中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040401

棋盤乾坤

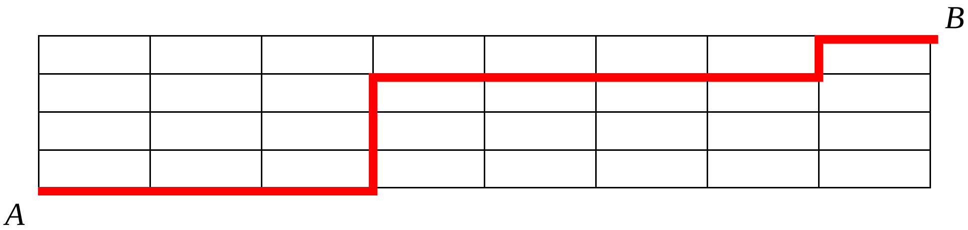
學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳克彥 高二 賴俊義	鄭永明

關鍵詞：非負整數解、整數分割

摘要

給定一個 $m\times n$ 的棋盤，若沿著棋盤格線以捷徑走法從左下角走到右上角，且該路徑須將棋盤平分成面積相等的兩區域，則所有符合上述規定的走法數稱為 $w(m,\ n)$。例：圖(一)為 4×8 的棋盤，從 A 到 B 符合條件的走法數為 $w(4,8)=33$ (請參見研究過程)，其中粗線路徑為某一種走法。本文利用棋盤的中心點將路徑分為兩種互斥的情況，再藉由對稱性來探討幾類簡單的情形，如： $w(1,n)$ 、 $w(2,n)$ 、 $w(3,n)$ 、 $w(4,n)$ 、 $w(5,n)$，從中不難發現 $w(m,\ n)$ 的遞迴關係式，藉此對於任意給定的 m,n 均可計算出 $w(m,\ n)$ 的值。接著，我們發現在某限制條件下某類變形棋盤的走法數 $w_k(m,\ n)$ 可視為 $w\left(m,n+\left(m-1\right)k\right)$ 。



圖（一）：圖中紅線為 4×8 棋盤走捷徑且平分棋盤的其中一條路徑。

壹、研究動機

在某次學校的數學徵答活動中，偶遇了此類棋盤捷徑問題(當時欲求 $w(4,8)$ 的值)。起初我們將此問題轉成求非負整數解的個數，再搭配窮舉方式，逐一列出所有情形。雖然這樣的手法可以得到結果，但對於棋盤格數較大的情形，顯然難以利用此手法計算，所以我們開始思考是否可以找出這類問題的一般性解法，同時開始搜尋相關文獻，我們發現在第 24 屆中小學科展數學科高中組「非負整數解」這項作品中，給了一個關於 $w\left(4,n\right)$ 的解答，文章中他們利用固定兩個變數來計算滿足某條件下直線所通過的格子數，再扣除超過範圍的解，其手法略顯複雜，且並未凸顯出此類問題的結構性。此外，文章對於超過範圍的解並未給出一般性的解，因此在計算 $w\left(4,n\right)$ ，每每須額外計算超過範圍的解，顯得相當麻煩，且似乎不能利用在更多層的棋盤中，所以我們打算用獨創的手法解決這個問題。

貳、研究目的

一、找出 $w(1,\ n),\ w(2,\ n),\ w(3,\ n),\ w(4,\ n),\ w(5,\ n)$ 的一般式。

二、探討 $w(n,\ n)$ 與納許棋的關聯。

三、尋求 $w_k(2,\ n),\ w_k(3,\ n)$ 的一般式，並探討 $w_k(m,\ n)$ 與 $w(m,\ n)$ 的關係。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦(C++、Eexcel)

肆、研究過程或方式

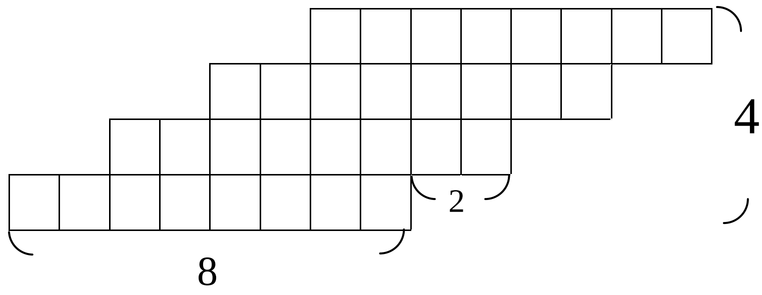
一、符號介紹

(一)設 x 為實數，我們稱 $\lfloor x \rfloor$ 為不大於 x 的最大整數，且 $\lceil x \rceil$ 為不小於 x 的最小整數。

(二)符號 $w(m,\ n)$ 代表在 $m\times n$ 的棋盤中，沿著棋盤格線從左下角走到右上角，其捷徑路徑將棋盤平分的走法數。

(三)符號 $w(m,n,k)$ 代表在 $m\times n$ 的棋盤中，沿著棋盤格線從左下角走到右上角，其捷徑路徑右下方有 k 個格子的走法數。

(四)將 $m\times n$ 的棋盤變形，使其每一列都比該列下一列向右突出 k 格(最下一列除外)，我們以 $w_k(m,n)$ 代表在此變形棋盤中，沿著棋盤格線從左下角走到右上角，其捷徑路徑將棋盤平分的走法數（如圖（二））。



圖（二）：將 4×8 棋盤變形成每一列都比下一列向右突出 2 格的棋盤。

二、 $w(m,n)$ 與不定方程的非負整數解個數之關係

首先，我們定義 x_i 為棋盤由下往上數第 i 層路徑左方的格子數，於是我們可以將尋求 $w(4,8)$ 的值轉換成討論下列不定方程的非負整數解個數，如下：

$\begin{cases} 0\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le 8 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=16 \end{cases}$,其中 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\in \mathrm{N}$，得其解以 (x_1,x_2,x_3,x_4) 表示有以下 33 種：

$(8,8,0,0)$, $(8,7,1,0)$, $(8,6,2,0)$, $(8,6,1,1)$, $(8,5,3,0)$, $(8,5,2,1)$, $(8,4,4,0)$, $(8,4,3,1)$, $(8,4,2,2)$, $(8,3,3,2)$, $(7,7,2,0)$, $(7,7,1,1)$, $(7,6,3,0)$, $(7,6,2,1)$, $(7,5,4,0)$, $(7,5,3,1)$, $(7,5,2,2)$, $(7,4,4,1)$, $(7,4,3,2)$, $(7,3,3,3)$, $(6,6,4,0)$, $(6,6,3,1)$, $(6,6,2,2)$, $(6,5,5,0)$, $(6,5,4,1)$, $(6,5,3,2)$, $(6,4,4,2)$, $(6,4,3,3)$, $(5,5,5,1)$, $(5,5,4,2)$,$(5,5,3,3)$, $(5,4,4,3)$, $(4,4,4,4)$

由於這種方式計算量實在太龐大了，於是我們改用圖示法來找出其一般式。

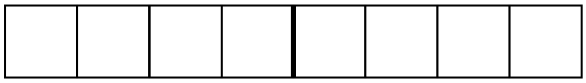
三、以圖示法求 $w(m,n)$

我們開始研究這問題的時候，第一個想法就是找出棋盤的中心點。先處理通過中心點的部分，再處理未通過中心點的情況。後來發現，當棋盤越來越大時，雖然通過中心點的部分可以很容易解決，但未通過中心點的部分卻越來越複雜。因此，我們改用中心縱線上的格子點，將路徑分為幾種互斥的情形，並利用以下引理計算。最後得到 $w(1,\ n), w(2,\ n)$ $w(3,\ n),\ w(4,\ n),\ w(5,\ n)$ 的一般式和 $w(m,\ n)$ 的遞迴關係式。

（一）**定理 1**：$w(1,n)=\dfrac{(-1)^n+1}{2}$，其中 n 為正整數。

證明：當 n 是奇數時，棋盤無法被路徑平分，所以 $w(1,n)=0$；當 n 是偶數時，只有經過中心點，才能將路徑平分，所以 $w(1,n)=1$（如圖（三））。

合併上述兩種情形可得：$w(1,n)=\dfrac{(-1)^n+1}{2}$，其中 n 為正整數。



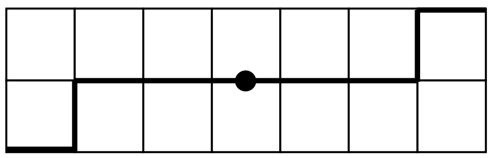
圖（三）：標示了1×8的棋盤與中心點

（二）**定理 2**：$w(2,n)=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor+1$，其中 n 為正整數。

證明：棋盤總共有 $n+1$ 條縱線，當 n 是奇數時，沒有過中心點的縱線；而當 n 是偶數時，才有過中心點的縱線，故將 $w(2,n)$ 分成下列兩類討論。

1.當 n 是奇數時：

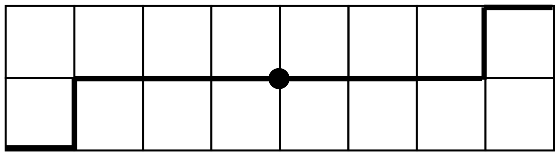
欲將棋盤平分，若下層走第 1 條縱線(由左向右數)，上層就必須走第 $n+1$ 條縱線(最右邊的縱線)。依此類推，若下層走第 t 條縱線，上層就必須走第 $n+2-t$ 條縱線，其中 $1\le t\le \dfrac{n+1}{2}$，得知共有 $\dfrac{n+1}{2}$ 種方法（如圖（四））。



圖（四）：$w(2,7)$ 的其中一種路徑。

2.當 n 是偶數時：

計算方式與 1 相同，若下層走第 t 條縱線，上層就必走第 $n+2-t$ 條縱線，但是中間的縱線可同時被上下層利用，所以 $1\le t\le \dfrac{n+2}{2}$，得知共有 $\dfrac{n+2}{2}$ 種走法（如圖（五））。



圖（五）：$w(2,8)$的其中一種路徑。

綜合上述兩點，可知$w(2,n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}，n\text{為奇數時}\\\dfrac{n+2}{2}，n\text{為偶數時}\end{cases}$，即$w(2,n)=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor+1$。

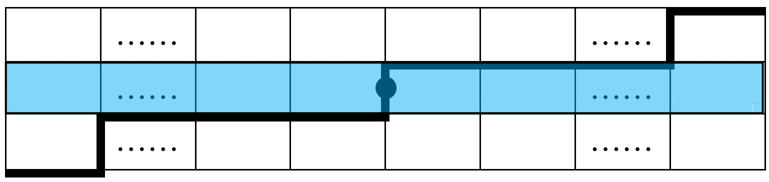
（三）定理 3：$w(3,n)=\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)\times\left\lceil\dfrac{(n+2)^2}{8}\right\rceil$，其中$n$為正整數。

證明：令g為自然數，其中當g為奇數時$w(3,g)=0$，故直接討論$w(3,2g)$。

將路徑分為經過中心點和未經過中心點來討論：

$$w(3,2g)=\underbrace{w(2,2g)}_{\text{通過中心}}+\underbrace{2\sum_{k=0}^{g-2}w(2,g-1,k)}_{\text{未通過中心}}$$

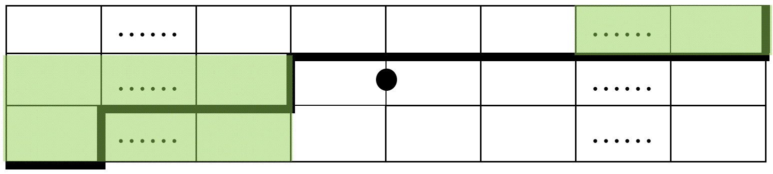
因通過中心點的路徑可將第二層省略，而壓縮成$w(2,2g)$。(如圖（六）所示)



圖（六）：通過中心點可將第二層(灰色部分)省略。

而未通過中心的走法數可將棋盤分割為大小為 2 列和 1 列的棋盤相乘

，即為$\sum_{k=0}^{g-2}w(2,g-1,k)\times w(1,g-2,k)$(如圖（七）所示)



圖（七）：左下和右上灰色部分分別為分割後大小為 2 列和 1 列的棋盤。

$$\sum_{k=0}^{g-2} w\left(2,g-1,k\right)\times w\left(1,g-2,k\right)=\sum_{k=0}^{g-2} w\left(2,g-1,k\right)=\sum_{k=0}^{g-2}(\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+1)$$

將上述兩種情形加起來得到： $w(3,2g)=w\left(2,2g\right)+2\times\sum_{t=0}^{g-2}(\left\lfloor \frac{t}{2}\right\rfloor+1)$ 。

再將 g 分為奇數與偶數兩種情形討論，得到下列結果：

(1) $w(3,2g)=g+1+2\left(\frac{g-1}{2}\times\frac{g+1}{2}\right)=\frac{\left(g+1\right)^2}{2}$ ，其中 g 為奇數。

(2) $w(3,2g)=g+1+2\left(\frac{g-2}{2}\times\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\right)=\frac{\left(g+1\right)^2+1}{2}$ ，其中 g 為偶數。

將上述奇偶情形合併得到 $w(3,2g)=\left\lceil \frac{\left(g+1\right)^2}{2}\right\rceil$ ，再將 $w(3,2g)$ 轉換成 $w(3,n)=\left(\frac{1+\left(-1\right)^n}{2}\right)\times\left\lceil \frac{\left(n+2\right)^2}{8}\right\rceil$ ，其中 n 為正整數。

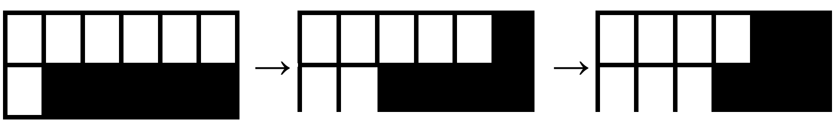
隨著層數的增加，計算難度越來越難，所以我們介紹以下引理，方便我們之後的證明：

引理 1. $w\left(1,n,k\right)=1$

引理 2. $w\left(2,n,k\right)=\begin{cases}\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+1 & , 0\le k\le n\\ \left\lfloor \frac{2n-k}{2}\right\rfloor+1, & n\le k\le 2n\end{cases}$

證明：

情形(1)為當 $0\le k\le n$ 時，因為 $n\ge k$ ，所以這 k 格方格必定可以再棋盤內排成一列，並逐一計算(如圖（八）)。



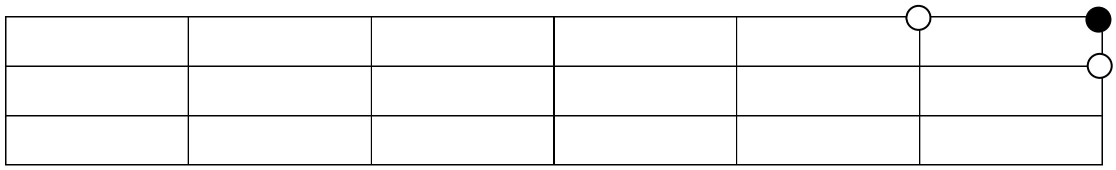
圖（八）： $w\left(2,6,5\right)$ 為以上三種情形。

由圖可知上列可以有 0 , 1 , 2 , ... , $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$格為黑色的情況，所以可知共有$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor+1$種路徑。

情形(2)為當 $n \le k \le 2n$ ，藉由棋盤的對稱性可得知 $w(2,n,k)=w(2,n,2n-k)$ 。

$$\text{引理 3. } w(3,n,k)=\begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(k+3)^2+6}{12} \right\rfloor & ,\ 0 \le k \le n \\ \left\lfloor \dfrac{(-2)k^2+(6n)k+(-3n^2+6n)}{12} \right\rfloor+1 & ,\ n<k<2n \\ \left\lfloor \dfrac{(3n-k+3)^2+6}{12} \right\rfloor & ,\ 2n \le k \le 3n \end{cases}$$

證明：由圖（九）可得此遞迴關係： $w(m,n,k)=w(m,n-1,k-m)+w(m-1,n,k)$ 。



圖（九）： $w(3,6,k)$ 原終點為小黑點，可視為兩個終點為小白點的棋盤相加，得遞迴： $w(3,6,k)=w(3,5,k-3)+w(2,6,k)$ 。

情形(1)當 $0 \le k \le n$ 時，可利用以上遞迴關係計算出：

$$w(3,n,k)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{k-3i}{2} \right\rfloor+1\right)=\left\lfloor \frac{(k+3)^2+6}{12} \right\rfloor$$

情形(2)當 $n<k<2n$ 時，我們利用全部－違規的想法得到以下結果：

全部： $P_3(k+3)$

違規： $2P_3(k+3-n)-P_3(k-3-n)+1+H_2(k-n)+H_3(k-n)$

其中當 $k-n$ 為自然數 s 的倍數時， $H_s(k-n)$ 的值為1，其餘皆為0 。

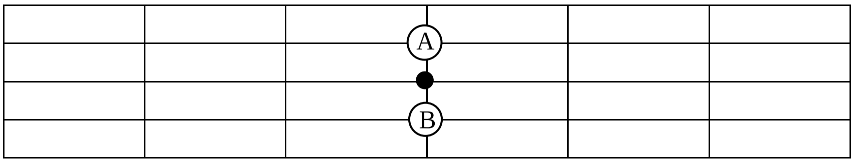
情形(3)當 $2n<k<3n$ 時，我們利用與情形(1)的對稱性得到：

$w(3,n,k)=w(3,n,3n-k)$ 。

引理 4. $w(4,n,i)=\begin{cases}\left\lfloor \dfrac{(i+4)^2(i+7)+72}{144} \right\rfloor, \text{當} i \text{為偶數時} \\ \left\lfloor \dfrac{(i+3)^2(i+8)+72}{144} \right\rfloor, \text{當} i \text{為奇數時}\end{cases}$，其中 $0 \le i \le n$

（四）定理 4：$w(4,n)=\left\lfloor \dfrac{2n^3+15n^2+42n}{72} \right\rfloor+1$，其中 n 為自然數。

證明：對於 $4\times n$ 的棋盤，我們分成 $12k$、$12k+1$、…、$12k+11$ 共 12 種情形來討論，再將每種情形分為通過中心和未通過中心兩部分（參考圖（十）），最後再合併成為一般式。



圖（十）：圖中標有中心點與不通過中心時必通過的點（點 A 與點 B）。

首先，我們將 12 種情形分別列出：

$$(1)\ w(4,12g)=\underbrace{\sum_{k=0}^{12g}\left(w(2,6g,k)\right)^2}_{\text{過中心的方法數}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{6g-3}w(3,6g,k)}_{\text{不過中心的方法數}}$$

$$=4\sum_{k=0}^{3g}k^2+(3g+1)^2+2\sum_{k=3}^{6g}\left\lfloor \frac{k^2+6}{12} \right\rfloor$$

$$=36g^3+27g^2+8g+1+2\sum_{k=3}^{6g}(18k^2+15k+4)$$

$$=48g^3+30g^2+7g+1$$

$$(2)\ w(4,12g+1)=48g^3+42g^2+13g+1$$

$$(3)\ w(4,12g+2)=48g^3+54g^2+21g+3$$

$$(4)\ w(4,12g+3)=48g^3+66g^2+31g+5$$

$$(5)\ w(4,12g+4)=48g^3+78g^2+43g+8$$

$$(6)\ w(4,12g+5)=48g^3+90g^2+57g+12$$

$$(7)\ w(4,12g+6)=48g^3+102g^2+73g+22$$

(8) $w(4,12g+7)=48g^3+114g^2+91g+24$

(9) $w(4,12g+8)=48g^3+126g^2+111g+33$

(10) $w(4,12g+9)=48g^3+138g^2+133g+43$

(11) $w(4,12g+10)=48g^3+150g^2+157g+55$

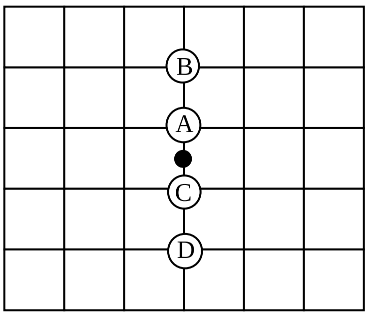
(12) $w(4,12g+11)=48g^3+162g^2+183g+69$

將上面 12 種情形變數代換後，可以得到：

$w(4,n)=\left\lfloor \dfrac{2n^3+15n^2+42n}{72} \right\rfloor+1$，其中 n 為自然數。

（五）定理 5： $w(5,n)=\begin{cases} \left\lfloor \dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2496n}{4608} \right\rfloor+1, & 當 n=4k 時 \\ \left\lfloor \dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2064n}{4608} \right\rfloor+1, & 當 n=4k+2 時 \\ 0, & 當 n=4k\pm1 時 \end{cases}$，其中 $k\in\mathbb{N}$ 。

證明：令 $n=2(12t+g)$，其中 $t,g\ge 0$，將 $w(5,2(12t+g))$ 分成下列幾種情形討論：



圖（十一）：棋盤上標有中點與幾個重要的點，方便以下解

1.過中心點(參考圖（十一）)： $\displaystyle\sum_{k=0}^{2(12t+g)}[w(2,12t+g,k)]^2$ ——①

2.不過中心點(參考圖（十一）)：

(1)過Ⓐ且過Ⓑ(過Ⓒ且過Ⓓ)： $2\displaystyle\sum_{k=0}^{12t+g-3}w(3,12t+g-1,k)$ ——②

(2)過Ⓑ不過Ⓐ(過Ⓓ不過Ⓒ)： $2\displaystyle\sum_{k=0}^{12t+g-4}w(4,12t+g-1,k)$ ——③

(3)過Ⓐ不過Ⓑ(過Ⓒ不過Ⓓ)：

$$2\sum_{k=0}^{2(12t+g)-3}\left[w\left(3,12t+g-1,k\right)\times w\left(2,12t+g-1,k+1\right)\right]——④$$

①和②相加為 $w\left(4,2\left(12t+g\right)\right)$，③與④可由引理分段計算得出。

底下列出計算過程需要用到的結果(可藉由分類討論逐項計算得知)：

當 $n=2\left(12t\right)$， $w\left(5,n\right)$經計算過後得： $\dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2496n+4608}{4608}$

當 $n=2\left(12t+1\right)$， $w\left(5,n\right)$經計算過後得： $\dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2064n+2288}{4608}$

當 $n=2\left(12t+2\right)$， $w\left(5,n\right)$經計算過後得： $\dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2496n+2432}{4608}$

⋮

以此類推得知可把 g 的奇偶分類並各自合併可得：

$$w\left(5,n\right)=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2496n}{4608}\right\rfloor+1, & \text{當}n=4k\text{時}\\ \left\lfloor\dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2064n}{4608}\right\rfloor+1, & \text{當}n=4k+2\text{時}\\ 0 & \text{, 當}n=4k\pm1\text{時}\end{cases}$$，其中 $k\in\mathbb{N}$ 。

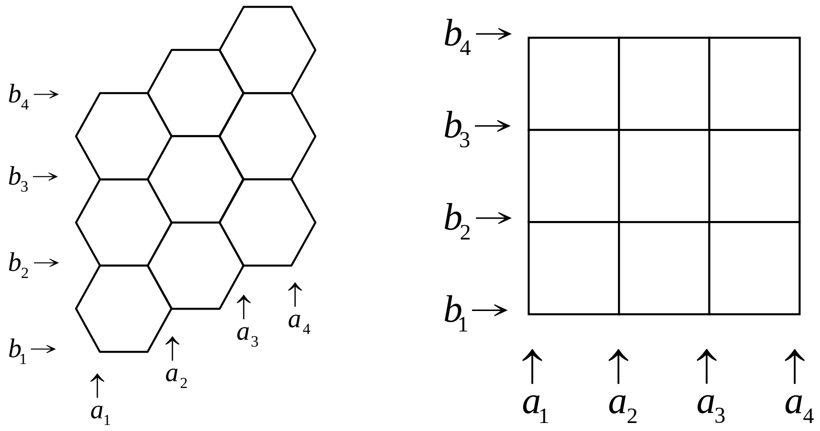
我們發現棋盤的格數是奇數還是偶數都需要分開來討論，所以未來如果要繼續研究下去，棋盤的規格大小應該會以 2 的乘冪次方或是某些具有特殊性質的遞迴數列為主軸繼續研究。

四、矩形棋盤與納許棋盤的關係：

後來發現欲求 $w(m,n)$ 的一般式過於困難，又因為 $w(n,n)$ 與整數分割(文獻資料 3.4)寫成 L 形式有著相似的關係，所以改變目標想要求出 $w(n,n)$ 的一般式，又因為納許棋盤(所謂納許棋盤是一個由正六邊形以 $n\times n$ 的形式所組成的，因此可以從 2×2，3×3，4×4，5×5 等方式擴大，一般用菱形表示)的走法數與矩形棋盤在捷徑的限制下的走法數一樣多，所以只要解決 $w(n,n)$ 就等同於解決所有納許棋盤。以下說明為何在捷徑的限制下，其走法與納許棋盤的走法相同。

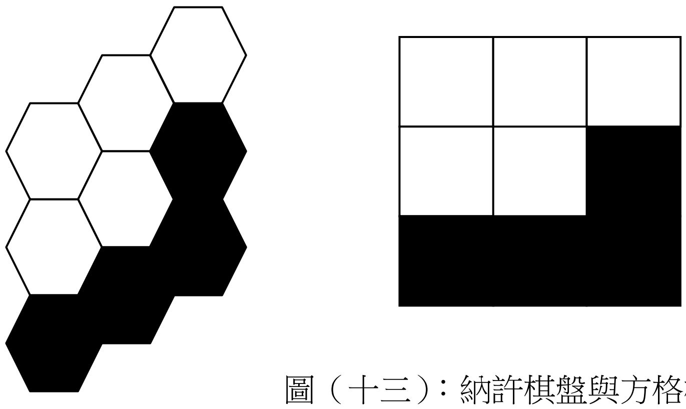
令最短路徑表示為 $R^*\left(a_{i_1},b_{j_1},a_{i_2},b_{j_2},\cdots,a_{i_k},b_{j_k}\right)$，其中 $1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k,1\le j_1\le j_2\le\cdots\le j_k$，且 $i_1,i_2\cdots i_k,j_1,j_2,\cdots j_k\in\mathbb{N}$，此函數意思為路徑路線為 $a_{i_1}\to b_{j_1}\to a_{i_2}\to b_{j_2}\to\cdots\to a_{i_k}\to b_{j_k}$。

納許棋盤可將其捷徑轉化為 $R\left(a_{i_1},b_{j_1},a_{i_2},b_{j_2},\cdots,a_{i_k},b_{j_k}\right)$ 的形式，而且任一形式的路徑都只能在納許棋盤上找到一條，所以可以證出納許棋盤和矩形棋盤有一樣多的最短路徑（參考圖（十二））。



圖（十二）：顯示納許棋盤與方格棋盤間的轉換。

例：在 $R^*\left(a_1,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4\right)$ 右下的格子同為那 4 個黑色的格子（如圖（十三））。



圖（十三）：納許棋盤與方格棋盤間轉換的例子。

五、捷徑平分 $n\times n$ 棋盤的走法數 $w\left(n,n\right)$ 與整數分割 $P(\frac{n^2}{2})$ 的關係：

令 $P(n)$ 為 n 的整數分割數，即為 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=n \\ 0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_n\le n \end{cases}$ 的非負整數解個數。

因為 $w\left(n,n\right)$ 為 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\dfrac{n^2}{2} \\ 0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_n\le n \end{cases}$ 的非負整數解，

而 $P(\frac{n^2}{2})$ 為 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{\frac{n^2}{2}} = \dfrac{n^2}{2} \\ 0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{\frac{n^2}{2}} \le \dfrac{n^2}{2} \end{cases}$ ，

由此則可推得 $w(n,n) \le P(\frac{n^2}{2})$ 。

六、探討變形棋盤的走法數 $w_k(m,n)$

給定一個 $m \times n$ 的棋盤，我們稱將 $m \times n$ 的棋盤相鄰兩列錯開 k 格，沿著棋盤格線以捷徑走法從左下角走到右上角，且該路徑須將棋盤平分成面積相等的兩區域，則所有符合上述規定的走法數稱為 $w_k(m,\ n)$ ，其中 $0 \le k \le n$ 。

(一)**定理 6：** $w_k(2,n) = w(2,n+k) = \left\lfloor \dfrac{n+k}{2} \right\rfloor + 1$ ，其中 k 為自然數。

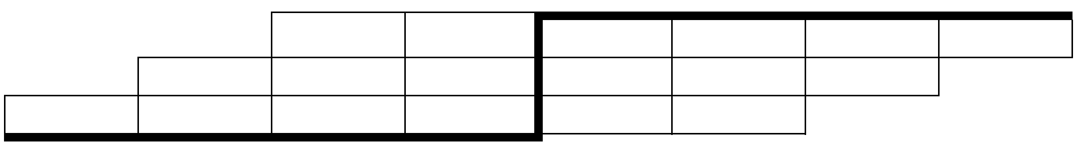
將此類變形的棋盤視為沒有變形的 $2 \times (n+k)$ 棋盤，很明顯從圖形就可得知 $w_k(2,n) = w(2,n+k), k \in \mathbb{N}$ ，於是我們懷疑 $w_k(3,n)$ 是否也有某種特殊的關係。

(二) $w_k(3,n)$ 的舉例與猜想

猜想 7： $$w_k(3,n) = \begin{cases} w(3,\ n+2k) = \left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right) \times \left\lceil \dfrac{(n+2k+2)^2}{8} \right\rceil, & \text{當} 0 \le k \le \dfrac{n}{2} \\ \left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right) \times \left((2n+1-k)k - \left\lceil \dfrac{(n-1)^2}{4} \right\rceil + 1 \right), & \text{當} \dfrac{n}{2} < k \le n \end{cases}$$

首先我們列出了許多不同的 n,k 所對應的 $w_k(3,n)$，試圖從中發現規律。底下僅以 $n=6$ 與 $n=8$ 當作例子說明：

其中我們的算法是以通過 $w(3,n+2k)$ 的中間縱線為基準(如圖（十四）)，每個加法後，將基準線向左右各移一格並計算其走法數。



圖（十四）：粗線為 $w_1(3,6)$ 的基準線

$w_0(3,6) = 1+1+3+3 = 8 \rightarrow$ 呈現兩個兩個為一組的遞增奇數現象。

$w_1(3,6)=1+1+3+3+5=13$

$w_2(3,6)=1+1+3+3+5+5=18$

$w_3(3,6)=1+1+3+3+5+5+7=25$

$w_4(3,6)=1+3+3+5+5+7+7=31$

$\rightarrow$當 k 超過 n 的一半時，轉而去掉一個最小的數，加上一個最大的數。

$w_5(3,6)=1+3+5+5+7+7+7=35$$\rightarrow$去掉一個第二小的數，再加上一個最大的數。

$w_6(3,6)=1+3+5+7+7+7+7=37$$\rightarrow$去掉一個第三小的數，再加上一個最大的數。

列完 $w_k(3,6)$ 時，發現有一種特殊的規律，為了更加確信我們的猜測，所以我們又繼續往下列。

$w_0(3,8)=1+1+3+3+5=13$$\rightarrow$呈現兩個兩個為一組的遞增奇數現象。

$w_1(3,8)=1+1+3+3+5+5=18$

$w_2(3,8)=1+1+3+3+5+5+7=25$

$w_3(3,8)=1+1+3+3+5+5+7+7=32$

$w_4(3,8)=1+1+3+3+5+5+7+7+9=41$

$w_5(3,8)=1+3+3+5+5+7+7+9+9=49$

$\rightarrow$當 k 超過 n 的一半時，轉而去掉一個最小的數，加上一個最大的數。

$w_6(3,8)=1+3+5+5+7+7+9+9+9=55$

$\rightarrow$去掉一個第二小的數，再加上一個最大的數。

$w_7(3,8)=1+3+5+7+7+9+9+9+9=59$

$\rightarrow$去掉一個第三小的數，再加上一個最大的數。

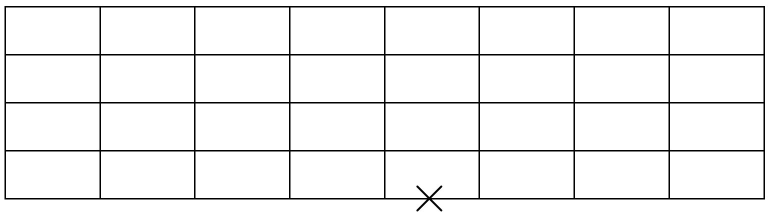
$w_8(3,8)=1+3+5+7+9+9+9+9+9=61$

$\rightarrow$去掉一個第四小的數，再加上一個最大的數。

列完 $w_k(3,8)$ 之後，我們發現 k 值介於 0 和 $\frac{n}{2}$ 之間時，$w_k(m,n)$ 會同等於 $w(m,n+2k)$，因為路徑本來就不會通過空白區域，當 k 值介於 $\frac{n}{2}$ 和 n 之間時，我們發現 k 每增加 1，其算式內最大值就會有規律的取代其他數字。

(一)定理 8： 設 m,n,k 為自然數，則 $w_k(m,n)=w(m,n+(m-1)k)$，其中 $0\le k\le\frac{n}{2(m-1)}$。

我們發現 k 在特定的範圍內，$w_k(m,n)$ 可以轉換成 $w(m,n)$ 的形式，於是我們開始著手探討特定的範圍，發現一捷徑平分路徑在第一層中，絕不可能會超過一半（如圖（十五）)，否則此捷徑必不可能平分棋盤，所以我們利用這個條件，經過計算後可得知此範圍為 $0\le k\le\frac{n}{2(m-1)}$。



圖（十五）：捷徑平分路徑必不可能通過叉叉線段。

伍、研究結果

設 $n,\ k$ 為自然數，我們有下列結果：

一、 $w(1,n)=\frac{1+(-1)^n}{2}$。

二、 $w(2,n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$。

三、 $w(3,n)=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)\times\left\lceil\frac{(n+2)^2}{8}\right\rceil$。

四、 $w(4,n)=\left\lfloor\frac{2n^3+15n^2+42n}{72}\right\rfloor+1$。

五、$w(5,n)=\begin{cases}\left\lfloor \dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2496n}{4608}\right\rfloor+1, & 當 n=4k 時\\ \left\lfloor \dfrac{23n^4+276n^3+1208n^2+2064n}{4608}\right\rfloor+1, & 當 n=4k+2 時\\ 0 & ,當 n=4k\pm1 時\end{cases}$，其中 k 為自然數。

六、$w_k(2,\ n)=w(2,\ n+k)=\left\lfloor \dfrac{n+k}{2}\right\rfloor+1$，其中 $k\le n$。

七、$w_k(3,n)=\begin{cases}w(3,\ n+2k), & 當 0\le k\le \dfrac{n}{2}\\ \left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)\times\left((2n+1-k)k-\left\lceil \dfrac{(n-1)^2}{4}\right\rceil+1\right), & 當 \dfrac{n}{2}<k\le n\end{cases}$。

其中除了第七個結果尚未證明以外，其餘結果皆於研究過程中給予證明。

陸、討論

在研究動機中有寫到文獻中他們利用設定變數及計算條件下平面的格子數，來求出 $w(4,n)$，一般式顯得非常複雜難以化簡，且似乎不能利用在更多層的棋盤中，而我們利用畫圖觀察並發現其特性，加上整數分割的想法，求出的一般式除了簡潔，而且我們也找出了相關的遞迴關係，另外還可發現 $w(m,n)$ 可化簡成 $m-1$（或 $n-1$）次的一元多項式，這個發現也決定了這個問題是可計算型的問題。

柒、結論

利用目前計算方法繼續算下去，應該可以解決 $w(6,n)$、$w(7,n)$，甚至更大的棋盤，但是需要逐項處理，所以我們未來主要的目標可能著重於以下幾個方向：

一、找出不同大小棋盤間走法數的遞迴關係。

二、尋求估計 $w(m,n)$ 的方法，並探討其誤差。

三、賦予棋盤格點不同權值，並探討捷徑路徑平分所有權值的條件。

捌、參考資料或其他

一、李世昌、吳建銘、黃冠鈞等（民 73）。非負整數解。國立台灣科學教育館–第 24 屆優勝作品。取自：http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/24/pdf/24h/201.pdf 。

二、Rodgers, B.(2009). A new proof of the inversion formula for the Dedekind Eta function. www.math.ucla.edu/~brodgers/dedekindeta.pdf.

【評語】040401

運用中心點估算 $w(m, n)$，$m=2, 3, 4, 5$ 分析方法適切。$w(m, n)=O(n^{m-1})$, $m=2,3,4,5$ 但只運用原來的分類方式很難推廣到後續 $w(m,n)$，$m>5$ 的情形，建議引進不同的觀點來估算．

另外，$P(n^2/2)$的下界可以利用 $w(n, n)$估計，是否也可以找到 $w(f(n), g(n))$, f, g 是某種可能的多項式，估計 $P(n^2/2)$的上界．