

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

最佳(鄉土)教材獎

040104

高速鐵路轉向架動態分析

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者： 高一 吳承儒	指導老師： 陳泓志
---------------	--------------

關鍵詞：轉向架、非線性、阻尼

摘要

本研究的目的是要分析高速鐵路在經過不穩定地區時的運動狀態，並描述當時的運動狀態和發現有益與有意義的結果。分析後的結果發現，高速鐵路在經過不穩定地區時的運動狀態是屬於非線性的情況，因此，嘗試以非線性振動理論來描述當時的運動狀態。初步結果顯示，以 KBM 非線性振動理論來描述當時的運動狀態，可發現共振對列車行駛安全性有影響。

壹、研究動機

西元 1998 年 6 月 3 日，德國高速鐵路 ICE 因車輪金屬疲勞損壞導致列車出軌，車廂彈起撞上橋梁，造成 101 人死亡，此次事故原因主要有兩點：其一，事故發生前 2 個月就有工作人員反應有不尋常的搖晃，但未改善，其二，駕駛未察覺轉向架車輪異常，仍持續以時速 200 公里以上行駛。

暑假與家人出遊，乘坐高鐵經過某些路段時，車身似乎有些劇烈震動。突發靈光一現，如果測量高鐵經過不穩定地區的加速度，分析轉向架當時的振動狀況，嘗試求出其運動方程式來探討其運動狀態，從中能否看出非線性的情況，或者是分析出轉向架減震器的阻尼？

貳、研究目的

- 一、分析高速鐵路轉向架經過沉陷區的振動現象，並探討其運動方程式。
- 二、利用傅立葉級數，作線性疊加及 KBM 法了解是否具有非線性現象。

參、研究設備及器材

一、研究器材

- (一)、QCN Live(記錄加速度值的軟體)[1][2][3]
- (二)、校正 QCN Live 時間測量的軌道與台車
- (三)、放置筆電用台車
- (四)、GPS 軌跡記錄器
- (五)、商用筆記型電腦（內建加速度感測器）
- (六)、捲尺
- (七)、水平儀

肆、研究過程或方法

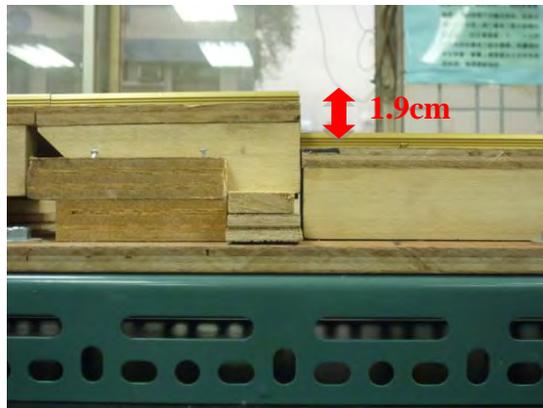
一、【測量平台的選擇】：

QCN Live 原始的開發平台是 ThinkPad，但是 ThinkPad 只有水平方向上 X、Y 軸的加速度感測器，所以一度考慮使用 Apple Mac book。卻發現當 Apple Mac book 處於靜止時，加速度感測器仍會偵測到加速度的數值變動，推測應該是該筆電所配備的壓阻式加速儀過於敏感，將電腦本身的震動也算進去。所以研究中使用 ThinkPad 筆記型電腦（內有電容式加速度感測器）做為測量平台。而為了達到測量垂直方向上的效果，把筆記型電腦垂直放置，並以台車輔助固定筆電。

二、【實驗步驟】：

(一).實驗一：驗證 QCN Live 時間計算

1.使用可調高度之軌道，並使用木片自製一個明顯的高度變化，為 1.9 公分。



圖一、軌道設計的下陷段（落差 1.9 公分）

2.將台車置於模擬之軌道上，並調整平面至水平。

3.筆記型電腦以 180 度展開，垂直放置於台車上並且固定。

4.以繩子拉動台車前進，並記錄 QCN Live 實驗結果



圖二、以繩索拉動台車，記錄加速度感測器在落下時的加速度值

(二)、實驗二：驗證訊號之可靠性(2011/2 板橋到高雄全線測量)

- 1.台車置於高鐵列車地板上，並調整平面至水平。
- 2.筆記型電腦以 180 度展開垂直置於台車上。(Y 軸正向與列車前進方向相同)
- 3.打開 GPS 軌跡記錄器，並記錄軌跡。
- 4.記錄 GPS、QCN Live 記錄實驗結果。

(三)、實驗三：校正 QCN Live 加速度值

- 1.台車置於地上，並調整平面至水平。
- 2.筆記型電腦置於台車上，X 軸正向朝下，記錄靜止時的實驗結果。
- 3.筆記型電腦置於台車上，X 軸負向朝下，記錄靜止時的實驗結果。
- 4.筆記型電腦置於台車上，Y 軸正向朝下，記錄靜止時的實驗結果。
- 5.筆記型電腦置於台車上，Y 軸負向朝下，記錄靜止時的實驗結果。

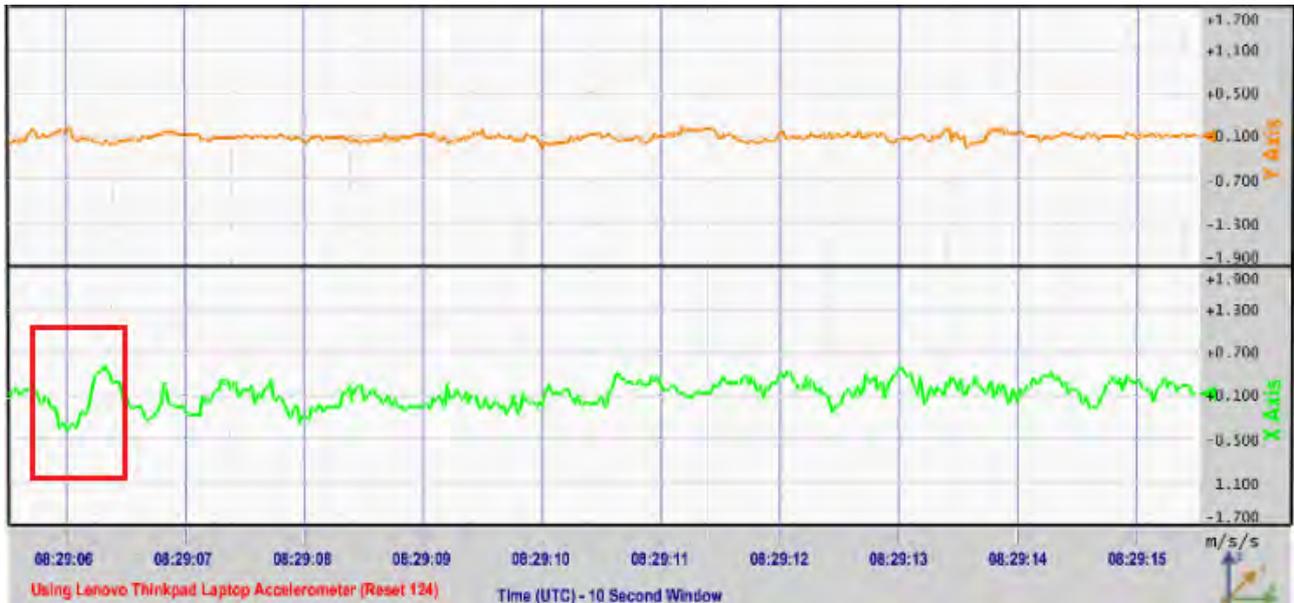
(四)、實驗四：測量台灣高鐵不穩定地區的加速度變化

- 1.台車置於高鐵列車地板上，並調整平面至水平。
- 2.筆記型電腦以 180 度展開垂直置於台車上。(Y 軸正向與列車前進方向相同)
- 3.打開 GPS 軌跡記錄器，並記錄軌跡。
- 4.記錄 GPS、QCN Live 記錄實驗結果。

三、【研究原理】：

(一)、轉向架減震器的力學分析(共有 120 筆有效資料，各軌各有 30 筆)

列車經過不穩定區域之後，QCN Live 的擷取圖如圖四紅色區域所示(以二號軌為例：



圖三、二號軌擷取圖

列車經過不穩定區域時，列車共受到三種力的作用：

- (1) 重力：經過不穩定區域時， $F_g = -mg$ 。

(2) 阻力：列車的減震器會減少重力的影響，速度越快，阻力越大，所以 $F_r = -bv$ 。

b 是阻尼係數

(3) 彈性回復力：減震器的回復力： $F_k = -kx'$ 。

k 是彈性係數

(4) 不穩定區所提供的驅動力(Driving force)： $F_0 = f(t)$

由牛頓第二運動定律： $ma = \sum F$ ，綜合上述三力，列車在垂直方向所受的合力與加速度的關係為： $ma = -mg - bv - kx' + f(t)$ 。

若以車內觀察者為參考座標系，將車體的垂直位移座標定為 x ，則加速度 a 為位移的二階微分 \ddot{x} ，速度 v 則為位移的一階微分 \dot{x} 。但因車輛未至沉陷處時，減震器及彈簧懸吊因受車體重量影響，減震器及彈簧已有一起始壓縮量 $-\frac{mg}{k}$ ，所以 $x' = -\frac{mg}{k} + \dot{x}$ ，代入上式可得：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-1)$$

因每輛車廂有兩個列車轉向架，每個轉向架在垂直方向共有四個圈狀彈簧及減震器，因此，式中的質量皆為車體質量的八分之一。其中，圈狀彈簧承載了車體的重量，減震器則是負責消弭不穩定區域的震動。

$$\ddot{x} = \frac{\sum F}{m} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{f(t)}{m} \quad (1-2)$$

令 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ， $\frac{b}{m} = 2\beta$ ， β 是阻尼參數。

因此(1-2)可以改寫成：

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \quad (1-3)$$

上式通解為

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \cos \omega_1 t] \quad (1-4)$$

其中 $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ 。

高鐵車輛未經過沉陷區域時，鋼軌的彎曲是由自身重量所造成，理論上，求出鋼軌的彎

曲函數，即可求得驅動力的解析函數。然而，高鐵車輛通過沉陷區域時，高鐵車輛所在的位置會大幅改變整個鋼軌的形狀。因此，驅動力 $f(t)$ 的解析函數，就不是那麼簡單求出。不知驅動力 $f(t)$ 的解析函數，(1-3)式的特殊解就無法求出，整個位移函數就無法完全獲得。

所幸，透過加速度的量測值，我們從中可看出一些端倪。將測量值展開成傅立葉級數，可得：

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x + \frac{f(t)}{m} = \text{測量值} \quad (1-5)$$

$$\ddot{x} = \sum_{l=1}^n a_l \sin l\Omega t + b_l \cos l\Omega t = -\sum_{l=1}^n |a_l| \sin l\Omega t \quad (1-6)$$

每一軌的 $|a_l|$ 值詳見表二

(二)、以數值積分求初速度與初位移：

從(1-3)式可知：

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x + \frac{f(t)}{m} \quad (2-1)$$

所以驅動力為，a 為測量值：

$$\frac{f(t)}{m} = a + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x \quad (2-2)$$

由 $v = \int a \cdot dt + v_0, x = \iint a \cdot dt dt + v_0 t + x_0$ (2-3)，把(2-2)式寫成：

$$\frac{f(t)}{m} = a + 2\beta \left(\int a \cdot dt + v_0 \right) + \omega_0^2 \left(\iint a \cdot dt dt + v_0 t + x_0 \right) \quad (2-4)$$

套入邊界條件 $\frac{F(0)}{m} = \frac{F(T)}{m} = 0$ ，得一聯立方程組：

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(0)}{m} &= 2\beta v_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ \frac{F(T)}{m} &= 2\beta \int_0^T a \cdot dt + \omega_0^2 \int_0^T \int_0^T a \cdot dt dt + \omega_0^2 v_0 T + 2\beta v_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

可得：

$$\omega_0^2 v_0 T = -2\beta \int_0^T a \cdot dt - \omega_0^2 \int_0^T \int_0^T a \cdot dt dt \quad (2-6)$$

所以初速度和初位移分別為：

$$v_0 = \frac{-2\beta \int_0^T a \cdot dt - \omega_0^2 \int_0^T \int_0^T a \cdot dt dt}{T\omega_0^2}, \quad x_0 = \frac{-2\beta v_0}{\omega_0^2} \quad (2-7)$$

從加速度的圖可以知道有非線性的項、線性項、驅動力
所以加速度包含為：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{linear term} + \text{nonlinear term} + \text{driving force}$$

可令非線性項為一時間的函數：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{linear term} + \xi(t) + \text{driving force}$$

並把驅動力 and 該函數令為另一時間的函數：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{linear term} + \zeta(t)$$

(三)、用傅立葉級數展開求驅動力：

$$\text{從(1-5)式可以知道：} \quad \ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x + \frac{f(t)}{m} \quad (3-1)$$

各以傅立葉級數展開：

$$\sum_{l=1}^n |-a_l| e^{il\Omega t} = \sum_{l=1}^n \left(-2i\beta l\Omega A - \omega_0^2 A + \frac{f_l}{m} \right) e^{il\Omega t} \quad (3-2)$$

因此，根據(3-2)左式，位移、速度、加速度可寫成：

$$x = A e^{il\Omega t} \quad (3-3)$$

$$\dot{x} = il\Omega A e^{il\Omega t} \quad (3-4)$$

$$\ddot{x} = -l^2 \Omega^2 A e^{il\Omega t} \quad (3-5)$$

$$\text{所以 } A = \frac{|-a_l|}{l^2 \Omega^2} \quad (3-6)$$

$$\text{且 } |-a_l| = -i2\beta l\Omega A - \omega_0^2 A + f_l / m \quad (3-7)$$

所以 f_l / m 為：

$$\begin{aligned} f_l / m &= |-a_l| + i2\beta l\Omega A + \omega_0^2 A \\ &= \sqrt{(-a_l + \omega_0^2 A)^2 + 4\beta^2 l^2 \Omega^2 A^2} \left(\frac{|-a_l| + \omega_0^2 A}{\sqrt{(-a_l + \omega_0^2 A)^2 + 4\beta^2 l^2 \Omega^2 A^2}} + i \frac{2\beta l\Omega A}{\sqrt{(-a_l + \omega_0^2 A)^2 + 4\beta^2 l^2 \Omega^2 A^2}} \right) \end{aligned}$$

並可寫為：

$$f_l / m = \sqrt{\left(|-a_l| + |-a_l| \frac{\omega_0^2}{l^2 \Omega^2} \right)^2 + 4\beta |-a_l|^2} e^{i\phi} \quad (3-9)$$

最後，提出 $|-a_l|$ ，得(3-10)

$$f_l / m = |-a_l| \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{l^2 \Omega^2} \right)^2 + 4\beta} e^{i\phi} \quad (3-10)$$

$$f_l(t) / m = |-a_l| \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{l^2 \Omega^2} \right)^2 + 4\beta} e^{i(l\Omega t + \theta)} \quad (3-11)$$

係數結果見表四。

(四)、用 KBM(克雷洛夫-波哥留波夫-米特羅坡耳斯基漸近)法 求共振情形之近似：
轉向架的動能 T 和位能 U 可用下式表示， ψ 為耗散函數。

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad U = -mgx + U_{\text{避彈}}(x) \quad \psi = \frac{b}{2} \dot{x}^2$$

$U_{\text{避彈}}$ 代表避震器的彈力位能， $b\dot{x}$ 為阻力。

則在平衡位置的坐標 $x_{\text{平衡}}$ ，可寫成：

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_{\text{平衡}}} = -mg + \left. \frac{\partial U_{\text{避彈}}}{\partial x} \right|_{x=x_{\text{平衡}}} = 0$$

將位能 U 按質點對平衡位置的偏離 x 展開為冪級數到四次方項，可得：

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{\text{避彈}}}{\partial x^2} \right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 U_{\text{避彈}}}{\partial x^3} \right)_{x=0} x^3 + \frac{1}{6!} \left(\frac{\partial^4 U_{\text{避彈}}}{\partial x^4} \right)_{x=0} x^4$$

因此，振動方程可寫為(4-1)式：

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega^2 x &= \mathcal{E}f(x, \dot{x}, \omega_0 t) \\ &= -\alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^3 - 2\beta \dot{x} + \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (4-1)$$

(4-1)式中：

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 U_{\text{避彈}}}{\partial x^2} \right)_{x=0}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^3 U_{\text{避彈}}}{\partial x^3} \right)_{x=0}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6m} \left(\frac{\partial^4 U_{\text{避彈}}}{\partial x^4} \right)_{x=0}, \quad 2\beta = \frac{b}{m}$$

根據(4-1)式右方可寫出：

$$\begin{aligned} \varepsilon f^{(1)}(A, \phi, \omega_0 t) &= \varepsilon f(A \cos \phi, -\omega_0 A \sin \phi, \omega_0 t) = 2\beta \frac{P}{q} \omega_0 A \cos \phi \\ &+ \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t - \frac{\alpha_1 A^2}{2} (1 - \cos 2\phi) - \frac{\alpha_2}{4} A^3 (3 \sin \phi - \sin 3\phi) \end{aligned} \quad (4-2)$$

在非線性受迫振動中的共振，若滿足(4-3)式條件，就可產生共振。

$$\Omega \cong \frac{P}{q} \omega_0 \quad (4-3)$$

其中， p 和 q 為互質整數。

令一小量 $\varepsilon \Delta$ 為固有頻率平方與共振頻率平方之間的偏差：

$$\Omega^2 = \left(\frac{P}{q} \omega_0 \right)^2 + \varepsilon \Delta$$

於是，(4-1)式可改寫為：

$$\ddot{x} + \left(\frac{P}{q} \omega_0 \right)^2 x = \varepsilon [f(x, \dot{x}, \omega_0 t) - x \Delta] \quad (4-4)$$

方程(4-4)的解是：

$$x = A \sin \phi + \varepsilon x^{(1)}(A, \phi, \omega_0 t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(A, \phi, \omega_0 t) + \dots \quad (4-5)$$

因共振的振幅與相位差有關，引入相位差的關係式：

$$\theta(t) = \phi(t) - \frac{P}{q} \omega_0 t \quad (4-6)$$

當(4-3)式為等號時，振幅和相位的變化應滿足下列二方程：

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon A (A^{(1)}, \theta) + \varepsilon^2 A^{(2)}(A, \theta) + \dots \quad (4-7)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{P}{q} \omega_0 + \varepsilon \Omega^{(1)}(A, \theta) + \varepsilon^2 \Omega^{(2)}(A, \theta) + \dots$$

(4-8)

將解的 ϕ 改用 ϑ 來表示：

$$x = A \sin \left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \vartheta \right) + \varepsilon x^{(1)}(A, \vartheta, \omega_0 t) + \dots$$

(4-9)

且應滿足：

$$\dot{A} = \varepsilon A^{(1)}(A, \vartheta) + \dots \quad \dot{\vartheta} = \varepsilon \omega^{(1)}(A, \vartheta) + \dots \quad (4-10)$$

為解出一級近似之解答，先將方程(5-5)式對時間求二階導數：

則一階導數如下：

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

個別偏微分後如下：

$$\dot{x} = \left(\sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon \frac{\partial x^{(1)}}{\partial A} + \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial A} + \dots \right) \dot{A} + \left(A \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \theta} + \dots \right) \dot{\theta} + \frac{P}{q} \omega_0 A \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon \frac{\partial x^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial t} + \dots \quad (4-11)$$

則二階導數為(4-12)：

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \dot{A} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial^2 x}{\partial A^2} \dot{A}^2 + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \theta} \dot{A} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial t} \dot{A} + \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \theta} \dot{A} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ &\quad \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial t} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

接著逐一計算其導數並保留二級近似以下的項(4-13)：

4-13(1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \dot{A} &= \frac{\partial^2 x}{\partial A^2} \dot{A}^2 + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \theta} \dot{A} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial t} \dot{A} \\ &= \varepsilon^2 A^{(1)} \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) \frac{dA^{(1)}}{dA} + \varepsilon^2 \left(A^{(1)} \Omega^{(1)} + \Omega^{(1)} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial A} \right) \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 A^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 A^{(1)} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial t} + \varepsilon^2 \frac{P}{q} \omega_0 A^{(2)} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) \end{aligned}$$

4-13(2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \dot{\theta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \theta} \dot{A} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} \dot{\theta} \\ &= \varepsilon^2 A^{(1)} \Omega^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon^2 \Omega^{(1)} \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \theta} \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) - \varepsilon^2 A \left(\Omega^{(1)} \right)^2 \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \\ &\quad \varepsilon^2 A \Omega^{(1)} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \theta} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) - \varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 \Omega^{(1)} A \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon^2 \Omega^{(1)} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \theta \partial t} + \varepsilon^2 \frac{P}{q} \omega_0 \Omega^{(2)} A \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) \end{aligned}$$

4-13(3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial t} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ &= \varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 A^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon^2 \frac{P}{q} \omega_0 A^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) - \varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 A \Omega^{(1)} \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) - \\ &\quad \varepsilon^2 \frac{P}{q} \omega_0 A \Omega^{(2)} \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon^2 A^{(1)} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial t} - \varepsilon^2 \Omega^{(1)} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \theta \partial t} - \frac{P^2}{q^2} \omega_0^2 A \sin\left(\frac{P}{q}\omega_0 t + \theta\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial t^2} + \\ &\quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

將一級近似項選出，可得：

$$x^{(1)}(A, \theta, \omega_0 t) = \varepsilon \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 A^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) - 2\varepsilon \frac{P}{q} \omega_0 A \Omega^{(1)} \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-14)$$

所以， $x^{(1)}(A, \vartheta, \Omega t)$ 所滿足之微分方程為(4-15)：

$$\left(\frac{P}{q} \omega_0\right)^2 x^{(1)} + \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial t^2} = \varepsilon f^{[0]}\left(A, \frac{P}{q} \omega_0 t + \theta, \Omega t\right) + \left(2 \frac{P}{q} \omega_0 \Omega^{(1)} - \varepsilon \Delta\right) A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) - 2 \frac{P}{q} \omega_0 A^{(1)} \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)$$

其中，

$$f^{[0]}\left(A, \frac{P}{q} \omega_0 t + \theta, \omega_0 t\right) = f\left[A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right), -\frac{P}{q} \omega_0 A \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right), \omega_0 t\right] \quad (4-16)$$

根據 KBM 非線性振動理論，可得：

$$A^{(1)} = -\frac{1}{4\pi^2 \frac{P}{q}} \sum_n e^{-in\frac{q}{p}\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{[0]}(A, \phi, \Omega t) e^{in\frac{q}{p}\vartheta} \cos \phi d\phi dt \quad (4-17)$$

$$\omega^{(1)} = \frac{\Delta}{2 \frac{P}{q} \Omega} - \frac{1}{4\pi^2 \frac{P}{q} A} \sum_n e^{-in\frac{q}{p}\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{[0]}(A, \phi, \Omega t) e^{in\frac{q}{p}\vartheta} \sin \phi d\phi dt \quad (4-18)$$

將(4-2)帶入(4-19)、(4-20)可得(其中 $p=1, q=3$)：

$$\varepsilon A^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2 \omega_0 \frac{1}{3}} \left[-4\pi^2 \frac{1}{3} \beta \omega_0 A + e^{-i3\theta} (-i\pi^2 \frac{F_0}{m}) + e^{i3\theta} (i\pi^2 \frac{F_0}{m}) \right] \quad (4-19)$$

$$\varepsilon \omega^{(1)} = \frac{3\varepsilon \Delta}{2\omega_0} - \frac{3}{4\pi^2 \omega_0 A} \left[-\frac{3}{2} \pi^2 \alpha_2 A^3 + (e^{-i3\theta} + e^{i3\theta}) \pi^2 \frac{F_0}{m} \right] \quad (4-20)$$

因此可寫出函數 A 和 ϑ 所滿足之一階近似聯立方程：

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= -\beta A - \frac{3F_0/m}{2\omega_0} \sin 3\theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{3\varepsilon \Delta}{2\omega_0} + \frac{9\alpha_2 A^2}{8\omega_0} + \frac{3F_0/m}{2\omega_0 A} \cos 3\theta; \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

此聯立方程的一級近似解可寫為：

$$x = A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-22)$$

此解的一階導數為

$$\dot{x} = \dot{A} \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) + \frac{P}{q} \omega_0 A \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) + \dot{\theta} A \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-23)$$

並引用 PKB 法的限制條件：

$$\dot{A} \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) + \dot{\theta} A \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) = 0 \quad (4-24)$$

因此二階導數為：

$$\ddot{x} = \frac{P}{q} \omega_0 \dot{A} \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) - \left(\frac{P}{q} \omega_0\right)^2 A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) - \frac{P}{q} \omega_0 A \dot{\theta} \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-25)$$

利用(4-24)式將 $A\dot{\theta}$ 代換：

$$\dot{\theta} A = -\dot{A} \frac{\sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)}{\cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)} \quad (4-26)$$

當時間為零，加速度為零時，將(4-26)式代入(4-25)式，得：

$$\ddot{x} = -\frac{P^2}{q^2} \omega_0^2 A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) + \frac{P}{q} \omega_0 \dot{A} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)} \right] = 0 \quad (4-27)$$

可寫為：

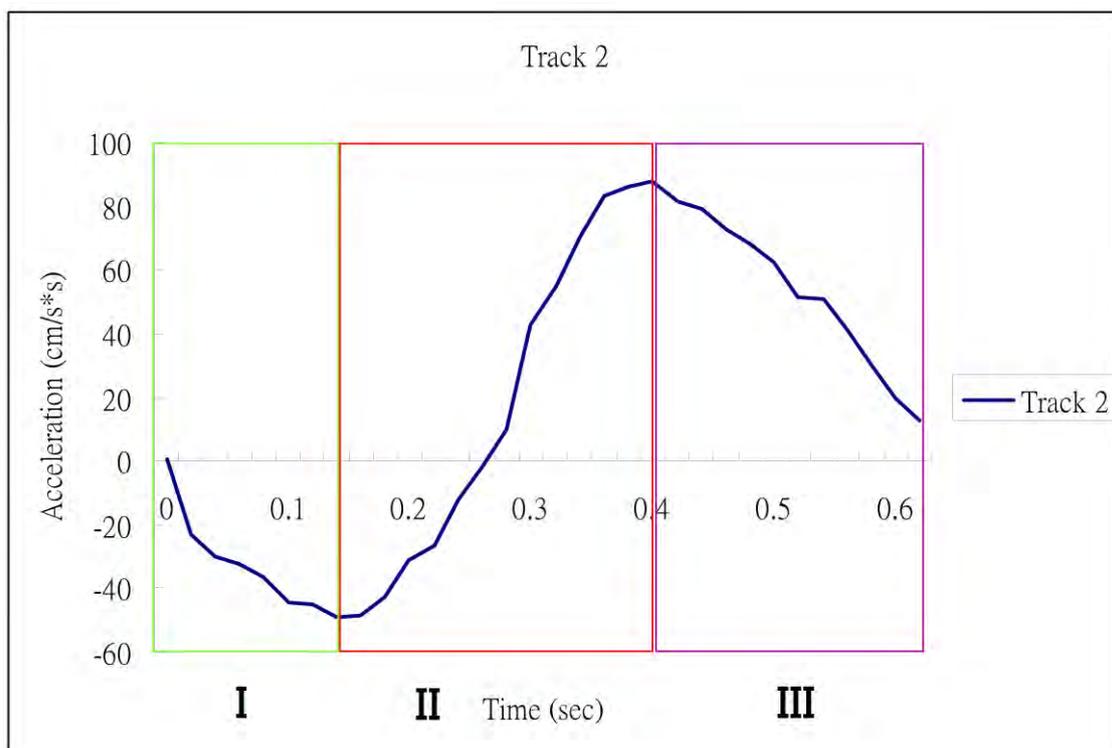
$$\frac{P}{q} \omega_0 t A \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) = \dot{A} = \frac{P}{2q} \omega_0 t A \sin 2\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-28)$$

所以， $\dot{\theta}$ 為：

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{A} \sin\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)}{A \cos\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right)} = -\frac{P}{q} \omega_0 \sin^2\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) = -\frac{P}{2q} \omega_0 + \frac{P}{2q} \omega_0 \cos 2\left(\frac{P}{q} \omega_0 t + \theta\right) \quad (4-29)$$

(五) 簡化運動方程式以得到阻尼參數的關係式：

首先，將列車經過不穩定區域的加速度對時間變化分為三段區域 I、II、III(以二號軌為例)



圖四、將列車經過不穩定區域的加速度對時間變化分為三段區域 I、II、III (QCN 有兩種繪圖的模式，一是直接將測得的加速度繪出，二會將靜止時的加速度值設為零，繪出其差異值，但是兩種繪圖方式在記錄成 Excel 檔時，加速度的數值是相同的。)

由圖四中，可看出 I、II 區的波谷時，減震器的壓縮量達到極值，而 II、III 區的波峰，則是減震器的伸長量達到極值，透過對加速度軸作鏡射(使其像 $e^{-\beta t}$ 的樣子衰減)，將 II、III 區交界的時間訂為 0，則經過半週期的時間後，諧振子的振幅衰減至波谷，如圖五，此時影響最

劇的為 $Be^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \theta)$ 這項。

因此，簡化(1-4)式為

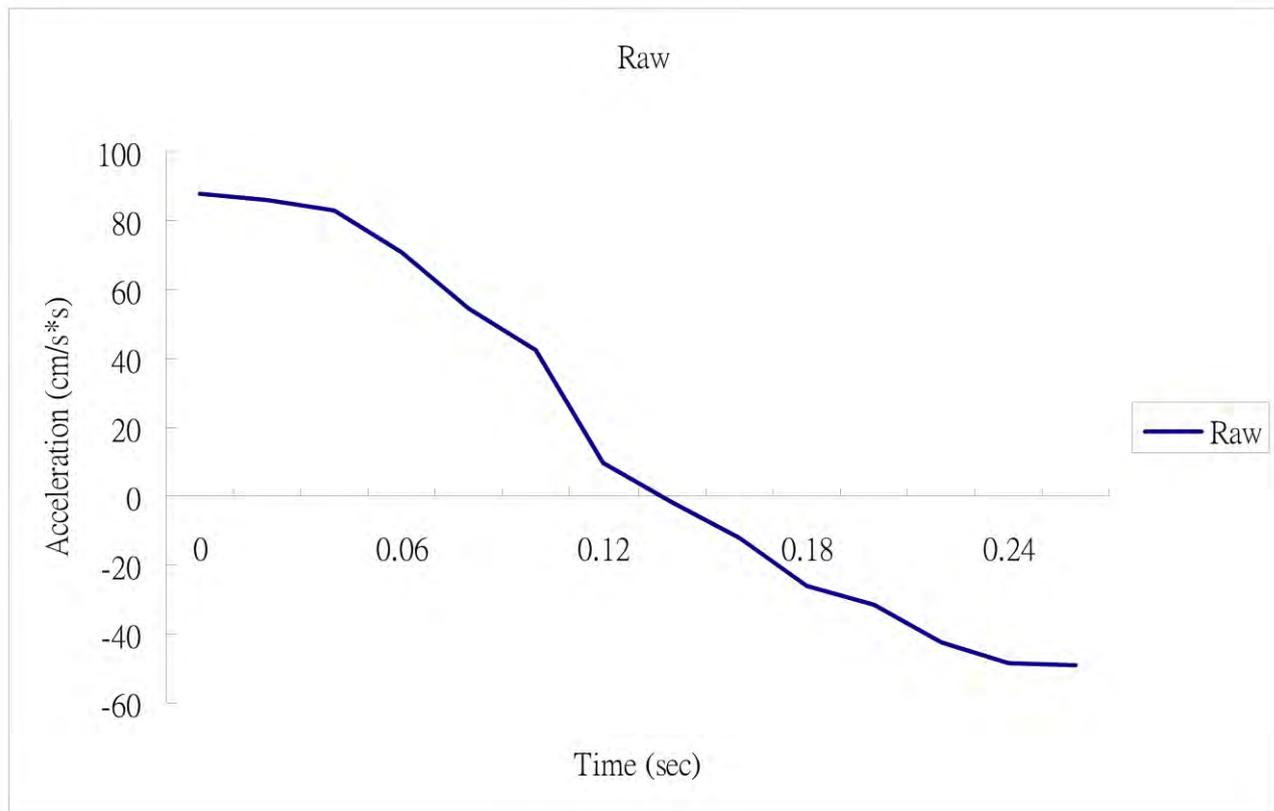
$$x(t) = Be^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (5-1)$$

微分一次是：

$$\dot{x} = Be^{-\beta t} [-\beta \sin(\omega_1 t + \theta) + \omega_1 \cos(\omega_1 t + \theta)] \quad (5-2)$$

當 $t = 0, \dot{x} = 0$ 時， $-\beta \sin \theta + \omega_1 \cos \theta = 0$ 。

$$\text{所以 } \cot \theta = \frac{\beta}{\omega_1}, \beta = \omega_1 \cot \theta \quad (5-3)$$



圖五、II 隨時間遞減之次阻尼諧振子

加速度與時間關係式為：

$$\ddot{x} = Be^{-\beta t} [(\beta^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t + \theta) - 2\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t + \theta)] \quad (5-4)$$

將(5-3)式帶入上式，可得：

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= Be^{-\omega_1 \cot \theta} [(\omega_1^2 \cot^2 \theta - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t + \theta) - 2\omega_1^2 \cot \theta \cos(\omega_1 t + \theta)] \\ &= B\omega_1^2 e^{-\omega_1 \cot \theta} [(\cot^2 \theta - 1) \sin(\omega_1 t + \theta) + 2\cot \theta \cos(\omega_1 t + \theta)] \end{aligned} \quad (5-5)$$

倒轉時間軸後的II，在 $t = 0$ 時，加速度值為最大，設加速度最大為 a_+ ，最小為 a_- ，。

$$\text{所以 } a_+ = B\omega_1^2 [(\cot^2 \theta - 1) \sin \theta + 2\cot \theta \cos \theta] \quad (5-6)$$

$$\text{振幅： } B = \frac{a_+}{\omega_1^2 [(\cot^2 \theta - 1) \sin \theta + 2\cot \theta \cos \theta]} \quad (5-7)$$

$$\text{而 } e^{-\omega_1 \cot \theta} = e^{-\pi \cot \theta}, \text{ 因為 } \omega_1 = \frac{2\pi}{2t} = \frac{\pi}{t} \text{。}$$

(區域 II 只是半個週期，所以 $T = 2t$ ， t 是所經過的時間。)

因此區域 II 的加速度最大值與最小值的比值是：

$$\frac{a_-}{a_+} = e^{-\pi \cot \theta} \frac{[(1 - \cot^2 \theta) \sin \theta - 2 \cot \theta \cos \theta]}{[(\cot^2 \theta - 1) \sin \theta + 2 \cot \theta \cos \theta]} \quad (5-8)$$

將(5-8)上下同除以 $\sin \theta$ ，整理後成：

$$e^{-\pi \cot \theta} \frac{1 - \cot^2 \theta - 2 \cot^2 \theta}{\cot^2 \theta - 1 + 2 \cot^2 \theta} = e^{-\pi \cot \theta} \frac{1 - 3 \cot^2 \theta}{3 \cot^2 \theta - 1} = -e^{-\pi \cot \theta}$$

$$\text{所以 } -\pi \cot \theta = \ln \left| \frac{a_+}{a_-} \right|, \cot \theta = \frac{\ln \left| \frac{a_+}{a_-} \right|}{-\pi} \quad (5-9)$$

$\cot \theta$ 、 ω_1 可從資料中得到，根據(5-3)式 $\beta = \omega_1 \cot \theta$ ，即可將該運動方程式中的阻尼參數算出。

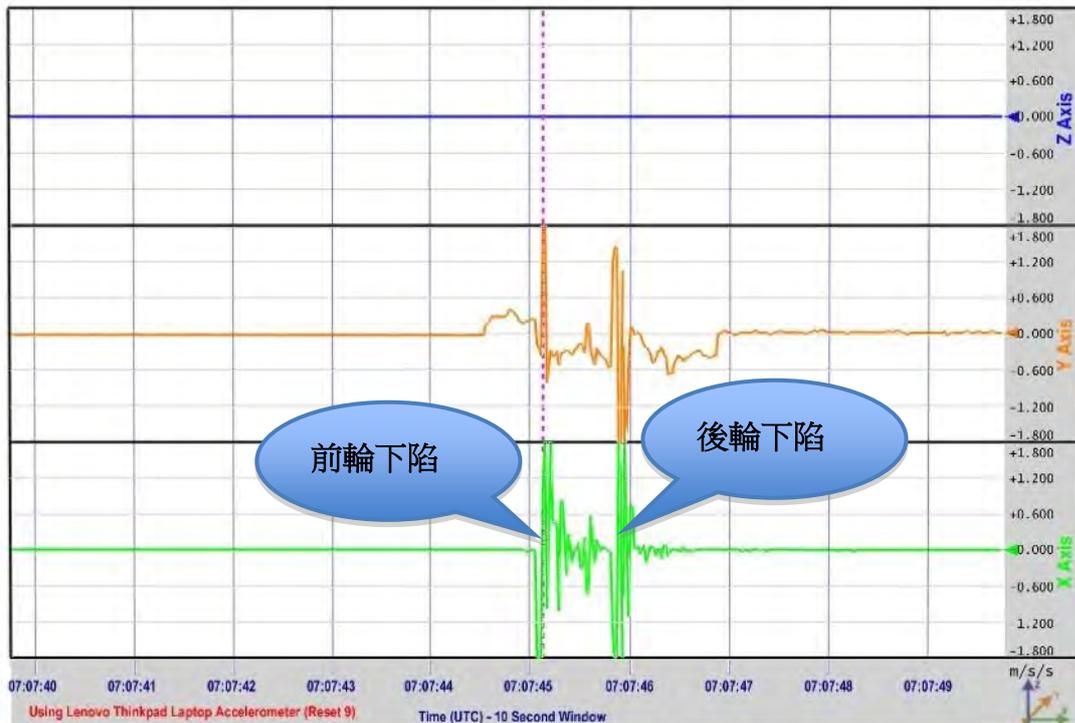
另外，將加速度對時間的關係式套入近似原始資料以驗證該運動方程式的正確性，如圖十六之一~之四。

伍、研究結果

一、校正實驗結果

(一)、實驗一：驗證 QCN Live 時間計算

根據水平拋射，加速度求距離的公式： $h = -\frac{1}{2}gt^2$ (g 重力加速度、 h 軌道落差高度)可以由時間與加速度算出距離。在本實驗中，預設 $h=1.9$ 公分，所要計算的時間是由加速度值的原點至最低點之間的時間變量，實驗中 X、Y 軸皆保持水平。



圖六、以繩索拉動台車時，台車前後輪下陷時的 QCN Live 記錄

以繩子拉動台車後，可以在 QCN Live 記錄中明顯看到前後輪分別下落的加速度變化（如圖六）。此外 QCN Live 的好處是隨時可以將實驗結果「錄製」下來，並精確轉換成時間與加速度的 Excel CSV(逗點分隔值)檔，而且還能自行儲存到筆記型電腦當中。因此只要在拉動台車後，讀取下落的時間變量，並套入上述公式，即可算出下落的高度。

實驗結果如下表一，下落的時間變量約為 0.0624 秒，所以下落高度應約等於 1.9 公分，實驗結果證明 QCN Live 在時間的計算上並無錯誤。

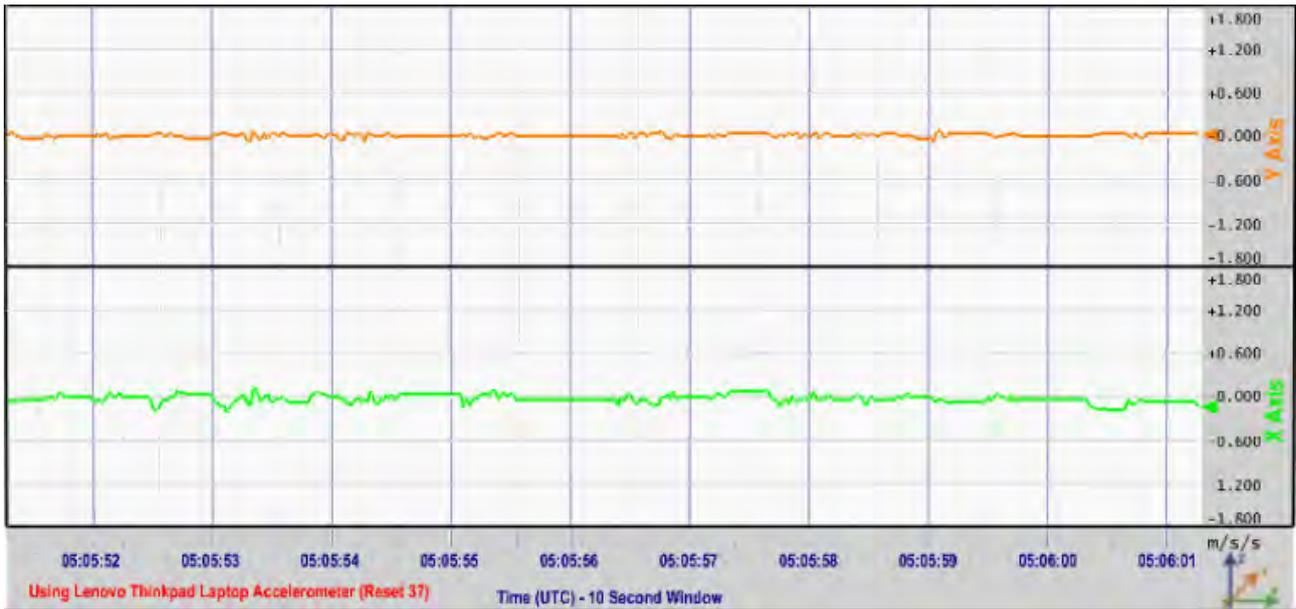
表一、台車前輪落下的時間記錄與換算的高度落差

實驗	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
前輪在上層軌道正要落下的時間點 (t_1)	2.387	1.886	3.297	2.698
前輪懸空的時間點 (t_2)	2.402	1.918	3.338	2.730
前輪下陷到下層軌道的時間點 (t_3)	2.449	1.950	3.360	2.761
前輪下陷的時間變量 $\Delta t = t_3 - t_1$	0.062	0.063	0.063	0.063
從 Δt 推算的下陷高度落差 (h)	-1.883cm	-1.944cm	-1.944 cm	-1.944cm

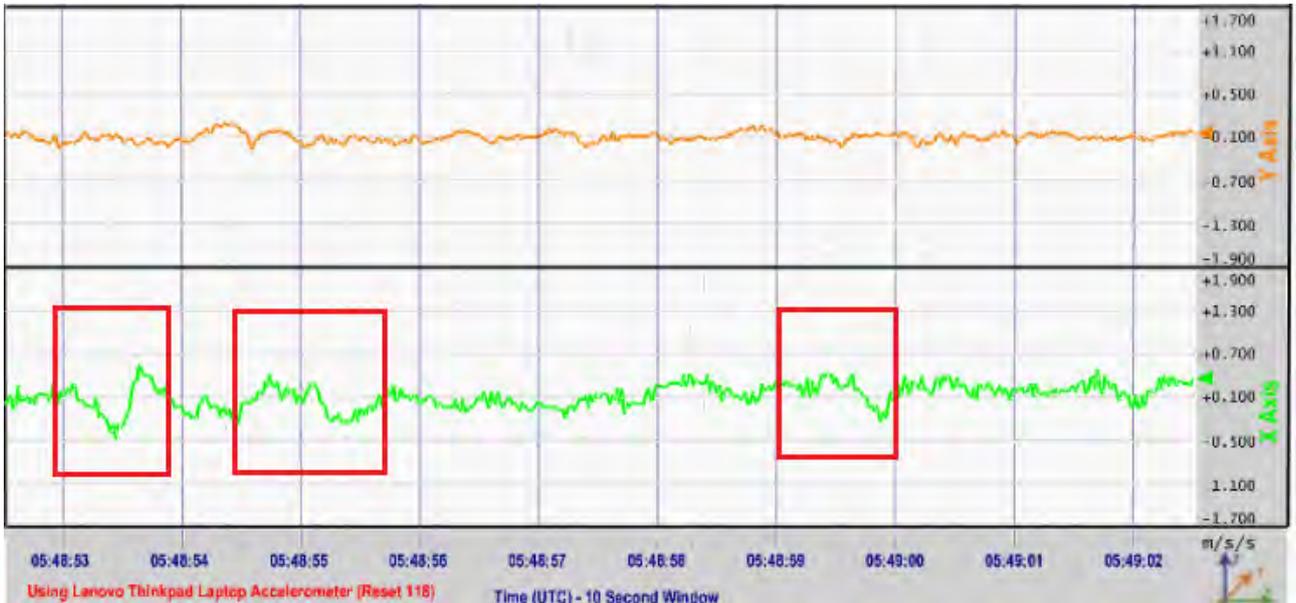
註：實驗一 QCN Live 為版本 3.78 資料讀取頻率為 64Hz，實驗二之後為版本 5.83，讀取頻率 50Hz。

(二)、實驗二：驗證訊號之可靠性

為驗證加速度感測器訊號之可靠性，測量台灣高鐵全線，自板橋至高雄。



圖七、加速度感測器未偵測到不穩定地區造成的加速度變化



圖八、加速度感測器偵測到不穩定地區造成的加速度變化

(三)、實驗三：校正 QCN Live 加速度值

實驗中的加速度感測器實際上是垂直擺放的，所以理當測到 $1g$ 的重力加速度，卻發現 QCN Live 所測量到的加速度值與理論的加速度值不一樣，是因為 QCN Live 的原設計者並沒有想到，會有人把筆記型電腦垂直擺放。所以，以此研究中使用的加速度感測器(ADXL320)之製造商的校正方法[4][5]，來校正所測量到的加速度值。校正方法如下：

設 QCN Live 所輸出的加速度值為 A_{out} ，偏差值為 A_{off} ，實際加速度為 A_{actual} ，單位都是重力加速度，設 Gain 為加速度感測器的增益，單位是加速度。

$$\text{則 } A_{off}[g] = 0.5 \times (A_{+1g} + A_{-1g}) \quad \text{Gain} = 0.5 \times \left(\frac{A_{+1g} - A_{-1g}}{1g} \right) \quad A_{actual}[g] = \frac{A_{out} - A_{off}}{\text{Gain}}$$

實驗結果 $A_{off} = 0.477555$ $\text{Gain} = 5.635151$

$$\text{則本實驗加速度感測器所測量之實際加速度值應為： } A_{actual}[g] = \frac{A_{out} - 0.477555}{5.635151}$$

由於在校正時是使用重力加速度來校正，而地球上每個不同的地方重力加速度皆不相同，所以必須計算出校正實驗地點的重力加速度是多少，以降低實驗的誤差。

從中央氣象局[6]的資料可以得知地球上每一點的重力加速度計算方法為：

$$\text{設 } \varphi \text{ 為緯度之經度，則 } g = 978.03185(1 + 0.005278895 \sin^2 \varphi + 0.000023462 \sin^4 \varphi)(\text{cm} / \text{s}^2)$$

以校正實驗的實驗地點台北，北緯約 25 度做為本研究之重力加速度：

計算結果：北緯 25 度之重力加速度值約為： $978.9547128(\text{cm} / \text{s}^2)$

(四)、實驗四：實際測量台灣高鐵不穩定地區加速度變化以分析非線性現象

1. 分軌測量

每一次的測量會因為在列車左端、右端而異，南下、北上都如此，為求精準，將每條軌道分開記錄，北上兩條為一、二軌，南下兩條為三、四軌，如圖九。

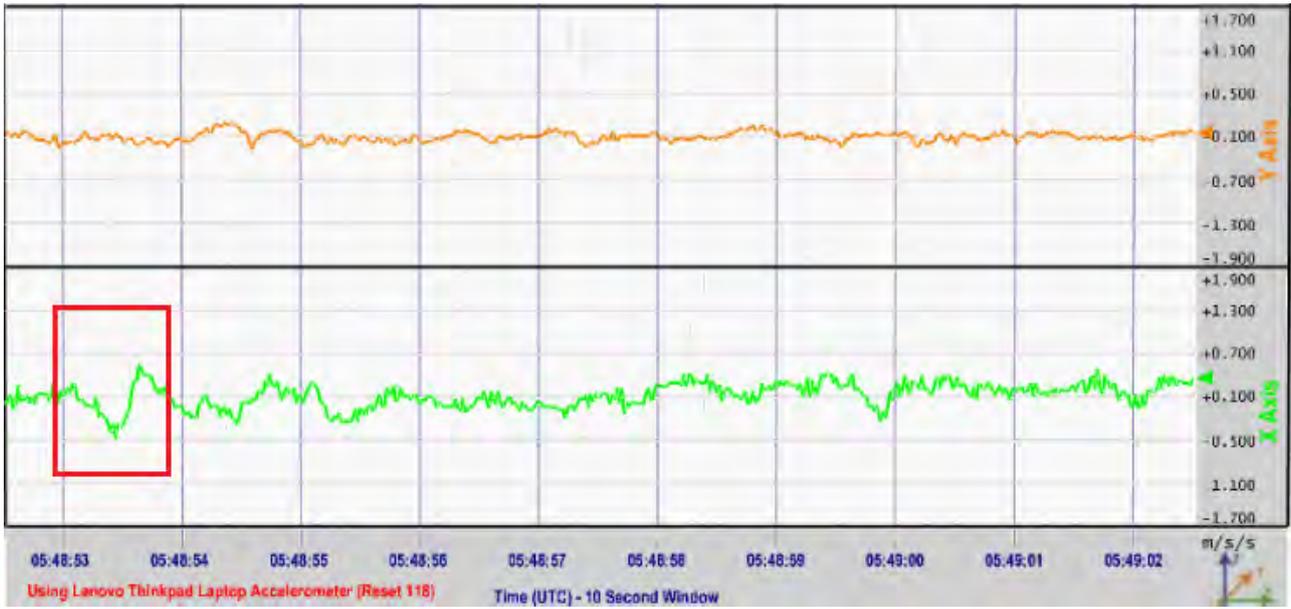


圖九、軌道編號示意圖(作者在附近山區所攝得)

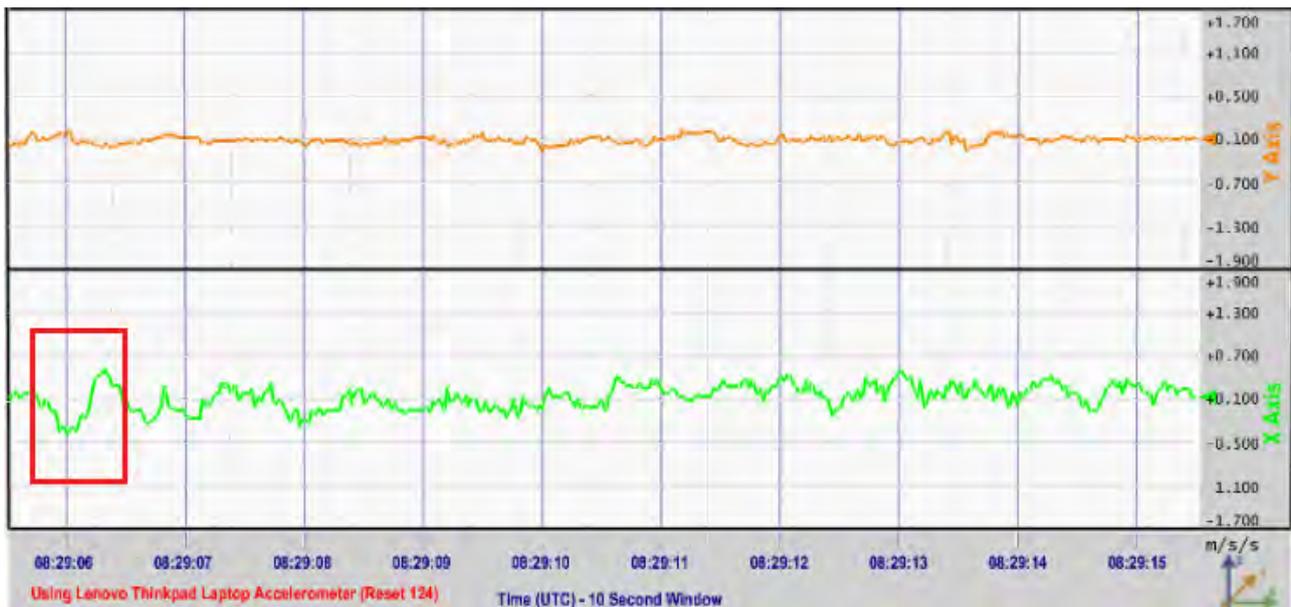
2. 選取資料計算範圍

從 QCN Live 原始資料中，找到達不穩定地區時，加速度的變化。

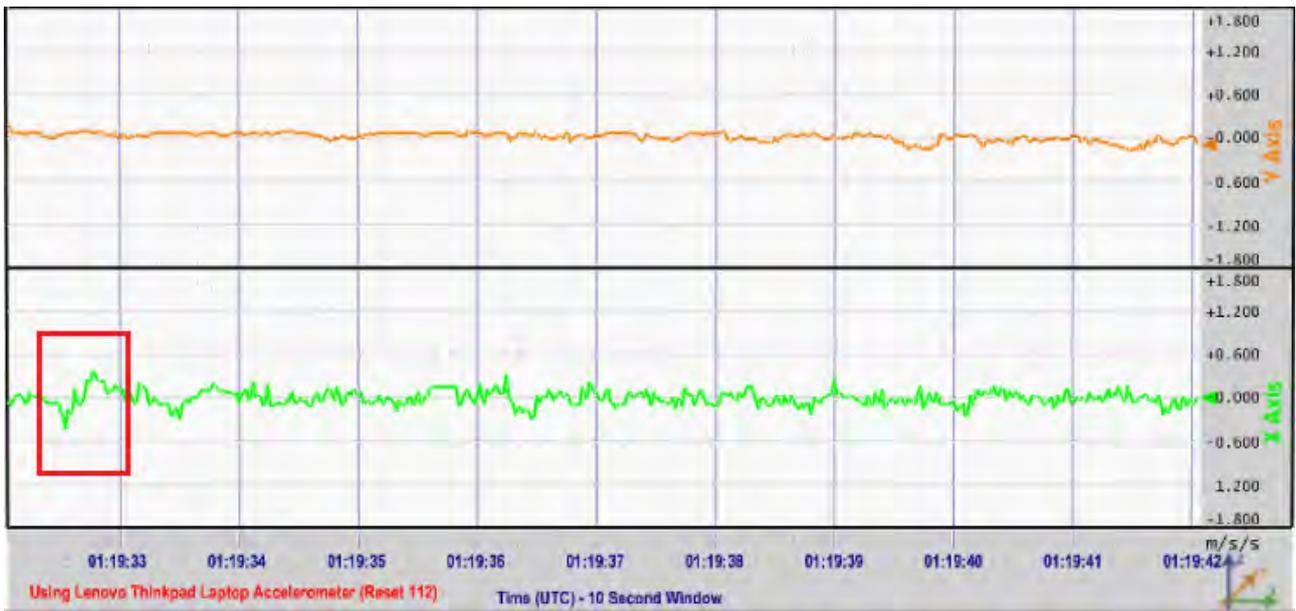
(下列為苗栗麻園坑口不穩定地區加速度變化 1~4 軌 QCN Live 擷取圖)



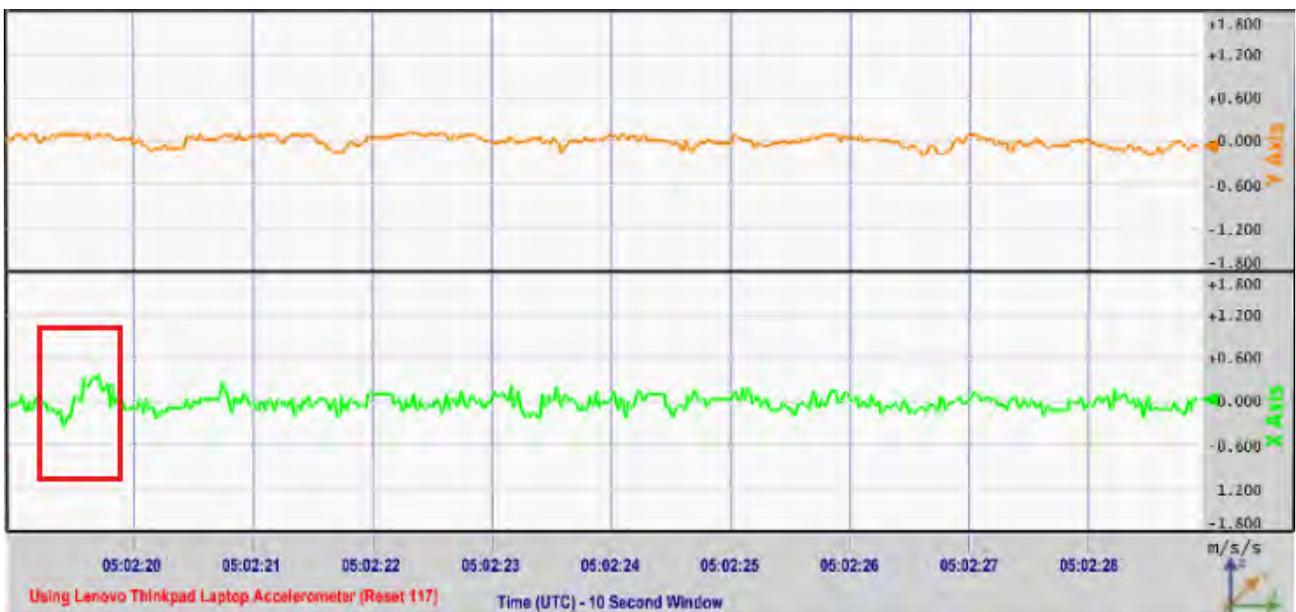
圖十、一號軌



圖十一、二號軌



圖十二、三號軌



圖十三、四號軌

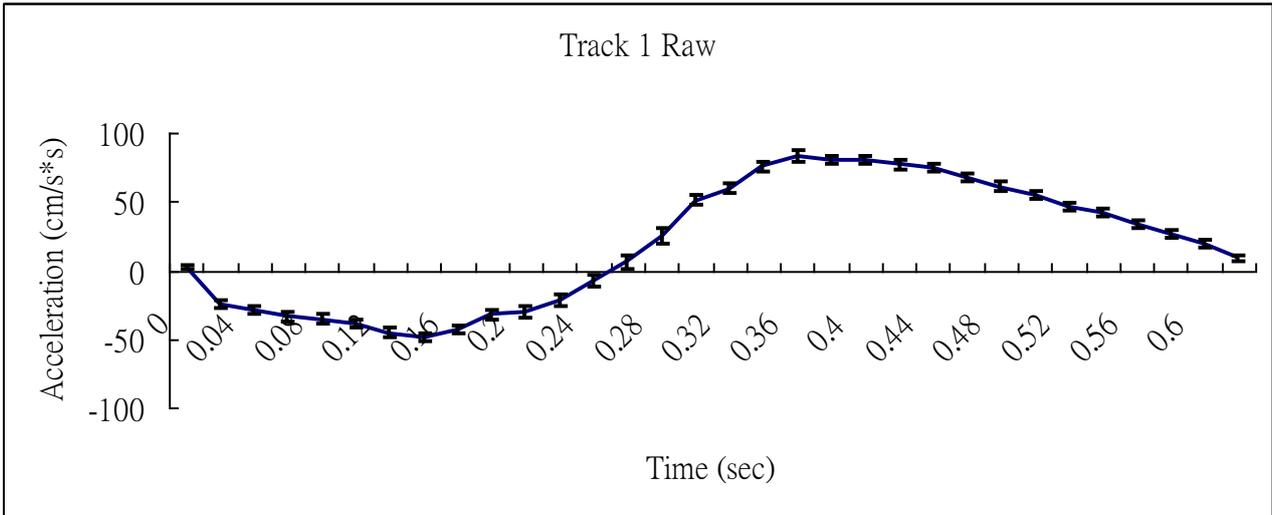
3. 加速度校正

按實驗三之校正方法校正加速度值。

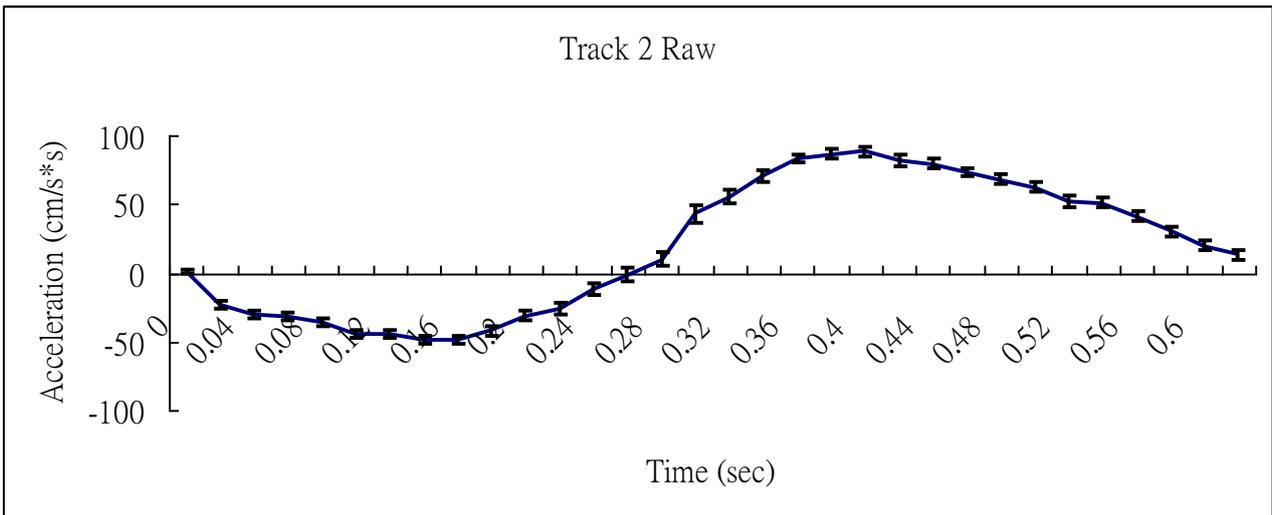
4. 轉向架的力學分析

(1). 傅立葉轉換

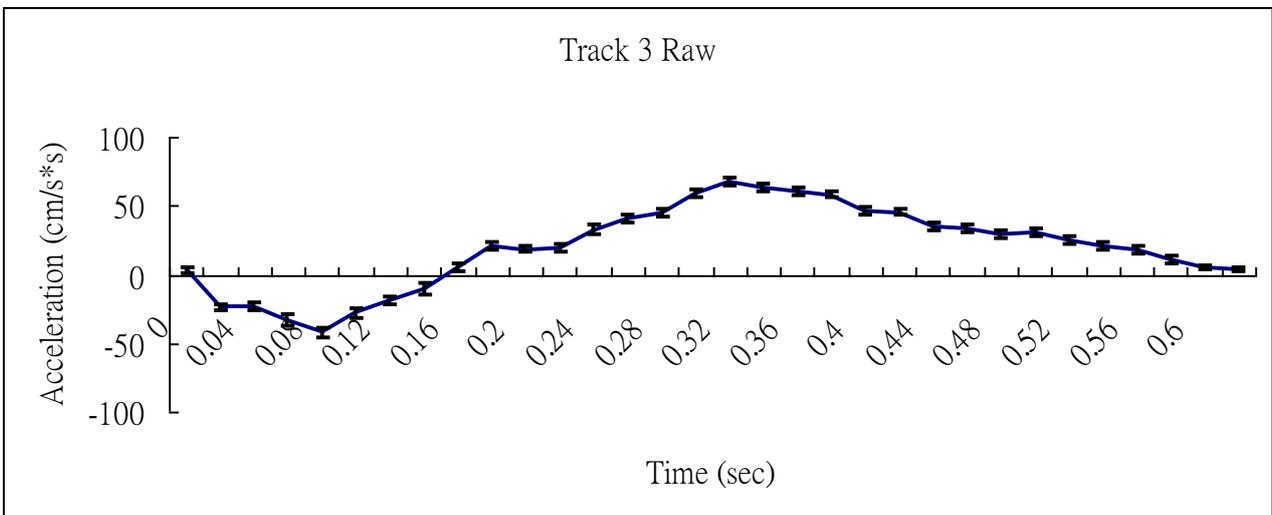
(下列圖十四之一~之四為各軌加速度測量值之平均值及標準差)



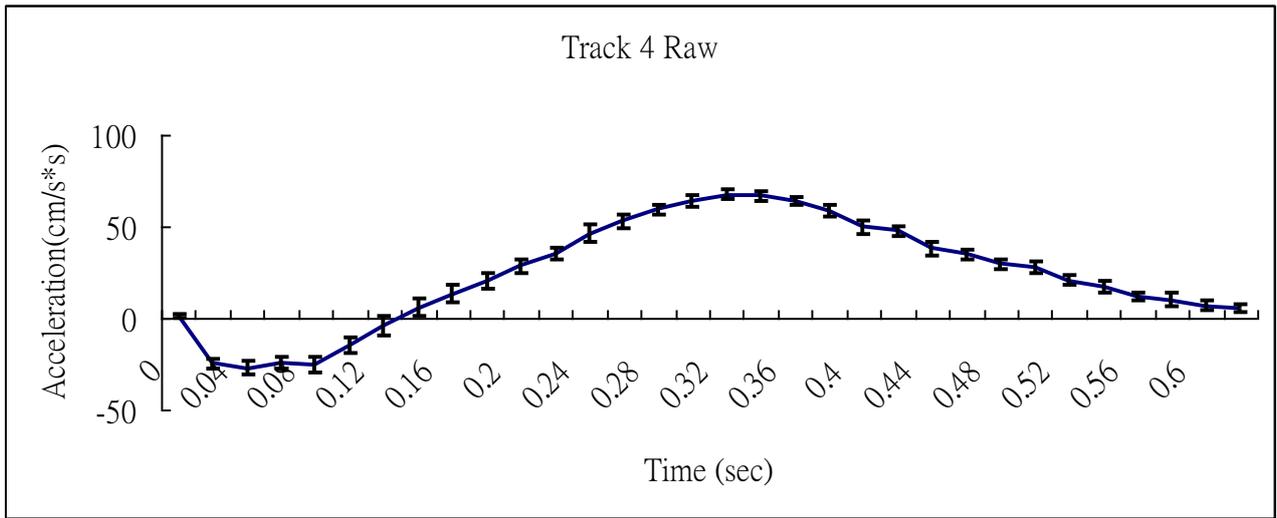
圖十四之一、軌號一加速度平均值和標準差 平均標準差: 3.3cm/s*s



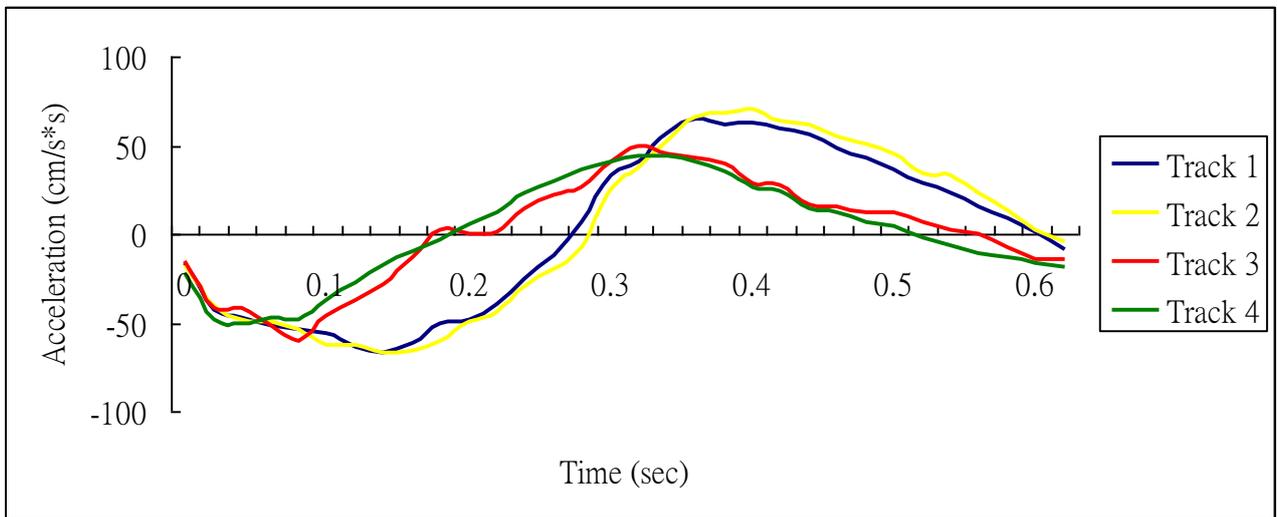
圖十四之二、軌號二加速度平均值和標準差 平均標準差: 3.6cm/s*s



圖十四之三、軌號三加速度平均值和標準差 平均標準差: 2.8cm/s*s



圖十四之四、軌號四加速度平均值和標準差 平均標準差:3.3cm/s*s



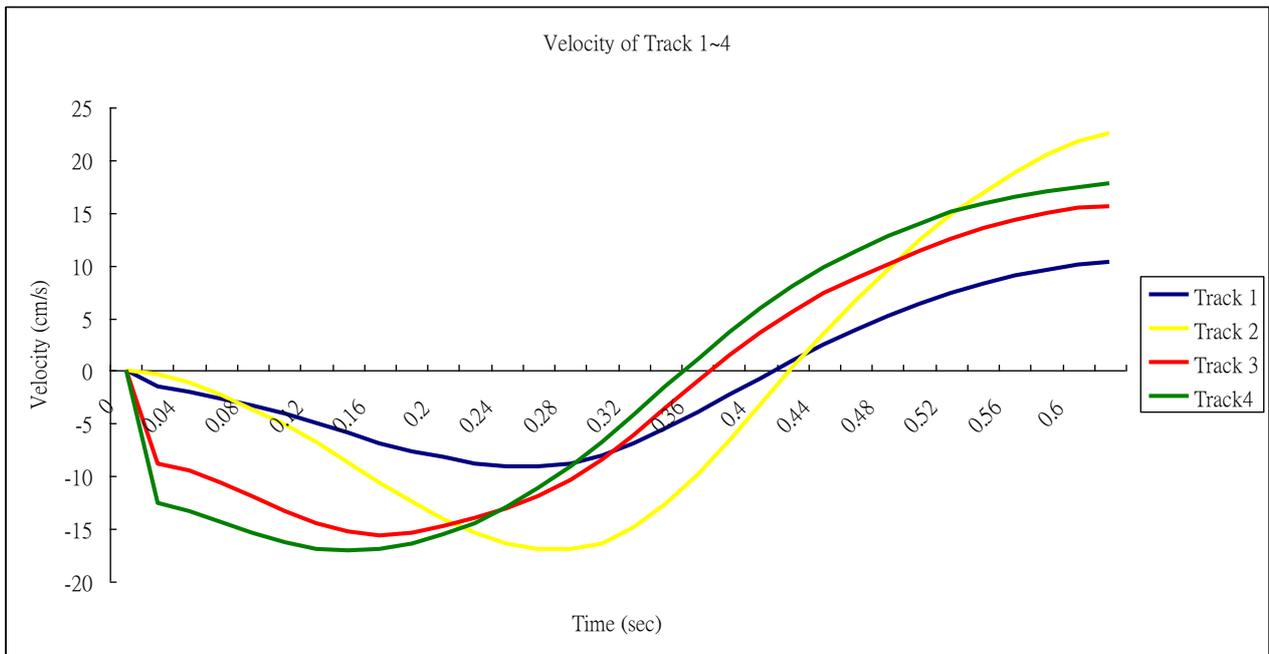
圖十五、原始資料 a-t 圖(32 個資料點)

(二)、以數值積分求初速度與初位移的結果：

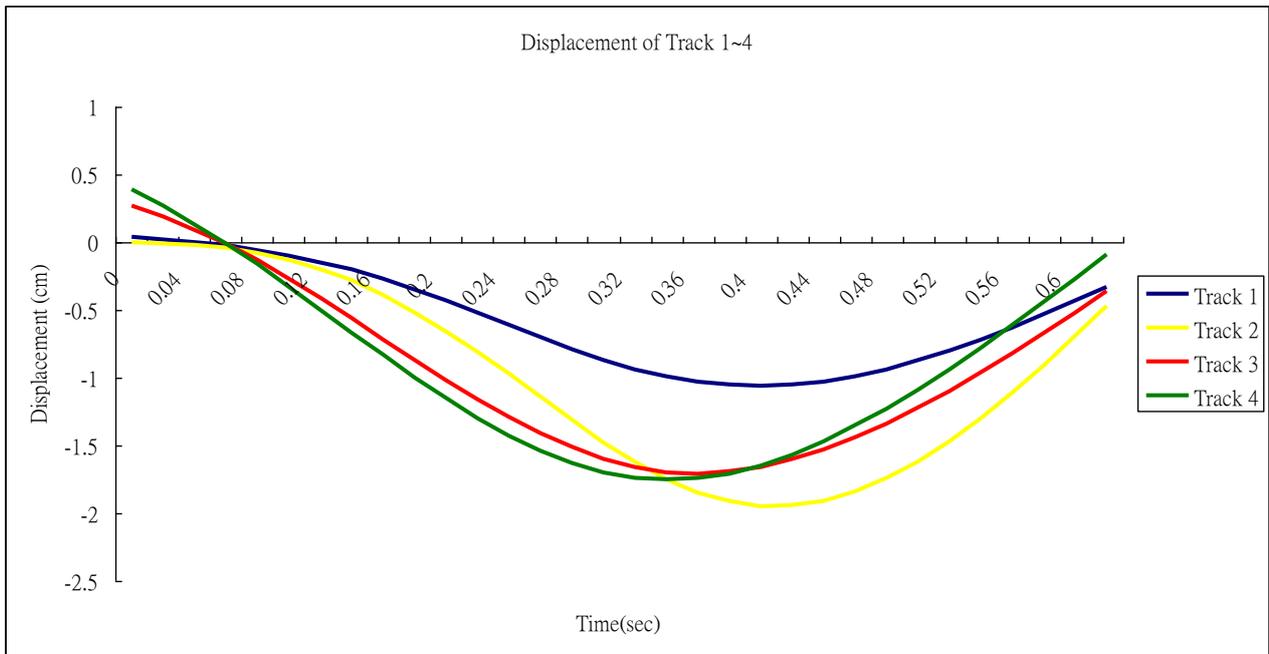
	軌號一	軌號二	軌號三	軌號四
初速度(cm/s)	-0.62	0.08	-4.31	-6.18
初位移 cm	0.02	0.00	0.14	0.20

表二

以上述資料所得的位移-時間與速度-時間圖：

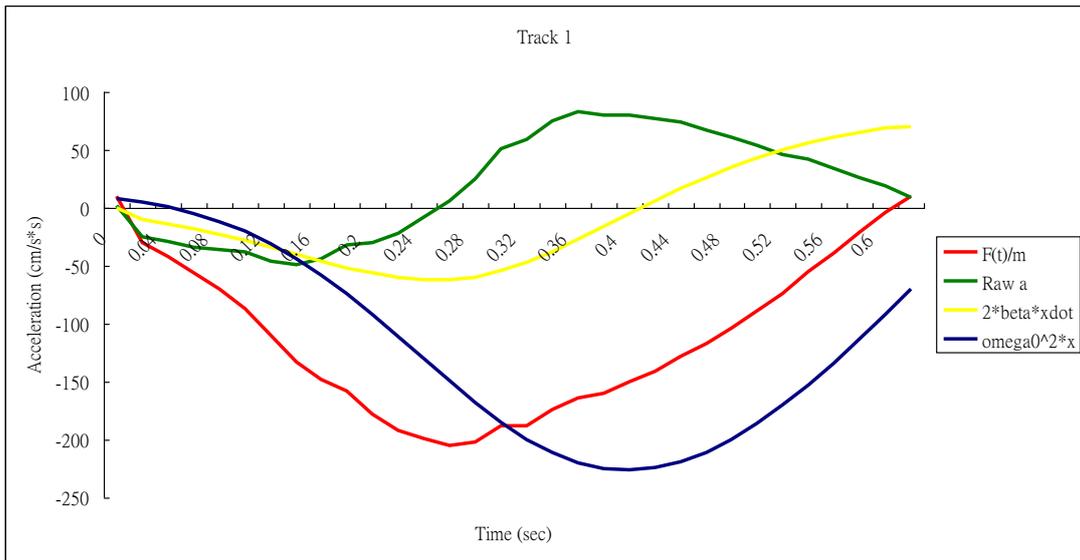


圖十六、速度-時間圖

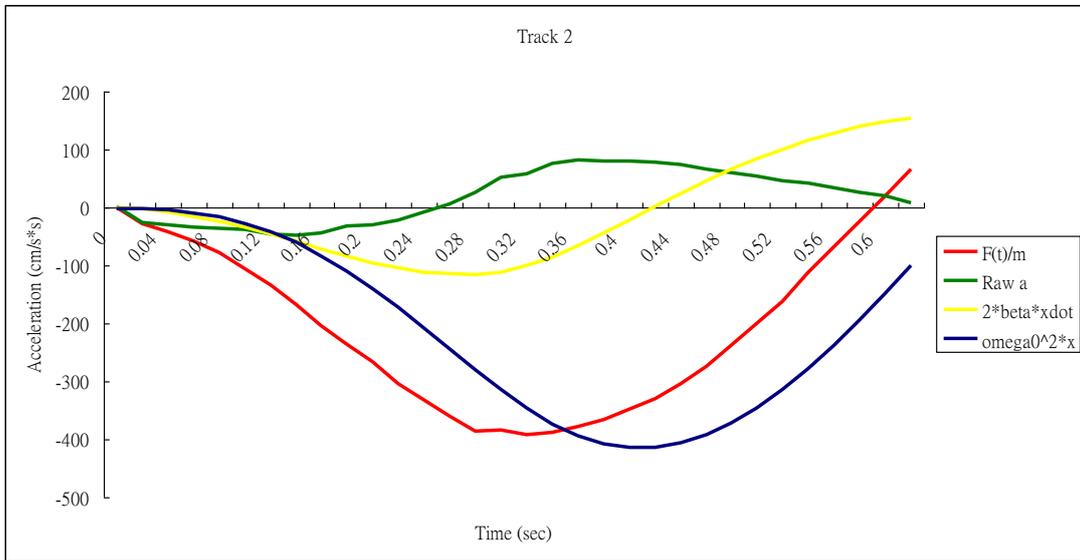


圖十七、位移-時間圖

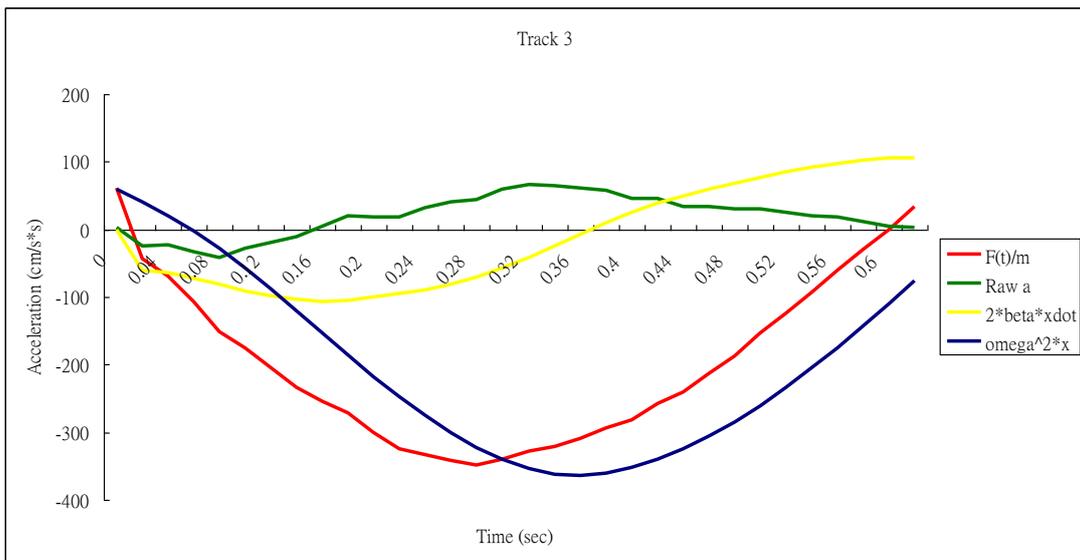
根據上述資料所得的 $-2\beta\dot{x}, f(t)/m, -\omega_0^2 x$ 及原始資料的對時間圖：



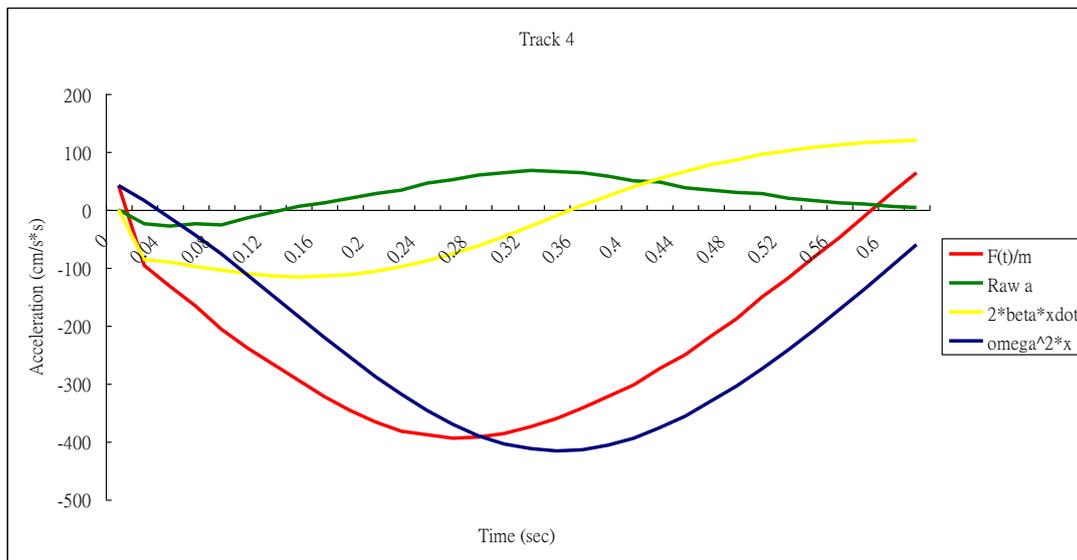
圖十八、一號軌



圖十九、二號軌



圖二十、三號軌



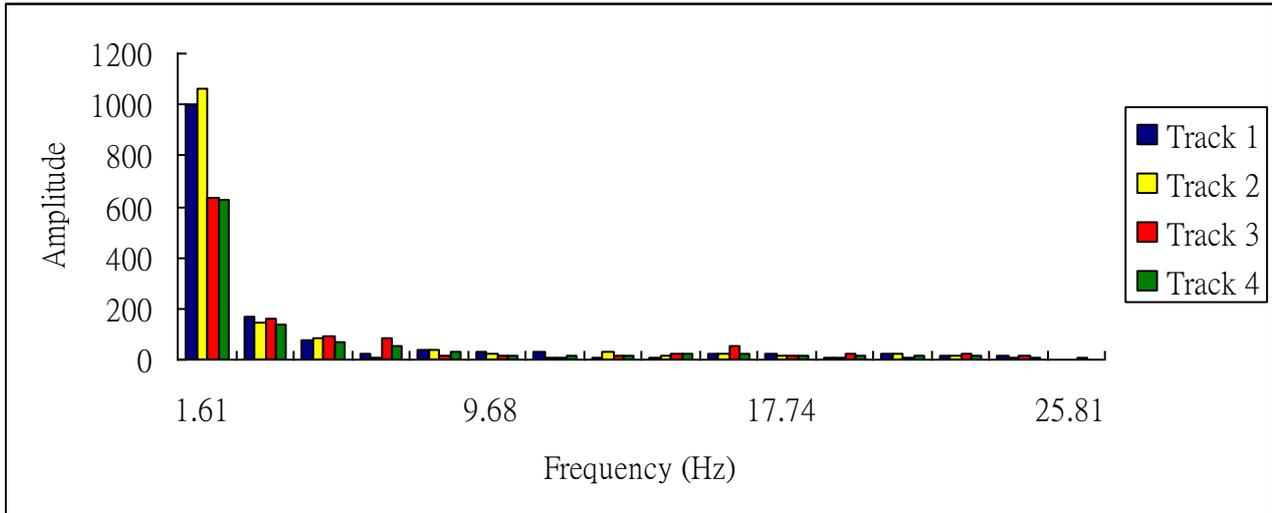
圖二十一、四號軌

根據相同資料將各軌的 $f(t)/m$ 以傅立葉級數展開的係數 $l=1\sim 15$ ：

l :	一號軌	二號軌	三號軌	四號軌
1	90.56	196.79	164.22	194.22
2	15.18	18.96	31.84	43.20
3	6.82	16.57	17.05	22.75
4	3.16	7.80	10.77	13.57
5	3.14	8.12	6.35	8.98
6	3.13	5.46	5.82	5.23
7	2.38	4.33	4.89	3.23
8	0.71	4.73	4.02	3.38
9	0.67	3.69	3.42	3.88
10	1.87	3.56	5.38	4.57
11	1.36	2.11	3.87	6.15
12	0.56	3.37	3.94	6.52
13	1.34	1.09	3.25	7.66
14	0.82	3.35	3.85	8.08
15	0.87	2.15	3.63	8.59

表三、根據相同資料將各軌的 $f(t)/m$ 以傅立葉級數展開的係數 $l=1\sim 15$ ：

(三)、用傅立葉級數展開求驅動力的結果：



圖二十二、原始資料經傅立葉轉換後的頻譜圖

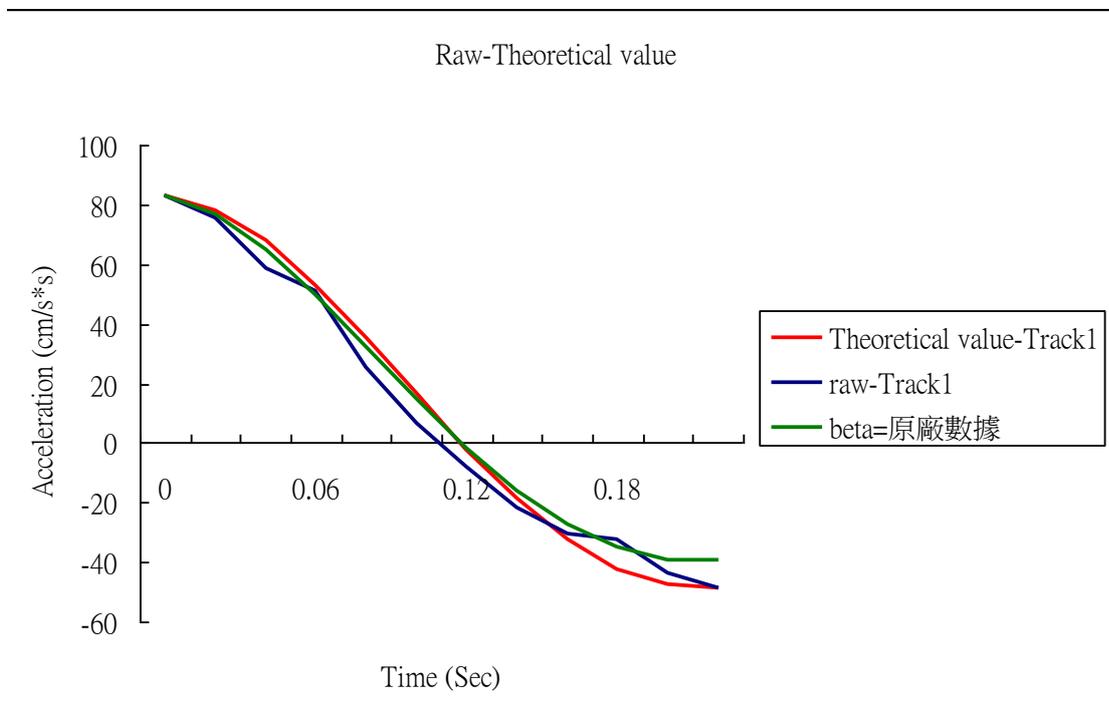
l :	單位: cm/s*s	單位: cm/s*s	單位: cm/s*s	單位: cm/s*s	$\sqrt{(- a_l + \omega_0^2 A)^2 + 4\beta^2 l^2 \Omega^2 A^2}$ 一~四號軌			
	一號軌 a_l	二號軌 a_l	三號軌 a_l	四號軌 a_l				
1	-62.19	-66.83	-40.50	-39.68	464.15	498.81	301.79	296.17
2	-10.31	-9.36	-11.05	-9.29	71.80	65.21	76.95	64.73
3	-4.49	-5.68	-6.65	-5.08	31.05	39.22	45.98	34.95
4	-1.22	-1.09	-6.51	-3.93	8.42	7.54	44.85	27.13
5	-2.15	-2.65	-2.07	-2.68	14.78	18.22	14.23	18.46
6	-1.95	-1.97	-1.80	-1.54	13.40	13.59	12.39	10.57
7	-1.74	-0.94	-1.57	-1.73	11.97	6.44	10.77	11.91
8	-0.34	-2.00	-1.82	-1.30	2.36	13.74	12.54	8.97
9	-0.37	-1.23	-2.34	-1.89	2.56	8.45	16.09	13.00
10	-1.38	-2.03	-4.19	-2.04	9.45	13.40	28.82	13.99
11	-1.51	-1.50	-2.01	-1.48	10.38	10.31	13.79	10.15
12	-0.25	-1.16	-2.24	-1.65	1.69	7.99	15.37	11.36
13	-1.51	-2.03	-1.61	-1.35	10.35	13.94	11.06	9.29
14	-0.81	-1.56	-2.45	-1.66	5.58	10.69	16.86	11.41
15	-1.09	-1.11	-2.13	-1.32	7.52	7.65	14.62	9.05

表四-1、一~四號軌所有 a_l 值及對應 l 的 $\sqrt{(-|a_l| + \omega_0^2 A)^2 + 4\beta^2 l^2 \Omega^2 A^2}$, $\beta = 3.4$, $\Omega = 10.13$, $\omega_0 = 14.6$ 。

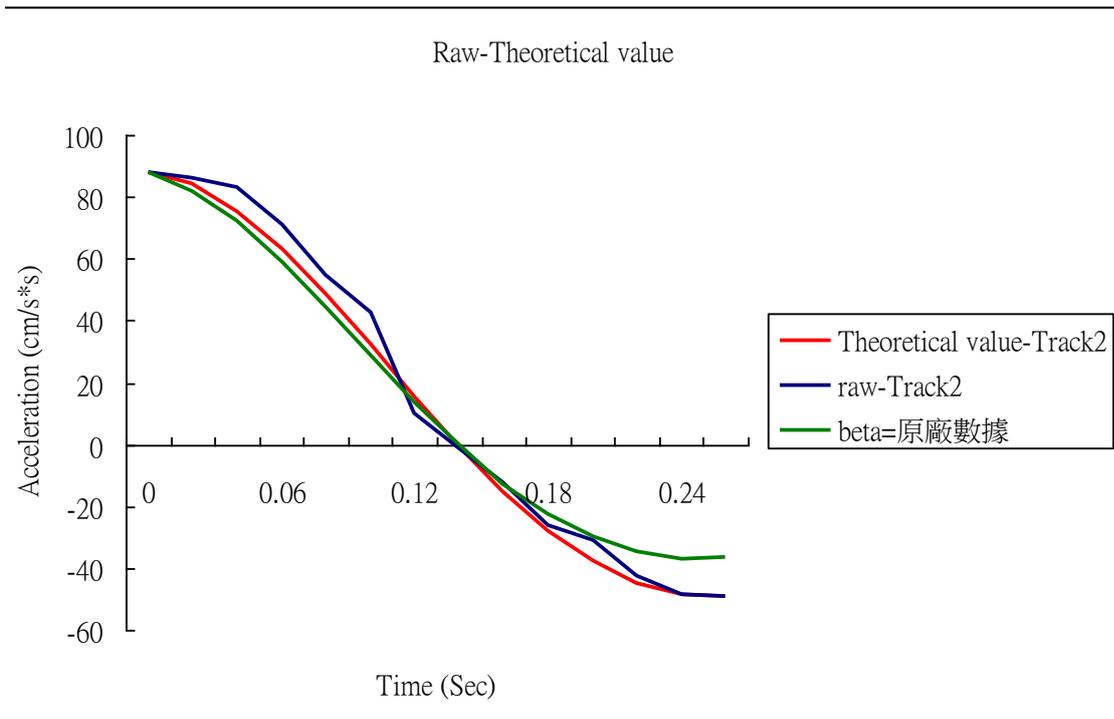
	f_l / m 單位：cm/s*s			
l :	一號軌：	二號軌：	三號軌：	四號軌：
1	-526.34	-565.64	-342.29	-335.85
2	-82.11	-74.57	-87.99	-74.02
3	-35.54	-44.90	-52.63	-40.00
4	-9.65	-8.64	-51.35	-31.06
5	-16.92	-20.87	-16.29	-21.14
6	-15.35	-15.56	-14.19	-12.11
7	-13.71	-7.38	-12.33	-13.64
8	-2.70	-15.74	-14.36	-10.27
9	-2.93	-9.67	-18.43	-14.90
10	-10.83	-16.02	-33.01	-16.03
11	-11.88	-11.81	-15.80	-11.63
12	-1.94	-9.15	-17.61	-13.02
13	-11.85	-15.96	-12.66	-10.64
14	-6.39	-12.24	-19.32	-13.07
15	-8.62	-8.76	-16.75	-10.36

表四-2、各軌所對應 l 的 f_l / m 的值

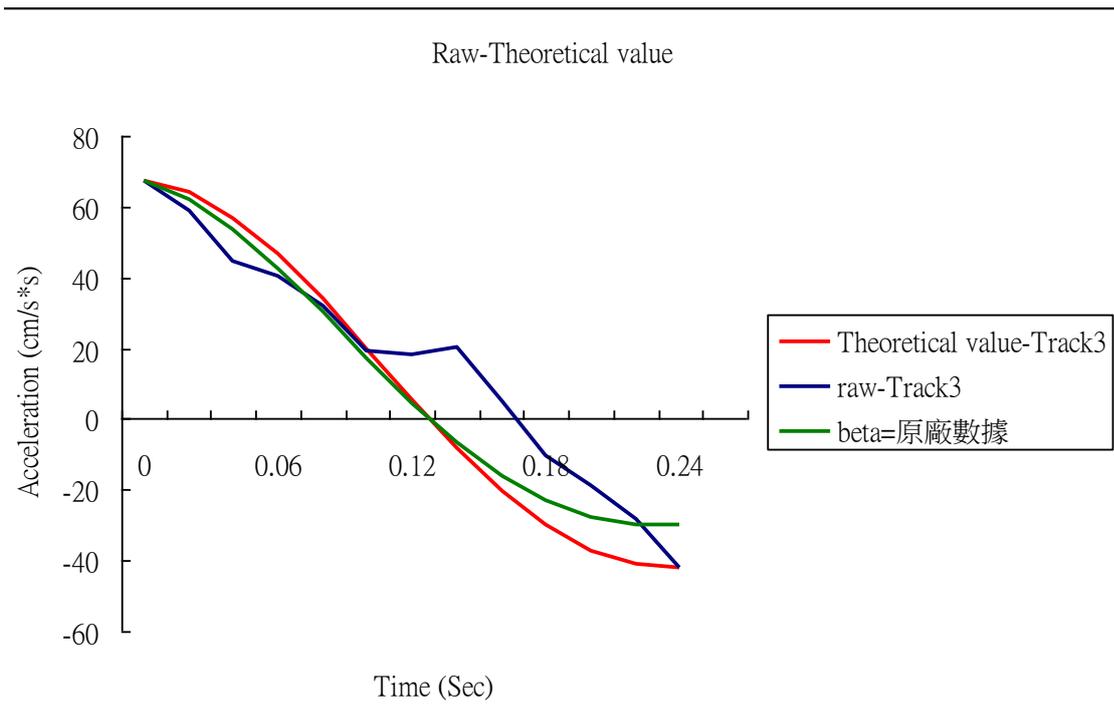
(五) 簡化運動方程式以得到阻尼參數的關係式：



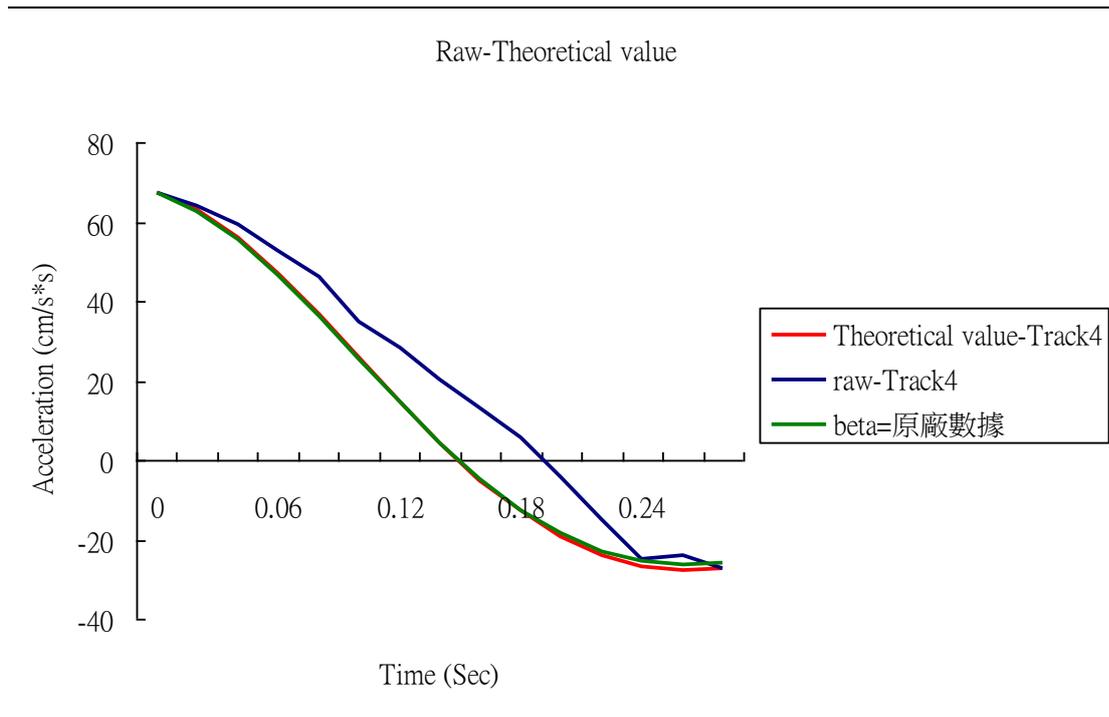
圖二十三之一、區域 II 理論值和測量值



圖二十三之二、區域 II 二號軌的理論值和測量值



圖二十三之三、區域 II 三號軌的理論值和測量值



圖二十三之四、區域 II 四號軌的理論值和測量值

陸、討論

1. 格林函數的位移圖與實驗數據的位移圖出入頗大，高速鐵路經過差異沉陷地區所產生的加速度變化，應用非線性振動理論來闡述。

2. 比較避震器的彈力位能 $U_{\text{避}} = \frac{1}{2}kA^2$ ，與阻尼器的耗散函數 $\psi = \frac{1}{2}bx^2$ ，重力位能 $U_{\text{重}} = mgA$ 的數值(避震器彈立位能與重力位能的比為 27：400，阻尼器與重力位能的比為 1：10)可以得知差異沉陷所造成的重力位能為主要的影響項，其他二項為微擾項，而重力位能會隨列車經過差異沉陷地區產生變化。因此在非線性振動理論中主要振動角頻率是用鋼軌的角頻率，而非一般用減震器的角頻率，所以非線性項的來源是鋼軌。

3. 由 KBM 非線性振動理論中，只要驅動力的角頻率與振動的角頻率約略成簡單的互質整數關係，即會產生共振，不一定角頻率要相等，在本研究中，恰好產生了互質的整數比，因此有可能產生共振現象。

4. 由 KBM 非線性共振振動理論所得到的振幅函數 A 與相位差函數 θ ，所滿足的一級近似方程中可看出，非線性項只會出現在角頻率的變化中，不會出現在振幅的變化中。振幅的變化除了因阻尼會造成衰減外，驅動力亦會造成其增加或減少。

5. 從振幅與阻尼參數的關係式中，從一、二軌的資料可以得知振幅函數 A 的驅動力項大約是 $-1/3\beta A$ 。而從三、四軌的資料中則可以得知相位差接近零。

6.當振動達到穩定狀態時： $\dot{A} = 0$ 且 $\dot{\theta} = 0$

振幅特性為：

$$A^2 \left[\left(\frac{9\varepsilon\Delta}{4} + \frac{27\alpha_2}{16} A^2 \right)^2 + \beta^2 \omega_0^2 \right] = \left(\frac{9F_0}{5\pi m} \right)^2$$

並可解出：

$$\Delta\Omega = \frac{1}{3} \left(\lambda A^2 \pm \sqrt{\left(\frac{9F_0}{5\pi m \Omega A} \right)^2 - \frac{9}{4} \beta^2} \right)$$

式中

$$\lambda = \frac{27\alpha_2}{16\Omega}$$

7.若沉陷越嚴重，則振動方程的非線性項就更明顯，所以角頻率的變化也就愈明顯。

柒、結論

在力學的研究中，共振會使振幅產生變化，這是一個非常需要注意的事情。而高鐵在經過不穩定地區時，加速度的大小異於一般地區，如果這個現象是因為在某些特定的條件(不穩定地區的長度、當時的車速、避震器的振盪頻率和因不穩定地區的長度與車速產生的一個頻率)發生所產生的共振，使得加速度的振幅產生變化，而因為振幅的過度變化會使得高速鐵路列車行駛的危險性升高，那就要避免共振的情形發生。

將在不穩定地區測得的實驗數據在 **KBM** 非線性振動理論得到的結果可以知道，在任意的不穩定地區長度 L ，當車速 $v = \omega_0 L / 2\pi$ 時，不穩定地區與車速產生的頻率與避震器頻率相同，有可能會發生主共振，當長度 L 為固定值時，若車速為主共振車速的一半時，則可能會產生超諧共振。

一般普遍認為，高速鐵路的行車安全只與沉陷值有關，但本研究發現行車安全除了與沉陷值有關外，更與沉陷的範圍以及當下的車速有關，所以，如果在已經有沉陷較嚴重的地區，共振現象就有可能成為壓垮駱駝的最後一根稻草，吾人不可不慎。

捌、參考資料及其他

[1] <http://www.iris.edu/>

[2] <http://www.iris.edu/hq/NSFProposal/Volume2/EO.pdf>

[3] Quake Catcher Network Live : <http://qcn.stanford.edu/>

[4] G-sensor 重力感測器的技術原理 : http://irisintw.blogspot.com/2010/05/g-sensor_8424.html

[5] Using an Accelerometer for Inclination Sensing :

http://www.analog.com/static/imported-files/application_notes/AN-1057.pdf

[6] 中央氣象局(地震百問) : <http://www.cwb.gov.tw/>

[7] 徐家鸞 (1986) 經典力學 台北市：正中書局

【評語】 040104

本作品分析高鐵列車行駛時之垂直方向加速度可能的共振現象，作品中數學分析方法甚佳，唯若能釐清整個物理圖像，則為更佳。