

# 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 生活與應用科學科

第三名

030809

音樂數學，數學音樂

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：  國二 洪宇萱  國二 王昕芸	指導老師：  蔡名峯  蔡明翰
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：黃金比例、矩陣、新維也納樂派

## 摘要

在課堂中，老師提及黃金比例 1:0.618，並說明黃金比例無所不在。這引起了我們的好奇，音樂是否也存在黃金比例？

本組計算熱門歌曲的副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值是否大多遵守黃金比例。也同時計算古典樂的部分，驚喜發現古典音樂的呈式部、發展部、再現部，而「至再現部的小節數」除以「總小節數」竟然也有黃金比例。接著，我們研究了十二平均律的等比關係與樂器中調音所需之頻率(即音高)關係，在其中，我們注意到「新維也納樂派」的十二音列作曲法竟可以以數學矩陣來表示！經由這些發現，我們試著應用在創作曲上，即使不是音樂家，也可以藉數學矩陣變換，大大豐富我們的樂句！原來：音樂是感覺中的數學，數學則是推理中的音樂，兩者密不可分！

## 壹、研究動機

在數學課堂中，老師提及黃金比例 1:0.618，並說明其實**黃金比例無所不在**，它存在於古希臘所建的帕德嫩神殿、埃及金字塔，甚至某些植物的葉片、花瓣從小到大的序列，也是以黃金比例的近似值排列。除了建築、生物等面向，老師還說，**音樂和數學也應該有著淵源的！**我們希望找出是否**在音樂中暗藏著數學的規律性**，鋼琴中**移調、轉調**的重要基本——**十二平均律**，以及某些樂派**作曲的規則是否可以用數學呈現**，這一切引起了我們的好奇，以下為我們的研究。

## 貳、研究目的

- 一、探討**華文流行音樂**(共 30 首)至副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值是否遵守黃金比例
- 二、探討**校園民歌**(共 8 首)至副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值是否遵守黃金比例
- 三、探討**西洋經典**(共 9 首)至副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值是否遵守黃金比例
- 四、探討**小奏鳴曲集**(5 首)至再現部出現之小節數與全曲之小節數的比值是否遵守黃金比例
- 五、依照黃金比例製作一首**創作曲**
- 六、探討十二平均律和等比數列的關係
- 七、探討「新維也納樂派」的「十二音列作曲法」和「數學矩陣」的關係
- 八、探討其它樂派或流行音樂是否也可以部分使用「數學矩陣」將音樂語言改成數學語言
- 九、依照黃金比例並利用「數學矩陣」自製一首**創作曲**

## 參、研究設備及器材

樂譜、電腦製譜軟體(Muse Score)、紙、筆

## 肆、研究過程及討論

- 一、文獻探討：(一)翁瑞霖在「數學與音樂的對話：探討莫札特音樂的數學應用及其效應」探討莫札特樂曲結構呈現了完美的數學比例關係，敘述莫札特第三(G 大調)、四(D 大調)和五號(A 大調)小提琴協奏曲第一樂章樂曲結構的數學解析，強調莫札特創作之和諧性顯示出數學與音樂密不可分的關係。我們依此做基礎並引發聯想：嘗試找出流行音樂與古典樂是否都有完美數學比例，且比例的分割點各應該在什麼位置？

(二)在「心裁國樂譜教流網站」的馬水龍音樂教室「12音作曲法」中介紹了新維也納樂派，強調其作曲的嚴謹限制，此樂派作曲家必需先創作一個包含八度音內十二個半音的「音列原型」，每一個音只能在該音列原型中出現一次，之後，12個音以反向和倒影的方式重新排列，成為「逆行」、「倒影」和「逆行倒影」四種不同的音列型態。「十二音列」是一種必須經過精密計算的作曲技法，**當我們讀到這句話，決定依此樂派作曲法做研究，尋找其中的數學性！**

二、以下為台灣地區較為大家熟悉的 KK box2008、2009 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲共 20 首中，**至副歌總秒數與第一段落處總秒數**的比值。舉例說明：



周杰倫 - 說好的幸福呢 HD

圖 1、從歌曲開頭到副歌開始處，共經過 1 分 12 秒



周杰倫 - 說好的幸福呢 HD

圖 2、從歌曲開頭到一次段落處，共經過 1 分 56 秒

比值 = 1 分 12 秒 ÷ 1 分 56 秒 = 72 秒 ÷ 116 秒 = 0.6206... ≈ 0.621

而黃金比例約等於 0.618，若我們允許誤差 ±5%，則比值在 0.568~0.668 均屬黃金分割。

(設定誤差 ±5% 是以標準差算出)

(一) KK box 2008 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲

表 1：KK box 2008 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	沒有如果	梁靜茹	01:35	02:34	0.617	○
2	王妃	蕭敬騰	01:01	01:40	0.610	○
3	心牆	郭靜	01:00	01:36	0.625	○
4	壞人	方炯鑌	01:26	02:22	0.606	○
5	情歌	梁靜茹	01:11	01:45	0.617	○
6	妥協	蔡依林	01:06	01:47	0.617	○
7	如果我變成回憶	Tank	01:36	02:36	0.613	○
8	搞笑	羅志祥	01:11	01:58	0.602	○
9	別再為他流淚	梁靜茹	00:52	01:24	0.619	○
10	我愛他	叮噹	01:20	02:09	0.620	○

**結果**：在 2008 年的流行歌曲中，我們選的 10 首曲子通通符合黃金分割，通過率 100%

(二) KK box2009 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲：

表 2：KK box2009 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	說好的幸福呢	周杰倫	01:12	01:56	0.621	O
2	下一個天亮	郭靜	01:08	01:51	0.613	O
3	下雨天	南拳媽媽	01:00	01:37	0.619	O
4	終於說出口	小宇	01:01	01:39	0.614	O
5	擦肩而過	李聖傑	01:08	01:54	0.618	O
6	為你寫詩	吳克群	01:11	01:50	0.623	O
7	稻香	周杰倫	00:49	01:21	0.605	O
8	原諒我	蕭敬騰	00:54	01:30	0.600	O
9	會呼吸的痛	梁靜茹	01:06	01:46	0.623	O
10	我不配	周杰倫	01:24	02:17	0.613	O

**結果**：在 2009 年的流行歌曲中，我們選的 10 首曲子通通符合黃金分割，通過率 100%

(三) KK box2010、2011 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲：

表 3：KK box2010、2011 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文歌曲

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	洋蔥	丁噹	00:59	01:33	0.634	O
2	沒關係	吳克羣	00:41	01:12	0.569	O
3	我們沒有在一起	劉若英	00:54	01:30	0.600	O
4	我是一隻小小鳥	丁噹	00:57	01:51	0.514	X
5	沒那麼簡單	黃小琥	01:26	02:09	0.666	O
6	天后	陳勢安	00:53	01:21	0.654	O
7	指望	郁可唯	00:30	00:58	0.517	X
8	好的事情	顏爵	00:52	01:21	0.642	O
9	那些年	胡夏	00:44	01:08	0.647	O
10	末班車	蕭煌奇	00:41	01:07	0.612	O

**結果**：在 2010&2011 年的 10 首流行歌曲中，8 首曲子符合黃金分割，通過率 80%

(四)校園民歌：有許多至今仍歷久不衰的校園民歌，因此，它們也成了我們的研究對象

表 4：校園民歌

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	外婆的澎湖灣	潘安邦	00:43	01:10	0.614	O
2	拜訪春天	施孝榮	00:16	00:31	0.516	X
3	秋蟬	楊芳儀/徐曉菁	00:48	01:19	0.608	O
4	捉泥鰍	包美聖	00:19	00:30	0.633	O
5	龍的傳人	李建復	01:21	01:37	0.835	X
6	讓我們看雲去	陳明韶	00:24	00:39	0.615	O
7	如果	合唱	00:24	00:41	0.585	O
8	浮雲遊子	陳明韶	00:28	00:45	0.622	O

**結果**：在校園民歌的 8 首曲子中，有 6 首符合黃金分割，約占了  $6/8*100\% = 75\%$

(五)西洋經典：無論是電視廣告，或者有時是爸爸媽媽口中哼著的小曲，常有許多耳熟能詳的西洋經典，我們也想探討其受歡迎的原因是否也和黃金比例有所關連

表 5：西洋經典

編號	歌名	到副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	I Will Always Love You	00:43	01:10	0.614	O
2	Somewhere In Time	00:56	01:20	0.700	X
3	The Rose	02:08	02:49	0.757	X
4	Unchained Melody	01:03	01:46	0.594	O
5	My Heart Will Go On	00:58	01:35	0.611	O
6	Somewhere Out There	01:51	02:43	0.681	X
7	Edelweiss	00:43	01:10	0.614	O
8	Today	00:55	01:24	0.655	O
9	Take me home country road	00:33	00:54	0.611	O
10	All I ask of you(歌劇魅影)	00:37	01:00	0.617	O

**結果**：在 10 首西洋經典中，有 7 首符合黃金比例，占了 70%

三、以下則為小奏鳴曲集 I 中，選出較為耳熟能詳的 5 首小奏鳴曲來，且計算這些曲子的全曲之小節數乘以 0.6(黃金比例近似值)與重要分段處之小節數的誤差值。



# SONATINE

呈示部

Fr. Kuhlau Op.55, No.1

**4. Allegro**

4. *p*

*dolce* ①

*cresc.* *mf*

發展部

*dolce.*

*f* *dim.*

*mf* ③

再現部

至再現部小節數：35

*p*

*cresc.*

- (第一樂章) 有精神而快速地彈奏。奏鳴曲形式。十分考慮主題的左右手節奏之交錯，而避免左手第 2 拍之 C E 和音變成太弱。
- (1) 此部份 (第二主題) 與第一主題成對照，要十分保持音長，柔和地彈奏。
  - (2) 留意圓滑奏記號 (Slur)。分散和音需要確實地彈奏。
  - (3) 右手不可潰散，左手留意休止符。



圖 3：小奏鳴曲集 I 的編號第 4 首

總小節數：62

以上為小奏鳴曲集 I 的編號第 4 首的曲子：古典樂曲的主旋律一開始就出現了稱為呈示部。中途轉折處則稱為發展部。再現部就是會再出現一次呈示部的旋律，但調性有可能會有所改變。而我們在這裡將總小節數 62，乘上黃金比例近似值 0.6，發現乘積經四捨五入後為 37，與再現部開始的小節數 35 十分相近！

# SONATINE

35

呈示部

M. Clementi Op.36, No.1

**Allegro**

7. *f* ① *p*

發展部

*p* ③ ④

再現部

至再現部小節數：24

⑤

*cresc.* ⑤

④

總小節數：38

- (第一樂章) 每個音符要清清楚楚，並要具有精神地彈奏。奏鳴曲形式。
- (1) 第一拍十分要加強，斷奏要明朗地反跳。留意左手休符。
  - (2) 右手遵守指法，左手要清楚。音階之各音不可不齊，其次的四分音符之斷奏須要有精神。
  - (3) 左手要十分延長，儘量以安祥的氣氛。
  - (4) 此處起斷然以強音彈奏，並使左手清楚。
  - (5) 右手3度音程要整齊，並使優美地漸強。

圖 4：小奏鳴曲

同樣地，我們也將總小節數 38 乘上黃金比例近似值 0.6，得到 23。而再現部開始處為第 24 小節，更加接近了。

同樣作法，我們另外討論了 3 首樂曲，如下表 6

表 6：根據以上結果，我們整理出以下表格：

作曲家	作品編號	至再現部 小節數	第一樂章 總小節數	總小節數×0.6(黃 金比例近似值)	小節數 誤差值
庫勞(Fr.Kuhlau)	Op.55, No.1 (第一樂章)	35	62	37	2
克萊曼悌(M.Clementi)	Op.36, No.1 (第一樂章)	24	38	23	1
莫札特(W.A.Mozart)	K.545 (第一樂章)	42	73	44	2
貝多芬(L.v.Beethoven)	Op.49, No.2 (第一樂章)	67	121	73	6
貝多芬(L.v.Beethoven)	Op.49, No.1 (第一樂章)	64	111	67	3

表 7：以另一種觀點來估算

作曲家	作品編號	至再現部 小節數	第一樂章 總小節數	比值	是否符合 黃金分割
庫勞(Fr.Kuhlau)	Op.55, No.1 (第一樂章)	35	62	0.57	O
克萊曼悌(M.Clementi)	Op.36, No.1 (第一樂章)	24	38	0.632	O
莫札特(W.A.Mozart)	K.545 (第一樂章)	42	73	0.575	O
貝多芬(L.v.Beethoven)	Op.49, No.2 (第一樂章)	67	121	0.554	X
貝多芬(L.v.Beethoven)	Op.49, No.1 (第一樂章)	64	111	0.577	O

**結果**：5 首小奏鳴曲中，有 4 首在(至再現部小節數)：(第一樂章總小節數)符合黃金分割比例，約占 80%。

四、(一) 根據以上的研究結果，我們也依照黃金比例來製作一首陶笛獨奏曲，曲名叫作

「晴空」，全曲共有 32 小節，乘以黃金比例近似值 0.618 為 19.776，而至再現部小節數則為 20，極為接近。期待這首曲子能成為一首人人喜愛，受歡迎的「流行金曲」。

## 晴空

Selina & Sherry

呈式部

展開部

再現部 至再現部小節數：21

圖 5：我們的創作曲—晴空

(二)同時我們也做了類似「晴空」的**非黃金分割**版本，(詳見附錄(一))，同學們比較之後，認為：黃金分割版本較佳。

五、十二平均律是把一組八度音，依照頻率等比分為 12 個『半音』。定義高音 C 與中央 C 的比值為 2，所以後一音為前一音的 $\sqrt[12]{2}=0.15946$  倍。若將國際所訂的標準中央 A=440 赫茲(Hz)放進來，若上升半音，升 A=440.00×0.15946Hz。十二平均律的優點是易於轉調，而這用數學來解釋是最好的，因為每個音的公比都一樣。

(一)以下為鋼琴鍵盤一個八度，從中音 C 到高音 C 的音程示意圖，我們先假設中音 C 的頻率是 1，公比=r，高音 C 為 2，則：

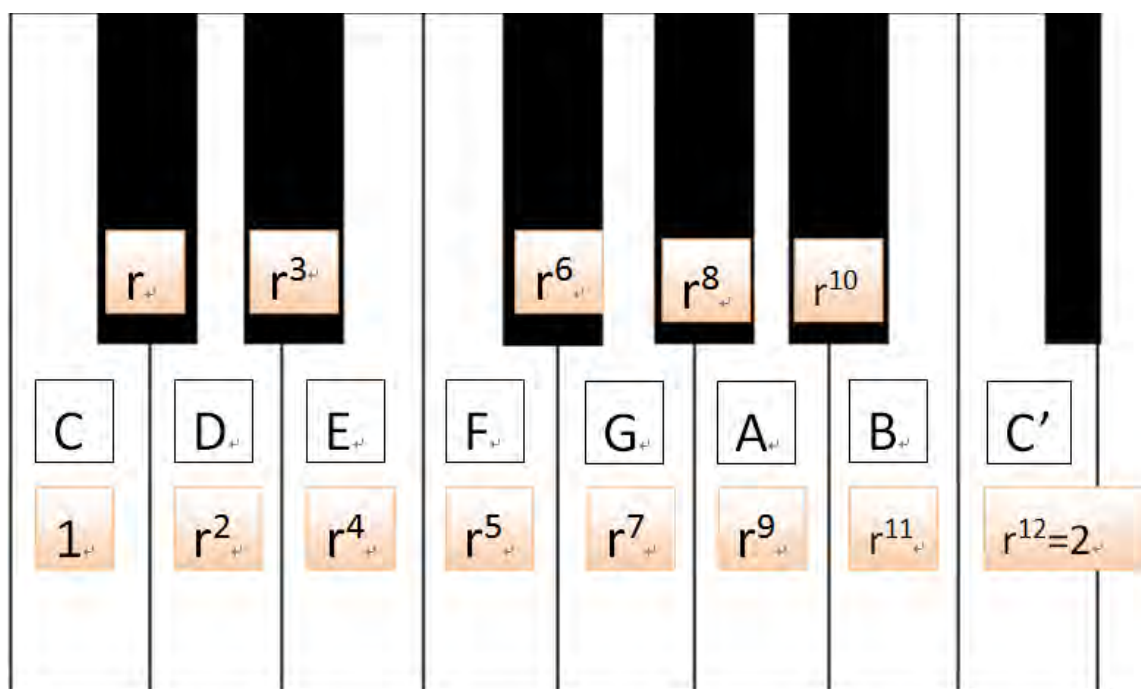


圖 6、從中音 C 到高音 C 的音程示意圖

(二) 因為  $r^{12}=2 \rightarrow r=(\sqrt[12]{2})$

以下則為將 $(\sqrt[12]{2})$ 代入 r 的各音程頻率。

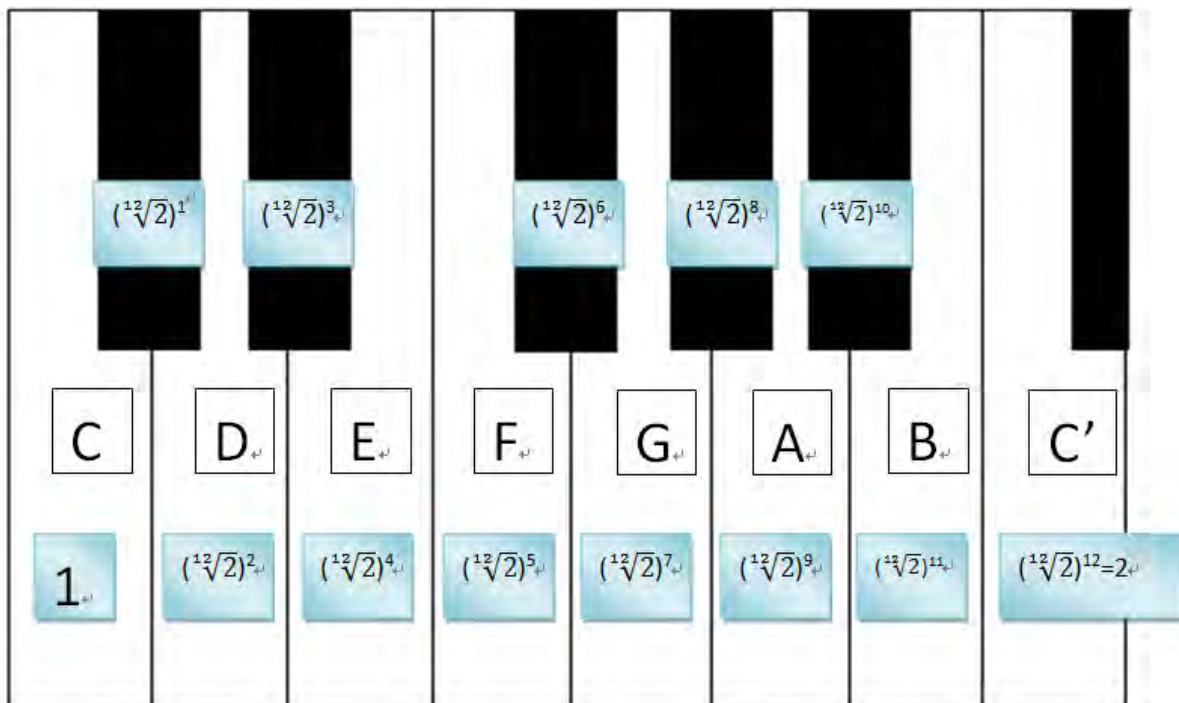


圖 7、每一個音的弦長都是前一個音的  $\frac{1}{(\sqrt[12]{2})}$  倍

設第一個音的弦長為 K，則：第 2 個音的弦長為  $K \times \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ 。

第 3 個音的弦長為  $K \times \frac{1}{(\sqrt[12]{2})^2}$

.....

如此當我們知道中央 C 的弦長而想調音”升 F”時，即可求得”升 F”弦長恰為

中央 C 弦長的  $\frac{1}{(\sqrt[12]{2})^6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  倍。這又是數學與音樂密不可分的例證。

六、二十世紀現代樂派中的「新維也納樂派」被稱為「十二音列作曲法」。「十二音列」這4個字，引起我們的興趣。以下是我們的探討。

(一)十二音列(Twelve-tone Method)作曲法，是苟白克首創的理念，這種創作方式必須排除傳統大小調的觀念，平等地重視每個音符的地位，對二十世紀音樂理論產生了巨大衝擊！首先，作曲家必需先創作一個包含八度音內十二個半音的「音列原型 Prime/Original)」，每一個音只能在該音列原型中出現一次，之後，12個音以反向和倒影的方式重新排列，成為「逆行(Retrograde)」、「倒影(Inversion)」和「逆行倒影(Retrograde Inversion)」四種不同的音列型態。「十二音列」是一種必須經過精密計算的作曲技法，如此限制嚴格的作曲手法，表現出極度抽象的音樂線條，顯示出人類除了在音樂中取得了心靈慰藉，卻也無法避免邁向追求科學精神的道路！

(二)下圖是苟白克的「十二音列」排序，以十二個不重複的半音為規則。看似容易卻需要精密的計算。

	I <sub>0</sub>	I <sub>5</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>1</sub>	I <sub>10</sub>	I <sub>9</sub>	I <sub>7</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>6</sub>	I <sub>8</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>11</sub>	
P <sub>0</sub>	D	G	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	C	B	A	E	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	F	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	R <sub>0</sub>
P <sub>7</sub>	A	D	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	G	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	E	B	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	F	C	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	R <sub>7</sub>
P <sub>8</sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	D	B	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	G	F	C	E	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	A	R <sub>8</sub>
P <sub>11</sub>	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	F	D	B	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	G	A	E	C	R <sub>11</sub>
P <sub>2</sub>	E	A	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	F	D	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	B	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	C	G	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	R <sub>2</sub>
P <sub>3</sub>	F	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	A	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	D	C	G	B	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	E	R <sub>3</sub>
P <sub>5</sub>	G	C	B	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	F	E	D	A	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	R <sub>5</sub>
P <sub>10</sub>	C	F	E	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	A	G	D	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	B	R <sub>10</sub>
P <sub>6</sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	C	A	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	F	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	D	E	B	G	R <sub>6</sub>
P <sub>4</sub>	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	B	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	G	E	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	C	D	A	F	R <sub>4</sub>
P <sub>9</sub>	B	E	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	C	A	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	F	G	D	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	R <sub>9</sub>
P <sub>1</sub>	D <sup>#</sup> / <sub>E<sub>b</sub></sub>	G <sup>#</sup> / <sub>A<sub>b</sub></sub>	G	E	C <sup>#</sup> / <sub>D<sub>b</sub></sub>	C	A <sup>#</sup> / <sub>B<sub>b</sub></sub>	F	A	B	F <sup>#</sup> / <sub>G<sub>b</sub></sub>	D	R <sub>1</sub>
	RI <sub>0</sub>	RI <sub>5</sub>	RI <sub>4</sub>	RI <sub>1</sub>	RI <sub>10</sub>	RI <sub>9</sub>	RI <sub>7</sub>	RI <sub>2</sub>	RI <sub>6</sub>	RI <sub>8</sub>	RI <sub>3</sub>	RI <sub>11</sub>	

圖 8、苟白克的「十二音列」排序



在愛樂的電子報上寫道：「是不是就是這張圖，把二十世紀樂迷嚇跑的？」

我們乍看之下也覺得不甚好懂，後來以數學聯想，自製一張巧妙的 12×12 數獨

如下圖 9，用它來理解十二音列的排序規則就好懂多了：

11	5	2	8	4	7	1	10	9	3	12	6
10	4	1	7	3	6	12	9	8	2	11	5
12	6	3	9	5	8	2	11	10	4	1	7
3	9	6	12	8	11	5	2	1	7	4	10
2	8	5	11	7	10	4	1	12	6	3	9
1	7	4	10	6	9	3	12	11	5	2	8
5	11	8	2	10	1	7	4	3	9	6	12
6	12	9	3	11	2	8	5	4	10	7	1
4	10	7	1	9	12	6	3	2	8	5	11
8	2	11	5	1	4	10	7	6	12	9	3
9	3	12	6	2	5	11	8	7	1	10	4
7	1	10	4	12	3	9	6	5	11	8	2

圖 9、12×12 數獨

(三)以荀白克在 1921 年的 Op.25「鋼琴組曲」為例：我們可以看到一開始，從第 1 小節到第 3 小節，恰恰使用完 12 個音各 1 次(12 音及為從中央 C 的 Do 到 Si 共包含 7 個白鍵 5 個黑鍵)

## SUITE FÜR KLAVIER

op. 25

## Präludium



圖 10、荀白克在 1921 年的 Op.25 「鋼琴組曲」

(四)以樂譜做研究較看不出規則，我們將其轉換成簡譜如下：

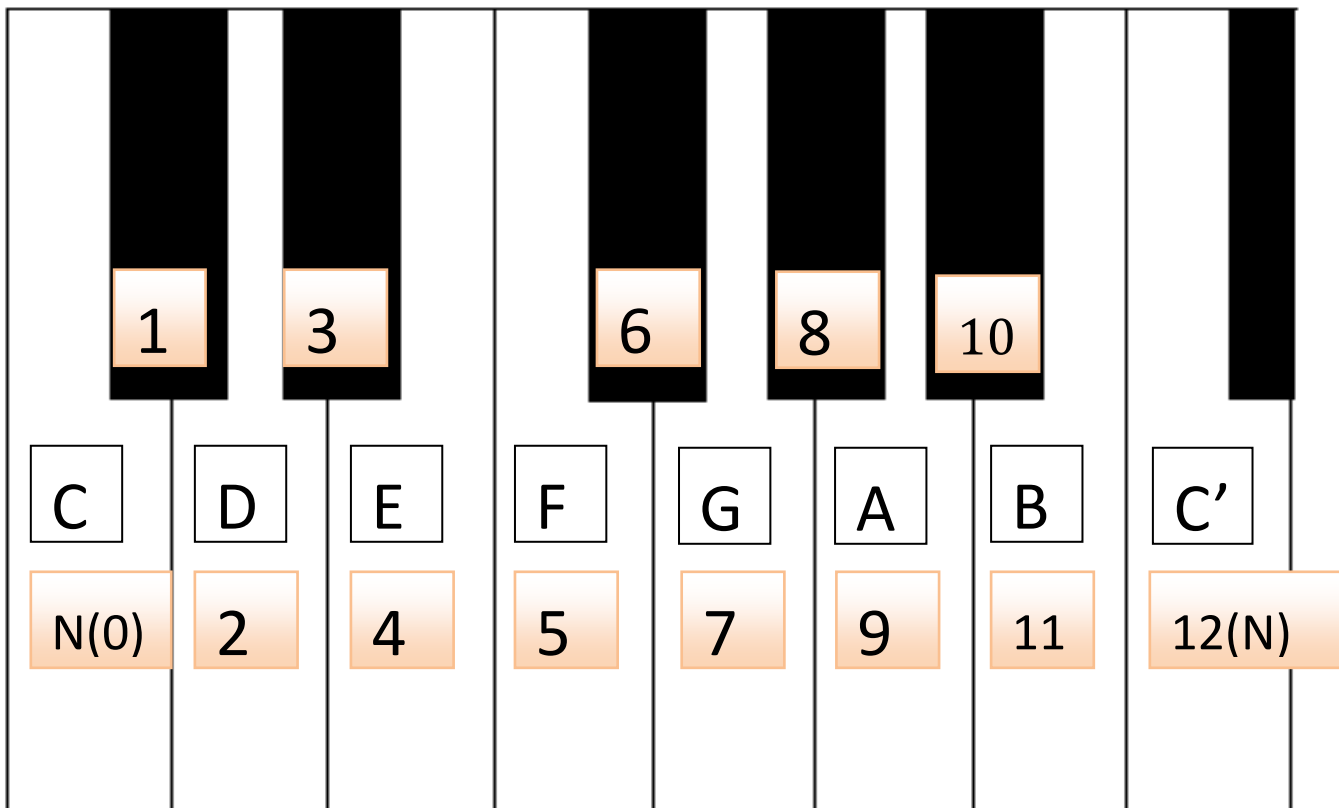


圖 11、簡譜

則上面的 Op.25 「鋼琴組曲」樂譜第一行恰是 4 5 7 1 / 6 3 8 2 / 11 N 9 10 /

清楚看出 12 音各用 1 次。

(五)這是荀白克作品 OP·26「木管五重奏」，此曲中十二音的作曲技巧，比作品 OP·25 的「鋼琴組曲」更為洗鍊。

這一首作品的音列如下 (摘自馬水龍音樂講座)

### 1. 原形

音序	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
音名	bE	G	A	B	#C	C		bB	D	E	#F	#G	F
	3	7	9	11	1	N		10	2	4	6	8	5

### 2. 逆形

音序	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
音名	F	#G	#F	E	D	bB		C	#C	B	A	G	bE
	5	8	6	4	2	10		N	1	11	9	7	3

### 3. 倒影

音序	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
音名	#D	B	A	G	F	bG		#G	E	D	C	bB	bD
	3	11	9	7	5	6		8	4	2	N	10	1

### 4. 倒影逆行

音序	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
音名	bD	bB	C	D	E	#G		bG	F	G	A	B	bE
	1	10	N	2	4	8		6	5	7	9	11	3

荀白克把此十二音音列分為二群，這是他貫用的手法。

前六個音在上聲部作為主題，後六個音分擔其間和聲的伴奏；然後使用逆形、倒影、倒影逆行。

(六)我們將荀白克作品 OP·26 轉換成數學矩陣如下：

### 1. 原形

以矩陣表示

$$A = [3 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 1 \quad N \quad | \quad 10 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 5]$$

### 2. 逆形

$$\text{矩陣觀點：A 矩陣倒著寫過來} = A \times \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [3 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 1 \quad N \quad | \quad 10 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 5] \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [5 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 10 \quad | \quad N \quad 1 \quad 11 \quad 9 \quad 7 \quad 3]$$

### 3. 倒影

矩陣觀點：-A 矩陣平移 18 再 mod12

$$C = -A + 18[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

$$= [-3 \ -7 \ -9 \ -11 \ -1 \ -N \ | \ -10 \ -2 \ -4 \ -6 \ -8 \ -5] +$$

$$[18 \ 18 \ 18 \ 18 \ 18 \ 18 \ | \ 18 \ 18 \ 18 \ 18 \ 18 \ 18]$$

$$= [15 \ 11 \ 9 \ 7 \ 17 \ 18 \ | \ 8 \ 16 \ 14 \ 12 \ 10 \ 13]$$

$$\equiv [3 \ 11 \ 9 \ 7 \ 5 \ 6 \ | \ 8 \ 4 \ 2 \ N \ 10 \ 1] \pmod{12}$$

### 4. 倒影逆行

$$\text{矩陣觀點：} C \text{ 矩陣倒著寫過來} = C \times \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [3 \ 11 \ 9 \ 7 \ 5 \ 6 \ | \ 8 \ 4 \ 2 \ N \ 10 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ 10 \ N \ 2 \ 4 \ 8 \ | \ 6 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 3]$$

(七) 荀白克作品 OP·31 號「為管弦樂的變奏曲」，被認為是最傑出的十二音作品。

在這首作品中，為了避免重複所用的十二音音列，他將「原形音列」的前六個音，以下方小三度「移調轉位」(倒影移位)，同時包含了半音階的十二音全部。

如下例 (摘自馬水龍音樂)

#### 1. 原形

音序1	2	3		4	5	6		7	8	9		10	11	12
音名#C	G	A		#F	#G	C		F	E	bB		B	D	bE
	1	7		6	8	N		5	4	10		11	2	3

#### 2. 原形移位

音序1	2	3		4	5	6		7	8	9		10	11	12
音名bB	E	#F		bE	F	A		D	#C	G		#G	B	C
	10	4		3	5	9		2	1	7		8	11	N

#### 3. 倒影

音序1	2	3		4	5	6		7	8	9		10	11	12
音名G	#C	B		D	C	bA		bE	E	bB		A	#F	F
	7	1		2	N	8		3	4	10		9	6	5

#### 4. 倒影移位

音序1	2	3		4	5	6		7	8	9		10	11	12
音名E	bB	bA		B	A	F		C	#C	G		#F	#D	D
	4	10		11	9	5		N	1	7		6	3	2

(八)我們將荀白克作品 OP·31 轉換成數學矩陣如下：

### 1. 原形

以矩陣表示

$$A = [ 1 \quad 7 \quad 9 \quad | \quad 6 \quad 8 \quad N \quad | \quad 5 \quad 4 \quad 10 \quad | \quad 11 \quad 2 \quad 3 \quad ]$$

### 2. 原形移位

矩陣觀點：A 矩陣平移 9 再 mod12

$$\begin{aligned} B &= A + 9[ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 ] \\ &= [ 1 \quad 7 \quad 9 \quad | \quad 6 \quad 8 \quad N \quad | \quad 5 \quad 4 \quad 10 \quad | \quad 11 \quad 2 \quad 3 \quad ] + \\ &\quad [ 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad ] \\ &= [ 10 \quad 16 \quad 18 \quad | \quad 15 \quad 17 \quad 9 \quad | \quad 14 \quad 13 \quad 19 \quad | \quad 20 \quad 11 \quad 12 \quad ] \\ &\equiv [ 10 \quad 4 \quad 6 \quad | \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad | \quad 2 \quad 1 \quad 7 \quad | \quad 8 \quad 11 \quad N \quad ] \pmod{12} \end{aligned}$$

### 3. 倒影

矩陣觀點：-B 矩陣平移 17 再 mod12

$$\begin{aligned} C &= -B + 17[ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 ] \\ &= [ -10 \quad -4 \quad -6 \quad | \quad -3 \quad -5 \quad -9 \quad | \quad -2 \quad -1 \quad -7 \quad | \quad -8 \quad -11 \quad -N \quad ] + \\ &\quad [ 17 \quad 17 \quad 17 \quad | \quad 17 \quad 17 \quad 17 \quad | \quad 17 \quad 17 \quad 17 \quad | \quad 17 \quad 17 \quad 17 \quad ] \\ &= [ 7 \quad 13 \quad 11 \quad | \quad 14 \quad 12 \quad 8 \quad | \quad 15 \quad 16 \quad 10 \quad | \quad 9 \quad 6 \quad 17 \quad ] \\ &\equiv [ 7 \quad 1 \quad 11 \quad | \quad 2 \quad N \quad 8 \quad | \quad 3 \quad 4 \quad 10 \quad | \quad 9 \quad 6 \quad 5 \quad ] \pmod{12} \end{aligned}$$

### 4. 倒影移位

矩陣觀點：C 矩陣平移 9 再 mod12

$$\begin{aligned} D &= C + 9[ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 ] \\ &= [ 7 \quad 1 \quad 11 \quad | \quad 2 \quad N \quad 8 \quad | \quad 3 \quad 4 \quad 10 \quad | \quad 9 \quad 6 \quad 5 \quad ] + \\ &\quad [ 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad | \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad ] \\ &= [ 16 \quad 10 \quad 20 \quad | \quad 11 \quad 9 \quad 17 \quad | \quad 12 \quad 13 \quad 19 \quad | \quad 18 \quad 15 \quad 14 \quad ] \\ &\equiv [ 4 \quad 7 \quad 8 \quad | \quad 11 \quad 9 \quad 5 \quad | \quad N \quad 1 \quad 7 \quad | \quad 6 \quad 3 \quad 2 \quad ] \pmod{12} \end{aligned}$$


(九)如此，被公認晦澀難親近的「新維也納樂派」，可以用簡單的數學矩陣加法、減法、乘法來表示。只要有原形，所謂的逆形、倒影、逆形倒影、倒影移位…都可以輸入原形在電腦，並在電腦中設定好矩陣變換，即可完成後面另 4 種音樂形態，大大豐富了我們的樂句。

七、以矩陣加法、減法、乘法將「新維也納樂派」的「十二音列作曲法」更清楚明白的解析後，我們想研究：其它樂派雖不像「新維也納樂派」作曲法規定嚴格，但是否也可以使用「數學矩陣」將音樂語言改成數學語言？

(一)被譽為「音樂之父」的巴赫(J.S.Bach)的鉅作—「十二平均律鋼琴曲集」，其被尊稱為「鋼琴的舊約聖經」，我們也將在此以之作研究。如下圖，我們從中發現到巴赫使用了「矩陣平移」。

**PRAELUDIUM I**

BWV 846




平移

平移

**SINFONIA 10**

59



平移

圖 12、十二平均律鋼琴曲集

(二)交響曲之父海頓的作品以及小奏鳴曲中亦出現不少平移、碎形、倒影、逆形(詳細樂譜分析請見附錄二)，而這些都可以用數學矩陣來表示！

八、在流行音樂中，我們亦發現常會使用到平移、碎形、倒影、逆形，如：周杰倫的青花瓷、孫燕姿的遇見、宮崎駿的多多龍、神隱少女…等。(詳細樂譜分析請見附錄三)而這些都可以用數學矩陣來表示！

九、我們的創意：經由這些分析，即使我們不是科班出身，也並非天才作曲家，只要心中湧現一小段旋律，將它輸入電腦(原形)，電腦可經由設定好的矩陣變換，提供我們平移、碎形、倒影、逆形、逆形倒影、倒影移位，豐富我們的樂句也幫我們的曲子做更多延伸，再配合將副歌放在黃金比例的位置，理性的數學幫助感性的音樂尋出規律，使其更平易近人。以下是我們的創作，此曲利用**矩陣變換**也依照**黃金比例**來製作，全曲共有128小節，乘以黃金比例0.618約為79，而至再現部小節數為81，極為接近。

## 旋轉的咖啡杯

Selina&Sherry

呈式部 (原形)

Ukulele 

Uk. 

發展部 (原形移位)

Uk. 

Uk. 

Uk. 


(倒影)

Uk. 

(倒影移位)

Uk. 

再現部

Uk. 

Uk. 

至再現部小節數：81

圖 13、我們的創作曲：旋轉的咖啡杯

## 伍、研究結果

- 一、我們從台灣地區較為大家熟悉的 KK box2008、2009 年年度數位音樂風雲榜榜單前 10 名的華文 歌曲共 20 首中，計算至副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值。發現許多流行歌曲的副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值都符合黃金比例，若我們允許誤差  $\pm 5\%$ ，則比值在 0.568~0.668 均屬黃金分割。結果：在 2008、2009 年的流行歌曲中，我們選的曲子通通符合黃金分割，通過率 100%，而 2010、2011 通過率 80%
- 二、在校園民歌的 8 首曲子中，有 6 首符合黃金分割，約占了  $6/8 * 100\% \doteq 75\%$
- 三、在 10 首西洋經典中，有 7 首符合黃金比例，占了 70%
- 四、5 首小奏鳴曲中，有 4 首在(至再現部小節數)：(第一樂章總小節數)符合黃金分割比例，約占 80%
- 五、根據以上的研究結果，我們也依照黃金比例來製作一首陶笛獨奏曲，曲名叫作「晴空」，全曲共有 32 小節，乘以黃金比例近似值 0.6 為 19.2，而至再現部小節數則為 20，誤差值為 1，極為接近。期待這首曲子能成為一首人人喜愛的「流行金曲」。
- 六、十二平均律是把一組八度音，依照頻率等比分為 12 個『半音』。定義高音 C 與中央 C 的比值為 2，所以後一音為前一音的  $\sqrt[12]{2} = 0.15946$  倍。根據以上等比的概念，又因為弦長與音高(即頻率)成反比，每一個音的弦長都是前一個音的  $\frac{1}{(\sqrt[12]{2})}$  倍，當我們知道中央 C 的弦長即可藉此以弦長調音。



七、從十二平均律，我們注意到了二十世紀現代樂派中的「新維也納樂派」被稱為「十二音列作曲法」。作曲家必需先創作一個包含八度音內十二個半音的「音列原型」，每一個音只能在該音列原型中出現一次，以十二個不重複的半音為規則。以數學聯想，自製一張巧妙的 12x12 數獨之後，用它來理解十二音列的排序規則就好懂。

八、「十二音列作曲法」除了先創作一個「音列原型」，12 個音以反向和倒影的方式重新排列，成為「逆行 (Retrograde)」、「倒影 (Inversion)」和「逆行倒影 (Retrograde Inversion)」四種不同的音列型態。如此限制嚴格的作曲手法，表現出極度抽象的音樂線條，令人望而生畏，但我們以數學矩陣聯想，發現：

(1) 「逆行 (Retrograde)」矩陣觀點：原形矩陣倒著寫過來 = 原形矩陣  $\times \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

(2) 「倒影 (Inversion)」矩陣觀點：(-原形矩陣) 平移 x 再 mod12

例如：C = -A + 18[ 1 1 1 1 ..... 1 ]  
 = [ -3 -7 -9 -11 -1 -N | -10 -2 -4 -6 -8 -5 ] +  
 [ 18 18 18 18 18 18 | 18 18 18 18 18 18 ]  
 = [ 15 11 9 7 17 18 | 8 16 14 12 10 13 ]  
 ≡ [ 3 11 9 7 5 6 | 8 4 2 N 10 1 ] (mod12)

九、如此，被公認晦澀難親近的「新維也納樂派」，可以用簡單的數學矩陣加法、減法、乘法來表示。只要有原形，所謂的逆形、倒影、逆形倒影、倒影移位...都可以輸入原形在電腦，並在電腦中設定好矩陣變換，即可完成後面另 4 種音樂形態，大大豐富了我們的樂句。這真是絕妙的生活應用！

十、以矩陣加法、減法、乘法將「新維也納樂派」的「十二音列作曲法」更清楚明白的解析後，還發現：其它樂派雖不像「新維也納樂派」作曲法規定嚴格，但也常使用到平移、碎形、倒影、逆形，而這些皆可以使用「數學矩陣」，將音樂語言改成數學語言。

十一、經研究發現，流行音樂中也常使用到平移、碎形、倒影、逆形，而這些皆可以使用「數學矩陣」，將音樂語言改成數學語言。我們在舉出許多例子後，自己也試做了一首創作曲：旋轉的咖啡杯。先有一段原形的旋律，透過矩陣變換讓它有原形、倒影、原形移位、倒影移位，並符合黃金分割，期待這首曲子能為大家所肯定。

## 陸、研究結論

一、本組從 KK box2008、2009、2010、2011 華文流行歌中，計算副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值，是否接近**黃金比例近似值 0.618**(可接受的誤差值範圍約在**上下 5%**)，並且發現許多流行歌曲的副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值都符合黃金比例。所以列了以下表格，整理出華文流行歌曲、校園民歌，以及西洋經典之中，副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值最接近黃金比例(約為 0.618)的前十名。

表八、比值最接近黃金比例的前十名

排名	歌名	分類	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值
1	擦肩而過	華文流行	01:08	01:54	0.618
2	沒有如果	華文流行	01:35	02:34	0.617
3	情歌	華文流行	01:11	01:45	0.617
4	妥協	華文流行	01:06	01:47	0.617
5	別再為他流淚	華文流行	00:52	01:24	0.619
6	下雨天	華文流行	01:00	01:37	0.619
7	我愛他	華文流行	01:20	02:09	0.620
8	讓我們看雲去	校園民歌	00:24	00:39	0.615
9	外婆的澎湖灣	校園民歌	00:43	01:10	0.614
10	<b>I Will Always Love You</b>	西洋經典	00:43	01:10	0.614

從上表可以發現，前**七名都是華文流行音樂**，接著才是校園民歌和西洋經典老歌

二、由數據可發現，西洋經典老歌與校園民歌亦符合黃金比例，但**誤差值較大**，而華文流行音樂的比值更接近黃金比例。細究其因：校園民歌普遍較短，因此只要差個一兩秒，比例就會相差甚遠；至於西洋經典老歌存在的問題是，經常全曲不斷重複一段旋律，只有歌詞方面做變化，後來我們又再將一段旋律加以區分，總算分出了呈式部、發展部、再現部，只是這樣每一段的**秒數又偏短**，便與校園民歌存在相同的問題了。因此，我們便多聽各版本的(但主唱者必須是同一個人，以避免因主唱者的風格不同而調整歌曲中的各個原件)，再來計算，以減少誤差。

- 三、音樂的好聽與否，有時很主觀，所以本實驗不採用問卷，而是以 K 歌點播排行。發現：2008 及 2009 年的前十名均符合至副歌總秒數與第一段落處總秒數的比值約等於 0.618 (我們允許誤差  $\pm 5\%$ ，比值在 0.568~0.668 屬黃金分割)足見音樂作曲中存在著黃金比例!
- 四、在研究了流行歌曲與校園民歌，以及西洋經典老歌後，本組還研究了古典音樂。古典音樂沒有副歌，我們從小奏鳴曲的一個樂章中，找尋呈示部、發展部、再現部與總小節數的關係式。發現 (至再現部小節數)：(第一樂章總小節數)亦大多符合黃金分割比例。
- 五、經由上述整理，發現受歡迎的曲子大多都符合黃金比例，於是本組也做了一首創作曲，至再現部之小節數對於整首曲子之小節數的比值，接近黃金比例；本組也以這首歌的旋律為主體，調整其各段(呈式部、發展部、再現部)的小節數，並加以與音樂老師討論，希望這首創作曲，能成為熱門歌曲。
- 六、十二平均律是把一組八度音，依照頻率等比分為 12 個『半音』。定義高音 C 與中央 C 的比值為 2，所以後一音為前一音的 $\sqrt[12]{2}=0.15946$  倍。中間的 12 個半音(中央 Do 到中音 Si)就分別為：1、 $\sqrt[12]{2}$ 、 $(\sqrt[12]{2})^2$ 、 $(\sqrt[12]{2})^3$ …… $(\sqrt[12]{2})^{11}$ 、 $(\sqrt[12]{2})^{12}=2$ ，我們運用數學的等比概念，解決頻率、絃長的調整以及調音問題。再次驗證數學與音樂密不可分!!!
- 七、從十二平均律，我們注意到了二十世紀現代樂派中的「新維也納樂派」被稱為「十二音列作曲法」。作曲家必需先創作一個包含八度音內十二個半音的「音列原型」，每一個音只能在該音列原型中出現一次，以十二個不重複的半音為規則。以數學聯想， $12 \times 12$  數獨正可以用來解決它的要求。
- 八、「十二音列作曲法」除了先創作一個「音列原型」，還有「逆行 (Retrograde)」、「倒影 (Inversion)」和「逆行倒影 (Retrograde Inversion)」四種不同的音列型態。如此限制嚴格的作曲手法，令人望而生畏，但我們以數學矩陣聯想，發現皆可以矩陣變換來解釋。如此，只要有原形，所謂的逆形、倒影、逆形倒影、倒影移位…都可以輸入原形在電腦，並在電腦中設定好矩陣變換，即可完成後面另 4 種音樂形態，大大豐富了我們的樂句。
- 九、我們還發現：其它樂派雖不像「新維也納樂派」作曲法規定嚴格，但也常使用到平移、碎形、倒影、逆形，就連流行音樂也常使用到平移、碎形、倒影、逆形，而這些皆可以

使用「數學矩陣」，將音樂語言改成數學語言。我們在舉出許多例子後，自己也試做了一首創作曲：旋轉的咖啡杯。先有一段原形的旋律，再透過矩陣變換豐富樂句，並符合黃金分割，期待這首曲子能為大家所肯定。

十、展望：將數學矩陣放入音樂作曲解析，對我們而言是非常新鮮有趣的事，未知的領域充滿無限可能及驚喜。矩陣變換還有很多形式，如：伸縮、推移、反矩陣…哪些變換能與作曲有關連，黃金分割又在其中扮演什麼重要角色，數學與音樂還有許多我們可以探索之處呢！

## 柒、參考資料

- 一、翁瑞霖 (2004)- 數學與音樂的對話：探討莫札特音樂的數學應用及其效應，《師大學報》四十九卷第二期
- 二、翁瑞霖 (2006)數學與音樂的對話：探討音樂中的數學應用《科學教育月刊》五月 228 期
- 三、謝佳叡 - 音樂中的數學，《H P M通訊》第二卷第八、九期
- 四、單維彰(2008) - 平均律與對數律，《科學月刊》九月『數·生活與學習』專欄
- 五、心裁國樂譜交流網站，馬水龍音樂教室〈十二音作曲法〉  
(網址: [http://mayasun.idv.tw/topic.asp?TOPIC\\_ID=1287](http://mayasun.idv.tw/topic.asp?TOPIC_ID=1287))
- 六、愛樂電台--電子報(2012/10/8 No.000380)，你不可不知的音樂常識—什麼是十二音列?  
(網址: <http://www.e-classical.com.tw/money/epaper.cfm?id=630>)
- 七、劉志明(1987) - 西洋音樂史與風格，全音樂譜出版社有限公司
- 八、小奏鳴曲集 I - 全音樂譜出版社
- 九、朱怡潔(2008) - 鋼琴動畫館【日本動漫】，麥書國際文化事業有限公司
- 十、J.S.Bach - The Well - Tempered Clavier,全音樂譜出版社
- 十一、J.S.Bach - Inventions,Sinfonia,全音樂譜出版社
- 十二、Keith Snell(1997) - Franz Joseph Haydn Six Easy Sonatas,Neil A.KjosnMusic Company ,4380 Jutland Dr.San Diego,CA. U.S.A.

## 附錄(一)

我們也做了類似「晴空」的**非黃金分割**版本(28 除以 36 約為 0.78，並非在黃金分割範圍內)如下，比較之後，認為：**黃金分割版本較佳**。

### 晴空

呈式部

展開部

再現部(28)

總小節數：36

圖 1、我們的創作曲：非黃金分割版的晴空

## 附錄(二)

交響曲之父海頓的作品以及小奏鳴曲中亦出現不少**平移**、**碎形**、**倒影**、**逆行**，而這些都可以用數學矩陣來表示！

### C 大調奏鳴曲

3

Haydn

6

11

*cresc.*

*f*

*tr*

*f*

*mf*

1 3 2 1 3 3 1

1 1 3 3 5 3

平移

碎形

73

### SONATE ✓

W. A. Mozart

14.

*Allegro*

*dolce*

*legato*

*tr*

*legato*

*mf*

1 3 1 3 2 3 3 2

1 1 1 1 1 1 1 1

逆行

*f*

*mf*

*cresc.*

2 3 2 3 2 3 2 3

2 3 2 3 2 3 2 3

1 2 3 4 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 4 3 2 1

倒影

### 附錄(三)

在流行音樂中，我們亦發現常會使用到平移、碎形、倒影、逆形，如：周杰倫的青花瓷、孫燕姿的遇見、宮崎駿的多多龍、神隱少女…等。而這些都可以用數學矩陣來表示！

#### 青花瓷

#### 遇見

(演唱：孫燕姿)

碎形

## 【評語】 030809

本案分析古典與流行音樂樂曲，提出黃金比例的主副歌長度比例、數學級數與十二行樂理理論。

優點：能舉出一些樂曲實例驗證其理論。

建議方向：對音樂作曲更一般性理論與例外提出更深入之研究。