

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040115

是誰掐斷了水柱

學校名稱：國立屏北高級中學

作者： 高二 譚詠心 高二 洪紘家 高二 吳昇峰	指導老師： 溫中承 余威毅
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：截斷水柱長、布魯托－雷利不穩定性

(Plateau-Rayleigh instability)、雷利振幅

摘要

我們使用攝影機拍攝水柱自由下落的過程，以漸進播放的模式測定水柱的斷點位置，從而測量自由下落的水柱所維持的長度。我們改變不同的水面高與口徑寬，測量其與水柱截斷長度的關係，再運用白努力方程式並參考布魯托—雷利不穩定性(Plateau-Rayleigh instability)的相關資料，提出可經實驗檢驗的模型，進而研究下落水柱所表現的擾動行為。我們發現在測量時間內，雷利擾動振幅隨時間呈線性增長，增長率為 17.87 mm/s。

壹、研究動機

在日常生活中，愛乾淨的人們總是每天洗手、洗澡。這是最稀鬆平常的事，問題來了，請問你有沒有仔細的觀察下落的水流呢?如果你仔細看，就會發現它不是以柱體的方式落下，它像是以拉長的模式形成斷點，當視線離開出水口朝水流方向往下看，你會驚訝的發現「水柱斷掉了」。這個以肉眼看似不穩定的水柱截斷現象，原理超出我們的理解。好奇心旺盛的我們，在多次的討論與評估下，決心向這道「問題」下達戰帖。

貳、研究目的

本實驗探討經墨汁染色的水柱在自由落下時如何導致水柱截斷成水滴，並藉由實驗研究水柱出口口徑、水面高度(決定水柱出口速度)與水柱截斷位置的關係。研究目的歸納如下：

- 一、研究水柱出口之口徑寬和截斷長度的關係。
- 二、研究水面高度(液面至水柱出口的高度)和截斷長度的關係。
- 三、從白努力方程式以及布魯托—雷利不穩定性建立解釋截斷水柱的模型，並從實驗結果加以檢驗。
- 四、從實驗結果探討布魯托—雷利不穩定性的振動行為。

參、研究設備及器材

- 一、不同口徑(內徑)的細管(2.30 mm、3.80 mm、4.80 mm、5.10mm、5.85 mm、7.80mm)
- 二、六公升寶特瓶數個
- 三、鐵製支架 x2
- 四、黑墨汁一瓶
- 五、DV 攝影機(SONY HDR-PJ580V)：經測定，在慢速攝影的模式下，每一畫格間距時間約為 0.004 秒。
- 六、尺(100 cm、15 cm)
- 七、白色屏幕
- 八、水桶一個



肆、研究過程或方法

一、實驗原理 (一): 白努力方程式

白努力方程式是應用能量守恆定律考慮穩定流動的流體，在適當的假設下推導而出的理想方程式，它聯繫了流體在同一流線上各相關物理量。方程式為：

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 \dots\dots\dots(1)$$

p : 壓力 ρ : 密度 v : 速度 h : 高度

同一平面上位能相等，若液體流速減少時，流體本身壓力便會增加；相反地，液體流速增加時，本身壓力會減少。

生活中，我們可藉由流體流速不同時所產生的壓力差來提供所需要的升力。例如飛機飛行時，機翼上方的空氣流速較上方快，因此上方的氣壓比下方小，所以飛機獲得一向上的推力，而能在空中翱翔。

白努力方程式是建立在以下假設^[1]：

- (一) 理想的穩流體。
- (二) 流體沒有粘滯性。
- (三) 流體不轉動。也就是流體沿著流線流動，流線間彼此不相交。
- (四) 流體具有不可壓縮的性質，即流體的密度為常數，不受壓力的影響。

運用白努力方程式，我們可以推導自由垂直落下水柱的截面積與高度的關係：

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{H}{H+h}}$$

H : 液面至水柱出口的高度、 h : 水柱長、 A_0 : 水柱初始(**b**點)截面積、 A : 水柱 **c** 點的截面積

推導過程如下：

首先，考慮從 **a** 點到 **b** 點在白努力方程式，設 **b** 高度為零，且 **a** 點速度接近零，由(1)式可得：

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} \dots\dots\dots(2)$$

p_0 : 大氣壓力、 ρ : 液體密度、 v_0 : **B** 點速度、 H : 高度、 g : 重力加速度

其次，考慮從 **b** 點到 **c** 點在白努力方程式，由(1)、(2)式可得：

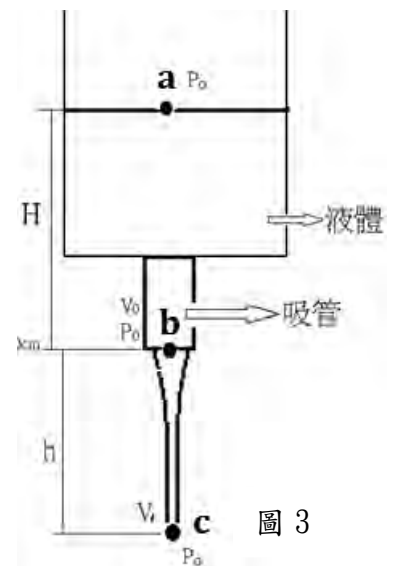


圖 3

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho gh$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2gh = 2gH + 2gh \dots\dots(3)$$

v_1 : 水柱在 C 點的速度

接著，利用連續方程式

$$A_0 v_0 = A_1 v_1$$

A : 截面積 v : 速率

我們得到：

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{2gH + 2gh}} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+h}} \dots\dots(4)$$

我們亦可以推導水柱自由下落的時間 T 與水柱長 h 的關係：
由式(3)，比較等加速度運動的速度關係式，我們得知水柱下落過程為加速度 g 的等加速度運動，因此有：

$$v_1 = v_0 + aT$$

將其代入上式(3)，綜合式(2)，我們可得下式：

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H+h} - \sqrt{H}) \dots\dots(5)$$

T : 水柱下落時間

由式(4)，我們發現只有 h 趨近於無限大時，水柱截面積 A_1 才會等於零(截斷)。由此可見，僅由白努力方程式無法解釋下落的水柱為何會截斷。

本文中，我們稱圖 3 的 H 為液面高；當下落水柱於 c 點截斷時，我們稱 h 為截斷長度。

二、實驗原理(二)：布魯托 — 雷利不穩定性

布魯托—雷利不穩定性是描述水柱流動過程中的擾動現象，布魯托(Plateau)首先對其進行測量(1873)，接著由雷利(Raleigh)提出數學模型與以解釋(1878)。簡要來說，此一現象的成因是水柱表面張力的不平衡而造成水面扭曲波動^[2,3]，並隨時間愈趨明顯，如下圖所示：

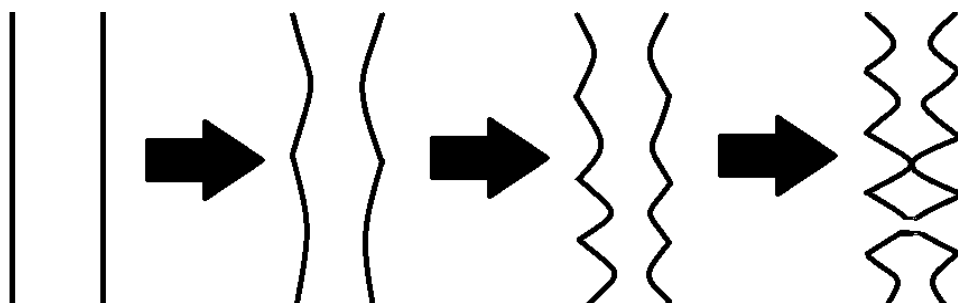


圖 4

在本文中，我們稱此一現象為**雷利擾動**。

進一步，人們使用流體力學中描述流體運動的尤拉方程式以及描述流體表面張力造成水壓變化的楊-拉普拉斯方程式^[4,5]，考慮無重力狀態下，雷利擾動的演化，從中發現某些波長的**擾動振幅會隨時間增加**，最終將水柱截斷，此波長需滿足以下條件：

$$2\pi r_0 < \lambda$$

λ ：雷利擾動的波長， r_0 初始水柱半徑

它常見的表示式為

$$kr_0 < 1$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ : 波數}$$

文獻^[2,4]中作進一步的理論計算，可得到雷利振幅的最大增長率的發生條件為：

$$kr_0 = 0.697$$

然而，當我們研究相關推導過程^[4,6]，我們了解到文獻所使用的微擾方法必須成立在無重力條件下，這似乎與生活中觀察到的現象不符(我們可輕易觀察到水柱的重力加速度使其截面積逐漸縮小)。究竟「重力作用」對於截斷水柱現象是否為一不可忽略的因素，本研究中，我們結合白努力方程式與雷利擾動研究此一問題。

三、建立基本模型

本段討論中，我們運用白努力方程式以及布魯托—雷利不穩定性的雛型，分別考慮有、無重力的效應以及雷利微擾的特徵提出假設，從中建立兩個模型來研究水柱截斷長度與液面高度的關係，再由接下來的實驗檢驗此二模型。

(一) 模型一：無重力效應下的布魯托—雷利不穩定性

假設 1：水柱自由下落時，空氣阻力與重力相互抵銷。

因為水柱所受合力為零，因此落下過程可視為等速度運動

$$y = v_0 t$$

y ：水柱長、 v_0 ：水柱初速度

當水柱截斷時，上式可寫成

$$h = v_0 T \dots\dots(6)$$

h ：截斷長度、 T ：截斷時間

假設 2：雷利擾動所產生的振幅(下文稱之為雷利振幅)增長率在很短時間內為定值 a 。

雷利振幅增長以致水柱截斷所需的時間 T (由觀察可知一般情況下 $T \ll 1$ 秒)，又水柱初始半徑為 r_0 ，則水柱截斷條件為

$$aT = r_0 \dots\dots(7)$$

我們將(6)代入(7)得到

$$a \cdot \frac{h}{v_0} = r_0$$

又將前文〈實驗原理(一)〉中的式(2) $v_0 = \sqrt{2gH}$ 代入

$$\frac{ah}{\sqrt{2gH}} = r_0$$

因此，對特定口徑 r_0 ，我們得到：

$$\frac{h}{\sqrt{H}} = \frac{\sqrt{2gr_0}}{a} = \text{定值}$$

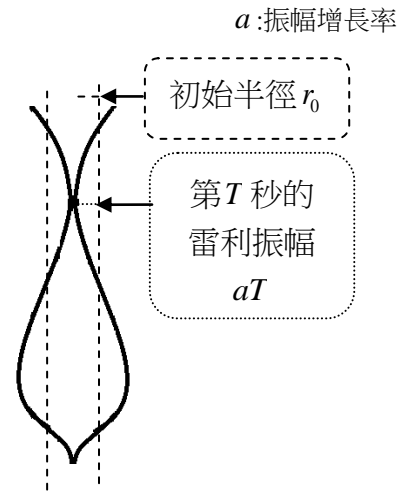


圖 5

(二)模型二：重力效應下的布魯托—雷利不穩定性

假設 1：水柱自由落下時僅受重力作用。

前文〈實驗原理(一)〉，我們根據白努力方程式，得到水柱截面積 A 與水面高 H 、水柱長度 h 的關係，如式(4)所示：

$$\sqrt{\frac{H}{H+h}} = \frac{A}{A_0}$$

H ：水面至水柱出口的高度、 h ：水柱長、 A_0 ：水柱初始截面積、 A ：水柱長度 h 時的截面積

假設 2：雷利振幅的增長率在很短時間內為定值 a

設振幅增長導致水柱截斷所需時間為 T ，在 $T \ll 1$ 秒，振幅增長率為定值 a ；水柱初始半徑為 r_0 。在水柱下落過程中，一方面水柱截面積(以及截面積半徑)隨重力下落而逐漸縮減，另一方面雷利振幅則隨時間線性增加，當水柱截斷時即雷利振幅 R 等於水柱半徑 r_c ，整理表格如下：

	$t=0$	$t=T$ (截斷時間)
水柱半徑	r_0	$r_c(T)$
雷利振幅	0	$R(T)$

當水柱截斷，我們有

$$r_c(T) = R(T) = aT \dots\dots(8)$$

此時，僅考慮受重力影響而縮減的截面積為

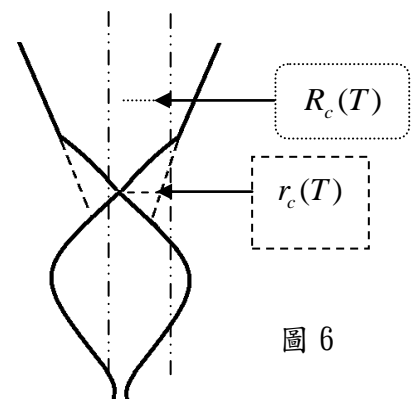


圖 6

$$\pi_c(T)^2 = A_c(T) \dots\dots(9)$$

根據〈實驗原理(一)〉，從式(5)我們有截斷時間與截斷長度的關係：

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H+h} - \sqrt{H})$$

接著，我們將式(4) $\sqrt{\frac{H}{H+h}} = \frac{A_c}{A_0}$ 、式(9)代入式(8)左式，並將式(5)代入式(8)

右式，整理後可得

$$a \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H+h} - \sqrt{H}) = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} \left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}$$

再將 $A_0 = \pi r_0^2$ 代入上式，得到

$$a \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H+h} - \sqrt{H}) = r_0 \left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}$$

由此式可知，對特定口徑來說，

$$\frac{\left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{H+h} - \sqrt{H}} = \frac{a}{r_0} \sqrt{\frac{2}{g}} = \text{定值}$$

根據模型一、二所得到的結果，我們可以透過實驗觀察液面高 H 與截斷水柱 h 的關係，檢驗兩個模型的符合度，並測得雷利振幅的增長率 a 。

四、實驗步驟

(一) 前置實驗：

1. 目的

- (1) 確認同一實驗中不同時間記錄的斷點位置一致。
- (2) 確認不同測量者用相同方法測量同一影片的斷點位置，所得結果一致。

2. 步驟

- (1) 取 5.1mm 口徑寬，30 cm 液面高的拍攝影片。
- (2) 取影片中 1-4 秒(影片時間)以及 7-10 秒(影片時間)兩段影片，測量斷點位置。
- (3) 取同一段長三秒(影片時間)的影片，由兩位實驗者(甲、乙生)測量斷點位置。
- (4) 試驗結果如下表

時間一致性試驗			測量一致性試驗	
	7~10 秒	1~4 秒	甲生	乙生
次數	水柱斷點位置(cm)			
1	48.00	43.00	44.90	43.70
2	42.30	47.00	43.20	47.10
3	47.80	47.00	44.30	44.30
4	47.60	49.00	43.30	44.40
5	47.80	41.50	47.40	45.50
6	47.40	49.50	42.30	47.30
7	41.60	47.00	40.90	40.10
8	47.10	45.50	47.10	48.10
9	46.80	40.00	44.70	47.60
10	48.00	50.00	44.40	44.30
11	48.50	48.00	42.40	42.90
12	49.70	49.00	46.90	47.60
13	45.30	50.00	42.70	45.40
14	43.70	48.00		47.70
15		47.00		47.4
16		50.00		49.3
17		47.00		44.3
18		48.00		45.7
19		47.03		
20		2.89		
平均	46.54	44.82	43.63	44.18
精密度	98%	98%	99%	99%

表 1

※精密度： $[1 - |(測量值 - 平均值) / 測量值|] \times 100\%$

3. 試驗結果：

由表 1 可知，不論是在不同時間，或者不同實驗者進行測量，所得結果相當一致，因此我們可以排除不同時間與測量者對觀測結果的影響。

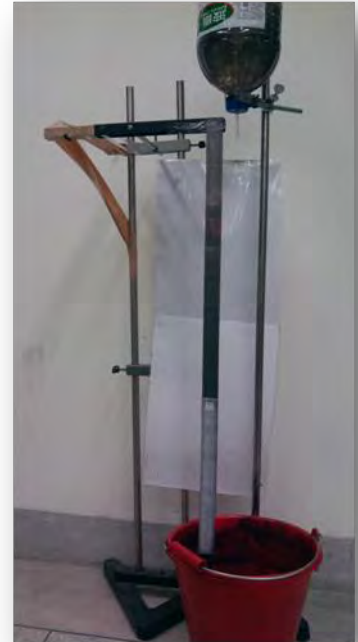
(二) 截斷水柱測量實驗：

為了研究水面高度與口徑寬對水柱截斷長度的影響，我們架設實驗裝置如右圖。我們使用六種口徑(2.30mm、3.80mm、4.80mm、5.10mm、5.85 mm、7.80mm)的細管，在不同水面高(19cm、21cm、23cm、25 cm、27 cm、30cm、35cm、38cm)的條件下測定水柱截斷位置。實驗步驟如下：



- 我們將六公升的寶特瓶架設於一鐵架，再於另一鐵架懸掛長尺，下方置一水桶接水。為利於觀測，我們在長尺後方架設白色屏幕，再用墨汁將水染成黑色。

2. 測量細管出口位置後，便開始加水，並持續加水以保持瓶內水面高度。
3. 待水流穩定後，約略判斷截斷點位置，從斷點處上方約 5~10 公分開始由上而下分段錄製 2~3 部影片。
4. 拍攝過程中需注意光線是否充足，如果光線不足，即設置一光源照射在尺上，以利讀取刻度。
5. 依序固定口徑寬(2.30mm、3.80mm、4.80mm、5.1mm、5.85 mm、7.80mm)，改變液面高度(19cm、21cm、23cm、25 cm、27 cm、30cm、35cm、38cm) 拍攝。(3.80 mm 口徑測定八種水面高，其餘者則改測定 19cm、21cm、23cm、30cm、35cm、38cm 六種水面高)。
6. 把影片分別命名與整理後，記錄影片中水柱截斷位置。
7. 利用出口位置與截斷位置，即可計算出水柱截斷長度。



五、記錄方法

(一) 截斷位置的測量方法

固定水面高度(即固定水柱出口速度)，初步估計截斷位置後，由上到下分別拍三部影片，並用 Windows Media Player 中的播放速度設定，以漸進播放模式判斷截斷的位置。

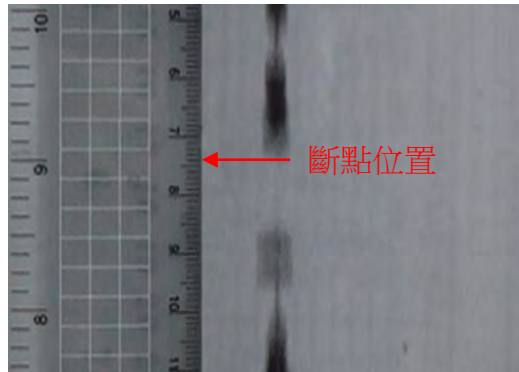


圖 7.1、7.2、7.3 為三個不同高度(由上而下)所拍攝之 7.80 mm 的水柱

首先，影片顯示截斷位置並非固定於某一點，因此，我們必須先判斷哪個一影片拍攝到出現頻率最高的截斷位置。影片中，如果播放三秒內出現的截斷位置不超過十個(如圖 7.1)，表示大部分的截斷位置出現於下一段影片，此段不予採計。若影片中截斷位置大都落在影片頂端(如圖 7.3)，表示水柱在抵達拍攝區域前已經截斷，即大部分的截斷位

置皆出現在上一段影片，此類影片亦不採計。通常，每一次實驗由上而下拍攝的三段影片中，頻率最高的截斷位置多出現於第二部影片。

再者，若水柱同時截斷成許多部份，我們採用第一個截斷位置。又當截斷時產生空隙，我們取較空隙上端的位置測量紀錄，所示如圖。

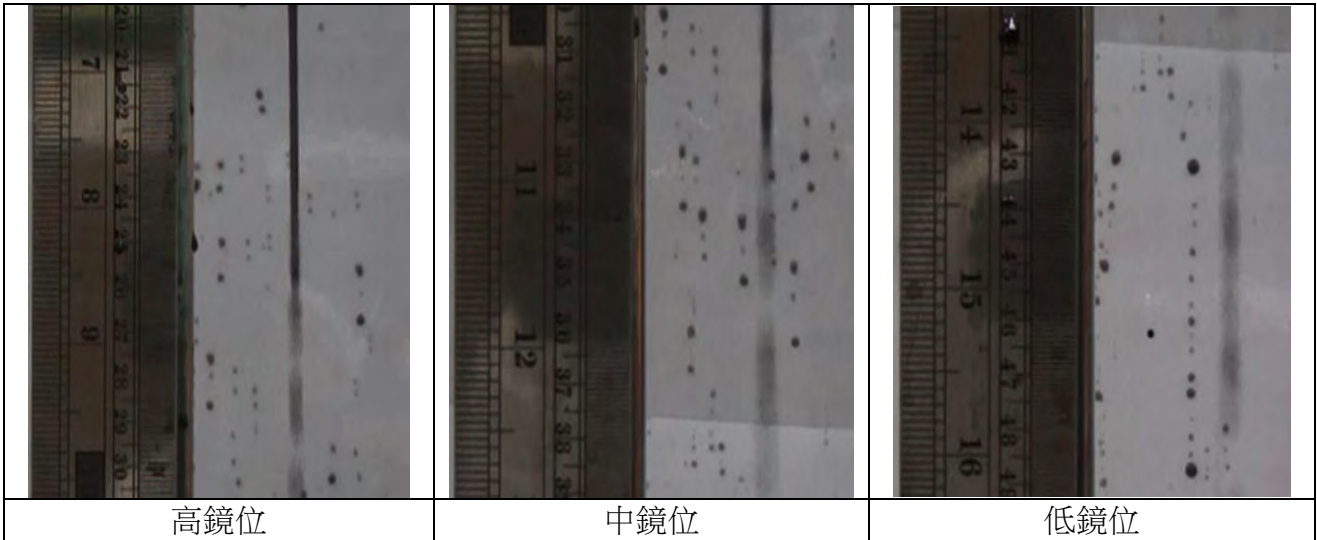


伍、研究結果

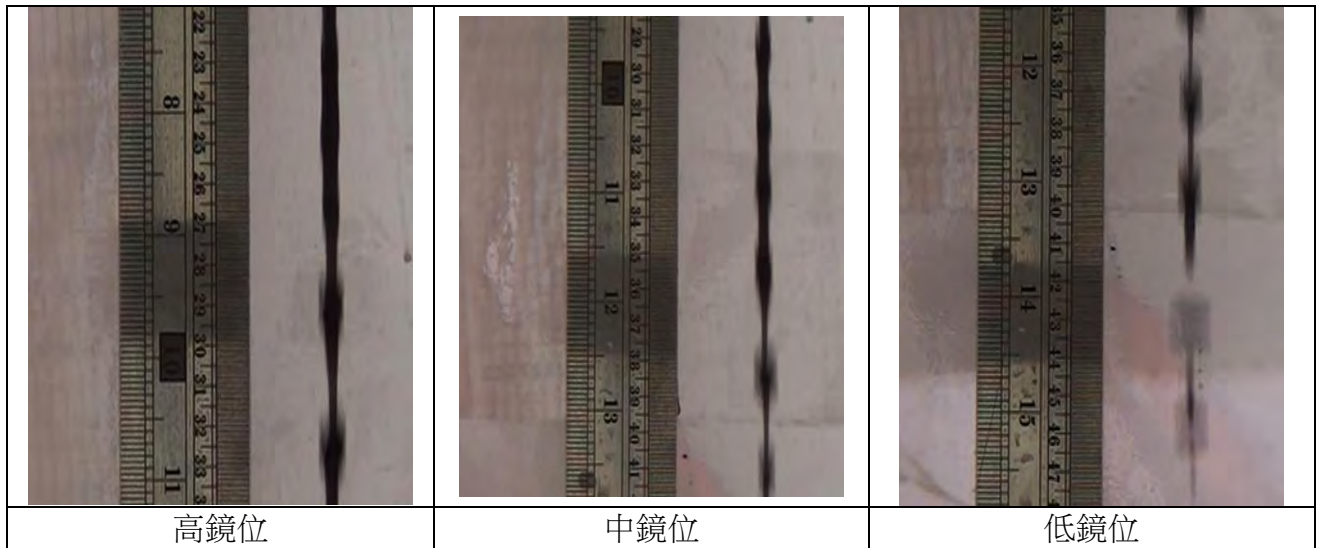
一、截斷水柱快照

我們擷取拍攝影片當中幾張快照，陳列如下。

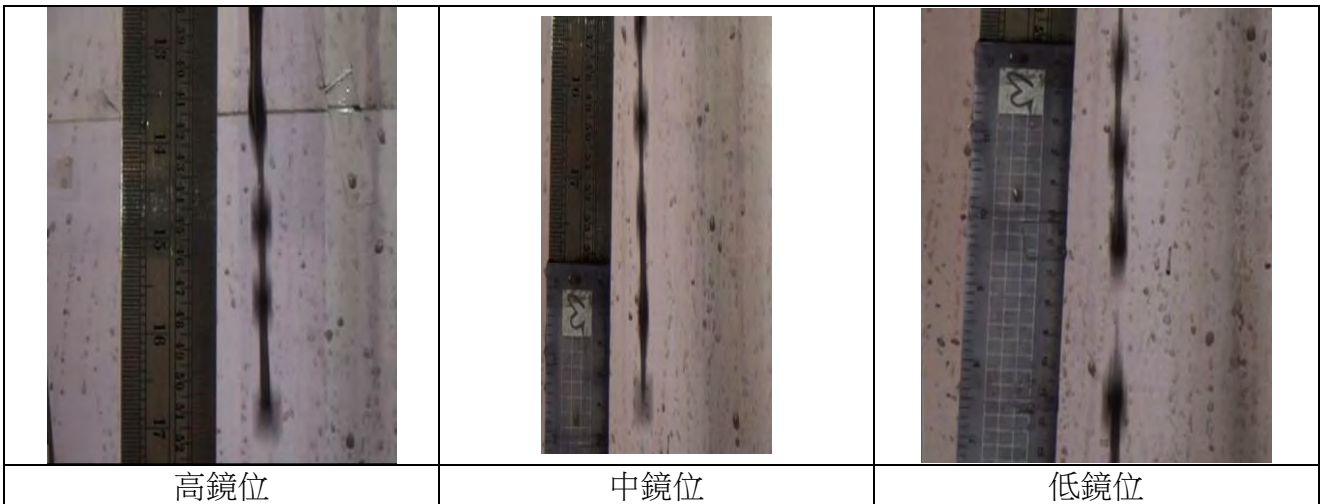
口徑寬 2.30mm，液面高 23 cm



口徑寬 5.85 mm，液面高 21 cm



口徑寬 7.80 mm，液面高 19 cm



二、平均截斷長度：

我們固定某一特定口徑寬，在不同水面高下測得的水柱截斷長度的平均值與標準差如下：

固定口徑寬：2.30

液面高 (cm)	平均截斷水柱長 (cm)	標準差 (cm)
19	19.15	1.23
21	17.86	1.05
23	20.14	3.62
30	16.72	2.70
35	17.39	1.27
38	17.62	1.64

表 2.1

固定口徑寬：3.80 mm。

液面高 (cm)	平均截斷水柱長 (cm)	標準差 (cm)
19	18.80	1.50
21	18.50	1.10
23	20.30	1.30
25	18.41	1.70
27	19.07	1.42
30	17.10	1.59
35	33.36	1.53
38	35.24	1.30

表 2.2

固定口徑寬：4.80 mm

液面高 (cm)	平均截斷水柱長 (cm)	標準差 (cm)
19	26.22	2.34
21	27.72	2.01
23	26.51	2.41
30	25.88	2.69
35	26.66	2.10
38	30.39	2.60

表 2.3

固定口徑寬：5.10 mm

液面高 (cm)	平均截斷水柱長 (cm)	標準差 (cm)
19	31.03	1.94
21	28.45	1.20
23	33.83	2.95
30	33.77	3.00
35	41.08	1.96
38	44.25	3.58

表 2.4

固定口徑寬：5.85 mm

液面高 (cm)	平均截斷水柱長 (cm)	標準差 (cm)
19	31.37	1.13
21	33.37	2.64
23	37.18	2.52
30	39.80	1.69
35	38.81	3.13
38	40.36	3.21

表 2.5

固定口徑寬：7.80mm

液面高 (cm)	平均截斷水柱 長(cm)	標準差 (cm)
19	49.89	3.49
21	50.62	2.27
30	53.20	4.38
35	50.29	2.45
38	57.03	6.08

表 2.6

陸、討論

一、檢驗模型：

測量截斷水柱的實驗結果，符合模型二中液面高 H 與截斷長度 h 的關係。

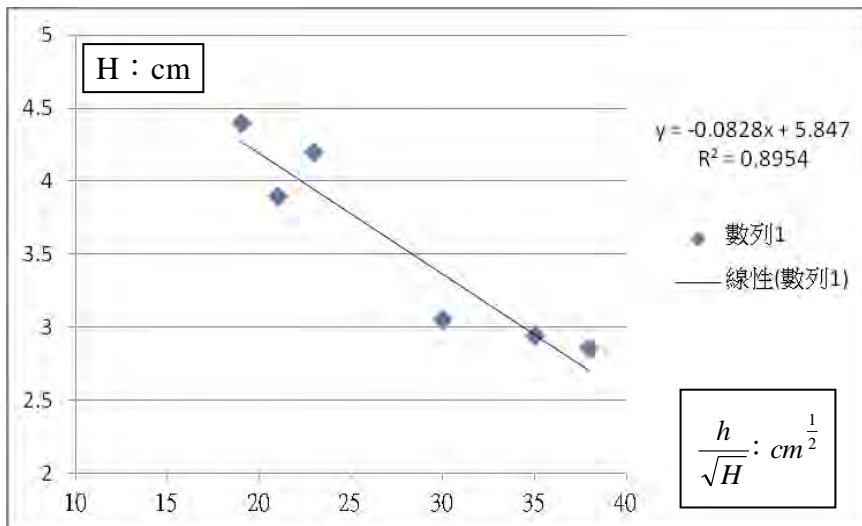
我們根據模型一、二所預測的結果，利用實驗得到液面高(H)與截斷長度(h)來做圖，分別得到六種口徑寬在兩個模型的圖形如下：

(一)模型一

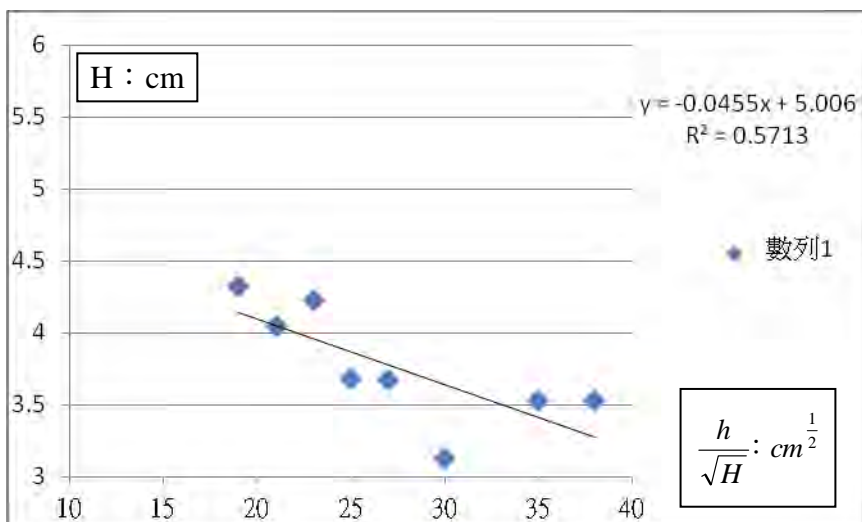
$$\frac{h}{\sqrt{H}} = \frac{\sqrt{2gr}}{a}$$

我們以 H 為橫軸， $\frac{h}{\sqrt{H}}$ 為縱軸做以下四個圖

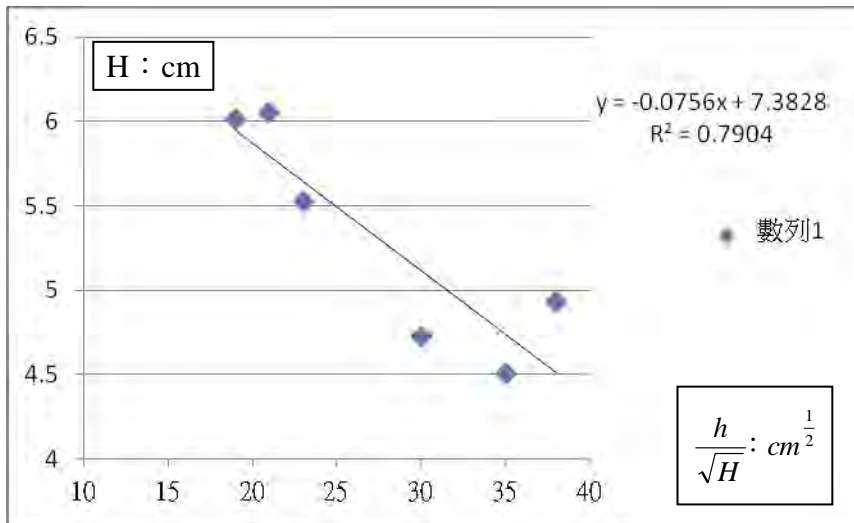
1. 口徑寬：2.30 mm(x、y 座標單位皆為 cm)



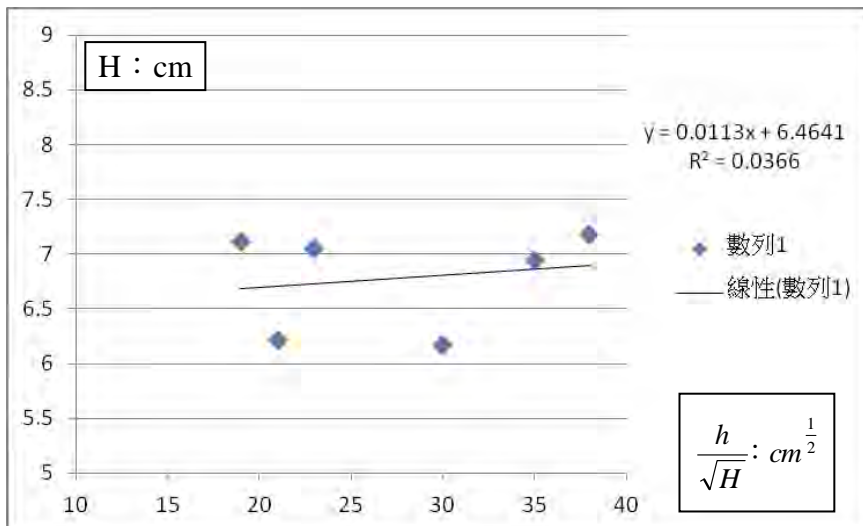
2. 口徑寬：3.80 mm(x、y 座標單位皆為 cm)



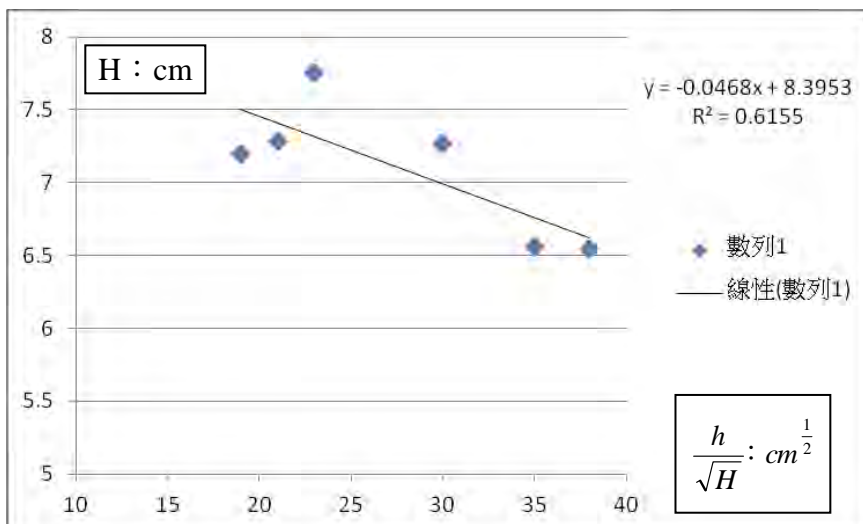
3. 口徑寬：4.80mm(x、y 座標單位皆為 cm)



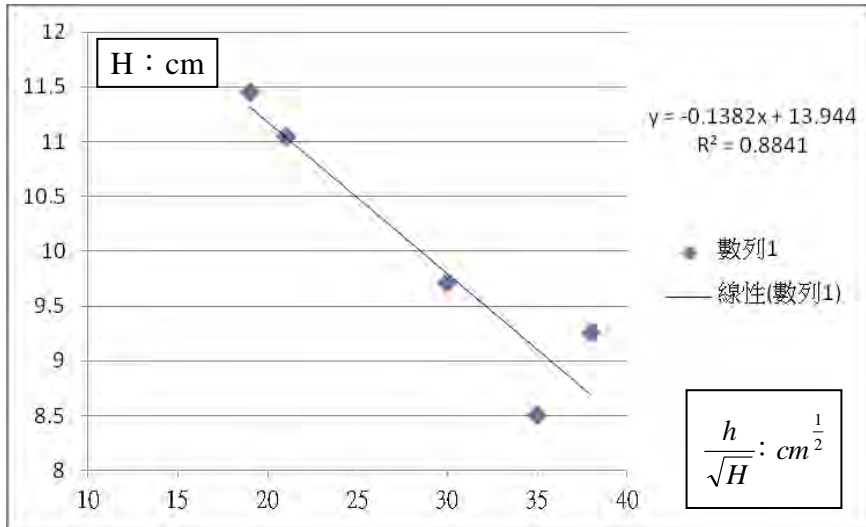
4. 口徑寬：5.10 mm(x、y 座標單位皆為 cm)



5. 口徑寬：5.85 mm(x、y 座標單位皆為 cm)



6. 口徑寬：7.80mm(x、y 座標單位皆為 cm)

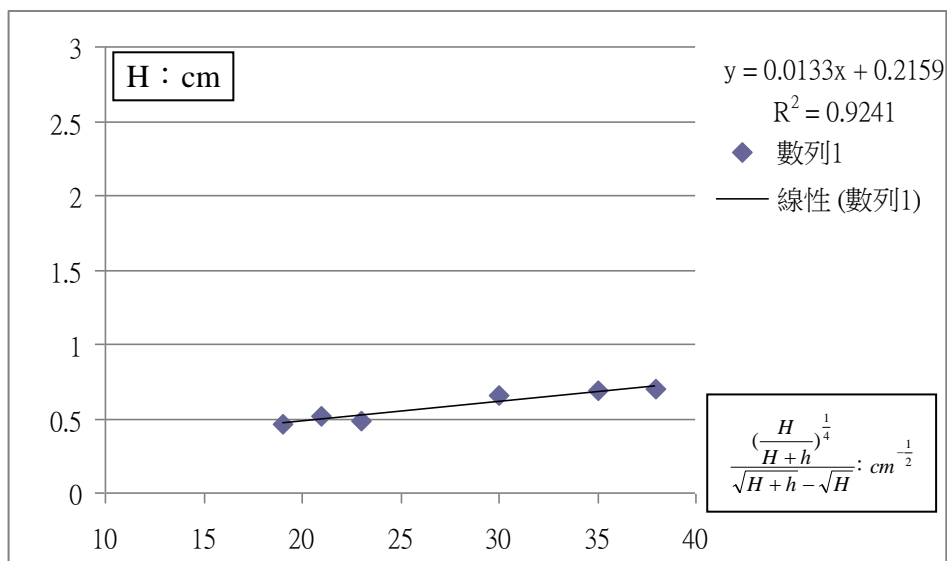


(二) 模型二

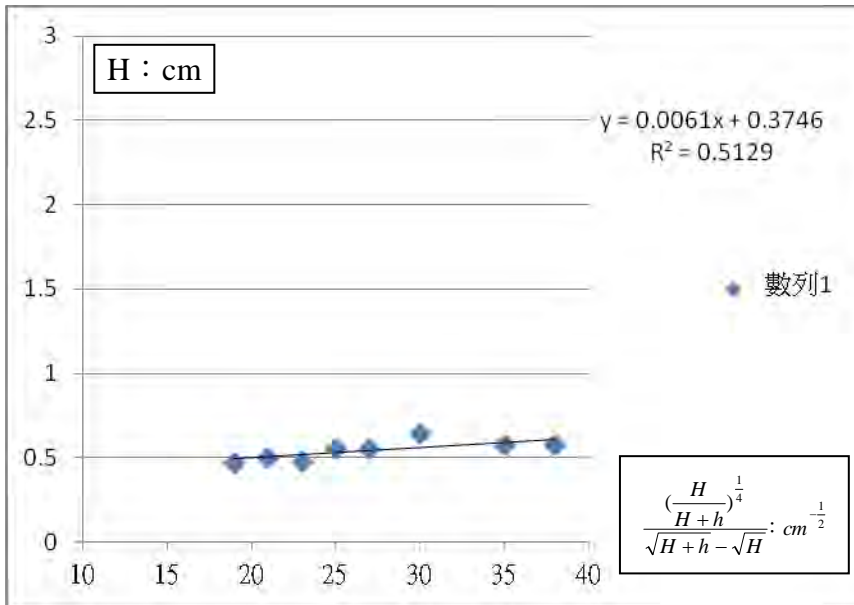
$$\frac{\left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{H+h}-\sqrt{H}} = \frac{a}{r_0} \sqrt{\frac{2}{g}} = \text{定值}$$

我們以 H 為橫軸， $\frac{\left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{H+h}-\sqrt{H}}$ 為縱軸做以下四個圖

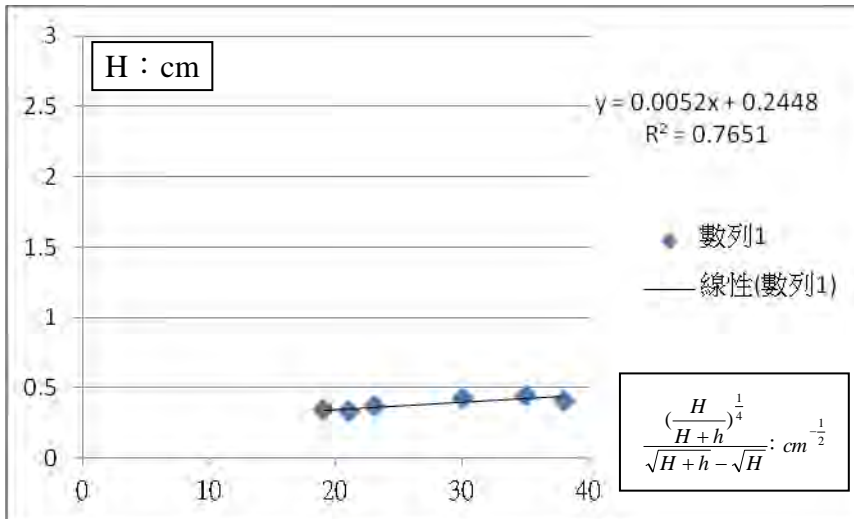
1. 口徑寬：2.30 mm(x、y 座標單位皆為 cm)



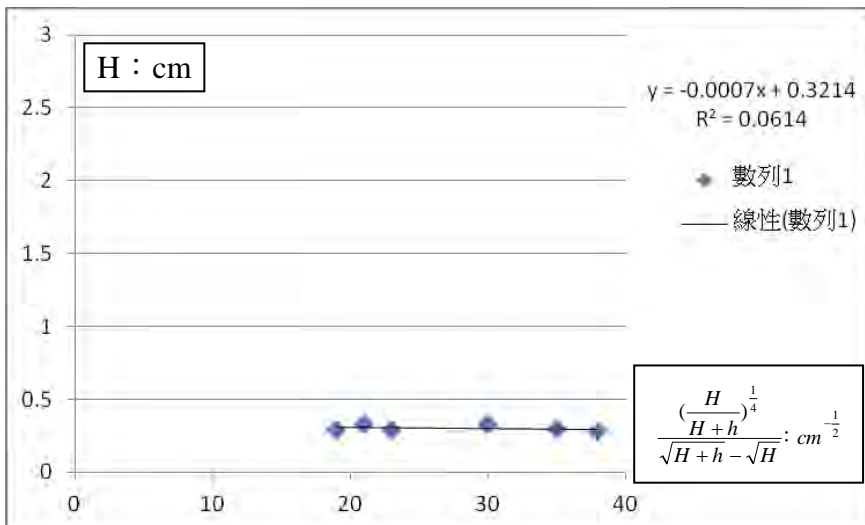
2. 口徑寬：3.80mm(x、y 座標單位皆為 cm)



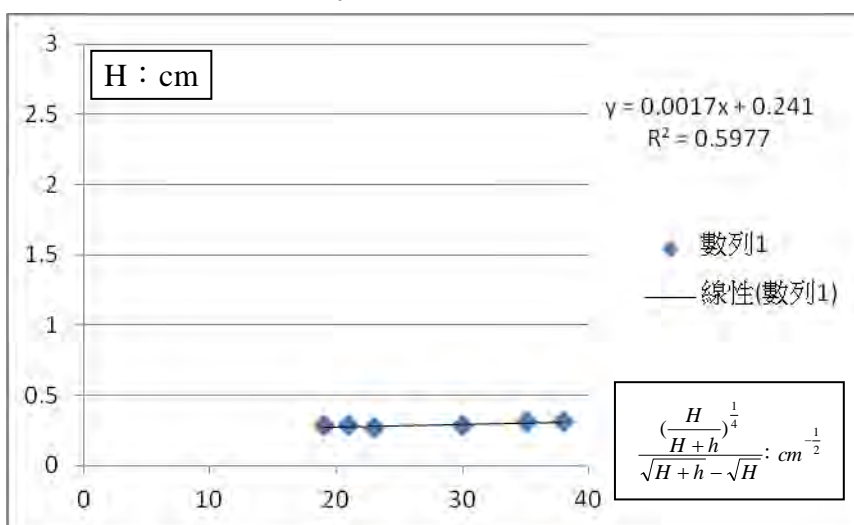
3. 口徑寬：4.80mm(x、y 座標單位皆為 cm)



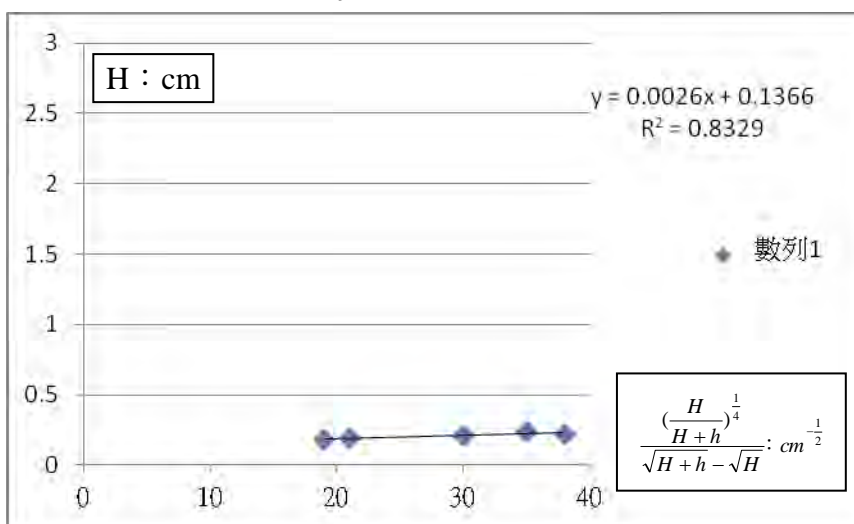
4. 口徑寬：5.10mm(x、y 座標單位皆為 cm)



5. 口徑寬：5.85mm(x、y 座標單位皆為 cm)



6. 口徑寬：7.80mm(x、y 座標單位皆為 cm)



由以上系列圖形，比較各組數據對於兩個模型的一致性以及符合程度(如表 3 所示)，兩個模型的變異係數約在 0.1 左右；就斜率部分，模型二的作圖較符合理論的預測(接近零)。詳細的比較如表 3 所示。

	口徑寬	2.30mm	3.80mm	4.80mm	5.10mm	5.85mm	7.80mm
模型一	變異係數	0.19	0.11	0.18	0.07	0.07	0.11
	斜率	-0.0828	-0.0455	-0.756	0.0113	-0.0468	-0.1382
模型二	變異係數	0.19	0.11	0.16	0.07	0.06	0.11
	斜率	0.0133	0.0061	0.0052	-0.0007	0.0017	0.0026



表 3 就變異係數而言，模型一、二從 0.07~0.11，就斜率來說，模型一從 0.013~0.0138；模型二則在 0.013 以下

二、模型二的觀察與解釋

- (一)水柱截斷時間 T 與液面高 H 無明顯關聯，但隨初始口徑 r_0 增加。
 (二)模型二系列圖形隨液面高 H 增加呈些微上升，推論為空氣阻力的效應。

模型二假定，對某一特定口徑的水柱，雷利振幅的增長率為一定值，意即不同水柱的出口速度，並不影響雷利擾動的行為。進一步，我們根據白努力方程式，可由液面高與截斷長度計算水柱的截斷時間(如式(5)所示)，我們發現截斷時間與液面高度無明顯關聯，而隨口徑微幅上升，如表 4 所示。

	2.30 mm	3.80 mm	4.80 mm	5.10 mm	5.85 mm	7.80 mm
19 cm	0.08	0.09	0.11	0.12	0.12	0.18
21 cm	0.07	0.08	0.11	0.11	0.13	0.18
23 cm	0.08	0.09	0.10	0.12	0.13	0.16
30 cm	0.06	0.10	0.09	0.11	0.13	x
35 cm	0.06	0.11	0.09	0.13	0.12	0.15
38 cm	0.06	0.11	0.10	0.13	0.12	0.16

表 4 不同口徑寬與水面高下，藉由截斷長度運用白努力方程式計算出的截斷時間，單位：秒

其次，我們從模型二系列圖形觀察到隨液面高 H 增加，函數值呈些微上升的趨勢。我們若考慮下落水柱亦受空氣阻力作用，且在短時間(下落期間)接近一定值，而與水柱初始速度 v_0 (由水面高決定，參式(2))呈正相關。於是，當水面高 H 愈大，阻力愈大，加速度 \tilde{g} 愈小。因此，從模型二推導的方程式應改寫為：

$$\frac{\left(\frac{gH}{\tilde{g}H + gh}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\tilde{g}H + gh} - \sqrt{gH}} = \frac{a}{r_0} \sqrt{\frac{2}{g}} \quad (\text{當 } \tilde{g} = g \text{ 回到原式})$$

由此可知，當 \tilde{g} 愈小，其值愈大。呈現於圖形，當 H 增加時，函數值些微上升。

三、模型二推論雷利擾動的增長特徵

- (一)雷利振幅隨時間呈線性增長。
 (二)水柱截斷面積與其下落時間二次方成正比。

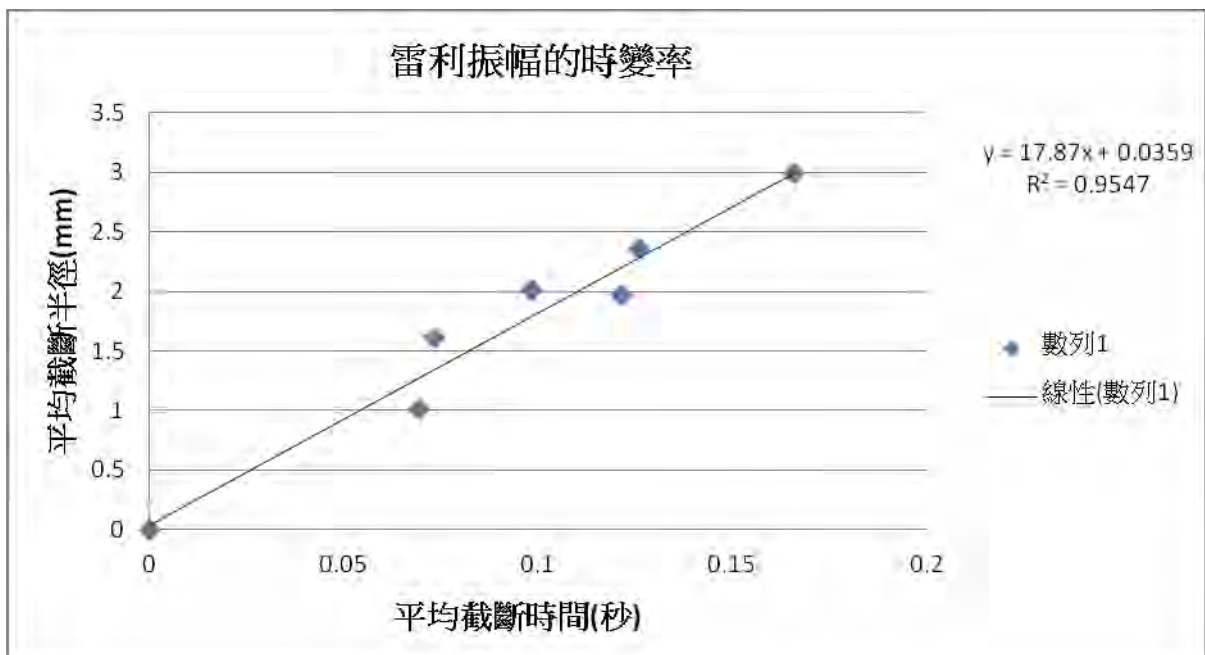
根據前文實驗原理(一)，不同水面高 H 決定水柱截面積(半徑)隨重力作用下的不同縮減率，如下式所示：

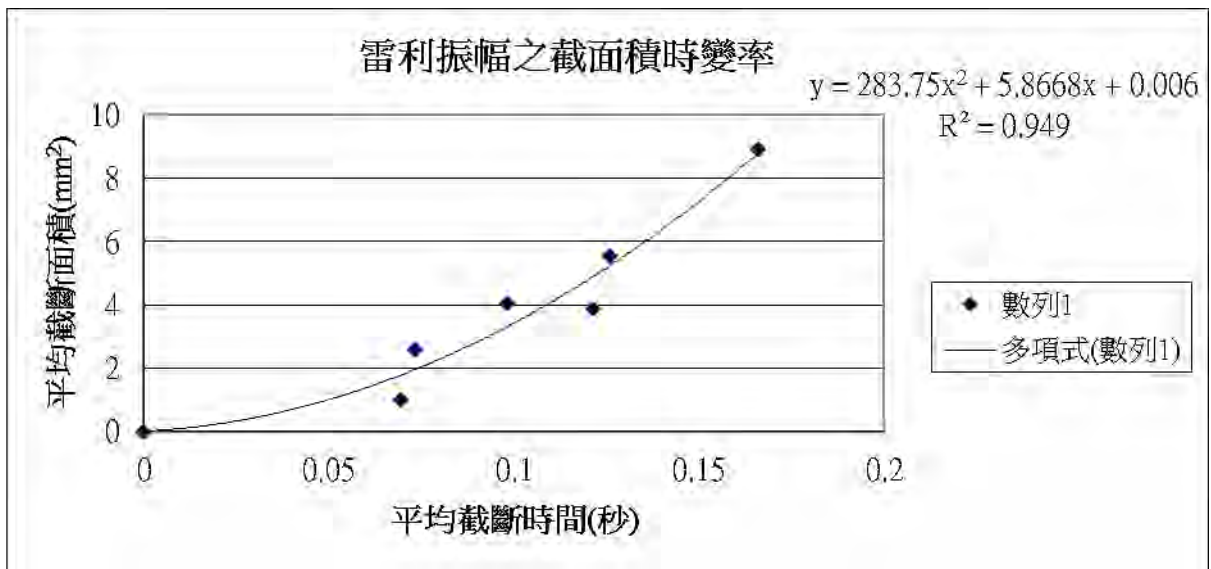
$$\sqrt{\frac{H}{H+h}} = \frac{A}{A_0}$$

$$r_c = r_0 \left(\frac{H}{H+h} \right)^{\frac{1}{4}}$$

由前文討論中模型二的觀察結果，不同縮減率對截斷時間無顯著影響。我們推論，雷利振幅在短時間內劇烈增長，因此對相同初始口徑、不同水面高的下落水柱，截斷時間皆相近。另外，當初始口徑愈小，所需的截斷時間愈短。

按照模型二的假設，雷利振幅在短時間內隨時間呈線性增長，我們便依表 4 計算同一口徑下，不同水面高的平均截斷時間 \bar{T} ，再由上式計算同一口徑下，不同水面高的平均截斷面積 \bar{A}_c 以及平均截斷半徑 \bar{r}_c 。我們取不同口徑下的 (\bar{T}, \bar{A}_c) 以及 (\bar{T}, \bar{r}_c) 為 x、y 座標來作圖。由於 \bar{r}_c 、 \bar{A}_c 亦為雷利擾動在水柱截斷時的振幅與振幅截面積，我們可將此二圖視為雷利振幅隨時間的演化的關係圖，故將(0,0)設為雷利振幅的起始點(初始雷利振幅為零)。結果如下：





由圖，我們得知實驗結果與模型二的預測符合良好(R^2 約為 0.95)，並由求得下落期間，雷利振幅的增長率為 17.87 mm/s。

柒、結論

本文針對文獻提及水柱下落時展現的雷利不穩定性進行探討，我們決定採用直觀的角度建立簡單的數學模型，從中考慮有無重力下，可測物理量(液面高 H 與截斷水柱長 h)的關係。經過實驗的檢驗，我們指出重力效應產生有限但不可忽略的影響。

另一方面，本研究顯示布魯托—雷利不穩定性的擾動現象，其振幅在短時間內隨時間呈現性增長。結論綜述如下：

- 一、研究自由下落之水柱的截斷長度 h ，必需考慮重力作用下的布魯托—雷利不穩定性。
- 二、雷利振幅在短時間內與時間成正比。
- 三、雷利振幅增長的時變率之測定值為 17.87 mm/s。

當我們考慮重力效應，文獻運用雷利不穩定性針對下落水柱的探討似有修正的必要。另在這次的研究，我們亦嘗試透過測量水柱截斷時波長，但礙於所使用的攝影器材之解析度與每秒畫格數之限制，無法做精確的判讀。本研究未來發展方向綜述如下：

- 一、測量雷利擾動造成水柱截斷時的波長，比較測量之 $k r_0$ 與文獻對其的限制。
- 二、探討重力效應對波長的影響
- 三、選用不同種類的液體，探討黏滯性對雷利擾動的影響。

捌、參考資料及其他

^[1]物理物質科學物理篇 P198~P204, 南一書局

^[2]維基百科「Plateau-Rayleigh instability」, http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau%E2%80%93Rayleigh_instability

^[3]Lord Rayleigh, On the instability of jets, Proceedings of the London mathematical society, vol.10, pp.4-13, 1878

^[4] Oren Breslouer, Rayleigh-Plateau Instability: Falling Jet, 2010/8/10

^[5] J. Pellicer, V. García-Morales y M. J. Hernández, On the demonstration of the Young-Laplace equation in introductory physics courses, Departamento de Termodinámica,

^[6] Fluid Jets, Lecture Notes - Fluid Dynamics, 2011/8/11

【評語】 040115

自行建置器材，探究自由落體之水柱斷開或水滴的現象，其結果驗證了文獻上的理論，在實驗及理論推導驗證等兩方面均屬完整。若能再加入新意，將會更好。