、樓梯數列$\{F_n\},\{A_n\},\{B_n\},\{C_n\},\{D_n\},\{E_n\}$如何建構立體幾何圖形呢？

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦。

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與研究問題：

(一)研究「登樓梯問題」：考慮登n階層的樓梯，每一次可以跨$1\sim m$階，

則登樓梯總方法數為$S_{(n,1\sim m)}$，其中$1\sim m$為可跨階數，n為樓梯總階層。

(二)樓梯數列定義：

考慮登n階層的樓梯，每一次可以跨$1\sim m$階($n\geq m\geq 0, n,m\in N\cup\{0\}$)，

當$m=2$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{F_n\}$。

當$m=3$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{A_n\}$。

當$m=4$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{B_n\}$。

當$m=5$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{C_n\}$。

當$m=6$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{D_n\}$。

當$m=7$時，登樓梯總方法數所成樓梯數列定義為$\{E_n\}$。

推廣至

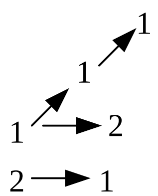
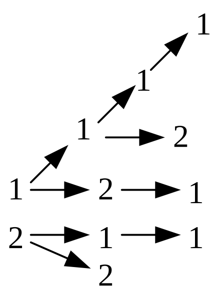
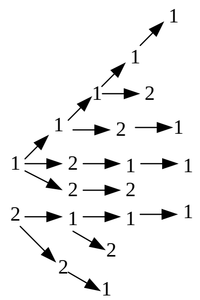
(1)每一次可以跨$1\sim m$階，登樓梯總方法數所成得到樓梯數列定義為$\{\mathrm{K}_n\}$；

(2)一次跨$\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\}$階($p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\in N$ 且 $p_1<p_2<p_3<\ldots<p_m$)，
登樓梯總方法數所成得到樓梯數列定義為$\{\mathrm{M}_n\}$。

二、透過轉移矩陣建構登樓梯跨$1\sim m$階總方法數探討

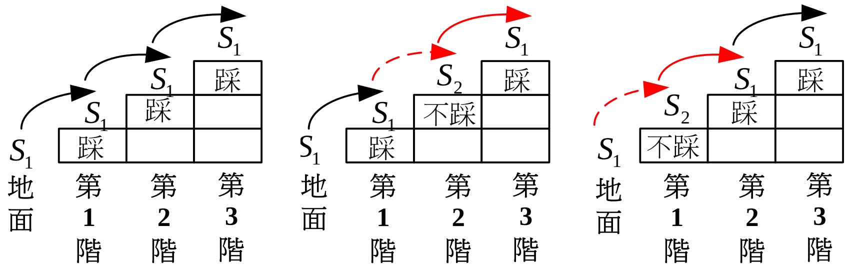
(一)跨$1\sim 2$階總方法數探討

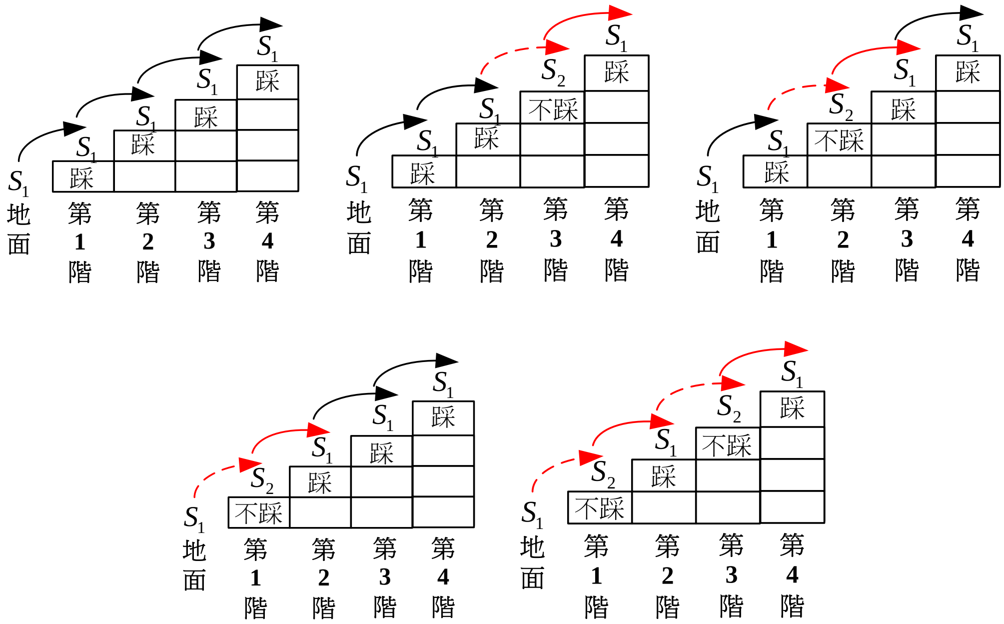
首先考慮登樓梯n階層，一次跨$1\sim 2$階的**登樓梯的路徑圖**，考慮登樓梯$n=3,4,5$階層的情形如下表：

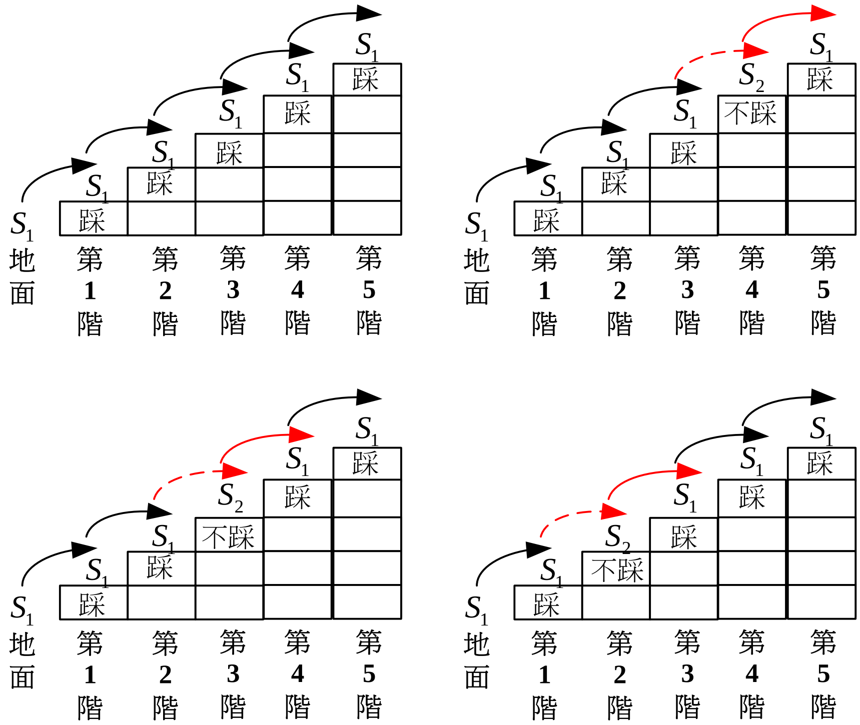
$n=3$	$n=4$	$n=5$
		
登樓梯總方法數為 3	登樓梯總方法數為 5	登樓梯總方法數為 8

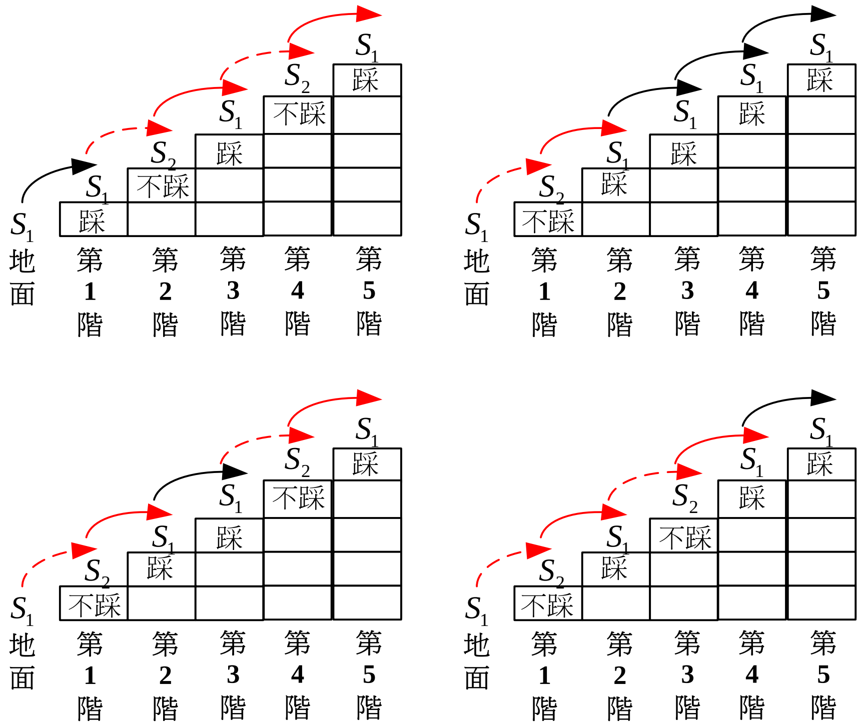
而**建構樓梯法則**與考慮$n=3,4,5$**登樓梯的建構樓梯法則情形**如下表：

建構樓梯法則	(1)起始點在地面 (2)完成跨一階模式為$S_1\longrightarrow S_1$，其中**黑色**實線箭頭過程是$\boxed{\text{踩}\rightarrow\text{踩}}$的動作。 (3)完成跨二階模式為$S_1 \dashrightarrow S_2\longrightarrow S_1$，其中一個紅色虛線與一個紅色實線箭頭的過程是$\boxed{\text{踩}\rightarrow\text{不踩}\rightarrow\text{踩}}$的動作。

<table>
<tr><td>$n=3$</td><td>

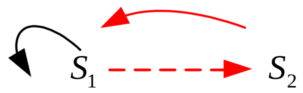
得到登 3 階層的樓梯，每一次可以跨1~2階，其登樓梯總方法數為 3。</td></tr>
<tr><td>$n=4$</td><td>

得到登 4 階層的樓梯，每一次可以跨1~2階，其登樓梯總方法數為 5。</td></tr>
<tr><td>$n=5$</td><td>
</td></tr>
</table>

$n=5$	 得到登 5 階層的樓梯，每一次可以跨$1\sim2$階，其登樓梯總方法數為 8。

由**建構樓梯法則**得出如下結果

(1)**起始矩陣** $X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}$ （代表踩在地面上） 。

(2)**生成路徑圖為** 

其中**黑色**實線箭頭的過程是$\boxed{\textbf{踩}\rightarrow\textbf{踩}}$的動作；虛線為一個紅色虛線與一個紅色實線箭頭的過程與$\boxed{\textbf{踩}\rightarrow\textbf{不踩}\rightarrow\textbf{踩}}$的動作。

(3)**樓梯轉移矩陣** $T=\begin{array}{c}\begin{matrix}S_1 & S_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}$ (4)**方法數矩陣** $\Omega_n=T^nX_0=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}$

(5)登樓梯 n 階層一次跨$1\sim2$階的總方法數為 F_n，其樓梯數列為費氏數列$\{F_n\}$。

【證明】登樓梯跨$1\sim2$階的方法數列為

費氏數列$\{F_n\}$： $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geq 2,n\in N)$

因為$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{n-1}\\F_{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{n-1}+F_{n-2}\\F_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}$

故**樓梯轉移矩陣** $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

與登樓梯 n 階層一次跨$1\sim2$階的總方法數為 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geq 2,n\in N)$。

For example：考慮登樓梯 n 階層，一次跨 $1\sim2$ 階，則

當 $n=2$ 時，則方法數矩陣 $\Omega_2=T^2X_0=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}\Rightarrow$ 總方法數為 $F_2=2$。

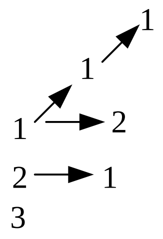
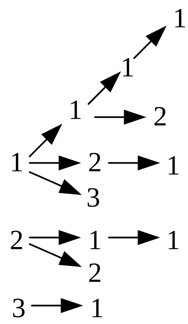
當 $n=3$ 時，則方法數矩陣 $\Omega_3=T^3X_0=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}\Rightarrow$ 總方法數為 $F_3=3$。

當 $n=4$ 時，則方法數矩陣 $\Omega_4=T^4X_0=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix}\Rightarrow$ 總方法數為 $F_4=5$。

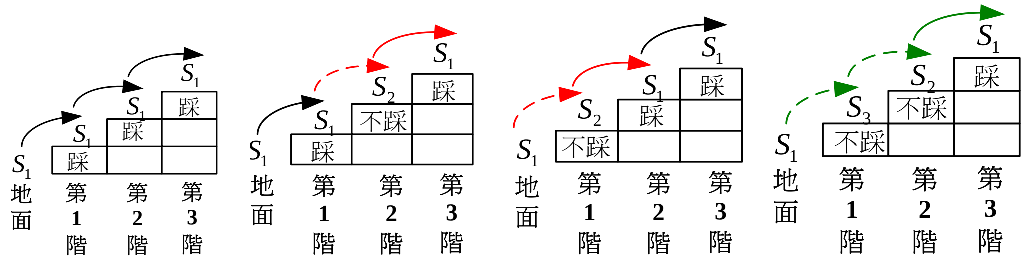
以此類推求得登樓梯 n 階層一次跨 $1\sim2$ 階的總方法數為 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\ge2, n\in N)$。

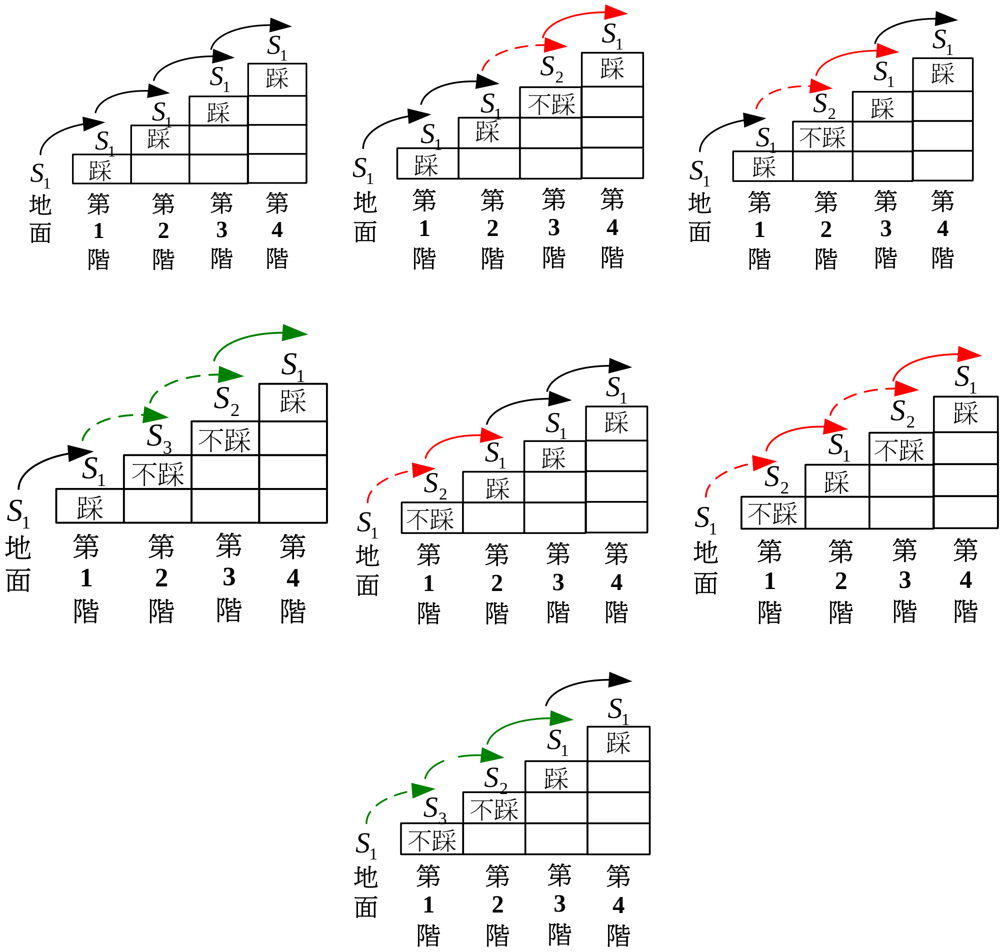
(二)跨 $1\sim3$ 階總方法數探討

首先考慮登樓梯 n 階層，一次跨 $1\sim3$ 階的**登樓梯的路徑圖**，考慮登樓梯 $n=3,4$ 階層的情形如下表：

$n=3$	$n=4$
 登樓梯總方法數為 4	 登樓梯總方法數為 7

而**建構樓梯法則與**考慮 $n=3,4,5$ **登樓梯的建構樓梯法則情形**如下表：

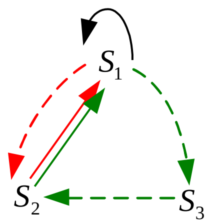
建構樓梯法則	(1)起始點在地面 (2)完成跨一階模式為 $S_1\longrightarrow S_1$，其中**黑色**實線箭頭過程是 **踩→踩** 的動作。 (3)完成跨二階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，其中一個紅色虛線與一個紅色實線箭頭的過程是 **踩→不踩→踩** 的動作。 (4)完成跨三階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_3 \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，其中二個綠色虛線與一個綠色實線箭頭的過程是 **踩→不踩→不踩→踩** 的動作。
$n=3$	 得到登 5 階層的樓梯，每一次可以跨 $1\sim3$ 階，其登樓梯總方法數為 4。

<table>
<tr><td>$n=4$</td><td>

得到登 5 階層的樓梯，每一次可以跨$1\sim3$階，其登樓梯總方法數為 7。</td></tr>
</table>

由**建構階梯法則**得出如下結果

(1)**起始矩陣** $X_0=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\end{array}$ （代表踩在地面上）；(1)**生成路徑圖為**



其中**黑色**實線箭頭的過程是**踩→踩**的動作；虛線為一個紅色虛線與一個紅色實線箭頭的過程與**踩→不踩→踩**的動作；二個綠色虛線與一個綠色實線箭頭的過程是**踩→不踩→不踩→踩**的動作。

(3)**樓梯轉移矩陣** $T=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}S_1&S_2&S_3\end{array}\\\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\S_1\\S_2\\S_3\end{array}$

(4)**方法數矩陣** $\Omega_n=T^nX_0=\begin{bmatrix}A_n\\A_{n-1}+A_{n-2}\\A_{n-1}\end{bmatrix}\begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\end{array}$

(5)登樓梯 n 階層一次跨$1\sim3$階的方法數為 A_n 。

【**證明**】登樓梯跨$1\sim3$階的方法數列為

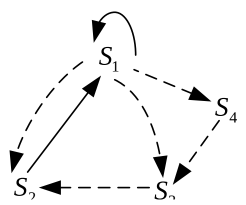
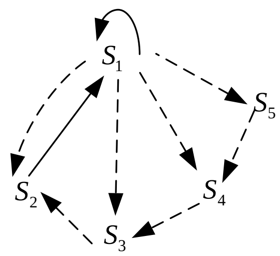
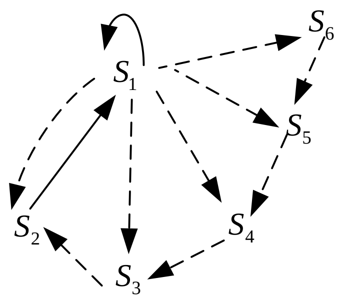
階梯數列$\{A_n\}$ ： $A_0=1, A_1=1, A_2=2, A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}\ (n\geq 3, n\in N)$

因為$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_{n-1}\\A_{n-2}+A_{n-3}\\A_{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}\\A_{n-1}+A_{n-2}\\A_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_n\\A_{n-1}+A_{n-2}\\A_{n-1}\end{bmatrix}$

故**樓梯轉移矩陣**$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

與登樓梯 n 階層一次跨$1\sim3$階的方法數為 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}\ (n\geq 3, n\in N)$ 。

(三)推廣跨$1\sim m$階樓梯數列探討

	樓梯數列$\{B_n\}$	樓梯數列$\{C_n\}$	樓梯數列$\{D_n\}$
起始矩陣	$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\end{array}$	$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\end{array}$	$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{array}$
跨樓梯的生成路徑圖			
	完成跨一階模式為$S_1\rightarrow S_1$ 完成跨二階模式為$S_1\dashrightarrow S_2\rightarrow S_1$ 完成跨三階模式為$S_1\dashrightarrow S_3\dashrightarrow S_2\rightarrow S_1$ 完成跨四階模式為$S_1\dashrightarrow S_4\dashrightarrow S_3\dashrightarrow S_2\rightarrow S_1$ 完成跨五階模式為$S_1\dashrightarrow S_5\dashrightarrow S_4\dashrightarrow S_3\dashrightarrow S_2\rightarrow S_1$ 完成跨六階模式為$S_1\dashrightarrow S_6\dashrightarrow S_5\dashrightarrow S_4\dashrightarrow S_3\dashrightarrow S_2\rightarrow S_1$		

轉移矩陣 T	$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$
方法數矩陣	$\Omega_n = T^n X_0$	$\Omega_n = T^n X_0$	$\Omega_n = T^n X_0$

定理1：設登樓梯 n 階層，當一次跨 $1\sim m$ 階 $(n \geq m, m \in N)$ 時，其產生的樓梯數列 $\{K_n\}$，則存在跨樓梯的生成路徑圖與轉移矩陣 T，

使得方法數矩陣 $\Omega_n = T^n X_0 = \begin{bmatrix}K_n\\ *\\ *\\ \vdots\\ *\end{bmatrix}$ 且一次跨 $1\sim m$ 階的總方法數為 K_n。

【證明】 首先考慮登樓梯 n 階層，一次跨 $1\sim m$ 階，

建構跨樓梯法則：

(1)起始點在地面

(2)完成跨一階模式為 $S_1 \longrightarrow S_1$，其過程是 $\boxed{\text{踩}\to\text{踩}}$ 的動作。

(3)完成跨二階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，其過程是 $\boxed{\text{踩}\to\text{不踩}\to\text{踩}}$ 的動作。

(4)完成跨三階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_3 \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，其過程是 $\boxed{\text{踩}\to\text{不踩}\to\text{不踩}\to\text{踩}}$ 的動作。

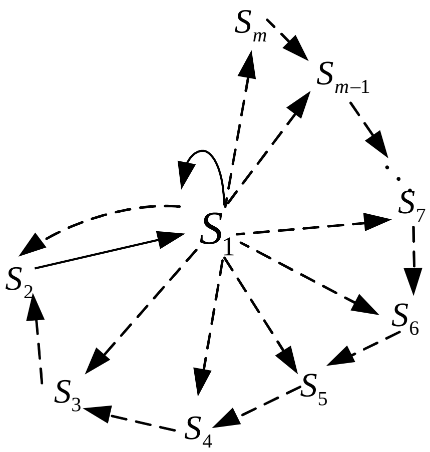
(5)完成跨四階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_4 \dashrightarrow S_3 \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，其過程是 $\boxed{\text{踩}\to\text{不踩}\to\text{不踩}\to\text{不踩}\to\text{踩}}$ 的動作。

以此類推得

完成跨 n 階模式為 $S_1 \dashrightarrow S_n \dashrightarrow S_{n-1} \dashrightarrow S_{n-2} \cdots \dashrightarrow S_2 \longrightarrow S_1$，

其過程是 $\boxed{\text{踩}\to\text{不踩}\to\text{不踩}\to\cdots\to\text{不踩}\to\text{踩}}$ 的動作。

則即可**建構跨樓梯的生成路徑圖**為



令起始矩陣(地面) $X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}T_1\\T_2\\T_3\\\vdots\\T_m\end{matrix}$ ，且登樓梯跨$1\sim m$階的方法數列為**樓梯數列**$\{K_n\}$：

$$\mathrm{K}_0=1,\mathrm{K}_1=1,\mathrm{K}_2=2,\ldots,\mathrm{K}_{m-1}=2^{m-2},\mathrm{K}_n=\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m}\ (n\geq m,n\in N)$$

因為

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&\cdots&0\\1&0&1&0&\vdots&\cdots&0\\1&0&0&1&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0&1&0&\vdots\\1&0&0&\cdots&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&0&1\\1&0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{n-1}\\\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m}\\\vdots\\\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}++\mathrm{K}_{n-5}\\\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}\\\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}\\\mathrm{K}_{n-2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m-1}+\mathrm{K}_{n-m}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m+1}\\\vdots\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}\\\mathrm{K}_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{n}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m+1}\\\vdots\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}\\\mathrm{K}_{n-1}\end{bmatrix}$$

得樓梯轉移矩陣 $T=\begin{bmatrix}1&&&&\\1&&&&\\\vdots&&I_{m-1}&&\\\vdots&&&&\\1&0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}$

且**方法數矩陣** $\Omega_n=T^nX_0=\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{n}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m+1}\\\vdots\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\mathrm{K}_{n-4}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}\\\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}\\\mathrm{K}_{n-1}\end{bmatrix}$

故登樓梯 n 階層一次跨$1\sim m$階的總方法數為

$$\mathrm{K}_n=\mathrm{K}_{n-1}+\mathrm{K}_{n-2}+\mathrm{K}_{n-3}+\cdots+\mathrm{K}_{n-m}\ (n\geq m,n\in N)$$ 。

三、登樓梯一次跨 $p\sim m$ 階總方法數探討

根據$\boxed{\text{定理1}}$即可推出登 n 階層($n=0,1,2,3,\ldots,8$)樓梯，一次跨$1\sim m$階($m=1,2,3,\ldots,9$)時，**總方法數**如下表：

跨 $1\sim m$階	零階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階
$1\sim 1$	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$1\sim 2$	1	1	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**
$1\sim 3$	1	1	2	**4**	**7**	**13**	**24**	**44**	**81**
$1\sim 4$	1	1	2	4	**8**	**15**	**29**	**56**	**108**
$1\sim 5$	1	1	2	4	8	**16**	**31**	**61**	**120**
$1\sim 6$	1	1	2	4	8	16	**32**	**63**	**125**
$1\sim 7$	1	1	2	4	8	16	32	**64**	**127**
$1\sim 8$	1	1	2	4	8	16	32	64	**128**
$1\sim 9$	1	1	2	4	8	16	32	64	128

因為登零階層樓梯，總方法數為 1，我們當成必然初始條件，所以探討以下跨$1\sim m$階、跨奇數階、跨偶數階、跨等差$d=3$階與跨 $p\sim m$ 階的情形時，不列入討論。

(一)跨$1\sim m$階方法數探討

性質 1：設登樓梯 n 階層，一次跨$1\sim m$階$(n,m\in N)$，則

(1)當$1\le k\le m$時，總方法數 $S_{(k,1\sim m)}=2^{k-1}$ 。

(2)從第$m+1$階層開始其總方法數為前m階層總方法數的和

$$S_{(n,1\sim m)}=S_{(n-1,1\sim m)}+S_{(n-2,1\sim m)}+\cdots+S_{(n-m+1,1\sim m)}+S_{(n-m,1\sim m)}\text{ 。}$$

(3)若跨$1\sim m$階得到樓梯數列$\{\mathrm{K}_n\}$，則$\mathrm{K}_{n+1},\mathrm{K}_n,\mathrm{K}_{n-m}$為等差數列。

【證明】(1)我們很容易得出當$1\le k\le m$時，總方法數 $S_{(k,1\sim m)}=2^{k-1}$ 。

(2)設登樓梯 n 階層且一次跨$1\sim m$階$(m\in N)$，先考慮第一步走幾階討論如下：

第一步走多少階	第一步後剩下階層走多少階	第一步後剩下階層 $S_{(n,1\sim m)}$
1	$n-1$	$S_{(n-1,1\sim m)}$
2	$n-2$	$S_{(n-2,1\sim m)}$
3	$n-3$	$S_{(n-3,1\sim m)}$
⋮	⋮	⋮

m	$n-m$	$S_{(n-m,1\sim m)}$

因為登樓梯 n 階層，第一步走 1 或 2 或…或 $m-1$ 或 m 階有 m 種情形，所以第一步後剩下階層總方法數分別依序 $S_{(n-1,1\sim m)}, S_{(n-2,1\sim m)}, \dots, S_{(n-m,1\sim m)}$ 等 m 種情形，

故 $S_{(n,1\sim m)} = S_{(n-1,1\sim m)} + S_{(n-2,1\sim m)} + \cdots + S_{(n-m+1,1\sim m)} + S_{(n-m,1\sim m)}$ 。

(3)【說明】首先仔細觀察看下表：

跨 $1\sim m$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階
$1\sim 2$	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$1\sim 3$	1	2	4	7	13	24	44	81	149
$1\sim 4$	1	2	4	8	15	29	56	108	208

當跨 $1\sim 2$ 階時，若 $n=3$ 時， $S_{(3,1\sim 2)}=3$ 、若 $n=5$ 時， $S_{(5,1\sim 2)}=8$ 且

若 $n=6$ 時， $S_{(6,1\sim 2)}=13$ 得到等差數列，再推廣得 F_{n+1}, F_n, F_{n-2} 為等差數列

當跨 $1\sim 3$ 階時，若 $n=2$ 時， $S_{(2,1\sim 3)}=2$ 、若 $n=5$ 時， $S_{(5,1\sim 3)}=13$ 且若 $n=6$ 時， $S_{(6,1\sim 3)}=24$

得到等差數列，再推廣得 A_{n+1}, A_n, A_{n-3} 為等差數列

當跨 $1\sim 4$ 階時，若 $n=1$ 時， $S_{(1,1\sim 4)}=1$ 、若 $n=5$ 時， $S_{(5,1\sim 4)}=15$ 且若 $n=6$ 時， $S_{(6,1\sim 4)}=29$

得到等差數列，再推廣得 B_{n+1}, B_n, B_{n-4} 為等差數列

同樣地推至跨 $1\sim m$ 階的樓梯數列 $\{K_n\}$ 亦得到 K_{n+1}, K_n, K_{n-m} 為等差數列。

【證明】利用(2)得 $K_{n+1} = K_n + K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} + \cdots + K_{n-m+1}$

$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} + \cdots + K_{n-m-1} + K_{n-m}$

可推得 K_{n+1}, K_n, K_{n-m} 為等差數列且公差為 $K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} + \cdots + K_{n-m-1}$ 。

(二)跨奇數階、跨偶數階、跨等差 $d=3$ 階方法數探討

性質 2：設登樓梯 n 階層，當一次考慮**跨奇數** $1,3,5,\dots,m$ **階** $(n, m\in N)$ 時，

則(1)當 $n\le m$ 時(**陰影部份**)，則方法數數列水平方向與斜方向呈現**費氏數列**。

(2)當 $n>m$ 時，總方法數為

$$S_{(n,1\text{或}3\cdots\text{或}m)} = S_{(n-1,1\text{或}3\cdots\text{或}m)} + S_{(n-3,1\text{或}3\cdots\text{或}m)} + \cdots + S_{(n-m,1\text{或}3\cdots\text{或}m)}$$ 。

【證明】(1)我們將當 $n\ge m+2$ 時，其數據統計如下表：

跨奇數階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階	十階
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,3	①	1	2	3	4	6	9	13	19	28
1,3,5	1	①	2	3	5	8	12	19	30	47
1,3,5,7	1	1	②	3	5	8	13	21	33	53
1,3,5,7,9	1	1	2	③	5	8	13	21	34	55
1,3,5,7,9,11	1	1	2	3	⑤	8	13	21	34	55

由上表可得當 $n \leq m$ 時(**陰影部份**)，考慮登樓梯方法情形如下表：

跨奇數階	一階	二階	三階	四階	五階
1	1				
1,3	1	1+1	1+1+1=3		
1,3,5	1	1+1	1+1+1=3	1+1+1=3+1=1+3	1+1+1+1+1=1+1+3=1+3+1 =3+1+1=5
1,3,5,7	1	1+1	1+1+1=3	1+1+1=3+1=1+3	1+1+1+1+1=1+1+3=1+3+1 =3+1+1=5
1,3,5,7,9	1	1+1	1+1+1=3	1+1+1=3+1=1+3	1+1+1+1+1=1+1+3=1+3+1 =3+1+1=5

故方法數數列**水平方向**(如紅色數字)與**斜方向**(如**圈起來數字**)呈現**費氏數列**。

(2)設登樓梯 n 階層且一次跨奇數階，先考慮第一步走幾階討論如下：

第一步走多少階	第一步後剩下階層走多少階	第一步後剩下階層表示法
1	$n-1$	$S_{(n-1,1或3\cdots或m)}$
2	不會出現	
3	$n-3$	$S_{(n-3,1或3\cdots或m)}$
4	不會出現	
5	$n-5$	$S_{(n-5,1或3\cdots或m)}$
⋮	⋮	⋮
m	$n-m$	$S_{(n-m,1或3\cdots或m)}$

因為登樓梯 n 階層，第一步走 1 或 3 或⋯或 m 階有 $\frac{m+1}{2}$ 種情形，所以第一步後剩下階層總方法數分別依序 $S_{(n-1,1或3\cdots或m)}, S_{(n-3,1或3\cdots或m)}, S_{(n-5,1或3\cdots或m)}, \ldots, S_{(n-m,1或3\cdots或m)}$ 等 $\frac{m+1}{2}$ 種情形，故 $S_{(n,1或3\cdots或m)} = S_{(n-1,1或3\cdots或m)} + S_{(n-3,1或3\cdots或m)} + \cdots + S_{(n-m,1或3\cdots或m)}$。

將**性質 2** 中考慮**跨奇數階**改為**跨偶數階**，其數據統計結果如下表：

跨偶數階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階	十階
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2,4	0	1	0	2	0	3	0	5	0	8
2,4,6	0	1	0	2	0	4	0	7	0	13
2,4,6,8	0	1	0	2	0	4	0	8	0	15
2,4,6,8,10	0	1	0	2	0	4	0	8	0	16

由上表可得(1)當 n 為奇數時，$S_{(n,2\text{或}4\ \cdots\text{或}\ m)}=0$

(2)當 m 為偶數且當 $1\le k\le m$ 時，總方法數 $S_{(k,2\text{或}4\ \cdots\text{或}\ m)}=2^{\frac{k}{2}-1}$ 。

(3)從第 $m+1$ 階層開始其總方法個數為前 m 階層總方法數的和

$$S_{(n,2\text{或}4\ \cdots\text{或}\ m)}=S_{(n-2,2\text{或}4\cdots\text{或}\ m)}+S_{(n-4,2\text{或}4\ \cdots\text{或}\ m)}+\cdots+S_{(n-m,2\text{或}4\cdots\text{或}\ m)}$$ 。

接著考慮**跨等差 $d=3$ 階**，其數據統計結果如下表：

跨等差 $d=3$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階	十階	十一階	十二階
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,4	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26
1,4,7	1	1	1	2	3	4	6	9	13	18	26	38
1,4,7,10	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41
1,4,7,10,13	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

由上表可得陰影部份符合 $S_{(n,\text{等差}d=3\text{階})}=S_{(n-2,\text{等差}d=3\text{階})}+S_{(n-3,\text{等差}d=3\text{階})}+S_{(n-4,\text{等差}d=3\text{階})}$ 。

(三)跨 $p\sim m$ 階總方法數探討

性質 3：設登樓梯 n 階層，當一次跨 $p\sim m$ 階($p,m,n\in N$ 且 $1\le p\le m$)時，

則(1)陰影部份其總方法數為 $S_{(n,p\sim m)}=S_{(n-1,p\sim m)}+S_{(n-p,p\sim m)}$ 。

(2)從第 $m+1$ 階層開始其總方法數為前 m 階層總方法數的和

$$S_{(n,p\sim m)}=S_{(n-p,p\sim m)}+S_{(n-p-1,p\sim m)}+\cdots+S_{(n-m,p\sim m)}$$ 。

【說明】(1)首先先觀察跨 $2\sim m$ 階的情形如下表：

跨 $2\sim m$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階
$2\sim2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$2\sim3$	0	1	1	1	2	2	3	4	5
$2\sim4$	0	1	1	2	2	4	5	8	11

2 ~ 5	0	1	1	2	3	4	7	10	16
2 ~ 6	0	1	1	2	3	5	7	12	18
2 ~ 7	0	1	1	2	3	5	8	12	20
2 ~ 8	0	1	1	2	3	5	8	13	20

由上表陰影部份可知 $S_{(n,2\sim m)} = S_{(n-1,2\sim m)} + S_{(n-2,2\sim m)}$ ，其中 $2 \le n \le m$ 。

接著再考慮跨 $3\sim m$ 階的情形如下表：

跨 $3\sim m$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階
3 ~ 3	0	0	1	0	0	1	0	0	1
3 ~ 4	0	0	1	1	0	1	2	1	1
3 ~ 5	0	0	1	1	1	1	2	3	3
3 ~ 6	0	0	1	1	1	2	2	3	5
3 ~ 7	0	0	1	1	1	2	3	3	5
3 ~ 8	0	0	1	1	1	2	3	4	6
3 ~ 9	0	0	1	1	1	2	3	4	6

由上表陰影部份可知 $S_{(n,3\sim m)} = S_{(n-1,3\sim m)} + S_{(n-3,3\sim m)}$ ，其中 $3 \le n \le m$ 。

接著再考慮跨 $4\sim m$ 階的情形如下表：

跨 $4\sim m$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階	十階	十一階	十二階
4 ~ 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
4 ~ 5	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0	1
4 ~ 6	0	0	0	1	1	1	0	1	2	3	2	2
4 ~ 7	0	0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	4
4 ~ 8	0	0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	6
4 ~ 9	0	0	0	1	1	1	1	2	3	3	4	6
4 ~ 10	0	0	0	1	1	1	1	2	3	4	4	6
4 ~ 11	0	0	0	1	1	1	1	2	3	4	5	7
4 ~ 12	0	0	0	1	1	1	1	2	3	4	5	7

由上表陰影部份可知 $S_{(n,4\sim m)} = S_{(n-1,4\sim m)} + S_{(n-4,4\sim m)}$ ，其中 $4 \le n \le m$ 。

以此類推得陰影部份其總方法數為 $S_{(n,p\sim m)} = S_{(n-1,p\sim m)} + S_{(n-p,p\sim m)}$ 。

(2)由上表觀察可得從第 $m+1$ 階層開始其總方法數為前 m 階層總方法數的和

$S_{(n,p\sim m)} = S_{(n-p,p\sim m)} + S_{(n-p-1,p\sim m)} + \cdots + S_{(n-m,p\sim m)}$ 。

(四)推廣至登樓梯一次跨 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ 階總方法數探討

定理 2：設登樓梯 n 階層時，一次跨 $\mathrm{P}=\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ 階 $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m \in N$ 且 $1 \le p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_m \le n)$，從第 p_m+1 階層開始，則其總方法數為前 p_m 階層總方法數為 $S_{(n,\mathrm{P})} = \sum_{k=1}^{m} S_{(n-p_k,\mathrm{P})}$ 。

【說明】 當考慮登樓梯 $n=15$ 階層時，一次跨 $\mathrm{P}=\{p_1, p_2, p_3\}=\{2,5,8\}$ 階時，

則其方法數 $S_{(15,\mathrm{P})}$ 僅考慮 $S_{(15-p_1,\mathrm{P})} = S_{(15-2,\mathrm{P})} = S_{(13,\mathrm{P})}$ 、 $S_{(15-p_2,\mathrm{P})} = S_{(15-5,\mathrm{P})} = S_{(10,\mathrm{P})}$

與 $S_{(15-p_3,\mathrm{P})} = S_{(15-8,\mathrm{P})} = S_{(7,\mathrm{P})}$ 三種。

因為當已完成走 $15-p_i = 15-2$ 階時，剩下階層直接跨越
當已完成走 $15-p_i = 15-5$ 階時，剩下階層直接跨越
當已完成走 $15-p_i = 15-8$ 階時，剩下階層直接跨越
當已完成走 $15-p_1$ 或 $15-p_2$ 或 $15-p_3$ 階有 3 種情形，所以剩下階層直接跨越，

故其總方法數 $S_{(15,\mathrm{P})} = S_{(15-p_1,\mathrm{P})}\cdot 1 + S_{(15-p_2,\mathrm{P})}\cdot 1 + S_{(15-p_3,\mathrm{P})}\cdot 1 = \sum_{k=1}^{3} S_{(n-p_k,\mathrm{P})}$ 。

【證明】 將其推廣登樓梯 n 階層時，一次跨 $\mathrm{P}=\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ 階 $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m \in N)$

$S_{(n,\mathrm{P})}$ 亦可推得如下說明：

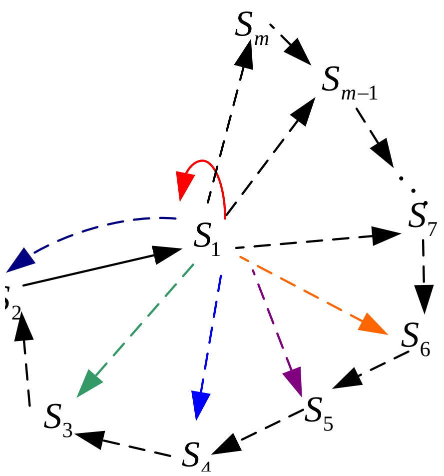
已完成 $\mathrm{P}=\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ 階	完成階層的方法數	剩下階層方法數說明
p_1	$S_{(n-p_1,\mathrm{P})}$	直接跨越 p_1 階，所以方法數 1 種
p_2	$S_{(n-p_2,\mathrm{P})}$	直接跨越 p_2 階，所以方法數 1 種
p_3	$S_{(n-p_3,\mathrm{P})}$	直接跨越 p_3 階，所以方法數 1 種
p_4	$S_{(n-p_4,\mathrm{P})}$	直接跨越 p_4 階，所以方法數 1 種
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_m	$S_{(n-p_m,\mathrm{P})}$	直接跨越 p_m 階，所以方法數 1 種

當已完成走 $15-p_1$ 或 $15-p_2$ 或 $15-p_3 \cdots$ 或 $15-p_m$ 階等有 m 種情形，其完成階層的方法數分別為 $S_{(n-p_1,\mathrm{P})}$ 、 $S_{(n-p_2,\mathrm{P})}$ 、 $S_{(n-p_3,\mathrm{P})}$ 、$\cdots$、 $S_{(n-p_m,\mathrm{P})}$ 等有 m 種方法數情形，剩下階層直接跨越 p_m 階，方法數皆為 1 種，

故其總方法數 $S_{(n,\mathrm{P})} = S_{(n-p_1,\mathrm{P})}\cdot 1 + S_{(n-p_2,\mathrm{P})}\cdot 1 + S_{(n-p_3,\mathrm{P})}\cdot 1 + \cdots + S_{(n-p_m,\mathrm{P})}\cdot 1 = \sum_{k=1}^{m} S_{(n-p_k,\mathrm{P})}$ 。

四、透過轉移矩陣建構登樓梯跨 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ 階總方法數探討

我們感興趣登樓梯 n 階層改為跨 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ 階($p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m \in N$ 且 $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_m \le n$)時，也可建構登樓梯的生成路徑圖與轉移矩陣，進而求得總方法數嗎？先從一次跨 $p \sim m$ 階時討論，登樓梯的生成路徑圖改變說明如下表：

一次跨 $1 \sim m$ 階，登樓梯的生成路徑圖	一次跨 $p \sim m$ 階，登樓梯的生成路徑圖改變說明
	(1) 當一次跨 $2 \sim m$ 階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色 $S_1 \to S_1$ 路徑。 (2) 當一次跨 $3 \sim m$ 階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色 $S_1 \to S_1$ 路徑與**深藍色** $S_1 \to S_2$ 路徑。 (3) 當一次跨 $4 \sim m$ 階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色 $S_1 \to S_1$ 路徑、**深藍色** $S_1 \to S_2$ 路徑與綠色 $S_1 \to S_3$ 路徑。 (4) 當一次跨 $5 \sim m$ 階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色 $S_1 \to S_1$ 路徑、**深藍色** $S_1 \to S_2$ 路徑、綠色 $S_1 \to S_3$ 路徑、藍色 $S_1 \to S_4$ 路徑與當一次跨 $4 \sim m$ 階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色 $S_1 \to S_1$ 路徑、**深藍色** $S_1 \to S_2$ 路徑與綠色 $S_1 \to S_3$ 路徑。 以此類推即得到必存在其登樓梯的**生成路徑圖**。

即**起始矩陣** $X_0 = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} & \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_p \\ \vdots \\ S_m \end{array} \end{array}$ (代表踩在地面上)，其中 $x_k = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 0, & 1 < p \le m \end{cases}$

根據**定理 1** 方式可得**轉移矩陣** $T = \begin{bmatrix} t_1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ t_3 & & & & & \\ \vdots & & & I_{k-1} & & \\ t_p & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ t_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，其中 $t_k = \begin{cases} 1, & p < k \le m \\ 0, & 1 \le k \le p \end{cases}$

再利用方法數矩陣 $\Omega_n = T^n X_0$ 求得一次跨 $p \sim m$ 階總方法數。

定理 3：設登樓梯 n 階層，當 $\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\}$ 階 $(p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\in N,$ $1\le p_1<p_2<p_3<\ldots<p_m\le n)$ 時，其產生的樓梯數列 $\{\mathrm{M}_n\}$，則存在跨樓梯的生成路徑圖與轉移矩陣 T，使得總方法數矩陣 $\Omega_n=T^nX_0=\begin{bmatrix}\mathrm{M}_n\\ *\\ \vdots\\ *\end{bmatrix}$ 且其方法數為 M_n。

【**證明**】一次跨 $\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\}$ 階與跨 $p\sim m$ 階，跨樓梯的生成路徑圖改變方式相同

直接利用**定理 1** 方式可得轉移矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ t_3 & & & I_{k-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ t_p & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ t_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}$，其中 $t_k=\begin{cases}1, & T_1\to T_{p_i}\\ 0, & T_1\nrightarrow T_{p_i}\end{cases}$

故利用轉移矩陣求得方法數矩陣 $\Omega_n=T^nX_0=\begin{bmatrix}\mathrm{M}_n\\ *\\ \vdots\\ *\end{bmatrix}$ 且其總方法數為 M_n。

五、指定步數總方法數探討

首先考慮登樓梯 5 階層指定步數總方法數如下說明：

指定步數	指定步數方法情形說明	方法數 ($x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$ 正整數個數)
1 步	5	$H_4^1=C_4^4=1$
2 步	1+4=2+3=3+2=4+1	$H_3^2=C_3^4=4$
3 步	1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2 =2+1+2=2+2+1	$H_2^3=C_2^4=6$
4 步	1+1+1+2=1+1+2+1=1+2+1+1 =2+1+1+1	$H_1^4=C_1^4=4$
5 步	1+1+1+1+1	$H_0^5=C_0^4=1$

將登 5 階層的樓梯跨 $1\sim m$ 階指定步數的總方法分佈數情形如下表：

方法數 跨$1\sim m$階	指定步數 1 步	指定步數 2 步	指定步數 3 步	指定步數 4 步	指定步數 5 步
$1\sim 1$	*	*	*	*	$C_0^4=1$
$1\sim 2$	*	*	*	$C_1^4=4$	$C_0^4=1$
$1\sim 3$	*	*	$C_2^4=6$	$C_1^4=4$	$C_0^4=1$
$1\sim 4$	*	$C_3^4=4$	$C_2^4=6$	$C_1^4=4$	$C_0^4=1$
$1\sim 5$	$C_4^4=1$	$C_3^4=4$	$C_2^4=6$	$C_1^4=4$	$C_0^4=1$

從上表很清楚看到其總方法數分佈為呈現斜方向**巴斯卡三角形係數**(如紅色數字)。

進一步推廣至登n階層的樓梯跨$1\sim m$階指定步數的總方法數分佈情形如下表：

跨 $1\sim n$ 階	指定步數 1 步	指定步數 2 步	指定步數 3 步	指定步數 4 步	…	指定步數 k 步	…		指定步數 $1\sim(n-2)$ 步	指定步數 $1\sim(n-1)$ 步	指定步數 $1\sim n$ 步
$1\sim 1$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim 2$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim 3$	*	*	*	*	*	*	*	*	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim 4$	*	*	*	*	*	*	*	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim 5$	*	*	*	*	*	*	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
	*	*	*	*	*	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim(n-k)$	*	*	*	*	⋰	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
⋮	*	*	*	C_3^{n-1}	⋰	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim(n-2)$	*	*	C_2^{n-1}	C_3^{n-1}	⋰	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim(n-1)$	*	C_1^{n-1}	C_2^{n-1}	C_3^{n-1}	⋰	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}
$1\sim n$	C_0^{n-1}	C_1^{n-1}	C_2^{n-1}	C_3^{n-1}	⋰	C_k^{n-1}	⋰	⋰	C_{n-3}^{n-1}	C_{n-2}^{n-1}	C_{n-1}^{n-1}

從上表很清楚看到其總方法數分佈呈現斜方向**巴斯卡三角形係數**(如紅色數字)。

六、樓梯數列因倍數探討

(一)樓梯數列$\{K_n\}$奇偶數探討：

定理4：設登樓梯n階層，當一次跨$1\sim m$階$(n\ge m, n,m\in N)$時，其產生的樓梯數列$\{K_n\}$，則當$n,m\to\infty$時，樓梯數列$\{K_n\}$為偶數分佈與奇數分佈個數比值趨近無限大。

【證明】(1)我們先觀察跨$1\sim m$階方法數其對應奇數與偶數的分佈如下：

跨 $1\sim m$ 階	一階	二階	三階	四階	五階	六階	七階	八階	九階	定　義
1-2	奇	偶	奇	奇	偶	奇	奇	偶	奇	費氏數列$\{F_n\}$
1-3	奇	偶	偶	奇	奇	偶	偶	奇	奇	樓梯數列$\{A_n\}$
1-4	奇	偶	偶	偶	奇	奇	偶	偶	偶	樓梯數列$\{B_n\}$
1-5	奇	偶	偶	偶	偶	奇	奇	偶	偶	樓梯數列$\{C_n\}$
1-6	奇	偶	偶	偶	偶	偶	奇	奇	偶	樓梯數列$\{D_n\}$
1-7	奇	偶	偶	偶	偶	偶	偶	奇	奇	樓梯數列$\{E_n\}$

根據數據整理可得

當費氏數列$\{F_n\}$時，1 個偶數且 2 個奇數為一循環

當樓梯數列$\{A_n\}$時，2 個偶數且 2 個奇數為一循環

當樓梯數列$\{B_n\}$時，3 個偶數且 2 個奇數為一循環

當樓梯數列$\{C_n\}$時，4 個偶數且 2 個奇數為一循環

當樓梯數列$\{D_n\}$時，5 個偶數且 2 個奇數為一循環

當樓梯數列$\{E_n\}$時，6 個偶數且 2 個奇數為一循環

$\vdots$

樓梯數列$\{\mathrm{K}_n\}$時，$m+1$個偶數且 2 個奇數為一循環

當$n,m\to\infty$時，$\lim\limits_{m\to\infty}(m+1)=\infty$，

故樓梯數列$\{\mathrm{K}_n\}$為偶數分佈個數與奇數分佈個數比值趨近無限大。

(二)費氏數列$\{F_n\}$因倍數關係之探討

我們很好奇，樓梯數列彼此項數間是否有存在有因倍數的關係嗎？首先考慮跨$1\sim 2$階的費氏數列$\{F_n\}$，其彼此項數間是否有存在有因倍數關係嗎？以下是我們的探討：

> **定理5**：設登樓梯n階層，當一次跨$1\sim 2$階時，其產生的費氏數列$\{F_n\}$，
>
> 則存在一轉移矩陣T使得T^n與費氏數F_n對應且
>
> 存在任意正整數a,b使得$F_{a+b}=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$。

【證明】取轉移矩陣$T=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

則$T^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},T^3=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，其中$T^3$與費氏數對應為$\begin{bmatrix}F_3&F_2\\F_2&F_1\end{bmatrix}$

以此類推得$T^n=\begin{bmatrix}F_n&F_{n-1}\\F_{n-1}&F_{n-2}\end{bmatrix},n\geq 3$

令矩陣 $A_{2\times1}=T^a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_a & F_{a-1}\\F_{a-1} & F_{a-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_a\\F_{a-1}\end{bmatrix}$；

矩陣 $B_{2\times1}=T^b\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_b & F_{b-1}\\F_{b-1} & F_{b-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_b\\F_{b-1}\end{bmatrix}$ 且 B^t 為轉置矩陣

則 $tr(AB^t)=tr(\begin{bmatrix}F_a\\F_{a-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_b\\F_{b-1}\end{bmatrix}^t)=tr(\begin{bmatrix}F_aF_b & F_aF_{b-1}\\F_{a-1}F_b & F_{a-1}F_{b-1}\end{bmatrix})=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$ 且

$$tr(AB^t)=tr(T^a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot(T^b\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})^t)=tr(T^a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^t\cdot T^b)$$

$$=tr(T^a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^t\cdot T^b)=tr(T^{a+b}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix})=tr(\begin{bmatrix}F_{a+b}&0\\0&0\end{bmatrix})=F_{a+b}$$

故存在任意正整數 a,b 使得 $F_{a+b}=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$ 。

定理6：設登樓梯 n 階層，當一次跨 $1\sim2$ 階時，其產生的費氏數列 $\{F_n\}$，
已知存在任意正整數 a,b 使得 $F_{a+b}=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$ ，
則對任意正整數 k 使得 $F_{k(n+1)+n}=F_{n-1}\cdot F_{k(n+1)-1}+F_n\cdot F_{k(n+1)}$ 為 F_n 的倍數。

【證明】 當 $k=1$ 時，則 $F_{n-1}\cdot F_{1\cdot(n+1)-1}+F_n\cdot F_{1\cdot(n+1)}=F_{n-1}\cdot F_n+F_n\cdot F_{n+1}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1})$ 為 F_n 的倍數

故 $k=1$ 時成立

設 $k=k'$ 時，則 $F_{k'(n+1)+n}=F_{n-1}\cdot F_{k'(n+1)-1}+F_n\cdot F_{k'(n+1)}$ 為 F_n 的倍數

即 $F_{n-1}\cdot F_{k'(n+1)-1}$ 為 F_n 的倍數

則當 $k=k'+1$ 時，

$$F_{n-1}\cdot F_{(k'+1)(n+1)-1}+F_n\cdot F_{(k'+1)(n+1)}=F_{n-1}\cdot(F_n\cdot F_{k'(n+1)-2}+F_{n+1}\cdot F_{k'(n+1)-1})+F_n\cdot F_{(k'+1)(n+1)}$$

$$=F_n\cdot(F_{n-1}\cdot F_{k'(n+1)-2})+F_{n+1}\cdot(F_{n-1}\cdot F_{k'(n+1)-1})+F_n\cdot F_{(k'+1)(n+1)}$$

因為 $F_{n-1}\cdot F_{k'(n+1)-1}$ 為 F_n 的倍數

$\Rightarrow F_{n-1}\cdot F_{(k'+1)(n+1)-1}+F_n\cdot F_{(k'+1)(n+1)}$ 為 F_n 的倍數

所以當 $k=k'+1$ 時，亦成立

故由數學歸納法得對任意正整數 k 使得 $F_{n-1}\cdot F_{k(n+1)-1}+F_n\cdot F_{k(n+1)}$ 為 F_n 的倍數。

(三)樓梯數列$\{K_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列規律探討

進一步探討樓梯數列$\{K_n\}$每一項除以一正整數k後餘數數列有何規律呢？首先探討樓梯數列$\{K_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數是否存在循環數列呢？

定理7：設登樓梯n階層，當一次跨$1 \sim m$階$(n \geq m$或$n = 0, n, m \in N)$時，其產生的樓梯數列$\{K_n\}$，則其數列$\{K_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列必定分別從$1,1,\ldots,1,0$、$1,1,\ldots,1,0,0$、$1,1,\ldots,1,0,0,0$、$1,1,\ldots,1,0,0,0,0$、$1,1,\ldots,1,0,0,0,0,0$、$\cdots$等為循環數列。

【說明】首先考慮費氏數列$\{F_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列情形如下

k	**費氏數列$\{F_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列，其每個循環節數字分佈情形**	**餘數數列呈現循環數列**
2	1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0⋯	1 1 0
3	1 1 2 0 2 2 1 0 1 1 2 0 2 2 1 0 1 1 2 0 2 2 1 0 1 1 2 0 2 2 1 0⋯	1 1 2 0 2 2 1 0
4	1 1 2 3 1 0 1 1 2 3 1 0 1 1 2 3 1 0 1 1 2 3 1 0 1 1 2 3 1 0⋯	1 1 2 3 1 0
5	1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0 1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0 1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0⋯	1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0

由上表得費氏數列$\{F_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列為循環數列$1,1,\ldots,1,0$。接著考慮樓梯數列$\{A_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列情形如下

k	**樓梯數列$\{A_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列，其每個循環節數字分佈情形**	**餘數數列呈現循環數列**
2	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 ⋯	1 1 0 0
3	1 1 2 1 1 1 0 2 0 2 1 0 0 1 1 2 1 1 1 0 2 0 2 1 0 0 1 1 2 1 1 1 0 2 0 2 1 0 0⋯	1 1 2 1 1 1 0 2 0 2 1 0 0
4	1 1 2 0 3 1 0 0 1 2 0 3 1 0 0 1 1 2 0 3 1 0 0 1 2 0 3 1 0 0 1 1 2 0 3 1 0 0⋯	1 1 2 0 3 1 0 0
5	1 1 2 4 2 3 4 4 1 4 4 4 2 0 1 3 4 3 0 2 0 2 4 1 2 2 0 4 1 0 0 1 1 2 4 2 3 4 4 1 4 4 4 2 0 1 3 4 3 0 2 0 2 4 1 2 2 0 4 1 0 0⋯	1 1 2 4 2 3 4 4 1 4 4 4 2 0 1 3 4 3 0 2 0 2 4 1 2 2 0 4 1 0 0

由上表得樓梯數列$\{A_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列為循環數列$1,1,\ldots,1,0,0$。同樣地我們發現樓梯數列$\{K_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列必為循環數列，以下是我們的證明：

【證明】首先考慮費氏數列$\{F_n\}$中的每一項F_i除以一正整數k後之餘數項

$R_i \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}$，$k$為除數，其中$A$為有限集合，

故$(R_i, R_{i+1}) \in A \times A = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$亦為有限集合

又$R_i \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}, R_{i+1} \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\} \Rightarrow (R_i, R_{i+1})$至少有$k^2$種組合，

因此在餘數數列出現k^2項之後，至少會有一組(R_i, R_{i+1})與(R_j, R_{j+1})相同，

又因為$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$

在除以任一正整數 k ，我們發現餘數數列有下列性質：$(R_n + R_{n+1}) \equiv R_{n+2} \pmod k$

由上式推知 $R_i, R_{i+1}, R_{i+2}, \ldots$ 與 $R_j, R_{j+1}, R_{j+2}, \ldots$ 相同

故費氏數列 $\{F_n\}$ 餘數數列必定會循環

設 (R_i, R_{i+1}) 與 (R_j, R_{j+1}) 相同，其中 $j > i$

則由 (R_i, R_{i+1}) 往前推 $i-1$ 項可得 (R_1, R_2) ，

同理可知由 (R_j, R_{j+1}) 往前推 $i-1$ 項可得 $(R_{j-(i-1)}, R_{j-1-(i-1)}) = (R_1, R_2)$

因為 $(R_n + R_{n+1}) \equiv R_{n+2} \pmod k$

可得費氏數列 $\{F_n\}$ 中的每一項 F_i 除以一正整數 k 後之餘數數列必定會從 $1,1,\ldots$

開始循環，且由 $(R_n + R_{n+1}) \equiv R_{n+2} \pmod k$ 可推知

循環數列最後一項必為 0，循環數列之倒數第二項必為 1。

接著考慮數列 $\{A_n\}$ 中的每一項 A_i 除以一正整數 k 後之餘數項

$R_i \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}$ ， k 為除數，其中 A 為有限集合，

故 $(R_i, R_{i+1}, R_{i+2}) \in A \times A \times A = \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in A, z \in A\}$ 亦為有限集合

又 $R_i \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}, R_{i+1} \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}, R_{i+2} \in A = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}$

$\Rightarrow (R_i, R_{i+1}, R_{i+2})$ 至少有 k^3 種組合，

因此在餘數數列出現 k^3 項之後，

至少會有一組 (R_i, R_{i+1}, R_{i+2}) 、 (R_j, R_{j+1}, R_{j+2}) 與 (R_l, R_{l+1}, R_{l+2}) 相同，

又 $A_n + A_{n+1} + A_{n+2} = A_{n+3}$

在除以任一正整數 k ，我們發現餘數數列有下列性質：$(R_n + R_{n+1} + R_{n+3}) \equiv R_{n+4} \pmod k$

由上式推知 $R_i, R_{i+1}, R_{i+1}, \ldots$ 、 $R_j, R_{j+1}, R_{j+2}, \ldots$ 與 $R_l, R_{l+1}, R_{l+2}, \ldots$ 相同

故數列 $\{A_n\}$ 餘數數列必定會循環

設 (R_i, R_{i+1}, R_{i+1}) 、 (R_j, R_{j+1}, R_{j+2}) 與 (R_l, R_{l+1}, R_{l+2}) 相同，其中 $l > j > i$

則由 (R_i, R_{i+1}, R_{i+2}) 往前推 $i-1$ 項可得 (R_1, R_2, R_3) ，

同理可知由 (R_j, R_{j+1}, R_{j+2}) 往前推 $i-1$ 項可得 $(R_{j-(i-1)}, R_{j-1-(i-1)}, R_{j-2-(i-1)}) = (R_1, R_2, R_3)$

由 (R_l, R_{l+1}, R_{l+2}) 往前推 $i-1$ 項可得 $(R_{l-(i-1)}, R_{l-1-(i-1)}, R_{l-2-(i-1)}) = (R_1, R_2, R_3)$

因為 $(R_n + R_{n+1} + R_{n+3}) \equiv R_{n+4} \pmod k$

可得樓梯數列 $\{A_n\}$ 中的每一項 A_i 除以一正整數 k 後之餘數數列必定會從 $1,1,\ldots$ 開始

循環，且由 $(R_n + R_{n+1} + R_{n+3}) \equiv R_{n+4} \pmod k$ 可推知循環數列最後一項必為 0，循環數列之倒數第二項必為 0 與循環數列之倒數第三項必為 0。

同理可証得樓梯數列 $\{K_n\}$ 每一項除以一正整數 k 後之餘數數列必定分別從

$1,1,\ldots,1,0$ 、 $1,1,\ldots,1,0,0$ 、 $1,1,\ldots,1,0,0,0$ 、 $1,1,\ldots,1,0,0,0,0$ 、 $1,1,\ldots,1,0,0,0,0,0$ 、$\cdots$

等為循環數列。

由**定理 7** 得樓梯數列 $\{K_n\}$ 每一項除以一正整數 k 後之餘數數列為循環數列，我們很好奇其餘數數列中各循環節個數有何關聯性呢？以下是我們的探討：

首先先定義 k **倍數之餘數數列循環節個數**為 N_q，以費氏數列 $\{F_n\}$ 與樓梯數列 $\{A_n\}$ 每一項除以一正整數 k 後之餘數數列循環節個數為例說明如下：

費氏數列 $\{F_n\}$			樓梯數列 $\{A_n\}$		
k	循環數列	循環節個數 N_q	k	循環數列	循環節個數 N_q
2	1 1 0	$N_2 = 3$	**2**	1 1 0 0	$N_2 = 4$
3	1 1 2 0 2 2 1 0	$N_3 = 8$	**3**	1 1 2 1 1 1 0 2 0 2 1 0 0	$N_3 = 13$
4	1 1 2 3 1 0	$N_4 = 6$	**4**	1 1 2 0 3 1 0 0	$N_4 = 8$
5	1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0	$N_5 = 20$	**5**	1 1 2 4 2 3 4 4 1 4 4 4 2 0 1 3 4 3 0 2 0 2 4 1 2 2 0 4 1 0 0	$N_5 = 31$

定理8：設登樓梯 n 階層，當一次跨 $1 \sim m$ 階 $(n \ge m, m \in N)$ 時，其產生的樓梯數列 $\{K_n\}$，其每一項除以一正整數 k 後餘數數列，則

(1) 當 $k = q^m$ 時，則 k 倍數之餘數數列循環節個數 $N_k = N_{q^m} = q^{m-1} \cdot N_q$。

(2) 當 $k = p \cdot q \cdot \cdots \cdot s$ 且 $p, q, \cdots, s$ 為質數時，

則 k 倍數之餘數數列循環節個數 $N_k = N_{p \cdot q \cdot r \cdot \cdots \cdot s} = [N_p, N_q, N_r, \ldots, N_s]$。

(3) 當 $k = p^{m_1} \cdot q^{m_2} \cdot r^{m_3} \cdot \cdots \cdot s^{m_n}$ 且 $p, q, \cdots, s$ 為質數時，則 k 倍數之餘數數列循環節個數 $N_k = N_{p^{m_1} \cdot q^{m_2} \cdot r^{m_3} \cdot \cdots \cdot s^{m_n}} = [N_{p^{m_1}}, N_{q^{m_2}}, N_{r^{m_3}}, \ldots, N_{s^{m_n}}]$。

【說明】首先我們先觀察如下數列 $\{F_n\}$, $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$, $\{D_n\}$ k 倍數之餘數數列循環節個數分佈情形：

	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	N_{16}
$\{F_n\}$	3	8	6	20	24	16	12	24	60	10	24	28	48	40	24
$\{A_n\}$	4	13	8	31	52	48	16	39	124	110	104	168	48	403	32
$\{B_n\}$	5	26	10	312	130	342	20	78	1560	120	130	84	1710	312	40
$\{C_n\}$	6	104	12	781	312	2801	24	312	4686	16105	312	30941	16806	81224	48
$\{D_n\}$	7	728	14	208	728	342	28	2184	1456	354312	728	9520	2394	1456	56

發現歸納如下：

(1)令 $k=q^m$ 時，

首先考慮費氏數列$\{F_n\}$：

$k=4=2^2$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^2}=2^{2-1}\cdot\mathrm{N}_2=2\cdot3=6$

$k=8=2^3$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^3}=2^{3-1}\cdot\mathrm{N}_2=2^2\cdot3=12$

$k=16=2^4$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^4}=2^{4-1}\cdot\mathrm{N}_2=2^3\cdot3=48$

考慮樓梯數列$\{A_n\}$

$k=4=2^2$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^2}=2^{2-1}\cdot\mathrm{N}_2=2\cdot4=8$

$k=8=2^3$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^3}=2^{3-1}\cdot\mathrm{N}_2=2^2\cdot4=16$

$k=16=2^4$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^4}=2^{4-1}\cdot\mathrm{N}_2=2^3\cdot4=32$

以此類推得 k 倍數之餘數數列循環節個數 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{q^m}=q^{m-1}\cdot\mathrm{N}_q$ 。

(2)令當 $k=p\cdot q\cdot\cdots\cdot s$ 且 $p,q,\cdots,s$ 為質數時，，

首先考慮費氏數列$\{F_n\}$：

$k=6=2\cdot3$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2\cdot3}=[\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3]=3\cdot8=24$

$k=15=3\cdot5$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{3\cdot5}=[\mathrm{N}_3,\mathrm{N}_5]=[8,20]=40$

考慮樓梯數列$\{A_n\}$

$k=6=2\cdot3$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2\cdot3}=[\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3]=4\cdot13=52$

$k=15=3\cdot5$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{3\cdot5}=[\mathrm{N}_3,\mathrm{N}_5]=[13,31]=403$

以此類推得 k 倍數之餘數數列循環節個數 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{p\cdot q\cdot r\cdot\cdots\cdot s}=[\mathrm{N}_p,\mathrm{N}_q,N_r,\ldots,N_s]$ 。

(3) 令 $k=p^{m_1}\cdot q^{m_2}\cdot r^{m_3}\cdots s^{m_n}$ 且 $p,q,\cdots,s$ 為質數時，

首先考慮樓梯數列$\{F_n\}$：

$k=20=2^2\cdot5$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^2\cdot5}=[\mathrm{N}_{2^2},\mathrm{N}_5]=[2^{2-1}\cdot3,20]=60$

考慮樓梯數列$\{A_n\}$

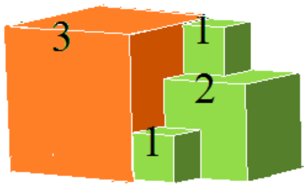
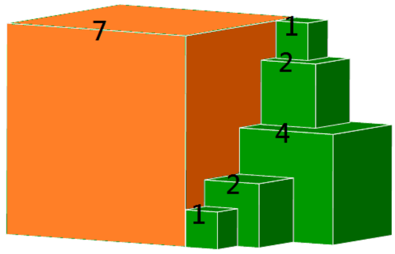
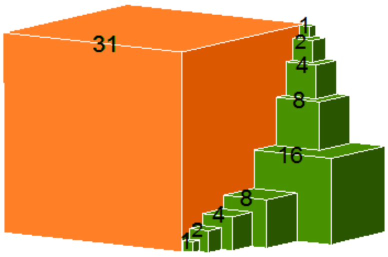
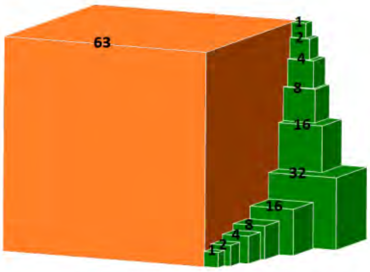
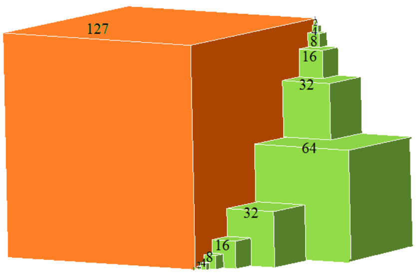
$k=20=2^2\cdot5$ 倍數之餘數數列循環節個數為 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{2^2\cdot5}=[\mathrm{N}_{2^2},\mathrm{N}_5]=[2^{2-1}\cdot4,31]=248$

以此類推得

k 倍數之餘數數列循環節個數 $\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{p^{m_1}\cdot q^{m_2}\cdot r^{m_3}\cdots s^{m_n}}=[\mathrm{N}_{p^{m_1}},\mathrm{N}_{q^{m_2}},\mathrm{N}_{r^{m_3}},\ldots,\mathrm{N}_{s^{m_n}}]$ 。

七、建構樓梯數列立體幾何圖形推廣

我們更好奇樓梯問題產生的數列是否有存在立體幾何圖形呢？其推廣如下表：

樓梯數列	$\{F_n\}:1,2,3,5,8,\ldots$	$\{A_n\}:1,2,4,7,13,\ldots$
立體幾何圖形		
樓梯數列	$\{B_n\}:1,2,4,8,15,29,\ldots$	$\{C_n\}:1,2,4,8,16,31,61\ldots$
立體幾何圖形		
樓梯數列	$\{D_n\}:1,2,4,8,16,32,63,125,\ldots$	$\{E_n\}:1,2,4,8,16,32,64,127,253,\ldots$
立體幾何圖形		

上表是我們建構的階數列立體幾何圖形的推廣，直觀看到立體樓梯。

$\{F_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2=3

$\{A_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2+4=7

$\{B_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2+4+8=15

$\{C_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2+4+8+16=31

$\{D_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2+4+8+16+32=63

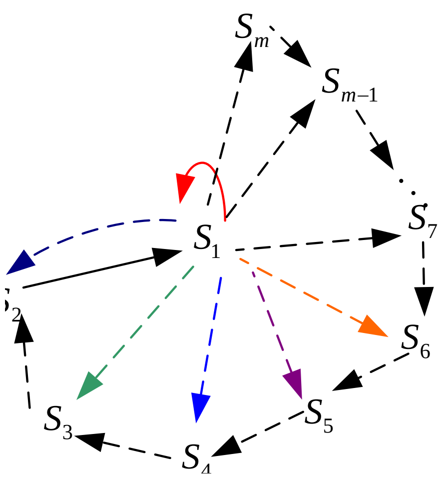
$\{E_n\}$綠色方塊邊長相加=橘色方塊邊長=1+2+4+16+32+64=127

伍、研究結果

一、透過轉移矩陣建構登樓梯跨$1\sim m$階的方法數探討，步驟依序(1)建構跨樓梯法則，即可建構跨樓梯的生成路徑圖；(2)找到起始矩陣且轉移矩陣T，進而推得方法數矩陣 $\Omega_n = T^n X_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_n \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$；(3)最後得其總方法數為$\mathrm{K}_n$。

二、改變登樓梯跨樓梯方式有跨奇數階、跨偶數階、跨等差$d=3$階與跨$p\sim m$階，我們發現不論哪一跨的方式都可當成一次跨$\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_m\}$階，從第$p_m+1$階層開始，其總方法數為前$p_m$階層方法數為$S_{(n,\mathrm{P})}=\sum_{k=1}^{m} S_{(n-p_k,\mathrm{P})}$，得到遞迴關係式為費氏數列推廣。另外若改變跨的方式為指定步數，其總方法數分佈為呈現**斜方向巴斯卡三角形係數**。

三、推廣跨$p\sim m$階的樓梯數列，則存在跨樓梯的生成路徑圖說明如下表：

一次跨$1\sim m$階，跨樓梯的生成路徑圖	一次跨$p\sim m$階，跨樓梯的生成路徑圖改變說明
	(1)當一次跨$2\sim m$階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色$S_1\to S_1$路徑。 (2)當一次跨$3\sim m$階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色$S_1\to S_1$路徑與**深藍色**$S_1\to S_2$路徑。 (3)當一次跨$4\sim m$階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色$S_1\to S_1$路徑、**深藍色**$S_1\to S_2$路徑與綠色$S_1\to S_3$路徑。 (4)當一次跨$5\sim m$階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色$S_1\to S_1$路徑、**深藍色**$S_1\to S_2$路徑、綠色$S_1\to S_3$路徑、藍色$S_1\to S_4$路徑與當一次跨$4\sim m$階時，左邊**生成路徑圖**刪掉紅色$S_1\to S_1$路徑、**深藍色**$S_1\to S_2$路徑與綠色$S_1\to S_3$路徑。 以此類推即得到必存在其登樓梯的**生成路徑圖。**

轉移矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ t_3 & & & I_{k-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ t_p & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ t_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，其中$t_k=\begin{cases}1, & p<k\le m\\ 0, & 1\le k\le p\end{cases}$，即總方法數而求得。

四、(1)當一次跨$1\sim m$階且考慮$n,m\to\infty$時，則樓梯數列為偶數分佈與奇數分佈個數比值趨近無限大。

(2)當一次跨$1\sim 2$階時，其產生的費氏數列$\{F_n\}$，則存在一轉移矩陣T使得T^n與費氏數F_n 對應且存在任意正整數a,b使得$F_{a+b}=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$，再推廣得

$F_{k(n+1)+n}=F_{n-1}\cdot F_{k(n+1)-1}+F_n\cdot F_{k(n+1)}$且$F_{k(n+1)+n}$必為$F_n$的倍數。

(3)當一次跨$1\sim m$階時，樓梯數列$\{\mathrm{K}_n\}$其每一項除以一正整數k後餘數數列，則其餘數數列為循環數列，進一步可推得當$k=p^{m_1}\cdot q^{m_2}\cdot r^{m_3}\cdots s^{m_n}$且$p,q,\cdots,s$為質數時，可得$k$倍數之餘數數列循環節個數

$\mathrm{N}_k=\mathrm{N}_{p^{m_1}\cdot q^{m_2}\cdot r^{m_3}\cdots s^{m_n}}=[\mathrm{N}_{p^{m_1}},\mathrm{N}_{q^{m_2}},\mathrm{N}_{r^{m_3}},\ldots,\mathrm{N}_{s^{m_n}}]$。

五、建構樓梯數列$\{\mathrm{K}_n\}$對應立體幾何圖形的推廣，直觀看到樓梯數列的立體樓梯。

陸、討論

我們發現樓梯數列$\{F_n\},\{A_n\},\{B_n\},\{C_n\},\{D_n\},\{E_n\}$，每一項除以一正整數$k$後之餘數數列$\{F_n'\},\{A_n'\},\{B_n'\},\{C_n'\},\{D_n'\},\{E_n'\}$是**有序性**的，如費氏數列$\{F_n\}$每一項除以一正整數$k=2,3,4,5$後之餘數數列其僅考慮**一**個循環節數字分佈情形與有序性餘數數列簡化數字分佈圖說明如下：

<table>
<tr><th>k</th><th>費氏數列$\{F_n\}$每一項除以一正整數k後之餘數數列，其僅考慮一個循環節數字分佈情形</th><th>有序性餘數數列簡化數字分佈圖</th></tr>
<tr><td>2</td><td>1 1 0</td><td rowspan="4">1 1 0
1 1 2 ⋯ 2 1 0
1 1 2 ⋯ 3 1 0
1 1 2 3 ⋯ 4 1 0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1 1 2 0 2 2 1 0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1 1 2 3 1 0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0</td></tr>
</table>

以下是樓梯數列$\{F_n\},\{A_n\},\{B_n\},\{C_n\},\{D_n\},\{E_n\}$，每一項除以一正整數$k=2,3,4,\ldots,13$後之餘數數列$\{F_n'\},\{A_n'\},\{B_n'\},\{C_n'\},\{D_n'\},\{E_n'\}$，依序呈現**有序性餘數數列簡化數字分佈圖**如下：

餘數數列 $\{F_n^{'}\}$

1 1 0		
1 1 2		2 1 0
1 1 2		3 1 0
1 1 2 3	⋯	4 1 0
1 1 2 3 5	⋯	5 1 0
1 1 2 3 5	⋯	6 1 0
1 1 2 3 5	⋯	7 1 0
1 1 2 3 5 8	⋯	8 1 0
1 1 2 3 5 8	⋯	9 1 0
1 1 2 3 5 8	⋯	10 1 0
1 1 2 3 5 8	⋯	11 1 0
1 1 2 3 5 8	⋯	12 1 0

餘數數列 $\{A_n^{'}\}$

1 1 0 0		
1 1 2	⋯	0 2 0 2 1 0 0
1 1 2	⋯	1 2 0 3 1 0 0
1 1 2 4	⋯	4 1 2 2 0 4 1 0 0
1 1 2 4	⋯	4 1 3 2 0 5 1 0 0
1 1 2 4	⋯	4 1 4 2 0 6 1 0 0
1 1 2 4	⋯	4 1 5 2 0 7 1 0 0
1 1 2 4 7	⋯	4 1 6 2 0 8 1 0 0
1 1 2 4 7	⋯	4 1 7 2 0 9 1 0 0
1 1 2 4 7	⋯	4 1 8 2 0 10 1 0 0
1 1 2 4 7	⋯	4 1 9 2 0 11 1 0 0
1 1 2 4 7	⋯	4 1 10 2 0 12 1 0 0

餘數數列 $\{B_n^{'}\}$

1 1 0 0 0		
1 1 2	⋯	0 2 0 0 2 1 0 0 0
1 1 2	⋯	1 2 0 0 3 1 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 1 2 2 0 0 4 1 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 1 3 2 0 0 5 1 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 1 4 2 0 0 6 1 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 1 5 2 0 0 7 1 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 1 6 2 0 0 8 1 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 1 7 2 0 0 9 1 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 1 8 2 0 0 10 1 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 1 9 2 0 0 11 1 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 1 10 2 0 0 12 1 0 0 0

餘數數列 $\{C_n^{'}\}$

1 1 0 0 0 0		
1 1 2	⋯	0 2 0 0 0 2 1 0 0 0 0
1 1 2	⋯	1 2 0 0 0 3 1 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 1 2 2 0 0 0 4 1 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 1 3 2 0 0 0 5 1 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 1 4 2 0 0 0 6 1 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 1 5 2 0 0 0 7 1 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 1 6 2 0 0 0 8 1 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 1 7 2 0 0 0 9 1 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 1 8 2 0 0 0 10 1 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 1 9 2 0 0 0 11 1 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 1 10 2 0 0 0 12 1 0 0 0 0

餘數數列 $\{D_n^{'}\}$

1 1 0 0 0 0 0 0		
1 1 2	⋯	0 2 0 0 0 0 0 2 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2	⋯	1 2 0 0 0 0 0 3 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 0 1 2 2 0 0 0 0 0 4 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 0 1 3 2 0 0 0 0 0 5 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 0 1 4 2 0 0 0 0 0 6 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 0 1 5 2 0 0 0 0 0 7 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 0 1 6 2 0 0 0 0 0 8 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 0 1 7 2 0 0 0 0 0 9 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 0 1 8 2 0 0 0 0 0 10 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 0 1 9 2 0 0 0 0 0 11 1 0 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 0 1 10 2 0 0 0 0 0 12 1 0 0 0 0 0 0

餘數數列 $\{E_n^{'}\}$

1 1 0 0 0 0 0		
1 1 2	⋯	0 2 0 0 0 0 2 1 0 0 0 0 0
1 1 2	⋯	1 2 0 0 0 0 3 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 1 2 2 0 0 0 0 4 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 1 3 2 0 0 0 0 5 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 1 4 2 0 0 0 0 6 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4	⋯	4 0 0 0 1 5 2 0 0 0 0 7 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 1 6 2 0 0 0 0 8 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 1 7 2 0 0 0 0 9 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 1 8 2 0 0 0 0 10 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 1 9 2 0 0 0 0 11 1 0 0 0 0 0
1 1 2 4 8	⋯	4 0 0 0 1 10 2 0 0 0 0 12 1 0 0 0 0 0

由上圖可得餘數數列必存在每個循環節數字前後端有其明顯規律產生，其對應存在呈現**有序性數列**，更能顯現**餘數數列為循環數列**的脈絡，至於更嚴謹的論證是我們努力的方向。

柒、結論與未來展望

我們仔細探討「登 n 階層的樓梯，每一次跨 $1\sim m$ 階 $(n,m\in N)$ 登樓梯總方法數」過程中，我們發現登樓梯方式極為有規律，反覆地重複同樣方式，於是想到透過轉移矩陣去破解。首先建構跨樓梯法則與生成路徑圖，得有序性的轉移矩陣與方法數矩陣，再從方法數矩陣中找到完成登樓梯的總方法數因而求得，進而推廣至跨 $p\sim m$ 階，也同樣地得到跨樓梯的生成路徑圖與有序性的轉移矩陣，同樣地總方法數因而求得，同時也推廣到跨任意階的情形，總方法數可得到遞迴關係式，更印證了階階皆有律的特性，很明顯得到樓梯數列實為費氏數列的推廣。

費氏數列 $\{F_n\}$ 彼此項數間具有因倍數的微妙關係，為存在任意正整數 a,b 使得

$F_{a+b}=F_{a-1}\cdot F_{b-1}+F_a\cdot F_b$，再進一步探討樓梯數列 $\{\mathrm{K}_n\}$，每一項除以一正整數 k 後之餘數數列得到為有序性的循環數列與 k 倍數之餘數數列循環節個數的通式，同時也很好奇心樓梯數列 $\{\mathrm{K}_n\}$ 是否也可存在彼此項數間具有因倍數的關係與其存在一般式會有何漂亮的規律呢？是未來會繼續努力的研發方向，繼續揭開階階有律的真相！

最後建構樓梯數列對應立體幾何圖形，直觀看到樓梯數列立體樓梯，更能呈現樓梯問題推廣幾何意義價值！

單純的事物裡總能有令人出乎意料的驚喜，樓梯看似平凡，但平凡中總有其不平凡處，規律即是它的不平凡，這讓我們眼睛為之一亮，進而以東行西行、南跨北跨等各式方法進一步研究，赫然發現「階階有律」這美麗的結果！

捌、參考資料

一、王子軍.林伯軒(2012)。**苔痕上階綠，階階似有律**。臺北市第 45 屆中小學科展作品。

二、吳振奎(1993)。**斐波那契數列**。台北市：九章出版社。

三、林福來、陳順宇、陳創義、徐正梅、許清土、林信安(2012)。**數學課本第1冊、第2冊與第3冊**。台北市，南一書局。

四、賴東昇。再談費氏數列。**科學月刊**，**6**(10)。

【評語】040402

本作品對 n 階樓梯，考慮每次可爬 1 至 m 階，求登樓梯總方法數。經由建立遞迴公式，得到一些美妙的結果。作品中涉及費氏數列，可引發學生對數學的興趣。若能更精簡的推導，將使讀者更易閱讀其作品。