

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 物理科

040102

跳躍的蛋蛋--液體置入彈力球對彈跳關係之探討

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 張程堯 高二 邱能群 高二 黃揚哲	指導老師： 盧政良 許程迪
---	-----------------------------

關鍵詞：彈跳、能量、液體噴濺

摘要

我們藉由高速射影機觀察水在彈力球內受撞擊的運動情況，探討不同的情況下對彈跳高度比的影響。在不同落下高度方面，我們發現彈跳高度比不受初始落下高度影響。而在不同體積填充比方面，我們發現第二次彈跳高度比，與體積填充比成二次函數的關係，且極值發生在體積填充比為 50% 時。我們進一步從能量的觀點探討實驗結果，發現第一次彈跳後的能量損失正比於總質量承上初始落下高度，第二次彈跳所產生的能量損失，視為液體量與剩餘空間的競爭。比較往後的彈跳與液體體積填充比的關係，並再次從能量觀點探討之。我們發現，可以就由研究二、三的遞迴關係式推導出往後彈跳能量損失的關係。我們再次從能量觀點，解釋水運動情形如何與研究所得的關係式呼應。

壹、研究動機

「球落地，一個彈跳，出去了！像變了心的女朋友一樣，回不來了！這是帶有打點的一支場地二壘安打！」還記得那個晚上，坐在電視機前面的我，目不轉睛地為中華隊加油，那時戰況膠著，雙方比分十分接近，直到比賽尾聲的一顆再見安打突破了僵局！那時打者將球狠狠擊出，只見球落地，經過一個彈跳便充滿生命力地跳出了全壘打牆外，頓時全場觀眾歡聲雷動！不過興奮之餘，我的思考便停留在那顆球的彈跳，想著：球到底是如何墜落、再高高彈起？如果是一顆空心的球，跳得會不會更高、更遠？如果再加入水呢？水的多寡會不會突破高度的極限，達到前所未見的境界……？於是，在一次偶然的機會下，那股悸動躍然腦中，我便決定開始進行一連串的實驗更深入探討球與水彈跳的關係。

貳、研究目的

- 研究一、探討彈力球內液體水的運動情形
- 研究二、不同落下高度對彈跳高度的影響
- 研究三、不同體積填充百分比對彈跳高度的影響
- 研究四、從能量觀點探討研究二、三的實驗結果
- 研究五、比較第一次、第二次、第三次以及往後的彈跳結果
- 研究六、再次從能量觀點探討能量損失與液體水的運動的關係

參、研究設備及器材

彈力球	乒乓球	針筒
		
支架	漏斗	高速攝影機
		
熱熔槍	圖表軟體(Origin8)	分析軟體(Tracker)
		

肆、研究過程或方法

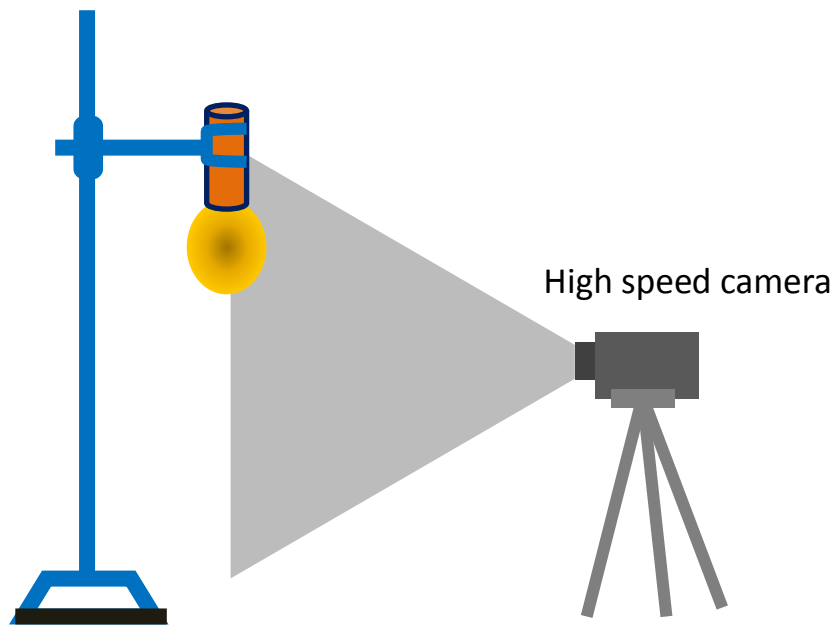
一、 彈力球

在我們的實驗中，我們將使用質量為 20 克，半徑 4.55 cm 的 Jumpball 進行實驗。Jumpball 是一種在國外以彈跳性著名的空心彈跳球，由於它的顏色為半透明，因此方便我們以高速攝影機觀察液體水的運動情形。



二、實驗裝置

(一)裝置示意圖



(二)裝置圖



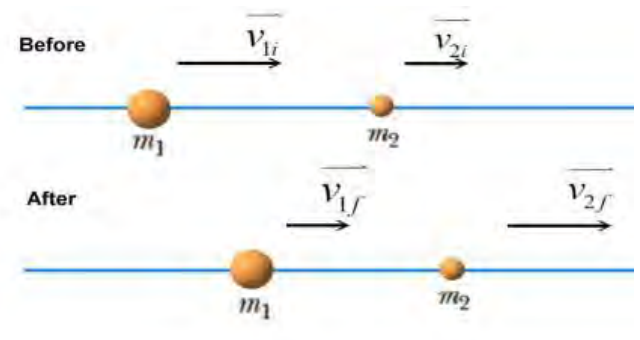
三、 實驗步驟

1. 利用針筒將液體注入彈力球中
2. 將球置於倒置的漏斗下方
3. 將針筒往上抽，使針筒的氣壓變小，藉由壓力差抵抗重力，撐住球
4. 緩緩推動針筒，使針筒的氣壓漸漸變大，使球恰可以以無初速的狀態下掉落
5. 球掉落並發生彈跳
6. 利用高速射影機記錄球與液體的運動過程
7. 以軟體Tracker分析其運動模式

四、 恢復係數(Coefficient of restitution, C_R)

(一)當兩物體 m_1, m_2 在一維空間做碰撞後，恢復係數定義為

$$C_R = \frac{\overline{v_{2f}} - \overline{v_{1f}}}{\overline{v_{1i}} - \overline{v_{2i}}}$$



(二) 對於一個物體 m_1 對另一個固定的物體（如：地板）作碰撞，此時恢復係數可改寫為

$$C_R = \frac{v}{u}$$

其中， v 是物體碰撞後的速率； u 是物體碰撞前的速率
也可以再寫成：（ h 是彈跳後高度； H 是釋放高度）

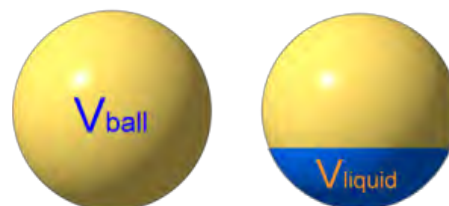
$$C_R = \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{v^2}{u^2}} = \sqrt{\frac{KE_{after}}{KE_{before}}} = \sqrt{\frac{mgh}{mgH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

五、 將使用的名詞

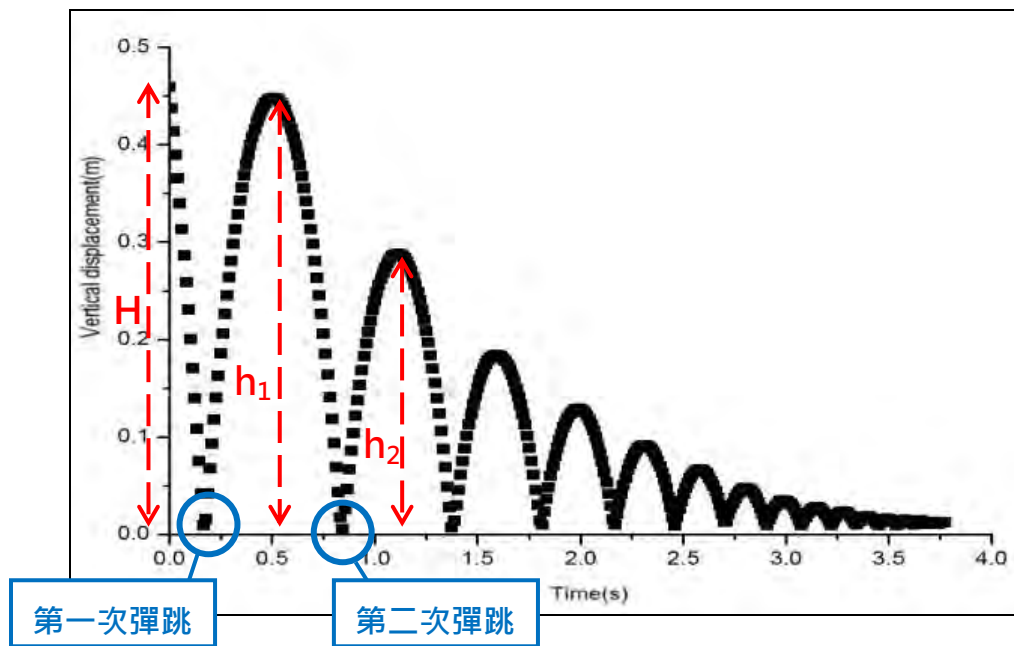
(一)體積比

球的體積 V_{ball} ，液體的體積 V_{liquid}

⇒ 液體體積填充比 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}}$



(二)高度比



伍、研究結果及討論

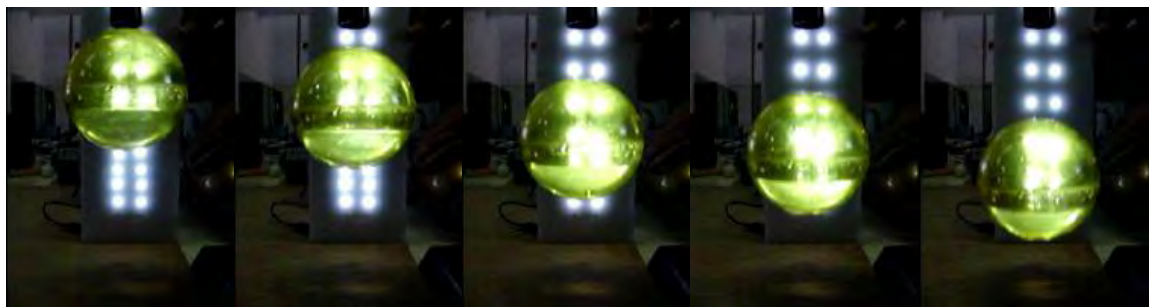
研究一、探討彈力球內液體水的運動情形

(一)以下我們透過高速攝影機(1000fps)所攝影後的截圖：

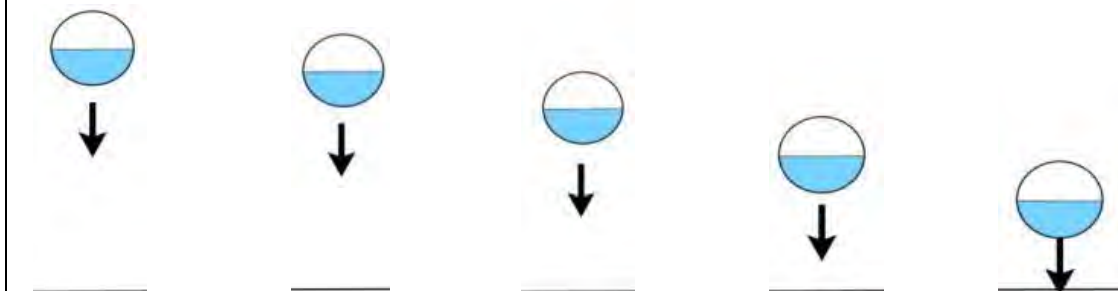
1.第一次彈跳

(1)落地前

1.高速截圖

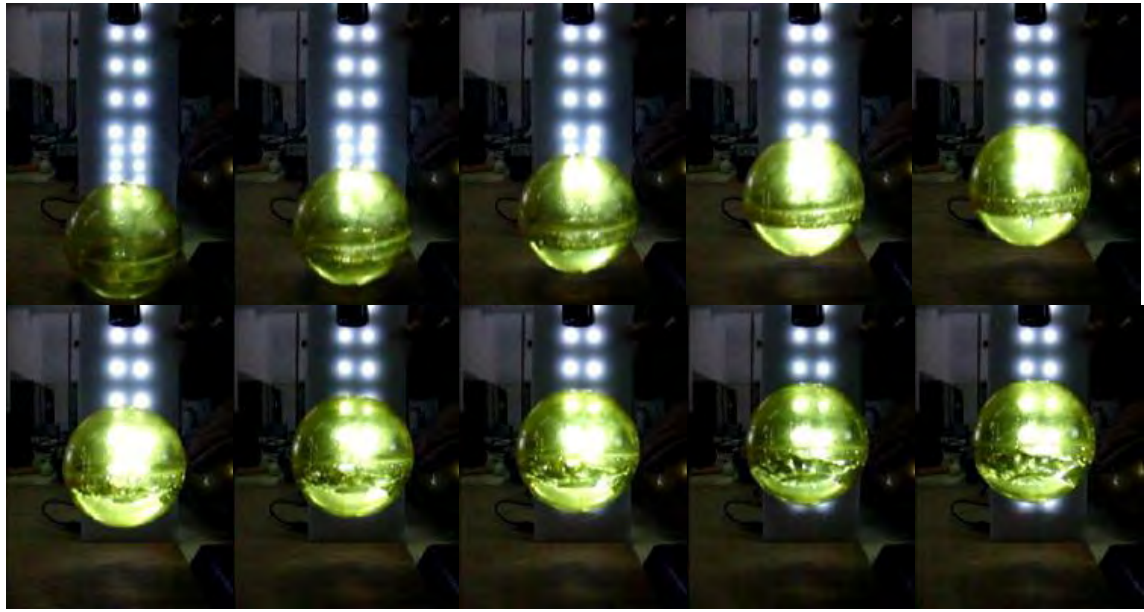


2.示意圖

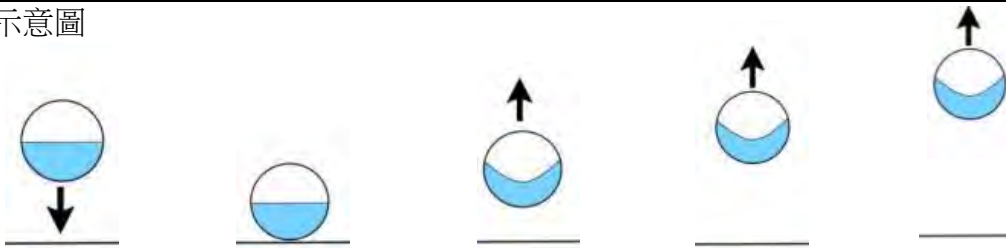


(2)彈跳

1.高速截圖



2.示意圖



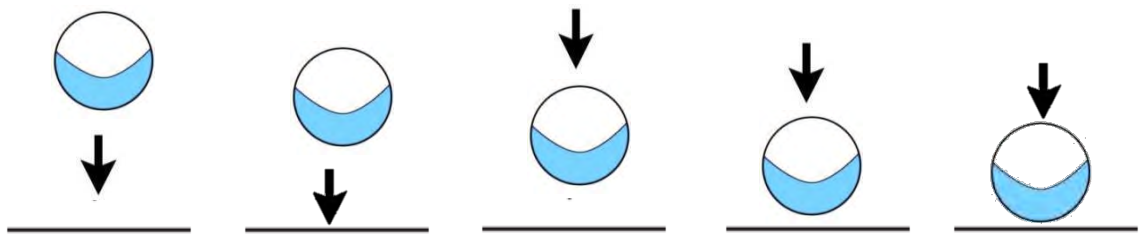
2.第二次彈跳

(1)落地前

1.高速截圖



2.示意圖

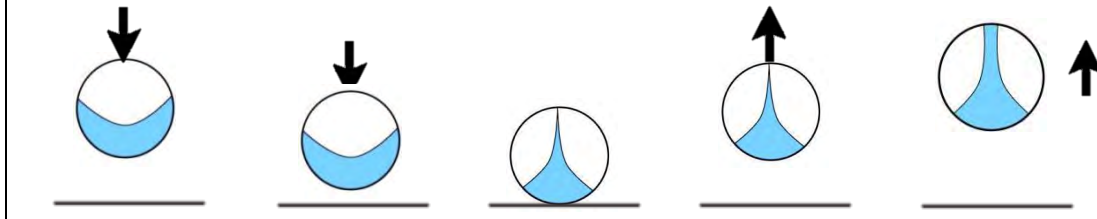


(2)彈跳

1.高速截圖

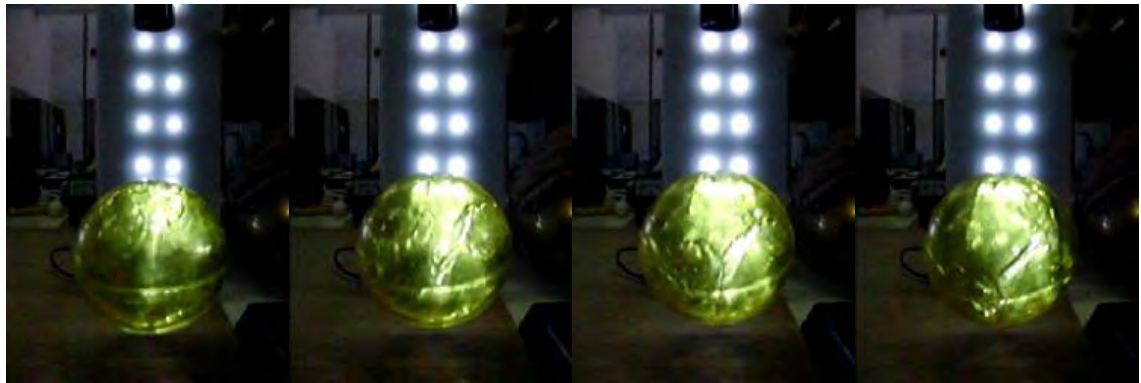


2.示意圖

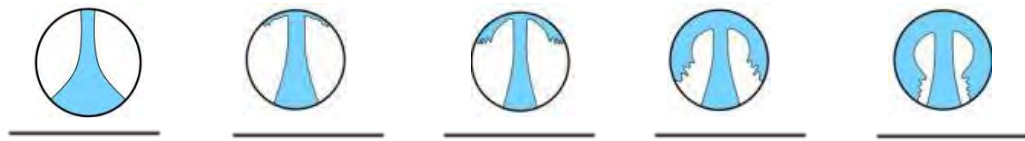


(3)彈跳後

1.高速截圖



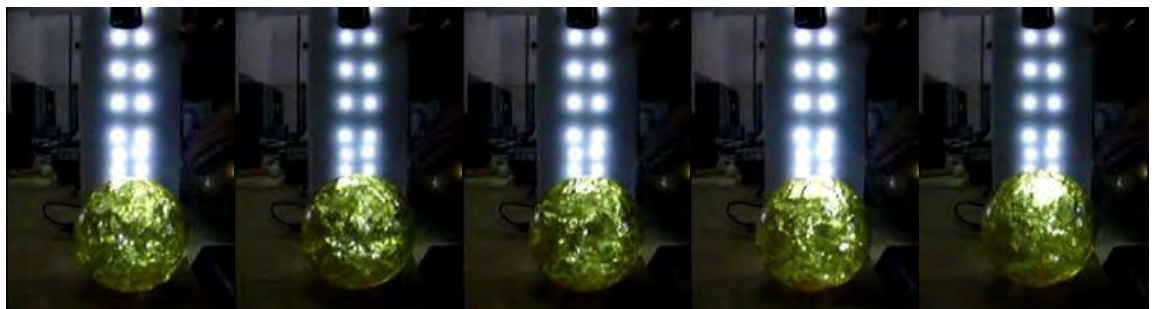
2.示意圖



3.第三次彈跳

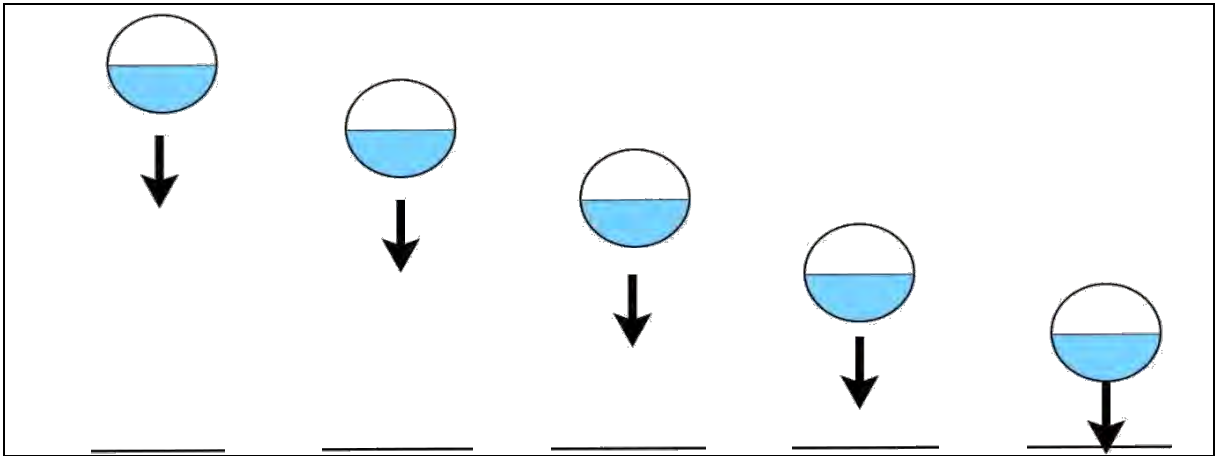
(1)彈跳

1.高速截圖



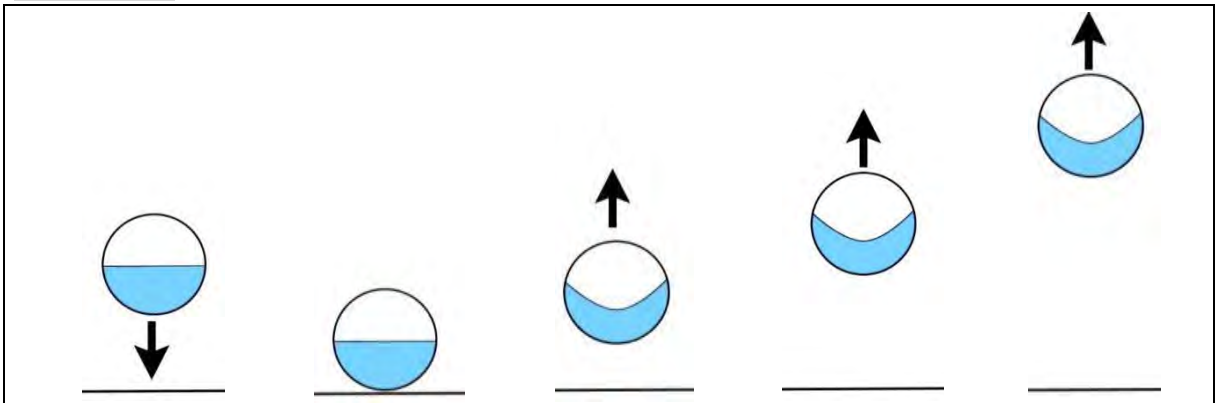
(二)討論

1.第一次彈跳落地前

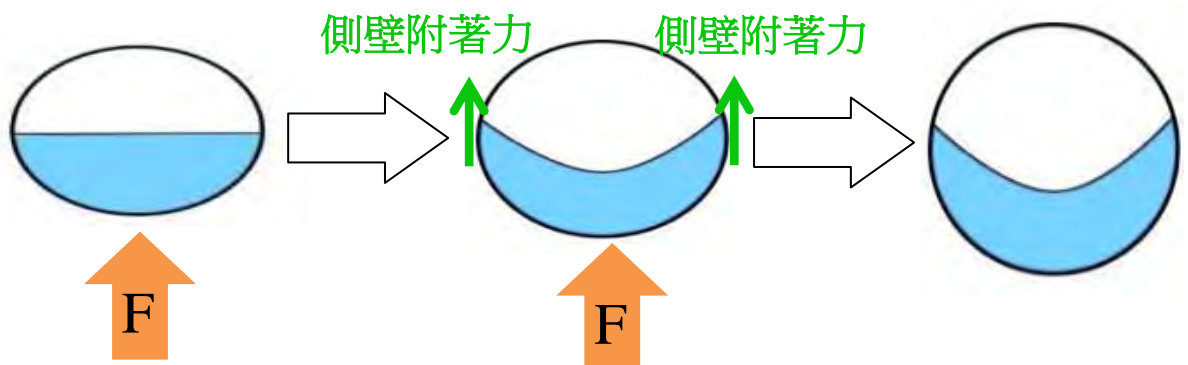


落地的初始狀況如圖，由於水與彈力球一同受到相同的重力加速度，所以落下時，相對位置保持不變，維持原先落下的樣子直到與地板產生碰撞

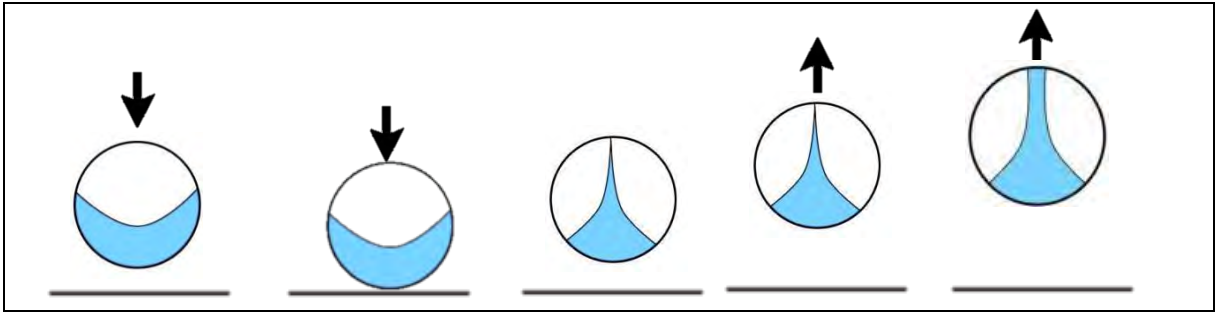
2.第一次彈跳



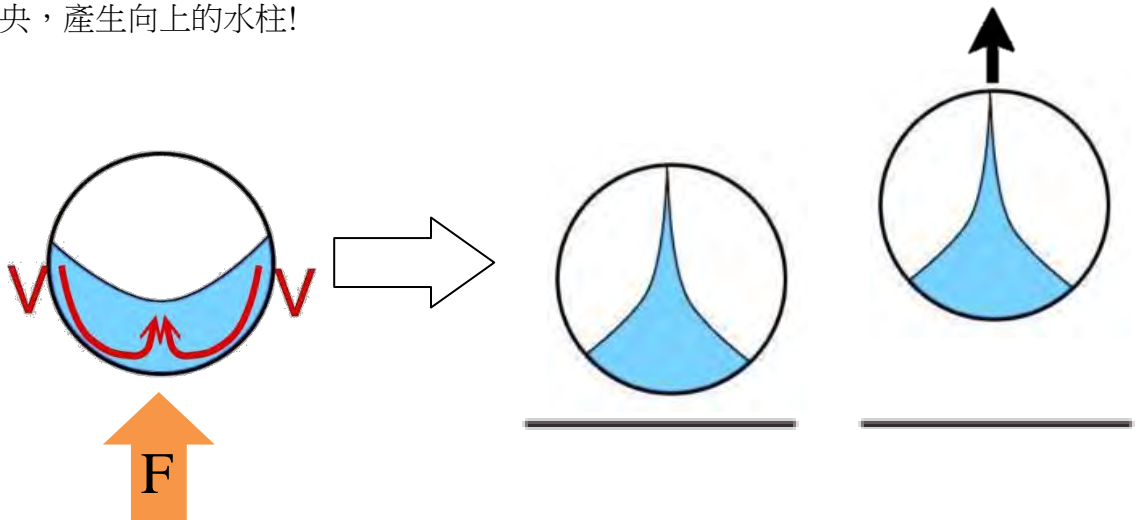
當衝擊力撞擊球體後，會間接傳遍整個液體，由於液體對於球的側壁有附著力，故當球形變後再恢復的時候，側壁的附著力會將側邊的液體向上提升，故形成類似碗狀的液體形狀。



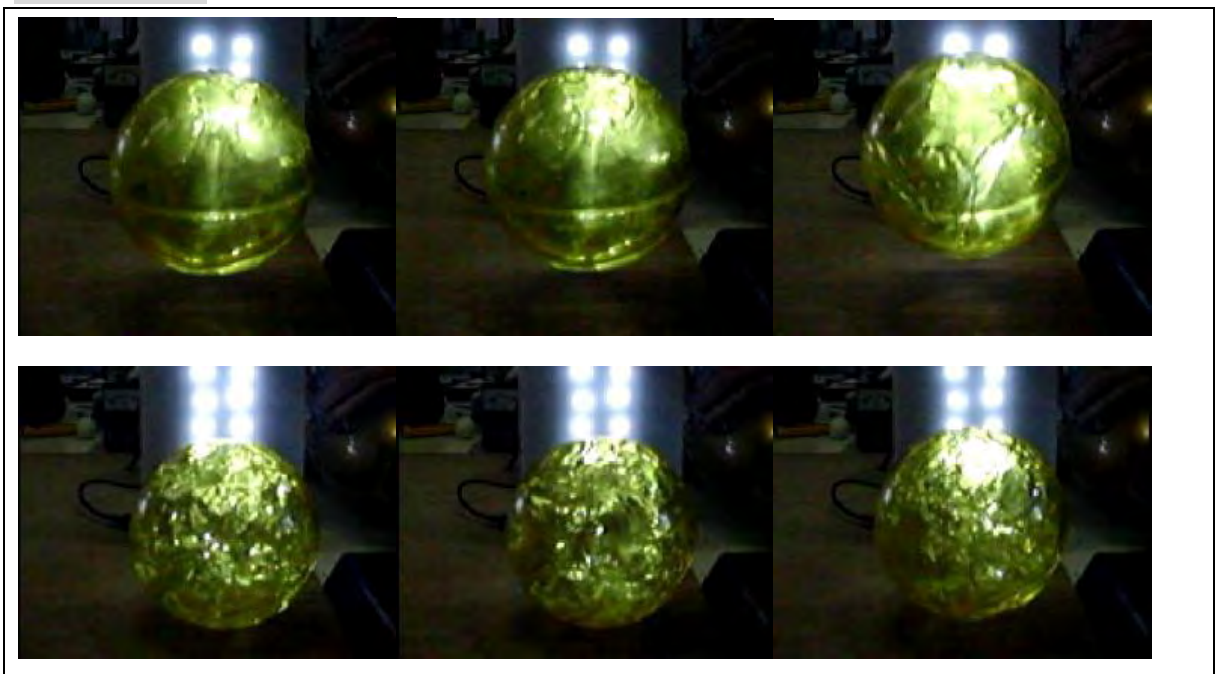
3.第二次彈跳



當衝擊力撞擊球體後，由於在碰撞中期，球體持續形變的同時，液體維持原有的運動，意即左右兩邊原先的噴濺處有速度存在，因此此時中間的液體傾向於受到衝擊力後，聚集於中央，產生向上的水柱！



4.第二次彈跳後



第二次彈跳後，向上衝的水柱產生，當水柱衝擊到球頂後，會噴散，此後的液體水的運動狀態呈現混亂(chaotic)

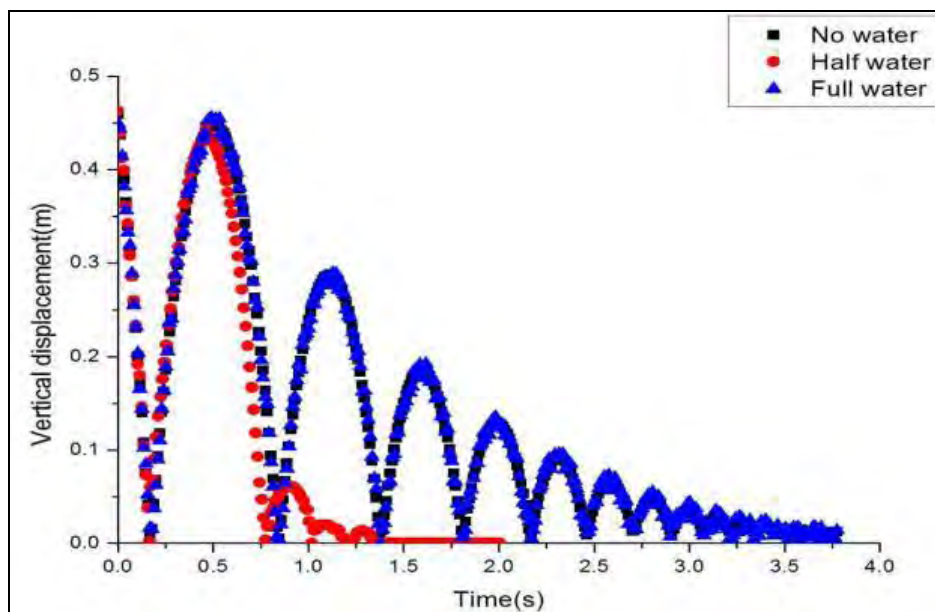
研究二、三：不同落下高度與不同體積填充百分比對彈跳高度的影響

我們針對不同落下高度，探討對於彈跳高度比的影響；以及不同液體體積填充比，對於彈跳高度比的影響。以高速攝影機記錄，並以軟體 Tracker 分析其運動情形，最後比較第一次彈跳與第二次彈跳的差異性。

(一) 實驗結果及關係圖

1. 軌跡圖

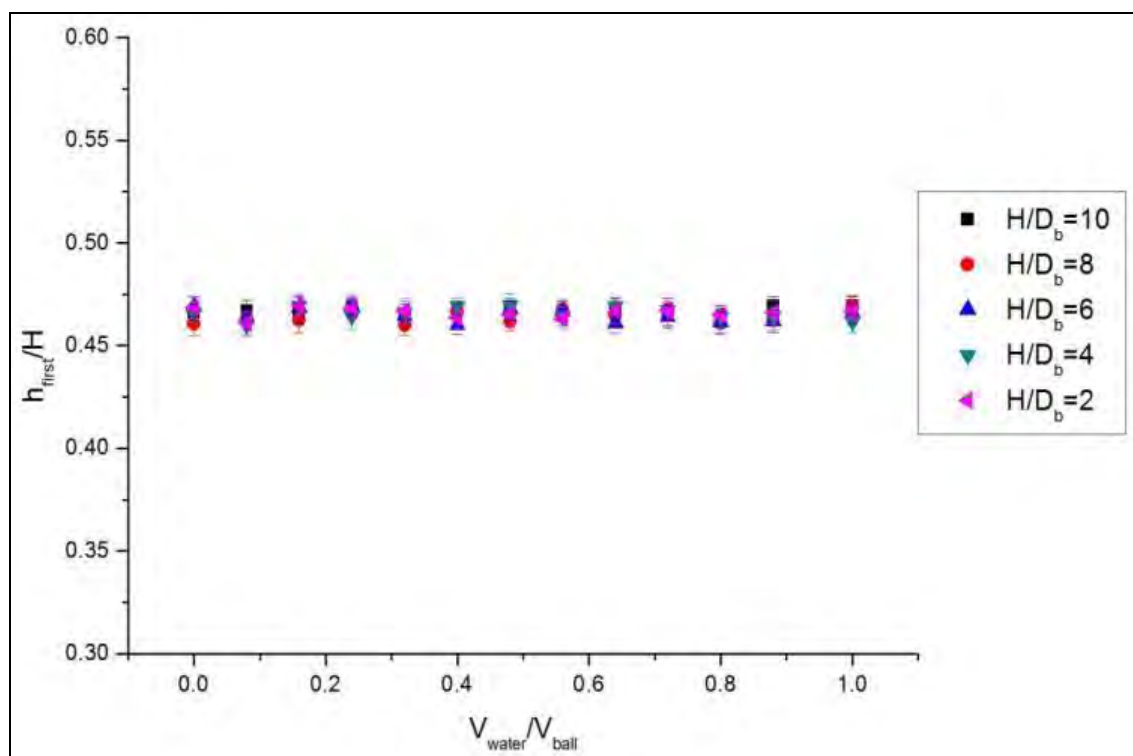
(1) 比較液體積填充比 0%，50%，100%的軌跡圖



(圖一)

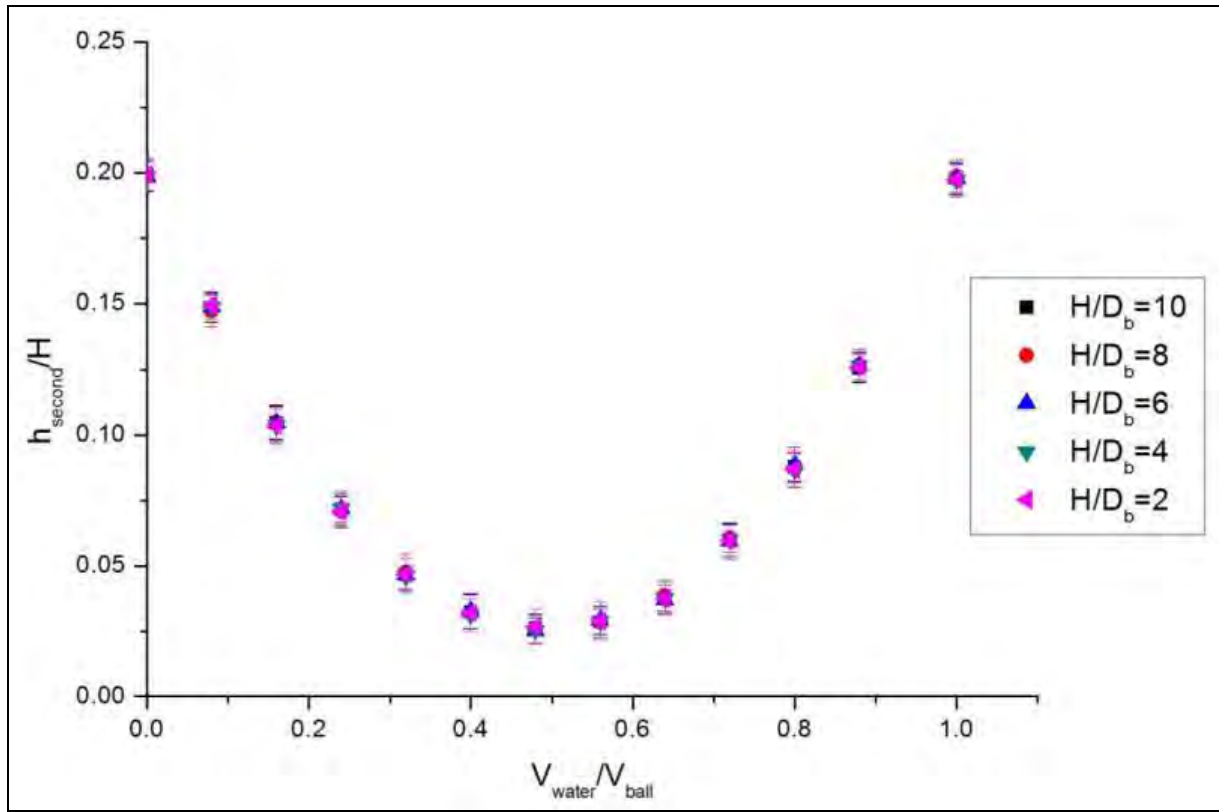
2. 數據圖

(1) 第一次彈跳

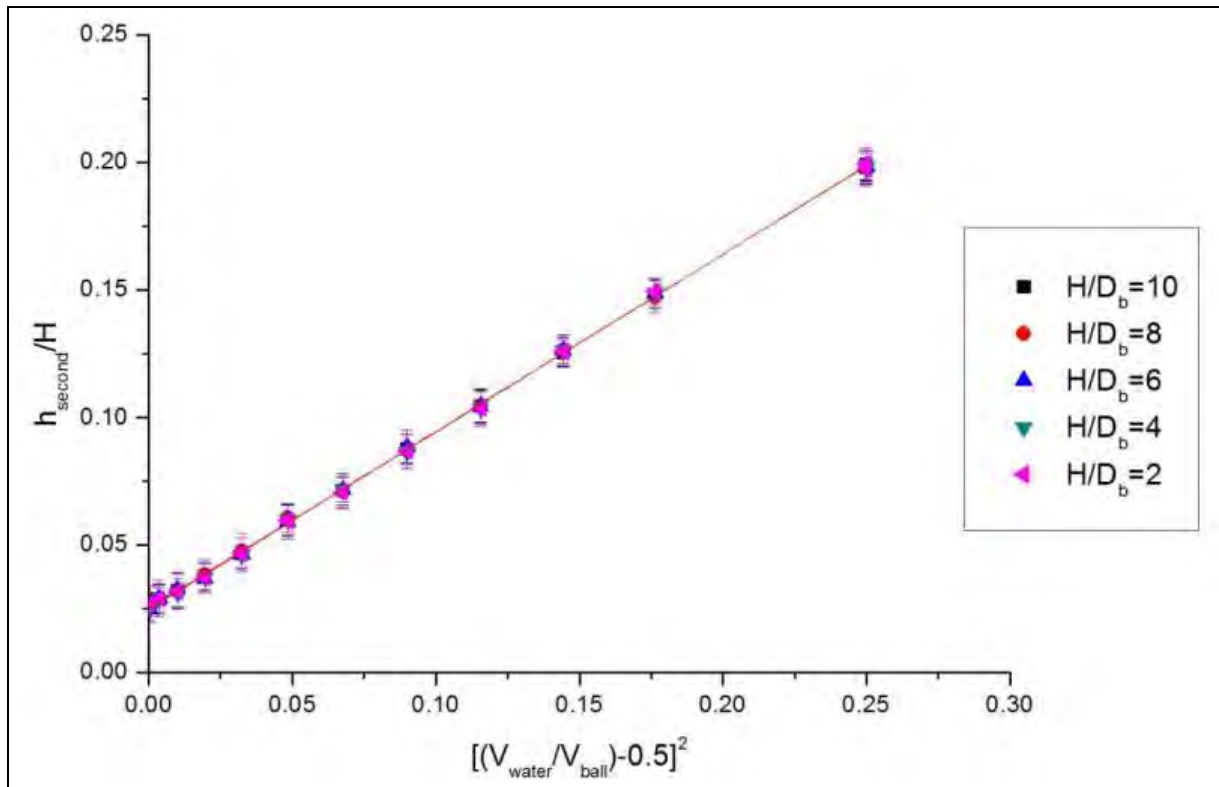


(圖二)

(2)第二次彈跳



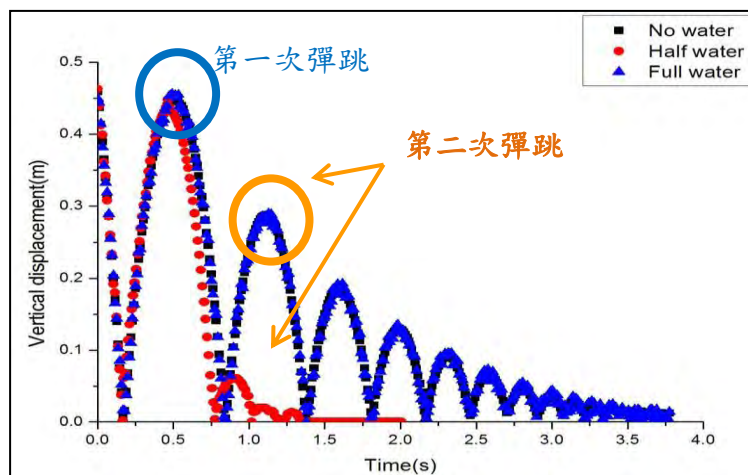
(圖三)



(圖四)

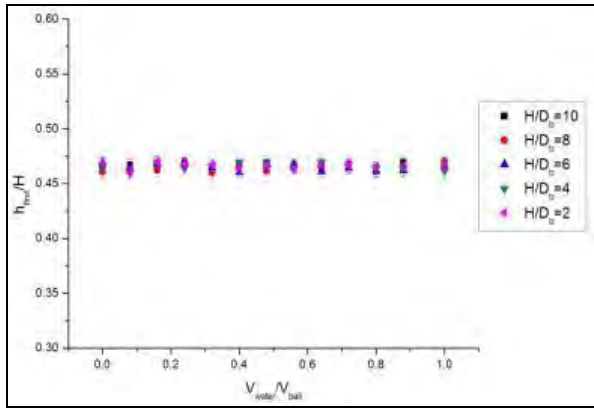
(二)討論：

1. 我們由軌跡圖(圖一)可以發現第一次彈跳後無論液體體積填充比，皆趨近於同樣高度，因此我們可以知道第一次彈跳不受到液體體積填充比的影響。然而在第二次彈跳，液體體積填充比為 50%和 0%、100%在彈跳高度方面有顯著的不同，另外，液體體積填充比 0%、100%在彈跳高度方面軌跡近乎相同。

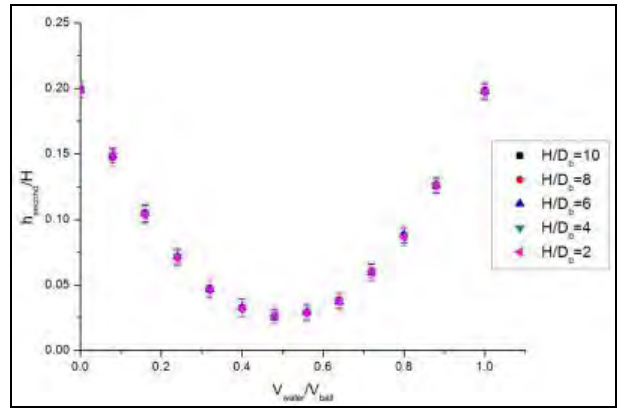


(圖一)

2. 由第一次彈跳的數據圖(圖二)，我們可以再次確認，第一次彈跳後的高度比，不受液體體積填充比的影響。另外，我們可以知道，由不同初始高度落下，仍不影響彈跳後的高度比。



(圖二)



(圖三)

3. 由第二次的數據圖(圖三)可以發現，高度比為液體積填充比的二次函數，且最小值發生在液體積填充比為 50% 的附近。在 0% 與 100% 的液體積填充比，有近乎相似的最高高度。另外，不同落下高度所產生的彈跳，同樣遵守上述之規律性。

研究四、從能量觀點探討研究二、三的實驗結果

我們將由研究二，研究三的針對不同落下高度與不同液體體積填充比的實驗結果，由能量守恆的觀點，逐一探討影響第一次彈跳能量損失 E_{loss1} 的因素以及影響第二次彈跳能量損失 E_{loss2} 的因素。

(一) 第一次彈跳:

根據能量守恆，末位能會等於初位能減去能量損失

$$(M+m)gH - E_{loss1} = (M+m)gh_1$$

同除以 $(M+m)gH$

$$1 - \frac{E_{loss1}}{(M+m)gH} = \frac{(M+m)gh_1}{(M+m)gH} = \frac{h_1}{H} \quad (\text{式①})$$

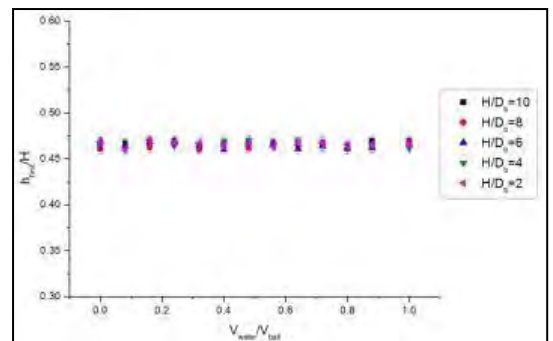
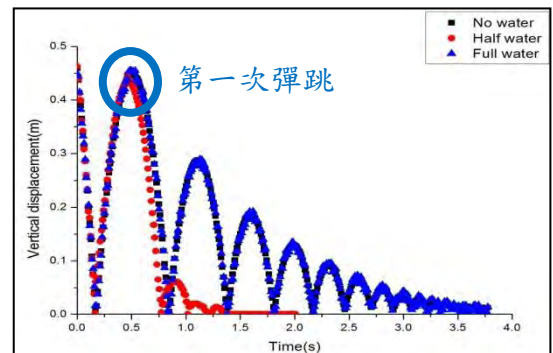
由實驗結果(見右下圖)可知 $\frac{h_1}{H} \approx const.$

代回式①得：

$$1 - \frac{E_{loss1}}{(M+m)gH} = \frac{h_1}{H} = const.$$

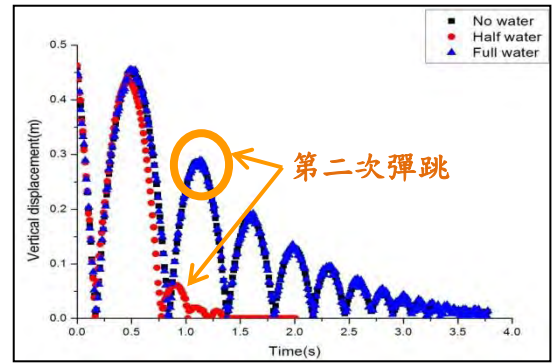
移項，可得：

$$E_{loss1} \propto (M+m)gH \quad (\text{式 A})$$



(二) 討論一

1. 由式 A 可以知道第一次彈跳後的能量損失 E_{loss1} 受到總質量 (M 是大球質量, m 是液體質量), 重力加速度 g 以及落下高度 H 的影響; 另外, 第一次彈跳的能量損失 E_{loss1} 不受到液體積填充比 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}}$ 的影響。
2. 總質量越大, 衝擊力越大, 產生的能量損失越大; 高度越高, 落下時的衝擊力也越大, 產生的能量損失也越大。



(三) 第二次彈跳

我們再次由能量觀點下手

$$(M+m)gH - E_{loss1} - E_{loss2} = (M+m)gh_2$$

同除 $(M+m)gH$

$$1 - \frac{E_{loss1}}{(M+m)gH} - \frac{E_{loss2}}{(M+m)gH} = \frac{(M+m)gh_2}{(M+m)gH} = \frac{h_2}{H} \quad (\text{式②})$$

由實驗結果(見右圖)可知

$$\frac{h_2}{H} = k \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^2 + const \quad k \in \mathbb{N}$$

移項可得

$$\left(\frac{h_2}{H} - const. \right) \propto \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^2$$

代回式②

$$\left[1 - \frac{E_{loss1}}{(M+m)gH} - \frac{E_{loss2}}{(M+m)gH} \right] - const. \propto \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^2$$

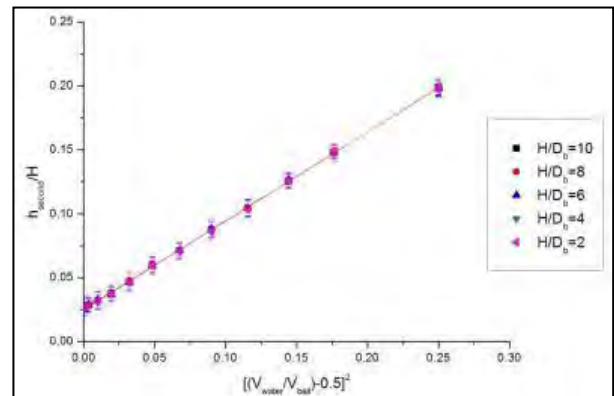
由式 A 可知 $E_{loss1} \propto (M+m)gH \quad \therefore \frac{E_{loss1}}{(M+m)gH} = const.$

代回式②, 整理可得

$$E_{loss2} \propto (M+m)gH \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^2 + const.$$

展開整理

$$E_{loss2} \propto (M+m)gH \left[\left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right)^2 - \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) + \frac{1}{4} \right] + const.$$



移項合併

$$E_{loss2} \propto (M + m)gH \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) \left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) + const. \quad (式 B)$$

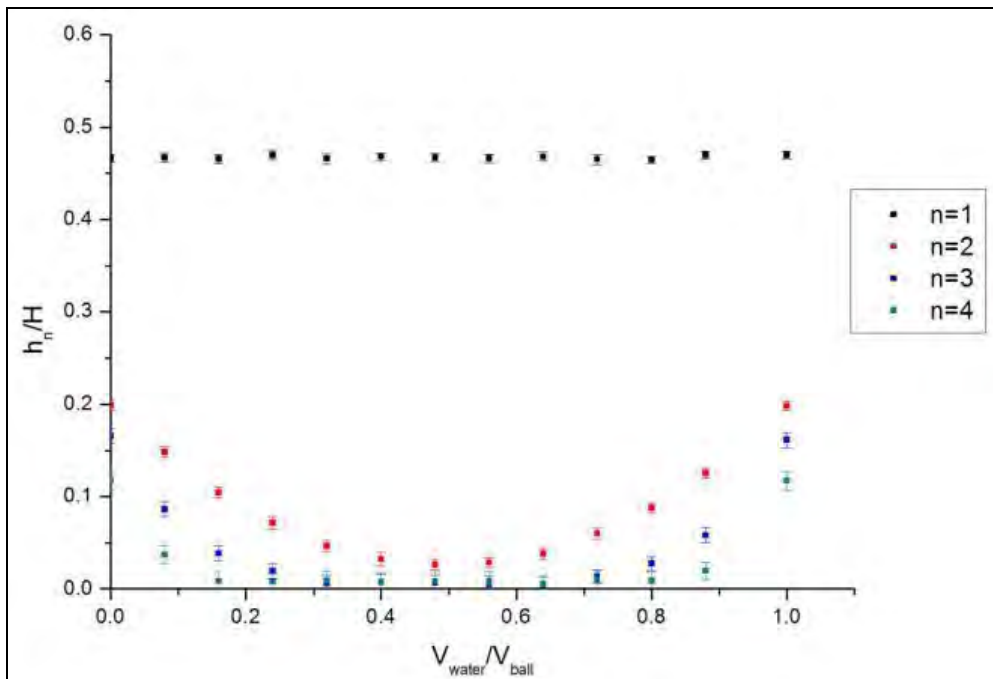
(四) 討論二

1. 由式 B 可以知道，第二次彈跳所產生的能量損失 E_{loss2} 受到 $\left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right)\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right)$ 影響，其中我們將 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}}$ 視為液體的量，而 $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right)$ 為球體所剩的空間。
2. 當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} < 50\%$ 時， $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right) > 50\%$ 可以解讀成球體所剩的空間，也就是此時液體可以運動的空間較大，然而液體的量較少，因此由液體的運動所產生的能量損失較少。
3. 當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} > 50\%$ ， $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right) < 50\%$ 時，雖然液體的量較多，然而液體可以運動的空間較少，因此由液體的運動所產生的能量損失也較少。
4. 綜合討論 2、討論 3，我們可以視為液體的量與剩餘空間互相競爭，產生能量損失，所以當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} = 50\%$ ， $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}\right) = 50\%$ 時，產生最大的能量損失。

研究五、比較第一次、第二次、第三次以及往後的彈跳結果

我們已於研究四得到影響第一次彈跳能量損失 E_{loss1} 的因素以及影響第二次彈跳能量損失 E_{loss2} 的因素，我們將進而深入探討第三次，第四次彈跳液體體積填充比對高度比的影響，並由研究四所得的結果進而推導出第三次，第四次彈跳的實驗結果。

(一) 實驗結果及關係圖



(二) 討論

1. 我們發現，第一次彈跳後($n=1$)不受液體積填充比的影響。第二次彈跳後的高度比($n=2$)與液體積填充比成二次(2^1)函數的關係，且在 50%附近有最小值。出乎意料的是，第三次彈跳($n=3$)的高度比與液體積填充比成四次(2^2)函數的關係。第四次彈跳($n=4$)的高度比與液體積填充比成八次(2^3)函數的關係。
2. 我們可以得知第二次以後的彈跳為前一次彈跳對液體積填充比的二次函數。也就是說，往後的彈跳會對前一次的彈跳有記憶的效果，換言之，前一次的彈跳的對下一次的彈跳有深刻的影響。
3. 我們可以再次由能量觀點探討這樣的現象，以下是我們由式 A 與式 B 所推導出的遞迴關係式：

$$\boxed{(M+m)gh_1 - \sum_{i=1}^n E_{lossi} = (M+m)gh_i} \quad (\text{式 C})$$

由這個遞迴關係式，我們可以推導出以下的關係：

$$\boxed{E_{lossn} \propto \left(\frac{V_{water}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} + const. \quad n \in N} \quad (\text{式 D})$$



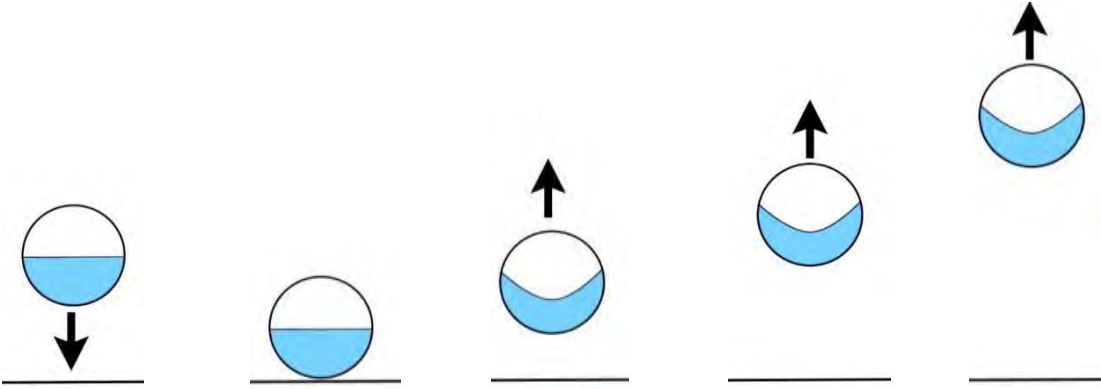
符合我們對於比較第一次、第二次、第三次以及往後的彈跳的實驗結果。

研究六、再次從能量觀點探討液體水的運動與能量損失的關係

我們將再一次的檢視研究一所觀察到液體的運動情形，搭配由研究二、三的實驗結果，以及研究四所推導出的能量損失關係式，相互參照、比較，進行討論。

(一) 第一次彈跳前後

1. 液體的運動情形

實際	
	
圖示	

2. 討論

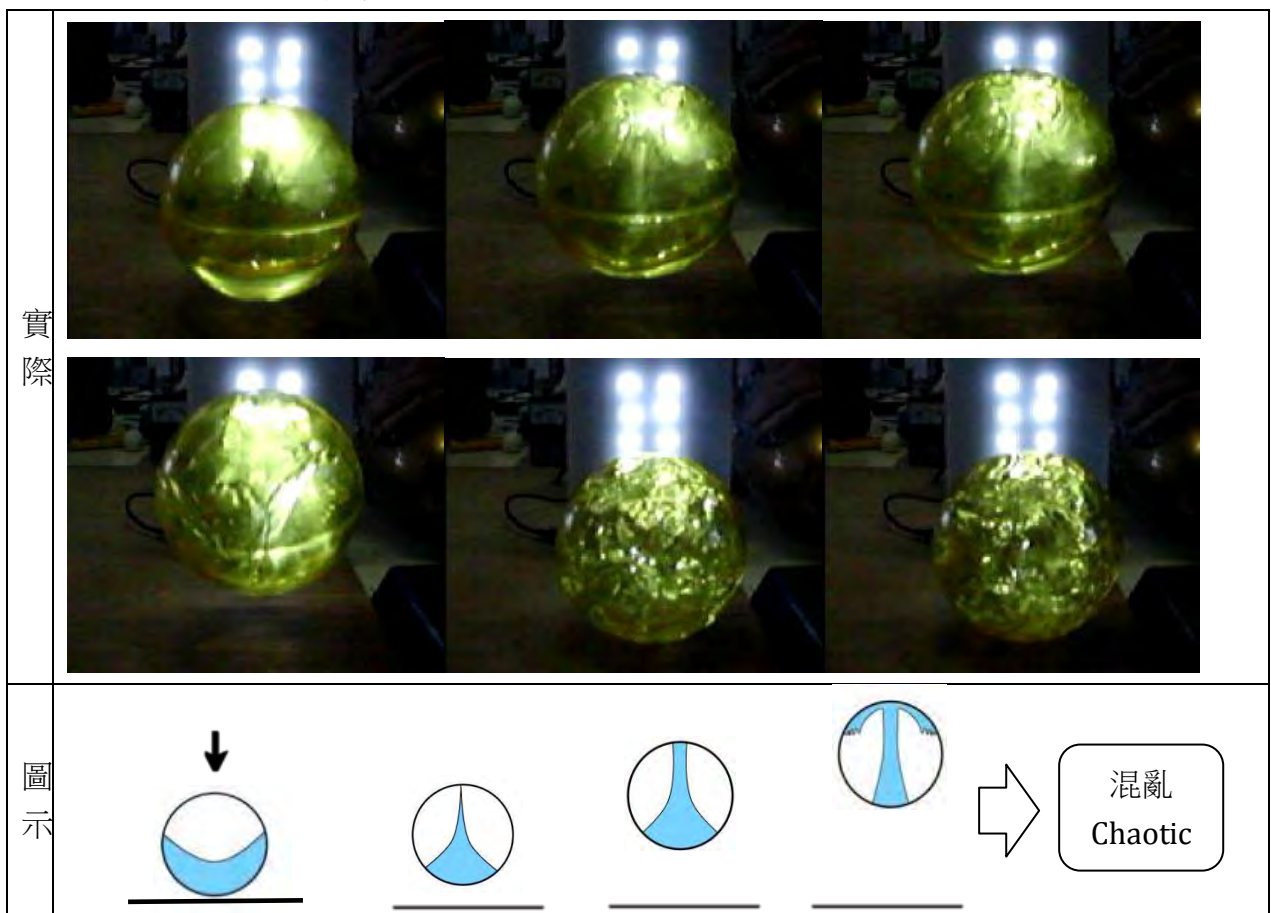
第一次的彈跳前後，水的狀態會由原先的「大部分聚集在底部」經由彈跳後使水向下凹陷，沿球體邊緣向上運動。由於向上運動的水量少，液體內部的相對運動也少，因此所產生的能量損失(熱能)極少。這個觀察的結果符合我們經由研究二、三實驗結果所推得研究四中的式 A

$$E_{loss1} \propto (M + m)gH \quad (\text{式 A})$$

中，影響第一次彈跳能量損失 E_{loss1} 的因素與液體體積填充比無關的結果。

(二) 第二次彈跳前後

1. 液體的運動情形



2. 討論

第二次的彈跳前後，水的狀態會由原先的「向下凹陷狀」經由彈跳後使在中央產生向上運動中央水柱。水柱撞擊球殼頂部後，會四處噴散，此後的液體水的運動狀態呈現**混亂(chaotic)**，整個過程中液體內部的相對運動多，活動於整個剩餘空間，因此所產生的能量損失(熱能)會和液體的量與球體剩餘的體積有關。這個結果符合我們經由研究二、三實驗結果所推得研究四中的式 B。

$$E_{loss2} \propto (M + m)gH \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) \left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) + const. \quad (\text{式 B})$$

陸、結論

一、 由研究一可知：

1. 第一次彈跳落地時，當衝擊力撞擊球體後，會間接船片整個液體，由於液體對於球的側壁有附著力，故當球體形變後再恢復的時候，側壁的附著力會將側邊的液體向上提升，故形成類似碗狀的液體形狀。
2. 第二次彈跳，當衝擊力撞擊球體後，由於在碰撞中期，球體持續形變的同時，液體維持原有的運動，意即左右兩邊原先的噴濺處有速度存在，因此此時中間的液體傾向於受到衝擊力後，聚集於中央，產生向上的水柱。
3. 第三次彈跳後，向上衝的水柱產生，當水柱衝擊到球頂後，會噴散，此後的液體水的運動狀態呈現混亂(chaotic)。

二、 由研究二、三可知：

1. 第一次彈跳後無論液體體積填充比，皆趨近於同樣高度，因此我們可以知道第一次彈跳不受到液體體積填充比的影響。然而在第二次彈跳，液體積填充比為 50% 和 0%、100% 在彈跳高度方面有顯著的不同，另外，液體積填充比 0%、100% 在彈跳高度方面軌跡近乎相同。
2. 第一次彈跳後的高度比，不受液體積填充比的影響。另外，我們可以知道，由不同初始高度落下，仍不影響彈跳後的高度比。

三、 由研究四可知：

第一次的彈跳前後

$$E_{loss1} \propto (M + m)gH$$

1. 第一次彈跳後的能量損失 E_{loss1} 受到總質量 (M 是大球質量， m 是液體質量)，重力加速度 g 以及落下高度 H 的影響；另外，第一次彈跳的能量損失 E_{loss1} 不受到液體積填充比的影響。
2. 總質量越大，衝擊力越大，產生的能量損失越大；高度越高，落下時的衝擊力也越大，產生的能量損失也越大。

第二次的彈跳前後

$$E_{loss2} \propto (M + m)gH \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) \left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) + const.$$

1. 第二次彈跳所產生的能量損失 E_{loss2} 受到 $\left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) \left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right)$ 影響，其中我們可以將 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}}$ 視為液體的量，而 $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right)$ 為球體所剩的空間。
2. 當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} < 50\%$ 時， $\left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) > 50\%$ 可以解讀成球體所剩的空間，也就是此時液體可以運動的空間較大，然液體的量較少，因此由液體的運動所產生的能量損失較少。

反知，當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} > 50\%$ ， $(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}) < 50\%$ 時，雖然液體的量較多，然而液體可以運動的空間較少，因此由液體的運動所產生的能量損失也較少。

3. 綜合討論 2、討論 3，我們可以視為液體的量與剩餘空間互相競爭，產生能量損失，所以當 $\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} = 50\%$ ， $(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}}) = 50\%$ 時，產生最大的能量損失。

四、 由研究五可知：

$$E_{lossn} \propto \left(\frac{V_{water}}{V_{ball}} - \frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} + const. \quad n \in N$$

1. 我們發現，第一次彈跳後($n=1$)不受液體積填充比的影響。第二次彈跳後的高度比($n=2$)與液體積填充比成二次(2^1)函數的關係，且在 50% 附近有最小值。出乎意料的是，第三次彈跳($n=3$)的高度比與液體積填充比成四次(2^2)函數的關係。第四次彈跳($n=4$)的高度比與液體積填充比成八次(2^3)函數的關係。
2. 我們可以得知第二次以後的彈跳為前一次彈跳對液體積填充比的二次函數。也就是說，往後的彈跳會對前一次的彈跳有記憶的效果，換言之，前一次的彈跳的對下一次的彈跳有深刻的影響。

五、 由研究六可知：

第一次的彈跳前後

1. 我們於研究一所觀察得到的液體運動情形，得知水的狀態會由原先的「大部分聚集在底部」經由彈跳後使水向下凹陷，沿球體邊緣向上運動。由於向上運動的水量少，液體內部的相對運動也少，因此所產生的能量損失(熱能)很少。這個結果符合我們經由研究二、三實驗結果所推得研究四中的式 A

$$E_{loss1} \propto (M + m)gH \quad (\text{式 A})$$

中，影響第一次彈跳能量損失 E_{loss1} 的因素與液體體積填充比無關的結果。

第二次的彈跳前後

2. 第二次的彈跳前後，水的狀態會由原先的「向下凹陷狀」經由彈跳後使在中央產生向上運動中央水柱。水柱撞擊球殼頂部後，會四處噴散，此後的液體水的運動狀態呈現**混亂(chaotic)**，整個過程中液體內部的相對運動多，活動於整個剩餘空間，因此所產生的能量損失(熱能)會和液體的量與球體剩餘的體積有關。這個結果符合我們經由研究二、三實驗結果所推得研究四中的式 B。

$$E_{loss2} \propto (M + m)gH \left(\frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) \left(1 - \frac{V_{liquid}}{V_{ball}} \right) + const. \quad (\text{式 B})$$

柒、參考資料

1. T. Killian, R. Klaus, and T. T. Truscott. Rebound and jet formation of a fluid-filled sphere. *Physics of Fluids* (in review, 2012)
2. Halliday, Resnick, Walker *Fundamentals of Physics* 9e
3. Collision wikipedia from
<http://en.wikipedia.org/wiki/Collision>
4. Bernard Budiansky. Sloshing of Liquids in Circular Canals and Spherical Tanks. *J. Aerospace Sci.* 27, 3, 161-163 (1960); Lockheed Aircraft Corp. report, 1958,
<http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/801718.pdf>
5. P. Pal. Sloshing of Liquid in Partially Filled Container – An Experimental Study. *Int. J. Rec. Trends Eng.* 1, 6, 1-5 (2009),
<http://ijrte.academypublisher.com/vol01/no06/ijrte0106001005.pdf>
6. Robert Klaus, Taylor Killian, and Tadd Truscott. Sphere Rebound-Suppression from Sloshing (APS 2010 Conf. poster),
http://www.taddtruscott.com/APS2010/Poster_V4.pdf

【評語】 040102

利用自設實驗來探究含水球殼彈跳高度和水含量的關係，數據量測精確，對球殼中的水運動之錄影觀察亦很詳盡。若能對其中的物理機制進行定量的探究及驗證，將會更好。