

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 生活與應用科學科

第三名

030806

水深不深有波則明

學校名稱：花蓮縣立國風國民中學

作者： 國二 楊舒晴 國二 李筠茹 國二 劉邦智	指導老師： 邱齡瑩
---	------------------

關鍵詞：水波、船速、水深

摘要

聲納探測深度對部分聽得到超聲波的水底生物而言，是一種非常嚴重的干擾，因此我們嘗試找出一種不會傷害水底生物，又能探測水底深度的方法。觀察船航行時於船後方的兩道水痕，發現其夾角與水深存在著有趣的關聯。我們藉由文獻探討與設計實驗，驗證水痕夾角

與深度之關係方程式 $\sin \theta = \frac{\sqrt{gh}}{v_b} = 3.13 \frac{\sqrt{h}}{v_b}$ ，利用上述方程式撰寫程式，應用於實際水池與

湖泊之深度測量，並比較此方法與實際測量的結果。我們的方法優點是僅需由水面波痕之夾角與船速就可有效推算出水底深度，我們方法的限制為待測水底若太深，上述方程式需進一步研究修正。

壹、研究動機

許多觀光客來花蓮一定會進行賞鯨，賞鯨時，解說員提到，船隻會利用超聲波的設備探測水深，這讓我們想到了八年級自然科第三章的課程中，提到了聲波的反射與超音波，除此之外，解說員也提到了聲納探測深度對部分海底生物的負面影響，對部分聽得到超聲波的水生生物而言（如海豚、鯨魚等），聲納是一種非常嚴重的干擾，可能會引起牠們集體擱淺或是迷失方向。因此我們嘗試找出一種新的探測水底深度的方法以代替聲納。根據我們以前在花蓮鯉魚潭踩腳踏船的觀察，發現船航行時於船後會製造出兩條水痕，如圖 1-1，且船前進越快或水波的速度越慢，兩條水痕的夾角就越小，因此我們嘗試利用兩條水痕之夾角與船速來推導出水波前進的速度。在網路上搜尋查閱相關資料^[文獻 2]後，我們進一步找到了一個水底深度與水波波速的關係式，我們希望利用上述兩個方程式^[文獻 1]求得一可應用之夾角與深度之關係式，並由實驗探討其可行性。我們嘗試找出除了聲納以外，更多可以探測水深的簡易方法。



圖 1-1 船後兩條水痕線的夾角稱為水波夾角（ 2θ ）

貳、研究目的

船在水面航行時，可以看成是沿著一條直線軌跡，在水面連續丟小石頭，這些小石頭造成的效果就是會以落石處為中心，發出一圈圈往外傳出的水波，多個水波重疊加強就會在船後形成兩條水痕（如上圖1-1），我們把這兩條水痕線的夾角稱為水波夾角。我們的研究目的如下：

- 一、以水波夾角和船速自行推導公式計算出水波速度。
- 二、以水波速度配合淺水波公式^[文獻1]推算出水底深度。
- 三、探討不同的船頭形狀是否會影響水波夾角。
- 四、探討船行駛在淡水或海水（不同表面張力與密度）是否會影響水波夾角。
- 五、以電腦模擬產生船過水痕之動畫，與實際現場觀察的結果互相印證。
- 六、以電腦描繪所測得的完整 3D 水底地形，可從不同角度觀看水位高低之地形變化。

參、研究設備及器材

- 一、無動力之塑膠船（長：28.3cm，寬：12.5cm，高：6.7cm）
- 二、遙控船（長 101cm，寬 22.5cm，高 19cm）
- 三、遙控車（無動力船之動力源）
- 四、充氣游泳池（圓形，直徑 106cm，深 45cm）
- 五、滑輪組：定滑輪 x1、兩倍動滑輪 x2、三倍動滑輪 x2
- 六、邊長 50 公分之正方形壓克力板
- 七、30 公分長尺（最小刻度：1mm）
- 八、7.1 公尺捲尺（最小刻度：1mm）
- 九、1.5 公尺布尺（最小刻度：1mm）
- 十、釣竿 5m 長、釣魚線 8mm 粗，12m 長
- 十一、1440x1080 6029kbps 高畫質攝影機
- 十二、個人電腦（包含下列軟體）

Visual Studio Express 2012 for Desktop

FreeGLUT 2.8.0

Google SketchUp 8

Microsoft Excel

Adobe PhotoShop CS6 Extended

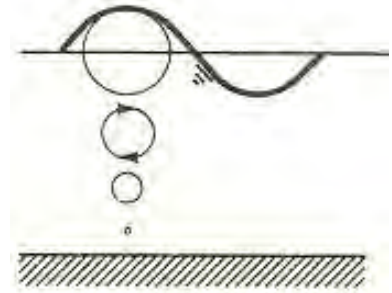
線上影像處理軟體 (<http://pixlr.com/editor/>)

肆、研究過程及方法

一、文獻探討（實驗原理）

（一）水波波速和水深度的關係

七年級自然科的課程中，我們學到波速只和介質的種類與狀態有關，但實際上，水波的波速卻與水深有關^[文獻7]。當水面受到外力擾動時，水的表面粒子會進行圓周運動，進而將能量傳遞出，依據波長與水深度的比例，又可分為深水波與淺水波。水波在深水波比淺水波傳得快，主要是因為進入淺水區的時候，傳遞介質的水分子作圓周運動時比較容易受到水底的影響（如摩擦等因素），進而減慢水波傳遞的速度。



$$kh > \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{h}{L} > \frac{1}{2}\right)$$

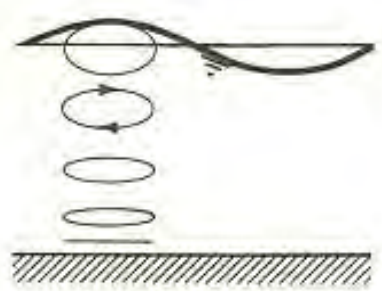
圖 4-1 深水波示意圖

1.若水深度 h 與波長 λ 之關係為 $h > \frac{\lambda}{2}$ 時，為深水波（如圖 4-1 所示），此時波速 v 只與水波波長 λ 有關：

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = 1.25\sqrt{\lambda} \dots\dots①$$

2.若水深度 h 與波長 λ 之關係為 $h < \frac{\lambda}{20}$ 時，為淺水波（如圖 4-2 所示），此時波速 v 只與水深度 h 有關：

$$v = \sqrt{gh} = 3.13\sqrt{h} \dots\dots②$$



$$kh < \frac{\pi}{10}$$

$$\left(\frac{h}{L} < \frac{1}{20}\right)$$

圖 4-2 淺水波示意圖

（二）水波夾角、波速和船速的關係

七年級的課程中，並沒有探討波源速度與波速的關係，因此與老師討論有關船行駛後方的水痕夾角關係。由文獻探討^[文獻7]可知：當波源速度大於波速時，會形成震波（或稱弓形波）。如右圖 4-3，將船前進的直線、船後的一道水痕線、與水波前進的直線相連，可得一個直角三角形，由國中所學之直角三角形與參考資料敘述，將夾角的正弦函數與波速、

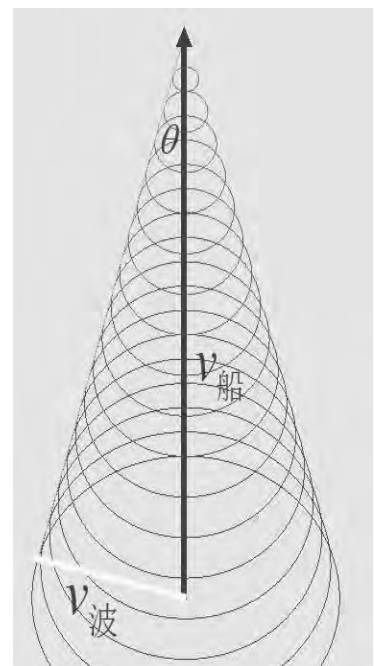


圖 4-3 水波夾角的直角三角形

船速表示成下列關係式：(假設水波與船均為等速移動)

$$\sin \theta = \frac{v}{v_b} \dots \textcircled{3} \quad (\text{其中 } \theta \text{ 為兩水痕夾角的一半, } v \text{ 為水波波速, } v_b \text{ 為船速})$$

(三) 夾角與深度關係

由上述②、③兩個式子，經整理後可得，當為淺水波時深度與夾角正弦值的關係式：

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{gh}}{v_b} = 3.13 \frac{\sqrt{h}}{v_b} \dots \textcircled{4}$$

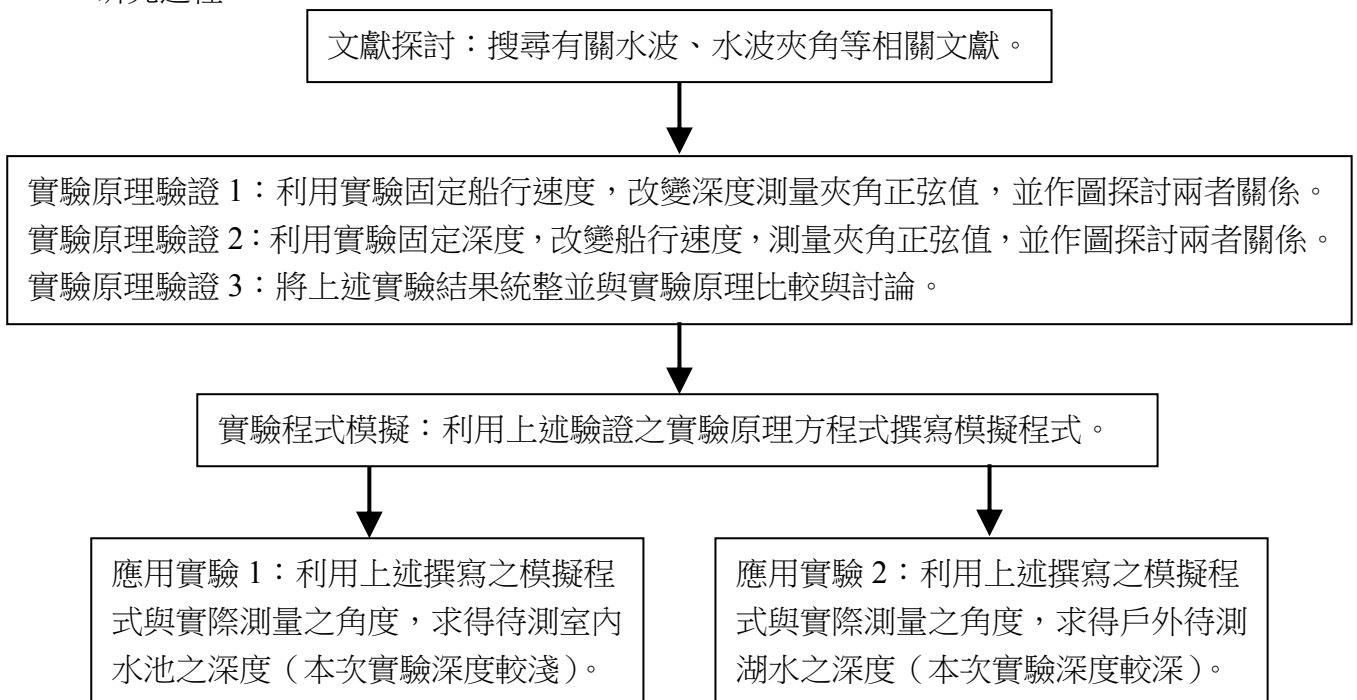
上述之方程式可看出角度與水深度之關係，符合我們動機所期望，本實驗將依此方程作探討與應用。

(四) 重力波方程式

上述深水波與淺水波皆為簡化方程式，經文獻探討發現波速之完整重力波方程式為^[文獻5]：

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \dots \textcircled{5} \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 為水波波長, } v \text{ 為水波波速, } h \text{ 為水深})$$

二、研究過程



三、實驗場地說明

(一) 東華大學校本部東湖 (圖 4-4)

1. 優點：範圍夠廣、本身就有足夠的水量。
2. 缺點：會受到自然風以及池底石頭的影響、無法從正上方拍照。

(二) 學校游泳池 (圖 4-5)

1. 優點：已知深度、本身就有足夠的水量。
2. 缺點：關閉時間才可借來做實驗、無法從正上方拍照。

(三) 充氣塑膠水池 (圖 4-6)

1. 優點：架設測量儀器較為容易、較不會受到自然風的影響、可自行控制水深、調整鹹度與表面張力。
2. 缺點：不夠大 (直徑僅 106cm)、不夠深 (僅 45cm)、使用前要充氣、要自行裝水。



圖 4-4 東湖 in National Dong Hwa University



圖 4-5 學校游泳池



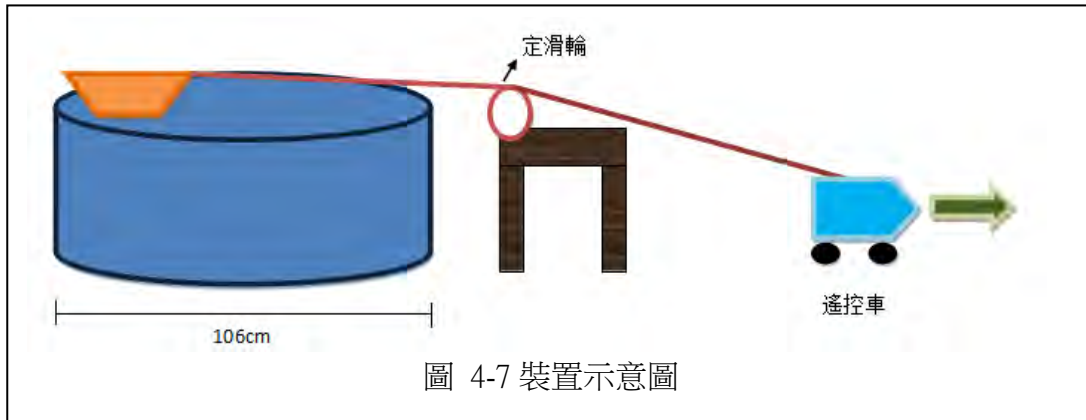
圖 4-6 充氣水池

四、實驗方法：

(一) 實驗一：瞭解能否利用滑輪讓船保持定速前進

實驗方法：

(1)如圖 4-7 架設實驗裝置，並固定水位高度為 20cm。



(2)將釣魚線綁在定速遙控車並將線之末端繫於滑輪組上，配合不同的滑輪組來拉動船以控制船速。

(3)開啟遙控車電源，並控制其馬力開關至最大值。

(4)利用錄影之影像，記錄船行進 100cm 所需之時間，並將所得之數據轉換成速度。

(5)更改滑輪組（圖 4-8）重複上述步驟。

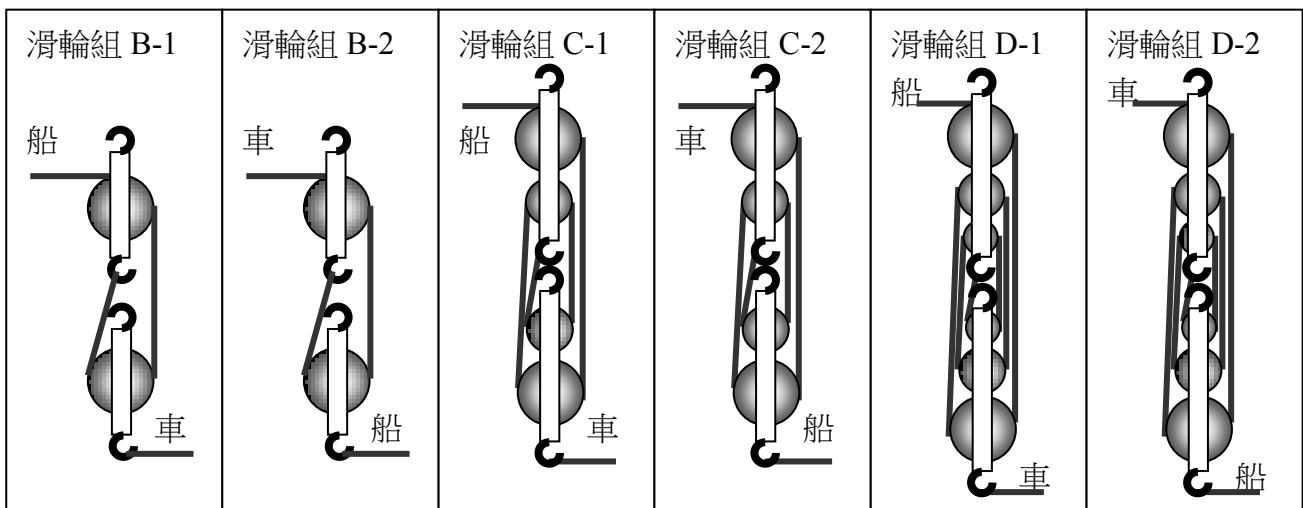


圖 4-8 滑輪組裝置方法與編號

(二) 實驗二：找出水深與水波夾角的關係

實驗方法：

- (1)如實驗一之方法架設實驗裝置。
- (2)將船速固定為 $v_b=333.3(\text{cm/s})$ 。
- (3)分成五次實驗，分別是將塑膠泳池水深 10cm、20cm、30cm、40cm、50cm，錄影船行進過程，將經過水面時的水波夾角記錄，並繪製角度正弦值與深度之關係圖。

(三) 實驗三：找出船速與水波夾角的關係

實驗方法：

- (1)如實驗一之方法架設實驗裝置，水深度控制為 40cm。
- (2)先設定船速為 $v_b=333.3(\text{cm/s})$ ，錄影船行進過程，將經過水面時的水波夾角記錄。
- (3)依照實驗一之方法，更改滑輪組來調整不同船速重複上述步驟。最後將結果繪製角度正弦值與深度之關係圖。

(四) 實驗四：根據船速與水波夾角，估測水深與實際水深之誤差

實驗方法：

- (1)如實驗一之方法架設實驗裝置，調整某一深度。
- (2)先設定船速為 $v_b=333.3(\text{cm/s})$ ，錄影船行進過程，將經過水面時的水波夾角記錄。
- (3)依照實驗一之方法，更改滑輪組來調整不同船速重複上述步驟。利用上述實驗驗證之方程式計算出深度，並與實際測量值比較。
- (4)調整水深至另一深度，重複上述步驟。

(五) 實驗五：探討船頭形狀與水波夾角的關係

實驗方法：

- (1)如實驗一之方法架設實驗裝置，並固定水深度為 10cm。
- (2)依照實驗一之方法，更改滑輪組來調整不同船速。
- (3)如圖 4-9，以保麗龍改變船頭形狀，將原本的尖形改成圓形和方形。
- (4)錄影船行進過程，將經過水面時的水波夾角記錄。

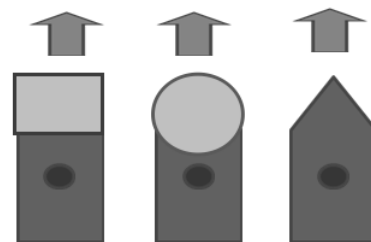


圖 4-9 不同的船頭形狀

(六) 實驗六：探討船行駛在淡水或海水時，不同表面張力與密度與水波夾角的關係
實驗方法：

- (1)如實驗一之方法架設實驗裝置，並固定水深度為 10cm。
- (2)依照實驗一之方法，更改滑輪組來調整不同船速。
- (3)將鹽水濃度調成 3.5%模擬海水。錄影船行進過程，將經過水面時的水波夾角記錄。
- (4)更改溶液為水加入洗碗精以改變表面張力，將經過水面時的水波夾角記錄。

(七) 實驗七：實地至戶外以遙控船實驗，根據水波夾角和船速，推算出湖的水深
實驗方法：

- (1)將遙控船在水面上前進的過程錄下。
- (2)利用線上地圖裝置估算遙控船跑的距離。
- (3)截取影片中的圖片，以影像處理軟體轉正成正上方拍攝下的情況（船上紅板轉正為正方形），並量出水波夾角，如圖 4-10。
- (4)根據所記錄的水波夾角和船速，利用驗證之方程式估算出湖的水深。

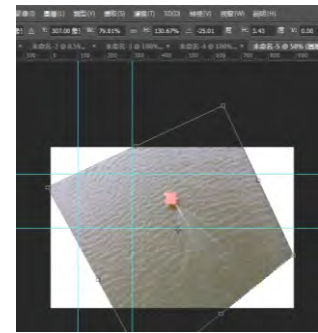


圖 4-10 影像扭曲為正上方拍攝

(八) 實驗八：用釣竿鉛錘法測量東湖景觀橋下十個點的實際水深，再利用重力波公式，計算橋下十個點的總誤差，找出得到最小誤差的水波波長。實驗七結果發現水深超過一公尺，利用淺水波公式的誤差會快速增加，因此我們嘗試利用更完整的重力波公式，希望可以應用到水深超過一公尺的地點。但重力波公式需要水波波長，我們發現從影片中無法觀測出明顯的水波波長，因此，本實驗嘗試根據用釣竿鉛錘法測量橋下的實際水深，加上船速、與水波夾角的資訊，利用重力波公式，計算橋下十個點的總誤差，找出得到最小誤差的水波波長，作為水波波長的估計值。

實驗方法：

- (1) 用釣竿鉛錘法，釣線上用膠帶做刻度記號，釣線下綁鉛錘，測量東湖景觀橋下十個點的實際



圖 4-11 用釣竿鉛錘法測量東湖景觀橋下實際水深

水深，如圖 4-11。

- (2) 固定船速，在橋底橫向直線航行。
- (3) 以影像處理軟體轉正後，量出水波夾角。
- (4) 根據實際水深、船速、與水波夾角，利用重力波公式，計算橋下十個點的總誤差，找出得到最小誤差的水波波長，作為水波波長的估計值。

(九) 實驗九：根據實驗八估算的水波波長，再利用重力波公式，推算非橋下的其他地點的水深，並描繪出完整東湖的 3D 水底地形。

實驗方法：

- (1) 遙控船沿著 7 條橫線與 7 條縱線在東湖上定速航行，如圖 4-12。
- (2) 對於每個橫線與縱線的交會點，量出夾角。
- (3) 根據實驗八估算的水波波長，再加上船速與水波夾角等資訊，利用重力波公式推算水深。
- (4) 對於每個橫線與縱線的交會點，取橫線與縱線推算水深的平均值。
- (5) 將這 49 個點的水深資訊用 Excel 匯出成 csv 檔，再用 Google Sketchup 的 cloud points 匯入 csv 檔的水深資訊，描繪完整東湖的 3D 水底地形。



圖 4-12 遙控船定速航行線

伍、實驗結果

一、實驗一：

(一) 數據：遙控車固定速度 $v_c = 100\text{cm}/0.6\text{sec} = 166.7(\text{cm}/\text{sec})$ ，固定水深 40cm。

滑輪組	船行走 100cm 之時間 t(s)	船速 v_b (cm/s)	備註
定滑輪	0.60	166.7	約等於 v_c
滑輪組 B-1	0.30	333.3	約等於 $2v_c$
滑輪組 B-2	1.2	83.33	約等於 $0.5v_c$
滑輪組 C-1	0.15	666.7	約等於 $4v_c$
滑輪組 C-2	2.4	41.67	約等於 $0.25v_c$
滑輪組 D-1	0.1	1000	約等於 $6v_c$
滑輪組 D-2	3.6	27.78	約等於 $0.17v_c$

(二) 結果：可以不同滑輪組控制船速為車速之 $\frac{1}{6}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、 $\frac{1}{2}$ 倍、1 倍、2 倍、4 倍、6 倍，並確實以不同倍率讓小船定速前進。

二、實驗二：

(一) 數據：船速固定 $v_b = 333.3(\text{cm}/\text{sec})$

水深 h (cm)	水波夾角 θ (度)	$\sin\theta$
10.0	18.0	0.31
20.0	24.0	0.41
30.0	30.0	0.50
40.0	36.0	0.59
50.0	43.0	0.68

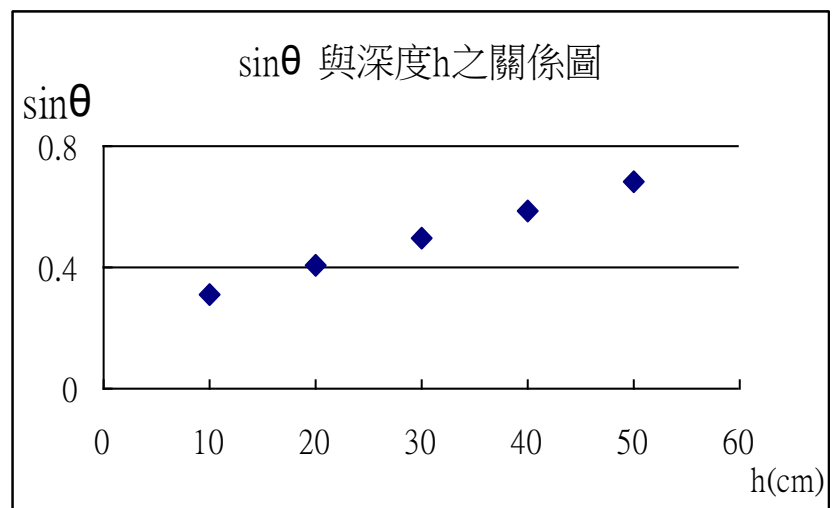


圖 5-1 $\sin\theta$ 與深度 h 之關係圖

(二) 結果：水愈深，水波夾角愈大

三、實驗三：

(一) 數據：遙控車固定速度 $v_c = 100\text{cm}/0.6\text{sec} = 166.7(\text{cm}/\text{sec})$ ，固定水深 40cm 。

船速 v_b (m/s)	$1/v_b$ (s/m)	水波夾角 θ (度)	$\sin\theta$
1.6670	0.5999	59.0	0.86
3.3340	0.2999	26.0	0.44
6.6680	0.1500	12.0	0.21
10.002	0.1000	8.0	0.14

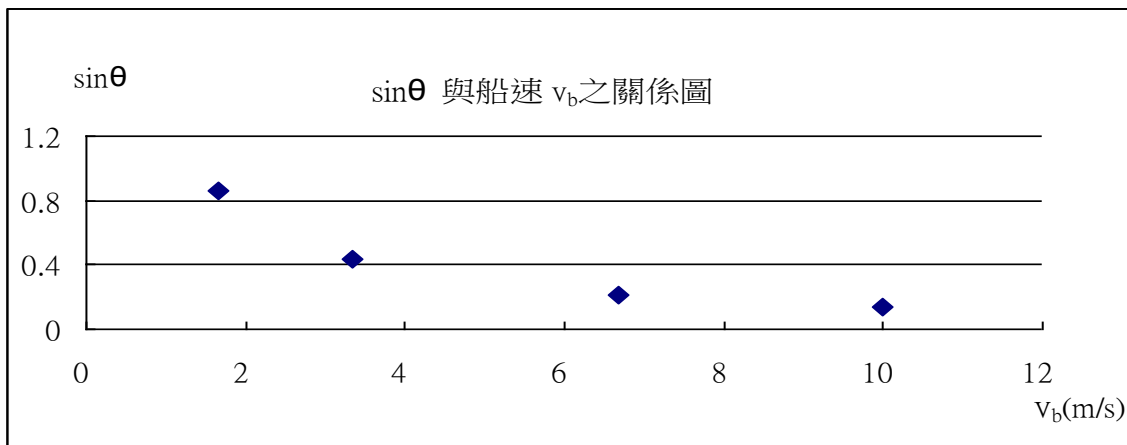


圖 5-2 $\sin\theta$ 與船速 v_b 之關係圖

由圖 5-2 可看出 $\sin\theta$ 和船速 v_b 成負相關，因此做圖 5-3 $\sin\theta$ 和船速 v_b 倒數之關係圖

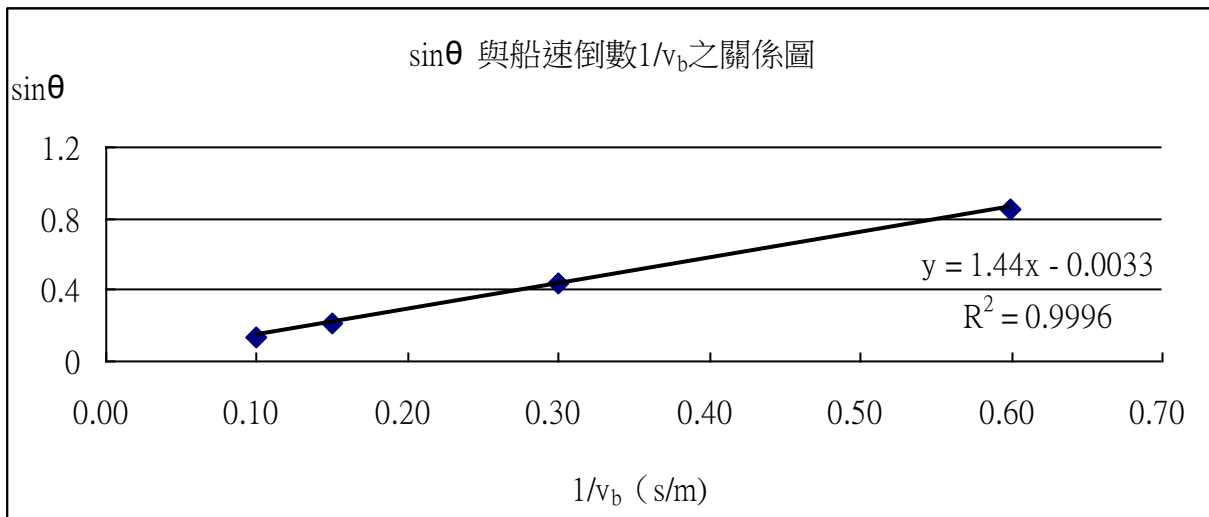


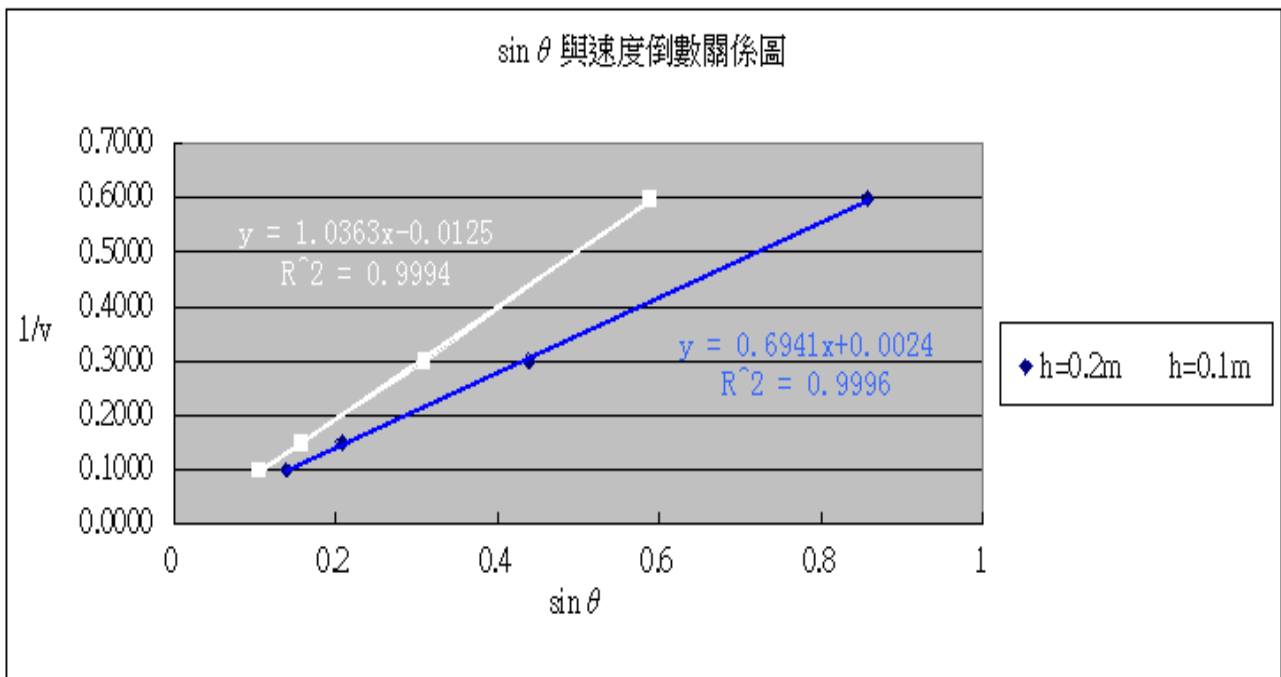
圖 5-3 $\sin\theta$ 與船速 v_b 倒數之關係圖

(二) 結果：船速愈快，水波夾角愈小，符合夾角方程中 $\sin\theta$ 和船速成反比。

四、實驗四

(一) 數據：

船速 v_b (m/s)	$1/v_b$ (s/m)	水波夾角 θ (度)	$\sin \theta$	估測深度 h (m)	實際深度 H (m)	百分誤差(%)
10.000	0.1000	8	0.14	0.198	0.2	1.0
6.6670	0.1500	12	0.21	0.196	0.2	2.0
3.3330	0.3000	26	0.44	0.218	0.2	-9.0
1.6670	0.5999	59	0.86	0.208	0.2	-4.0
10.000	0.1000	6	0.10	0.112	0.1	-12.0
6.6670	0.1500	9	0.16	0.111	0.1	-11.0
3.3330	0.3000	18	0.31	0.108	0.1	-8.0
1.6670	0.5999	36	0.59	0.098	0.1	2.0



結論：估測水深與實際水深只有非常小的誤差。

五、實驗五

(一) 數據：固定水深 10cm。

船速 v_b (m/s)	尖頭	圓頭	方頭
	水波夾角 θ (度)	水波夾角 θ (度)	水波夾角 θ (度)
1.6670	59	58	58
3.3340	26	26	27
6.6680	12	12	12
10.002	8	8	8

(二) 結果：同一船速下水波夾角差異很小，我們推論船頭形狀對水波夾角的影響不大。

六、實驗六

(一) 數據：固定水深 10cm。

船速 v_b (m/s)	淡水	海水	泡泡水
	水波夾角 θ (度)	水波夾角 θ (度)	水波夾角 θ (度)
1.6670	59	60	58
3.3340	26	26	26
6.6680	12	11	12
10.002	8	8	8

(二) 結果：同一船速下水波夾角差異很小，因此我們推論不同表面張力與密度對水波夾角的影響不大。

七、實驗七

(一) 數據：固定船速 $v_b = 425(\text{cm}/\text{sec})$

位置編號	水波夾角 θ (度)	$\sin \theta$	估算波速 v (m/s)	估測深度 h (cm)	實際深度 H (cm)	百分誤差 (%)
1	27	0.454	192.9	38.0	42	-9.5
2	29	0.485	206.0	43.3	53	-18.2
3	31	0.515	218.9	48.9	65	-24.8
4	33	0.545	231.5	54.7	97	-43.6
5	34	0.559	237.7	57.7	103	-44.0
6	34	0.559	237.7	57.7	102	-43.5
7	33	0.545	231.5	54.7	95	-42.4
8	31	0.515	218.9	48.9	68	-28.1
9	32	0.530	225.2	51.8	63	-17.8
10	30	0.500	212.5	46.1	50	-7.8

(二) 結果：戶外實際水深由釣竿鉛錘法測得，我們發現可由水波夾角估算出東華大學東湖湖水大致深度。但我們也發現若水深超過一公尺，利用淺水波公式的誤差會快速增加。實驗八將嘗試藉由找到水波波長，並改用重力波公式，解決這個問題。



圖 5-5 東湖深度分佈圖(未考慮波長)

八、實驗八

(一) 數據：船速固定 $v_b = 425(\text{cm}/\text{sec})$

(二) 結果：戶外實際操作可以根據重力波公式，計算橋下十個點的總誤差，找出得到最小誤差的水波波長為 $389(\text{cm})$ ，因此，我們遙控船在東湖上產生的水波波長為 $389(\text{cm})$ 。

水波角度	水波速度	實際水深	估測水深													
27	193	42	45	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44
29	206	53	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	53	53	53	53
31	219	65	67	67	67	67	67	66	66	66	66	66	66	66	66	65
33	231	97	89	88	88	87	87	86	86	86	85	85	84	84	84	
34	238	103	109	108	107	106	105	104	103	102	101	101	100	99	99	
34	238	102	109	108	107	106	105	104	103	102	101	101	100	99	99	
33	231	95	89	88	88	87	87	86	86	86	85	85	84	84	84	
31	219	68	67	67	67	67	67	66	66	66	66	66	66	66	65	
32	225	63	76	76	76	76	75	75	75	75	74	74	74	74	73	
30	213	50	60	60	60	60	60	60	59	59	59	59	59	59	59	
		總誤差	58	56	54	53	51	50	48	48	50	52	53	55	57	
		水波波長	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	

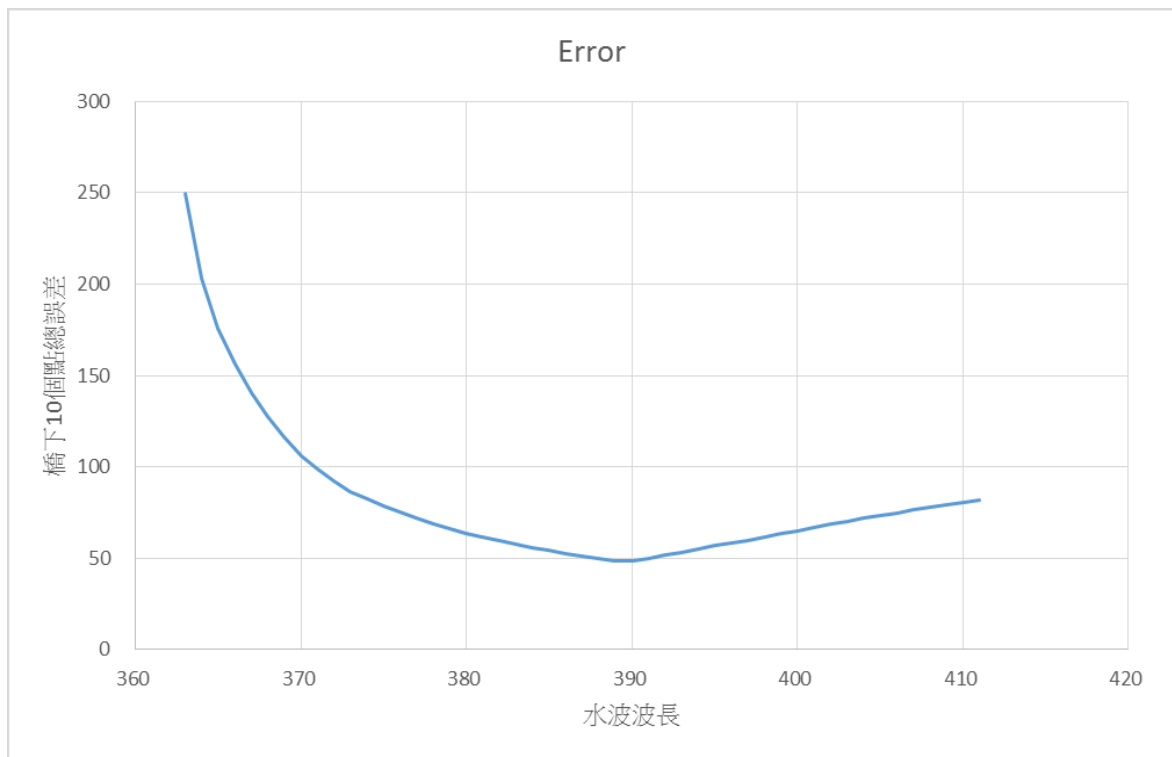


圖 5-6 深度誤差與水波波長關係圖

九、實驗九

(一) 數據：船速固定 $v_b = 425(\text{cm}/\text{sec})$ ，水波波長 = 389(cm)。

位置編號	水波夾角 θ (度)	$\sin \theta$	估算波速 v (m/s)	估測深度 h (cm)	實際深度 H (cm)	百分誤差 (%)
1	27	0.454	192.9	44.2	42	5.3
2	29	0.485	206.0	53.7	53	1.2
3	31	0.515	218.9	66.3	65	2.0
4	33	0.545	231.5	86.0	97	-11.3
5	34	0.559	237.7	103.1	103	0.1
6	34	0.559	237.7	103.1	102	1.1
7	33	0.545	231.5	86.0	95	-9.4
8	31	0.515	218.9	66.3	68	-2.5
9	32	0.530	225.2	74.8	63	18.7
10	30	0.500	212.5	59.4	50	18.9

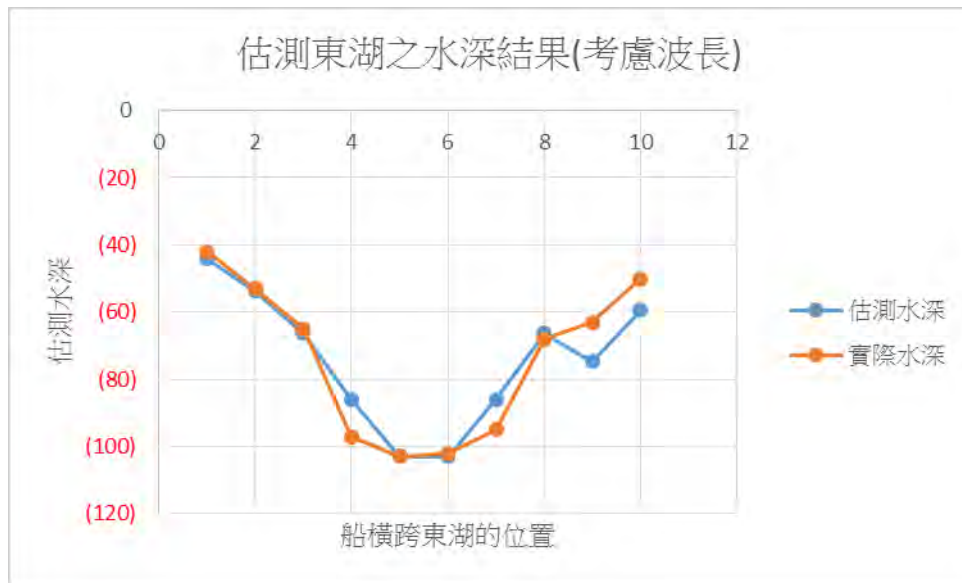


圖 5-7 東湖深度分佈圖(考慮波長)

(二) 結果：戶外實際操作結果如圖 5-7，經考慮波長並改用重力波公式後，誤差明顯降低。所估算東湖不同地點的湖水深度，如下表(單位:m)，並可描繪出完整東湖的 3D 水底地形，如圖 5-8，可從不同角度觀看水位高低之地形變化。

縱向	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-0.37	-0.37	-0.49	-0.40	-0.44	-0.40	-0.37
-2	-0.40	-0.75	-0.75	-0.86	-0.75	-0.66	-0.44
-1	-0.37	-0.66	-1.03	-1.03	-0.86	-0.86	-0.40
0	-0.40	-0.59	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03
1	-0.40	-0.54	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03
2	-0.37	-0.49	-0.75	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03
3	-0.37	-0.37	-0.66	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03

橫向	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-0.37	-0.37	-0.49	-0.40	-0.44	-0.40	-0.37
-2	-0.40	-0.75	-0.66	-0.86	-0.75	-0.66	-0.40
-1	-0.37	-0.66	-0.86	-1.03	-0.86	-0.86	-0.66
0	-0.40	-0.59	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03	-0.75
1	-0.40	-0.54	-1.03	-0.86	-1.03	-1.03	-1.03
2	-0.40	-0.49	-0.75	-1.03	-1.03	-0.86	-1.03
3	-0.37	-0.37	-0.66	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03

(橫向+縱向)/2	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-0.37	-0.37	-0.49	-0.40	-0.44	-0.40	-0.37
-2	-0.40	-0.75	-0.71	-0.86	-0.75	-0.66	-0.42
-1	-0.37	-0.66	-0.95	-1.03	-0.86	-0.86	-0.53
0	-0.40	-0.59	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03	-0.89
1	-0.40	-0.54	-1.03	-0.95	-1.03	-1.03	-1.03
2	-0.39	-0.49	-0.75	-1.03	-1.03	-0.95	-1.03
3	-0.37	-0.37	-0.66	-1.03	-1.03	-1.03	-1.03

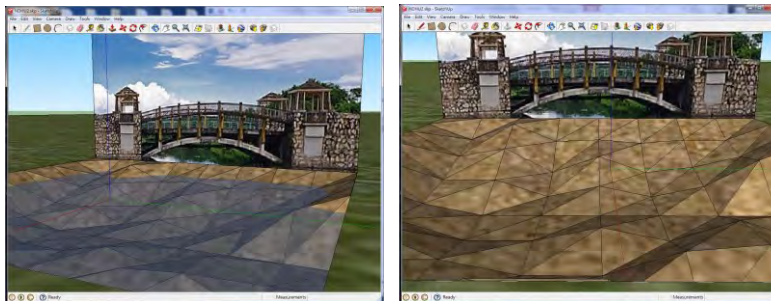


圖 5-8 以 Google Sketchup 描繪出完整東湖的 3D 水底地形

陸、討論

- 一、進行了所有實驗後，我們嘗試利用現有的公式寫出一只電腦程式，它使用 C++ 搭配 OpenGL (FreeGLUT) 函式庫進行撰寫，能模擬出船前進產生水痕之動畫，可同實際現場觀察之後結果互相印證之。

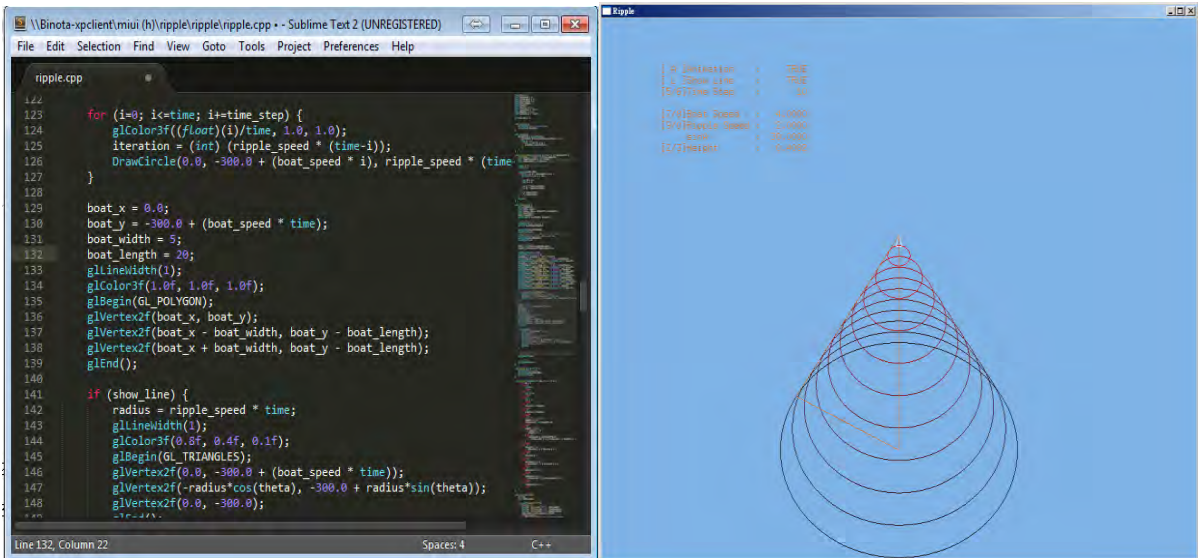


圖 6-1 電腦模擬結果

- 二、由實驗一的數據計算出船行駛的速度得到，若假設船速為 $v_{\text{船}}$ ，則用兩倍省力滑輪組可得船速為 $2v_{\text{船}}$ 用四倍省力滑輪組控制可得船速為 $4v_{\text{船}}$ ，用六倍省力滑輪組控制可得船速為 $6v_{\text{船}}$ ，用兩倍省力滑輪組車船對調控制可得船速為 $\frac{v_{\text{船}}}{2}$ ，用四倍省力滑輪組車船對調控制可得船速為 $\frac{v_{\text{船}}}{4}$ ，用六倍省力滑輪組車船對調控制可得船速為 $\frac{v_{\text{船}}}{6}$ 。

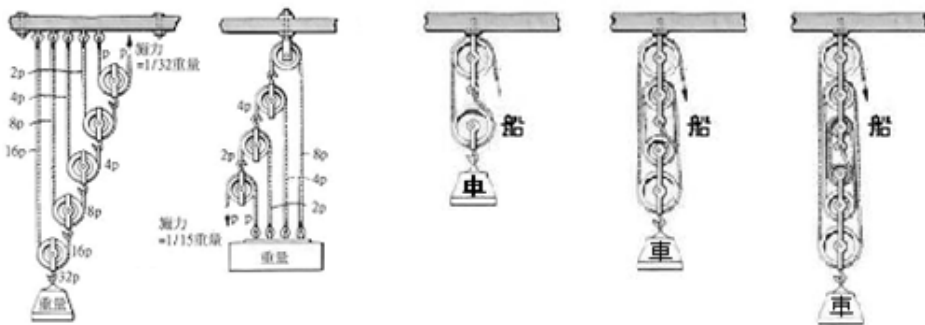


圖 6-2 動靜滑輪的巧妙組合可得到更多不同的倍率

- 三、 由實驗二的結果可以知道，在相同船速下當水池的水越深，水波的夾角越大。並依實驗原理，將 $\sin \theta$ 與深度 h 開平方作圖，如圖 6-3

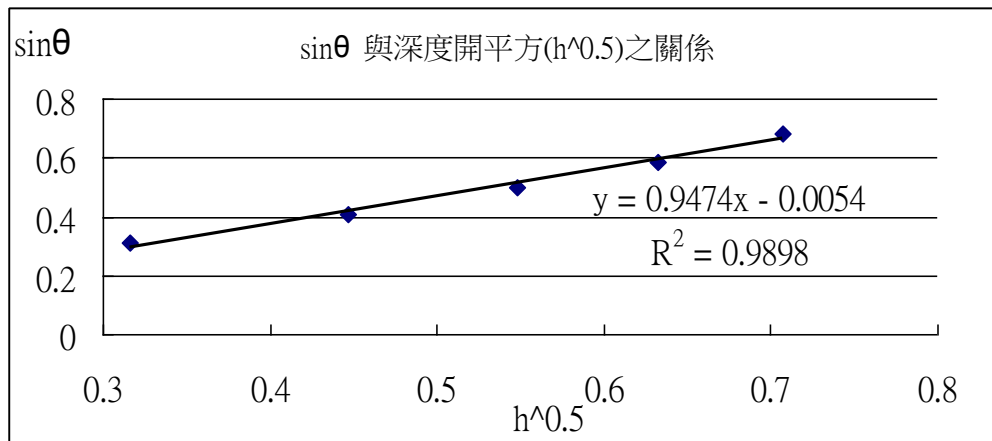


圖 6-3 $\sin \theta$ 與深度 h 開平方之關係圖，可看出其線性關係

由上圖可驗證實驗原理中 $\sin \theta \propto \sqrt{h}$

- 四、 由實驗三之結果的 $\sin \theta$ 與船速 v_b 倒數之關係圖中也可看出其線性關係，可驗證

$$\sin \theta \propto \frac{1}{v_b}。由此可知 \sin \theta = \frac{\sqrt{gh}}{v_b} = 3.13 \frac{\sqrt{h}}{v_b} 成立。$$

- 五、 在實驗二中遭遇到影像無法從正上方拍攝，而由不同角度觀測相同狀況下的水波夾角會有不同，所以我們利用影像處理軟體將由非正上方所拍攝的影像做修正；我們將要拍攝的物體上放置一張正方形版，而將拍攝到的非正方形的影像用軟體轉成正方形，如圖 6-4 將影像中看來 116 度的角及梯形轉成 90 度及正方形。

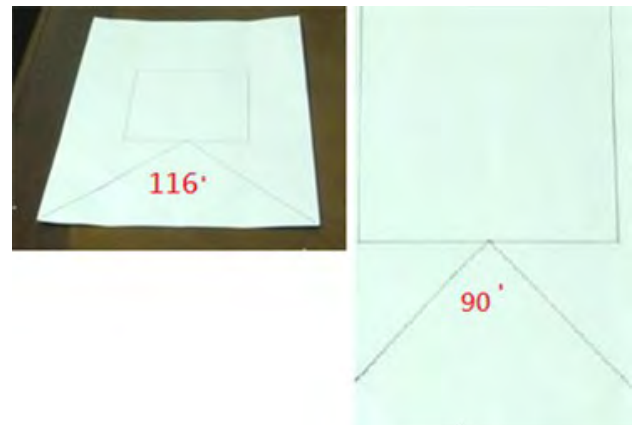


圖 6-4 影像扭曲轉正

- 六、 在實驗三中我們遇到無法有效利用計時器確定船速的大小，所以我們利用拍攝的影片中相鄰的幾幀影像中船跑的距離與影像的時間差來算出船速；影像中已知水池寬，可以此為比例推算船行進的距離，而影像每相鄰兩幀相差 1/30 秒可以得到時間差。

七、 實驗四的數據中可以算出預測的水深與實際水深的比較如下表

船速(cm/sec)	水波夾角(度)	估測水深(cm)	實際水深(cm)	誤差(%)
166.7	59	20.8	20	4.2
166.7	36	9.8	10	-2
333.3	26	21.8	20	9
333.3	18	10.8	10	8.3
666.7	12	19.6	20	-1.9
666.7	9	11.1	10	11
1000	8	19.8	20	-1.1
1000	6	11.2	10	11.5

在使用滑輪時，我們從實驗四中發現誤差，我們推論造成誤差的原因可能是當我們在使用滑輪與遙控車拉動船時，產生摩擦力，以及因繩子是綁在船頭，導致拉動船時船頭翹起，才造成了數據上的誤差。不過測量結果所求得的水深與實際水深的差異約都在 10%內，所以以此方法推論水深的方法可行。

八、 在實驗五中測試不同船頭形狀對水波夾角的影像發現，我們測試的三種船頭在相同船速下的夾角並無明顯的差異，可推論船頭形狀不會影響夾角的呈現，所以實地測試時即使使用不同形式的遙控船並不會影響我們所測到的數值。

九、 實驗六中測試船在不同溶液中行駛所呈現的夾角發現，相同船速下自來水、鹽水及泡泡水的水波夾角差異性不大，推測溶液的種類並不會影響夾角的大小。

十、 在實驗七實地測試過程，由於湖的面積很大，我們只能從岸邊及橋上拍攝影片，所以需要將影像轉正並且利用船體上放置方形板作為比例去計算船行進的距離。

十一、而在實驗七實地測量時我們遇到了一個問題，計算船速時需要湖寬，但由於湖面很寬形狀又不規則，無法有效從岸邊去測量湖的寬度，所以我們利用 google 的衛星影像由正上方的影像比例去推測出湖面寬度大小如下圖，利用操場單邊長度 100 公尺，推測旁邊的湖寬為 57 公尺。



圖 6-5 利用 Google 衛星影像推算湖寬

十二、實驗七發現實際水深超過一公尺

時，用淺水波公式誤差明顯增加，經實驗八考慮波長並改用重力波公式後，可成功降低誤差。

十三、實驗九可測得完整湖底水深，並利用電腦描繪 3D 水底地形，可讓我們從不同角度觀看

水位高低之地形變化。

十四、未來研究方向可以現有基礎繼續延伸：

- (一) 當沒有船在水體上行駛時，我們也可利用一些在水面上活動的物體〔如魚、鴨、烏龜等，如下圖〕所留下的水波夾角及影像中物體移動的速度，帶入波浪公式及我們設計的程式中來推測水深。



圖 6-6 未來展望——鴨子滑過水面（左）、打水漂（右）

- (二) 我們的實驗中鹽水只測試了一種濃度，結果與一般自來水並無明顯差異，若想瞭解到底是否有影響應該可調配更多種濃度的水溶液做深入探討。
- (三) 波浪公式中適用的水體深度 h 與水波波長 λ 的關係是 h 大於 $\frac{\lambda}{2}$ 與小於 $\frac{\lambda}{20}$ 時各有其適用的簡化公式，而若介於 $\frac{\lambda}{20} \leq h \leq \frac{\lambda}{2}$ 時則可用完整的重力波公式。更深的水域其水波有更複雜的變化，我們計畫將來的實驗中做進一步研究探討。

柒、結論

- 一. 我們藉由不同滑輪組的巧妙組合，以定速遙控車拉船，控制得到不同倍率的船速。
- 二. 我們設計電腦程式模擬動畫，說明船後兩條水痕的形成原理。
- 三. 我們發現以水波夾角和船速，配合自行推導公式，可計算出水波速度。
- 四. 我們實驗以水波速度，配合波浪公式，可推算出水底的深度。
- 五. 我們找出一種不用聲納、不會傷害水底生物、又能探測水底深度的簡易方法。
- 六. 我們利用電腦描繪所測得的完整 3D 水底地形，可從不同角度觀看水位高低之地形變化。
- 七. 我們計劃以此基礎延伸，希望可得到更多有趣的水波應用。

捌、參考資料及其他

- [1] 林幼淳&吳朝榮，波浪介紹，國科會高瞻自然科學教學資源平台網站，
<http://case.ntu.edu.tw/hs/wordpress/?p=4174>
- [2] 盛博納，水波物語，科學發展，360 期，2002
- [3] 吳忠緯，靜水水底汙染與優養化研究-以東華大學東湖為例，國立東華大學自然資源管理研究所碩士論文，2005.
- [4] 波，維基百科，<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B3%A2>
- [5] 水波的波速，怪盜的物理異想世界，http://phterm.blogspot.tw/2011/11/blog-post_13.html
- [6] 教育部資訊科技融入教學資源網，波浪的傳遞，
hsmaterial.moe.edu.tw/file/bes/3-2-2-2/3-2-2-2-d.ppt
- [7] 第 45 屆全國中小學科學展覽高中組物理科，稜波微步，新竹女子高中
- [8] 8 年級，自然與生活科技 康軒版
- [9] 8 年級，數學 康軒版

【評語】 030806

1. 本作品提出一套方法來探測水深，推導出公式並驗證其誤差和電導模擬，值得稱許。
2. 本作品的優點是僅由水面船尾波痕夾角和船速即可推出水深公式，方法有創新且又簡便。
3. 若水底地形高低變化大，需有修正的公式來修正，並進一步驗證。