中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030423

多個三角形的重心連線性質探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 張欣雅	張仲凱
國二 陳芊卉	魏子超
國二 蔡佩珊	

關鍵詞：三角形重心、相似三角形

摘要

給定任意△ABC 及 P 點，連$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，再分別作△PAB、△PBC、△PAC 的重心連成P 點重心三角形，由此展開研究，推廣至任意 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，觀察原 n 邊形與 P 點重心 n 邊形的關聯，發現在平面上移動 P 點，P 點重心 n 邊形皆全等；接著嘗試透過尺規作圖反推作出原 n 邊形，探討其存在性及唯一性；進一步地推廣到空間中，作出正四、六、八、十二、二十面體的 P 點重心多面體，跟隨 P 點移動時為全等多面體。

之後，重複疊作 P 點重心三、四、五邊形，可得△$A_kB_kC_k$、四邊形$A_kB_kC_kD_k$、五邊形$A_kB_kC_kD_kE_k$(k=1~n)，分別作重心G_1 、$G_2…G_k$ ，發現 P 與G_1 、$G_2…G_k$共線，又當 n→ ∞時，$\lim_{n\to\infty} G_n = P$。推廣至相異三角形的 P 點重心三角形，發現會有重複疊作 P 點重心三角形的延伸性質。

壹、　研究動機

有次在查找資料時，我們看到第五十二屆全國科展「心心相印」這件作品，發現他們分別將三角形各頂點與特定 P 點連接成三個三角形，這三個三角形再分別作外、重、垂心並連接，發現了一些奇妙的性質。在這件作品中，P 點只限於三角形的內、外、重、垂心，對於重心的相似性質沒有充分證明；在未來展望中提及的「疊代」，我們認為並不是與外心有關，而是和重心相關，這些不足之處引發我們決定把這個幾何題研究得更加完善。

貳、　研究目的

一、探討 P 點重心 n 邊形的性質及原 n 邊形與 P 點重心 n 邊形的關係。

二、給定 P 點重心 n 邊形，用尺規作圖反推任意原 n 邊形，探討其存在性及唯一性。

三、探討 P 點重心多面體的性質及原正 n 面體與 P 點重心多面體的關係。

四、重複疊作 P 點重心 n 邊形之延伸探討。

五、相異三角形的 P 點重心三角形探討。

(註：以上加底線的文字見【肆、研究過程和方法：表一】)

參、　研究工具

一、數學軟體 GSP 4.03

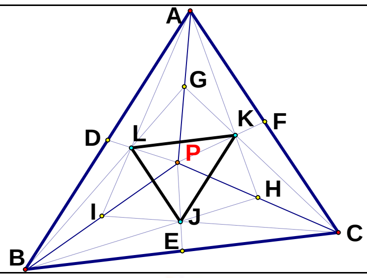
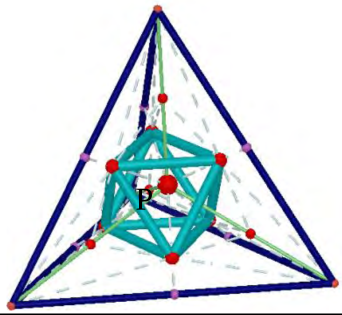
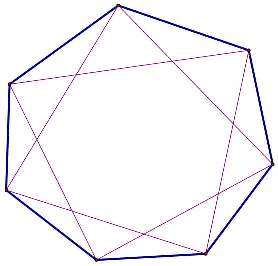
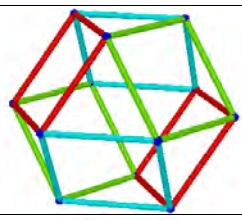
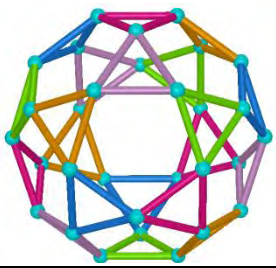
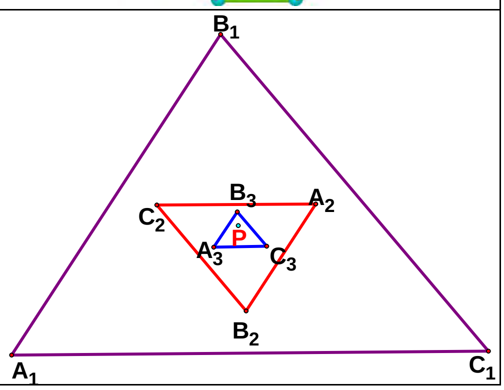
二、數學軟體 Cabri 3D 2.1.2

肆、　研究過程和方法

我們從給定任意△ABC 及任意 P 點，連$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，再分別作△PAB、△PBC、△PAC 的重心連成 P 點重心三角形出發，延伸至 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，觀察原 n 邊形與 P 點重心 n 邊形間的關聯；接著嘗試透過尺規作圖反推作出原多邊形，探討其存在性及唯一性；最後，推廣到空間中，作出正四、六、八、十二、二十面體的 P 點重心多面體，並探討之。

為了使閱讀的過程更簡潔明瞭，在表一中，我們將報告中使用到的專有名詞和自行定義的名詞做簡單的說明。

表一：名詞定義

名稱	意義	圖例
P 點重心 n 邊形	任意 n 邊形各頂點與平面上任意 P 點連接形成的 n 個三角形作重心，並將各相鄰三角形的重心連接形成成 **P 點重心 n 邊形**。(圖中△LJK 為 **P 點重心三角形**)	
P 點重心多面體	n 面體各頂點與空間中任意 P 點連接形成的多個三角形作重心，並將各相鄰三角形的重心連接形成 **P 點重心多面體**。(圖中淡藍色的八面體為 **P 點重心多面體**)	
相隔對角線	將多邊形間隔一頂點的兩頂點相連稱之**相隔對角線**。奇數邊形的多邊形相隔對角線數為奇數，偶數邊形的多邊形相隔對角線數為偶數。	
阿基米德多面體 (Archimedean solids)	由阿基米德發現的一種半正則多面體，總共有 13 種。	
截半立方體 (截半八面體)	所有頂點相臨的面皆以正方形、正三角形、正方形、正三角形的順序排列。	
截半二十面體 (截半十二面體)	所有頂點相臨的面皆以正五邊形、正三角形、正五邊形、正三角形的順序排列。	
重複疊作 P 點重心 n 邊形	作任意 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，並以此 P 點重心 n 邊形與相同 P 點再作 P 點重心 n 邊形，重複此動作延伸至無限(圖中各三角形為一組**重複疊作 P 點重心三角形**)	

一、P 點重心 n 邊形的探討

(一) 三角形

給定任意△ABC，在平面上設任意點 P，做 P 點重心△LJK(如圖一)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{JK} \parallel \overline{AB}$，$\overline{LK} \parallel \overline{BC}$，$\overline{LJ} \parallel \overline{AC}$

【證明】

1. △ABH 和△KJH 中

   $\because \angle AHB$共用且$\overline{AH}$：$\overline{KH}$＝$\overline{BH}$：$\overline{JH}$＝3：1(重心性質)

   ∴△ABH～△JKH(SAS 相似性質)

   $\Rightarrow \angle BAH = \angle JKH$，可推得$\overline{JK} \parallel \overline{AB}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{LK} \parallel \overline{BC}$，$\overline{LJ} \parallel \overline{AC}$(同位角相等)，得證。

【性質二】$\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right):\left(\overline{FE}+\overline{DF}+\overline{DE}\right):\left(\overline{JK}+\overline{LK}+\overline{LJ}\right)=6:3:2$

【證明】

1. 承上，△ABH 和△KJH 中

   ∵相似三角形對應邊成比例

   ∴ $\overline{AB}$：$\overline{KJ}$＝3：1

   同理，$\overline{BC}$：$\overline{LK}$＝$\overline{AC}$：$\overline{LJ}$＝3：1

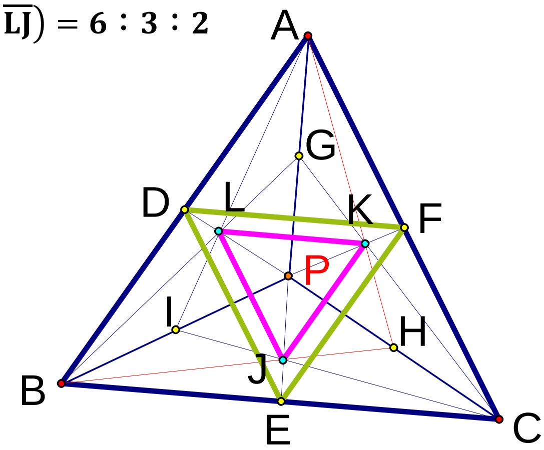
2. ∵三角形兩邊中點連線性質

   ∴ $\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right):\left(\overline{FE}+\overline{DF}+\overline{DE}\right)=2:1$

3. $\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right):\left(\overline{JK}+\overline{LK}+\overline{LJ}\right)=3:1$

   且$\left(\overline{FE}+\overline{DF}+\overline{DE}\right):\left(\overline{JK}+\overline{LK}+\overline{LJ}\right)=3:2$

   $\Rightarrow \left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right):\left(\overline{FE}+\overline{DF}+\overline{DE}\right):\left(\overline{JK}+\overline{LK}+\overline{LJ}\right)=6:3:2$，得證。



圖一

【性質三】給定任意△ABC，移動 P 點位置，△LJK 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)

【證明】

△ABC 和△LJK 中

∵ $\overline{AB}$：$\overline{KJ}$＝$\overline{BC}$：$\overline{LK}$＝$\overline{AC}$：$\overline{LJ}$＝3：1

∴△ABC～△LJK(SSS 相似性質)

⇒給定任意△ABC，移動 P 點位置，△LJK 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)，得證。

(二) 四邊形

給定任意四邊形 ABCD，在平面上設任意點 P，做 P 點重心四邊形 MNOQ(如圖二)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{MN} \parallel \overline{QO} \parallel \overline{AC}$，$\overline{MQ} \parallel \overline{NO} \parallel \overline{BD}$(四邊形 MNOQ 必為平行四邊形)

【證明】

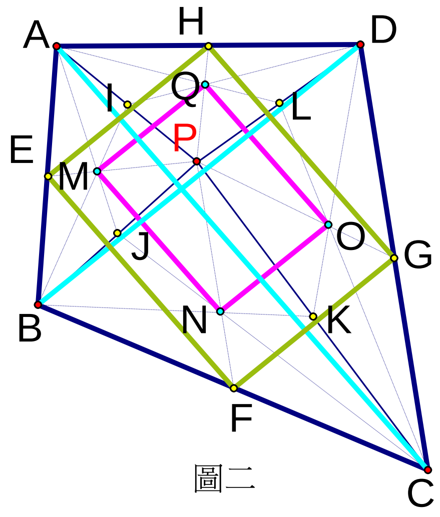
1. △ACJ 和△MNJ 中

   $\because \angle AJC$共用且$\overline{AJ}$：$\overline{MJ}$＝$\overline{CJ}$：$\overline{NJ}$＝3：1(重心性質)

   ∴△ACJ～△MNJ(SAS 相似性質)

   $\Rightarrow \angle ACJ = \angle MNJ$，可推得$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{QO} \parallel \overline{AC}$，$\overline{MQ} \parallel \overline{NO} \parallel \overline{BD}$ (同位角相等)
$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{QO}$，$\overline{MQ} \parallel \overline{NO}$，四邊形 MNOQ 必為平行四邊形，得證。



圖二

【性質二】$2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH}):(\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{QO}+\overline{MQ})=6:3:2$

【證明】

1. 承上，△ACJ 和△MNJ 中
∵相似三角形對應邊成比例
∴ $\overline{AC}:\overline{MN}=3:1$
同理，$\overline{AC}:\overline{QO}=\overline{BD}:\overline{MQ}=\overline{BD}:\overline{NO}=3:1$
2. ∵三角形兩邊中點連線性質(△ABD、△BCD、△ABC、△ACD 中)
∴ $2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH})=2:1$
3. $2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{QO}+\overline{MQ})=3:1$ 且$(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH})=2:1$
$\Rightarrow 2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH}):(\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{QO}+\overline{MQ})=6:3:2$

【性質三】給定任意四邊形 ABCD，移動 P 點位置，四邊形 MNOQ 恆全等不變

【證明】四邊形 ABCD 和四邊形 MNOQ 中
∵ $\overline{AC}:\overline{MN}=\overline{AC}:\overline{QO}=\overline{BD}:\overline{MQ}=\overline{BD}:\overline{NO}=3:1$ 且$\overline{MN} \parallel \overline{QO} \parallel \overline{AC}$，$\overline{MQ} \parallel \overline{NO} \parallel \overline{BD}$
∴四邊形 MNOQ 為平行四邊形(一組對邊平行且相等)
⇒給定任意四邊形 ABCD，則移動 P 點位置，平行四邊形 MNOQ 恆全等不變，得證。

(三) 五邊形

給定任意五邊形 ABCDE，在平面上設任意點 P，做 P 點重心五邊形 QRSTU(如圖三)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{UT} \parallel \overline{AD}$，$\overline{RS} \parallel \overline{BD}$，$\overline{ST} \parallel \overline{CE}$，$\overline{QR} \parallel \overline{AC}$，$\overline{QU} \parallel \overline{BE}$

【證明】

1. △ADO 和△UTO 中
∵ ∠AOD共用且$\overline{AO}:\overline{UO}=\overline{DO}:\overline{TO}=3:1$(重心性質)
∴△ADO～△UTO(SAS 相似性質)
⇒ ∠ADO=∠UTO，可推得$\overline{UT} \parallel \overline{AD}$(同位角相等)
2. 同理，$\overline{RS} \parallel \overline{BD}$，$\overline{ST} \parallel \overline{CE}$，$\overline{QR} \parallel \overline{AC}$，$\overline{QU} \parallel \overline{BE}$ (同位角相等)，得證。

【性質二】$(\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})$：$(\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{JI}+\overline{FJ})$：$(\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT}+\overline{QU})$
$=6：3：2$

【證明】

1. 承上，△ADO 和△UTO 中
∵相似三角形對應邊成比例
∴ $\overline{AD}：\overline{UT}=3：1$
同理，$\overline{AC}：\overline{QR}=\overline{BE}：\overline{QU}=\overline{BD}：\overline{RS}=\overline{CE}：\overline{ST}=3：1$
2. ∵三角形兩邊中點連線性質
∴ $(\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})：(\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{JI}+\overline{FJ})=2：1$
3. $(\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})：(\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT}+\overline{QU})=3：1$ 且 $(\overline{AC}+\overline{BD})：(\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})：(\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{JI}+\overline{FJ})=2：1$
$\Rightarrow (\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})：(\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{JI}+\overline{FJ})：(\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT}+\overline{QU})=6：3：2$

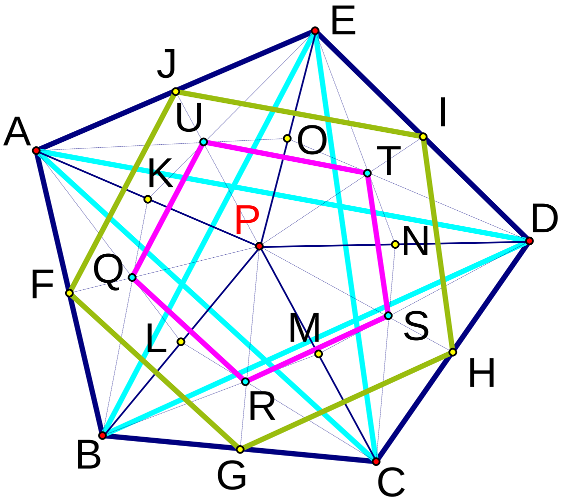
【性質三】給定任意五邊形 ABCDE，移動 P 點位置，五邊形 QRSTU 恆全等不變

【證明】五邊形 ABCDE 和五邊形 QRSTU 中
$\overline{AC}：\overline{QR}=\overline{BD}：\overline{RS}=\overline{CE}：\overline{ST}=\overline{AD}：\overline{UT}=\overline{BE}：\overline{QU}=3：1$
且 $\overline{UT}\parallel\overline{AD}$，$\overline{RS}\parallel\overline{BD}$，$\overline{ST}\parallel\overline{CE}$，$\overline{QR}\parallel\overline{AC}$，$\overline{QU}\parallel\overline{BE}$
⇒給定任意五邊形 ABCDE，則移動 P 點位置，五邊形 QRSTU 恆全等不變，得證。

【性質四】五邊形 QRSTU 任意兩邊不平行

【證明】五邊形 ABCDE 和五邊形 QRSTU 中

1. ∵ $\overline{QR}$ 和 $\overline{RS}$ 相交於一點 R
∴ $\overline{QR}\nparallel\overline{RS}$
同理，$\overline{QR}\nparallel\overline{QU}$
2. ∵ $\overline{QR}\parallel\overline{AC}$、$\overline{ST}\parallel\overline{CE}$，且 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CE}$ 相交於一點 C
∴ $\overline{QR}\nparallel\overline{ST}$
同理，$\overline{QR}\nparallel\overline{UT}$
$\Rightarrow \overline{QR}\nparallel\overline{RS}$、$\overline{QR}\nparallel\overline{QU}$、$\overline{QR}\nparallel\overline{ST}$、$\overline{QR}\nparallel\overline{UT}$
$\Rightarrow \overline{QR}$ 不和任意兩邊平行
3. 同理，五邊形 QRSTU 任意兩邊不平行，得證。



圖三

【小結】

綜合(一)、(二)、(三)的性質和證明，我們歸納如下：

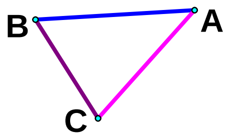
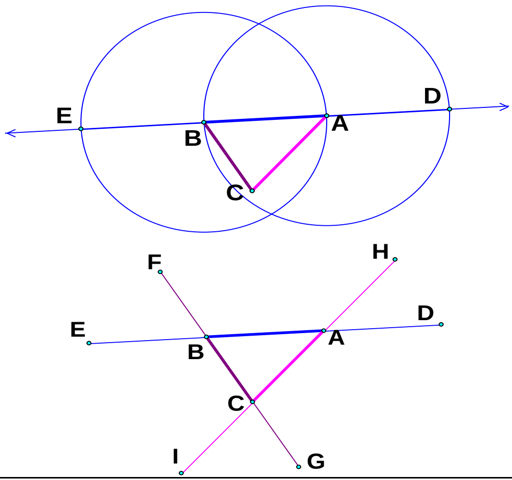
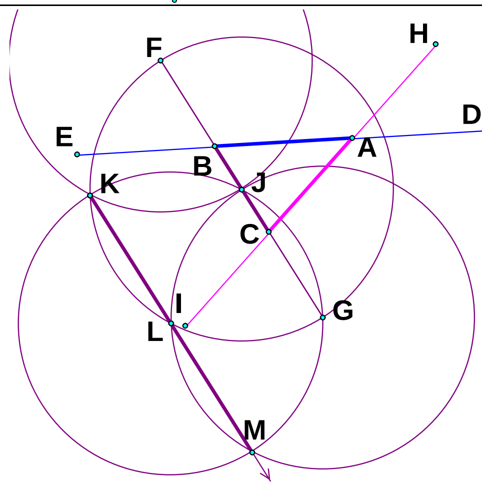
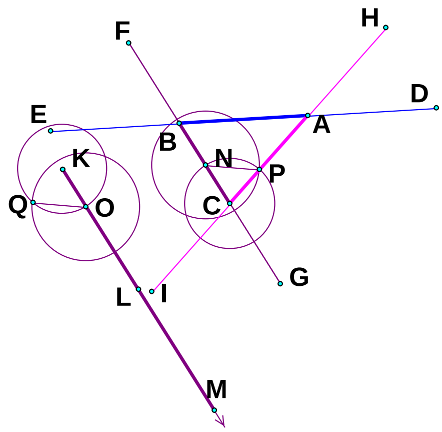
1. P 點重心 n 邊形的邊與原 n 邊形相隔對角線平行。
2. 原 n 邊形相隔對角線和：中點連線：P 點重心 n 邊形周長=6：3：2。
3. 移動 P 點，P 點重心 n 邊形恆全等不變。
4. 原 n 邊形各邊中點連線和：P 點重心 n 邊形周長=3：1

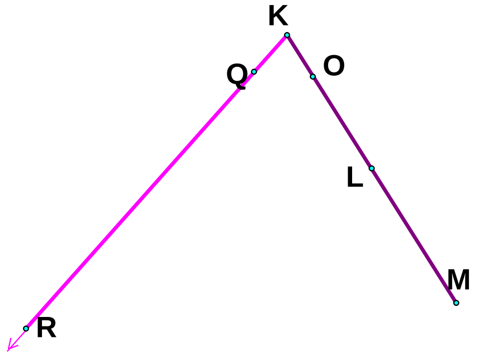
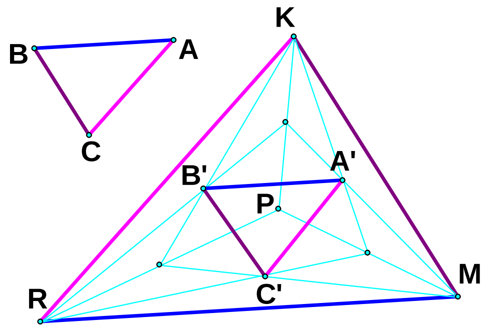
二、P 點重心 n 邊形的反推探討

作出三角形、四邊形、五邊形的 P 點重心多邊形，用尺規作圖依照其性質反推作出原多邊形，並觀察兩者之間的關聯。

(一) 三角形

作一 P 點重心三角形，用尺規作圖反推作其原三角形，作法如下：

步驟	尺規作圖
1.令一任意△ABC為 P 點重心三角形。	
2.作$\overleftrightarrow{AB}$，分別以 A、B 為圓心，$\overline{AB}$為半徑作兩圓，分別交$\overleftrightarrow{AB}$於 E、D 兩點，使$\overline{ED}$為$\overline{AB}$的三倍線段，$\overline{BC}$、$\overline{AC}$以同法求其三倍線段。（在此定義為[三倍線段步驟]）	
3.求$\overline{FG}$中點為 J，分別以 F、J、G 為圓心，$\overline{FJ}$為半徑作三圓，交於 K、L，連$\overrightarrow{KL}$，則$\overline{FG}$為$\overline{KL}$的 2 倍。以 L 為圓心，$\overline{KL}$為半徑作一圓，交$\overrightarrow{KL}$於點 M，$\overline{KM}$=$\overline{FG}$。（在此定義為[平移步驟]）	
4.在$\overline{BC}$取一點 N，以 C、K 為圓心，$\overline{CN}$為半徑各作一圓，O 為圓 K 和$\overline{KM}$的交點，P 為圓 C 和$\overline{AC}$的交點。分別以 N、O 為圓心，$\overline{NP}$為半徑各作一圓，Q 為圓 K 和圓 O 的交點。（在此定義為[移動角度步驟]）	

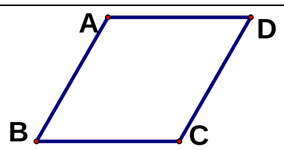
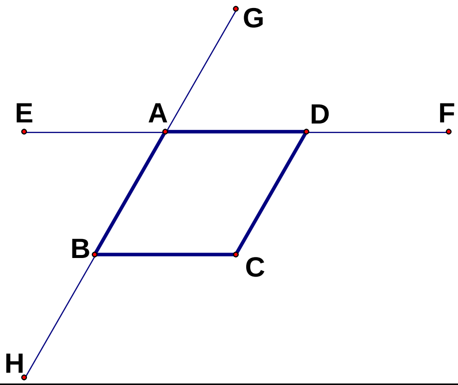
5.作$\overrightarrow{KQ}$，在$\overrightarrow{KQ}$上作 R 點，使$\overline{KR}$=$\overline{HI}$。 （在此定義為[移動線段長步驟]）	
6.連$\overline{MR}$，△KMR 即為所求。	

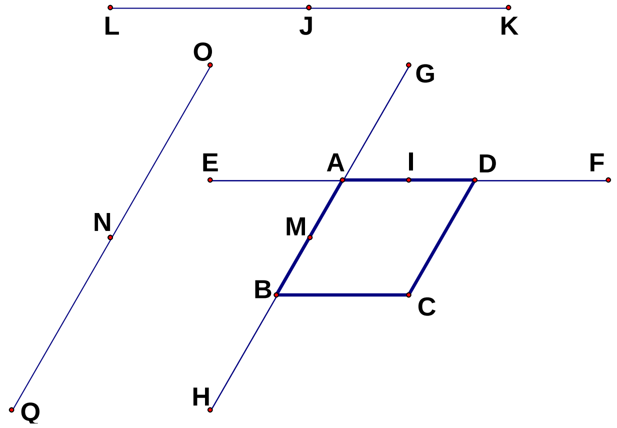
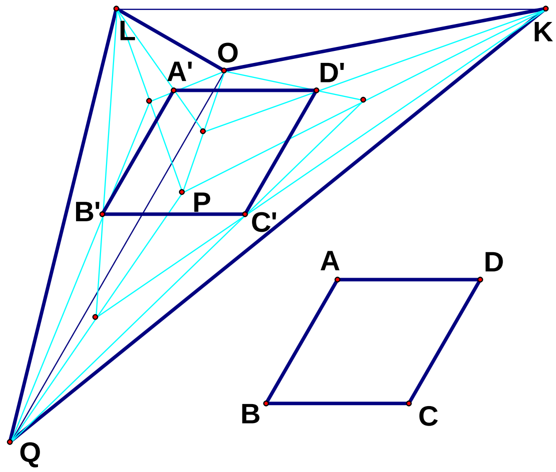
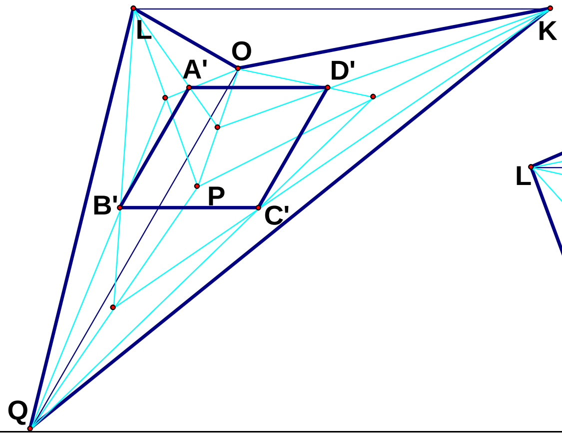
【小結】

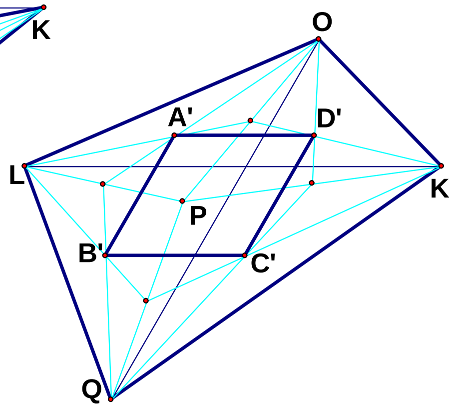
1. 任一個 P 點重心三角形必存在唯一的原三角形。
   證明：依【肆-一-(一)性質一】藉由△SSS 相似性質得證。
2. P 點重心三角形可為任意三角形。

(二) 四邊形

作一 P 點重心四邊形，用尺規作圖反推作其原四邊形，作法如下：

步驟	尺規作圖
1.令一任意平行四邊形 ABCD 為 P 點重心四邊形。	
2.對$\overline{AB}$、$\overline{AD}$作[三倍線段步驟]。	

<table>
<tr>
<td>3.對$\overline{EF}$和$\overline{GH}$作[<u>平移步驟</u>]。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.作$\overline{OL}$、$\overline{OK}$、$\overline{LQ}$、$\overline{KQ}$。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">5.任意改變$\overline{LK}$、$\overline{OQ}$的相對位置，可反推無限多個原四邊形。



</td>
</tr>
</table>

【小結】

1. 一個 P 點重心四邊形可反推出無限多個原四邊形。

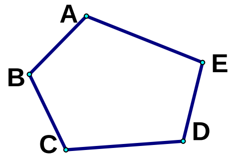
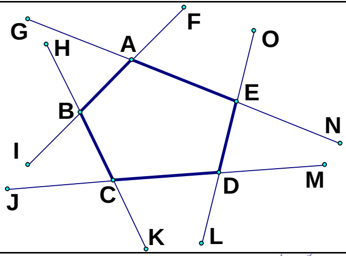
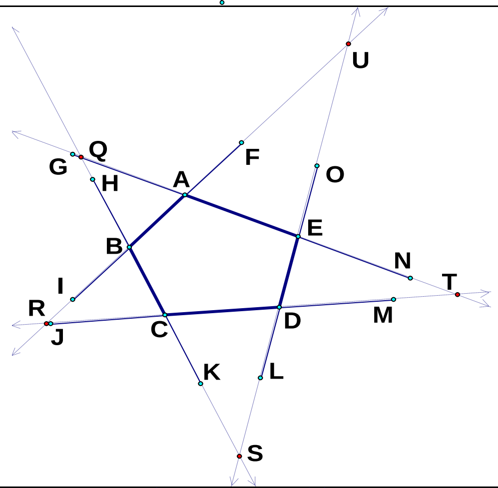
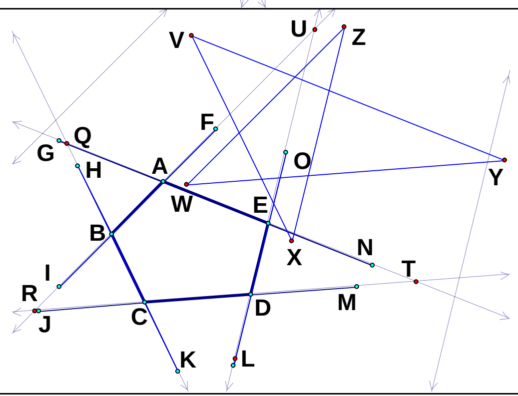
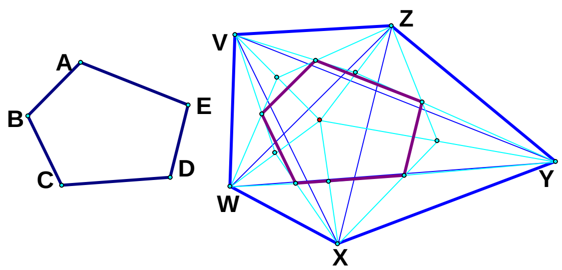
   證明：由步驟 5.圖示中的$\overline{LK}$、$\overline{OP}$顯然得證。

2. P 點重心四邊形必為平行四邊形。

   證明：依【肆–一–(二)性質一】得知。

(三) 五邊形

作一 P 點重心五邊形，用尺規作圖反推作其原五邊形，作法如下：

步驟	尺規作圖
1.令一任意五邊形 ABCDE。	
2.對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{AE}$作[三倍線段步驟]。	
3.將$\overline{FI}$、$\overline{HK}$、$\overline{JM}$、$\overline{LO}$、$\overline{GN}$延長，得交點 Q、R、S、T、U。	
4. 對$\overline{GT}$作[平移步驟]，得$\overline{VY}$。 將∠AQB 和$\overline{VY}$作[移動角度步驟]，並對$\overline{GK}$和$\overrightarrow{VX}$作[移動線段長步驟]。 將∠CSD 和$\overline{VX}$作[移動角度步驟]，並對$\overline{LO}$和$\overrightarrow{XZ}$作[移動線段長步驟]。 將∠EUA 和$\overline{XZ}$作[移動角度步驟]，並對$\overline{FI}$和$\overrightarrow{ZW}$作[移動線段長步驟]。 作$\overline{WY}$。	
5.連$\overline{VW}$、$\overline{WX}$、$\overline{XY}$、$\overline{YZ}$、$\overline{VZ}$。	

【小結】

1. 一個 P 點重心五邊形可反推唯一的原五邊形。
2. P 點重心五邊形必無任意對邊平行。證明：依【肆–一–(三)性質四】得證。

三、P 點重心多面體的探討

接著，將 P 點重心多邊形的概念延伸到空間中，進一步研究探討有否相同的性質與概念。

(一) 正四面體

給定正四面體 D-ABC，在空間中設任意點 P，作 P 點重心多面體(如圖四)，擷取四面體 P-ABC(如圖四)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{\mathbf{ML}} \parallel \overline{\mathbf{AB}}$，$\overline{\mathbf{KM}} \parallel \overline{\mathbf{BC}}$，$\overline{\mathbf{KL}} \parallel \overline{\mathbf{AC}}$

【證明】

1. $\triangle$ABJ 和$\triangle$MLJ 中

   $\because \angle AJB$共用且$\overline{AJ}：\overline{MJ}＝\overline{BJ}：\overline{LJ}＝3：1$(重心性質)

   $\therefore \triangle ABH \sim \triangle JKH$(SAS 相似性質)

   $\Rightarrow \angle BAJ = \angle MLJ$，可推得$\overline{ML} \parallel \overline{AB}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{KM} \parallel \overline{BC}$，$\overline{KL} \parallel \overline{AC}$ (同位角相等)，得證。

【性質二】$\left(\overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}+\overline{\mathbf{AC}}\right)：\left(\overline{\mathbf{EF}}+\overline{\mathbf{FG}}+\overline{\mathbf{EG}}\right)：\left(\overline{\mathbf{ML}}+\overline{\mathbf{KM}}+\overline{\mathbf{KL}}\right)=\mathbf{6：3：2}$

【證明】

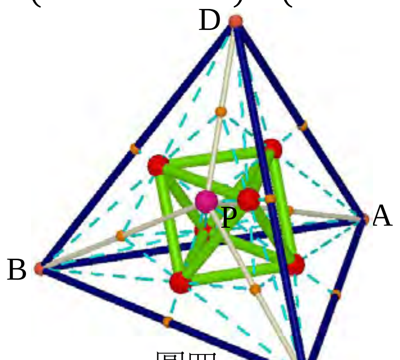
1. 承上，$\because \triangle ABJ \sim \triangle MLJ$，$\triangle BHC \sim \triangle KHM$，$\triangle AIC \sim \triangle KIL$

   $\therefore \overline{AB}：\overline{ML}＝\overline{BC}：\overline{KM}＝\overline{AC}：\overline{KL}＝3：1$

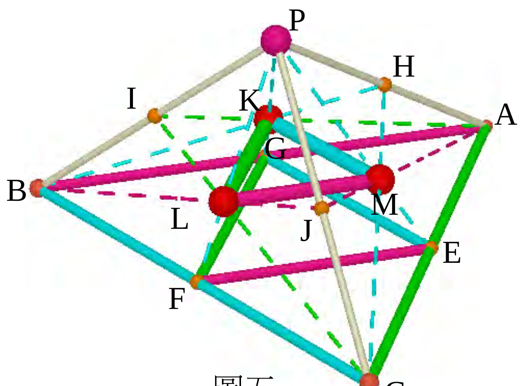
   $\Rightarrow \left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)：\left(\overline{ML}+\overline{KM}+\overline{KL}\right)=3：1$

2. $\because$三角形兩邊中點連線性質

   $\therefore \left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)：\left(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{EG}\right)=2：1$



圖四



圖五

3. $\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)：\left(\overline{ML}+\overline{KM}+\overline{KL}\right)=3：1$

   且$\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)：\left(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{EG}\right)=2：1$

   $\Rightarrow \left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)：\left(\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{EG}\right)：\left(\overline{ML}+\overline{KM}+\overline{KL}\right)=6：3：2$

在此，我們發現平面上【肆–一–(一)性質三】可延伸推廣至空間中，敘述如下：

【性質三】空間中，給定正$\triangle$ABC，移動 P 點位置，$\triangle$MKL 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)

【證明】$\triangle$ABC 和$\triangle$MKL 中

$\because \overline{AB}：\overline{ML}＝\overline{BC}：\overline{KM}＝\overline{AC}：\overline{KL}＝3：1$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle MKL$ (SSS 相似性質)

$\Rightarrow$給定正$\triangle$ABC，則移動 P 點位置，

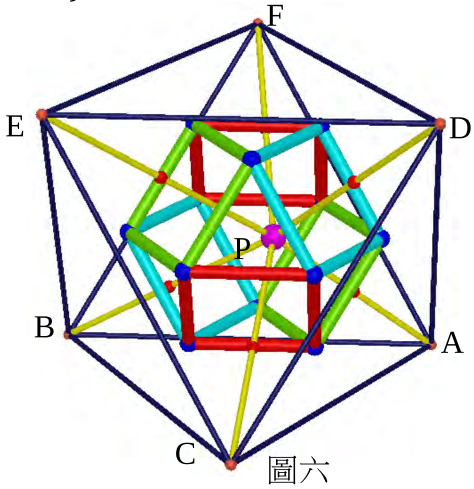
$\triangle$ MKL 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)，得證。

(二) 正八面體

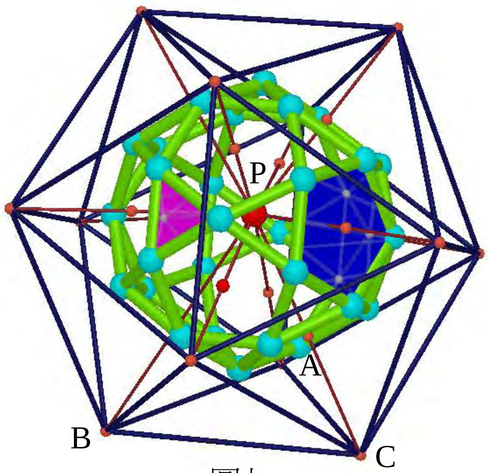
給定正八面體 ABC-DEF，在空間中任取一 P 點，作一 P 點重心多面體，發現其為截半立方體(如圖六)，其性質及證明方式與【肆–三–(一)】相同。

(三) 正二十面體

給定正二十面體，在空間中任取一 P 點，作一 P 點重心多面體，發現其為截半二十面體(如圖七)，其性質及證明方式與【肆–三–(一)】相同。



圖六



圖七

(四) 正六面體

給定正六面體 EFGH-ABCD，在空間中設任意點 P，作 P 點重心多面體，發現其為截半立方體(如圖八)，擷取五面體 P-ABCD(如圖九)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{\mathbf{IJ}} \parallel \overline{\mathbf{LK}} \parallel \overline{\mathbf{AC}}$，$\overline{\mathbf{IL}} \parallel \overline{\mathbf{JK}} \parallel \overline{\mathbf{BD}}$

【證明】

1. $\triangle$ACQ 和$\triangle$LKQ 中

   $\because \angle AQC$共用且$\overline{AQ}:\overline{JQ}=\overline{CQ}:\overline{KQ}=3:1$(重心性質)

   $\therefore \triangle ACQ \sim \triangle LKQ$ (SAS 相似性質)

   $\Rightarrow \angle ACQ=\angle LKQ$，可推得$\overline{LK} \parallel \overline{AC}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{IJ} \parallel \overline{AC}$，$\overline{IL} \parallel \overline{JK} \parallel \overline{BD}$ (同位角相等)，得證。

【性質二】$2(\overline{\mathbf{AC}}+\overline{\mathbf{BD}}):(\overline{\mathbf{RS}}+\overline{\mathbf{ST}}+\overline{\mathbf{TU}}+\overline{\mathbf{RU}}):(\overline{\mathbf{IJ}}+\overline{\mathbf{LK}}+\overline{\mathbf{IL}}+\overline{\mathbf{JK}})=6:3:2$

【證明】

1. $\triangle$ACQ 和$\triangle$LKQ 中

   $\because$相似三角形對應邊成比例

   $\therefore \overline{AC}:\overline{LK}=3:1$(SAS 相似性質)

   同理，$\overline{AC}:\overline{IJ}=\overline{BD}:\overline{IL}=\overline{BD}:\overline{JK}=3:1$

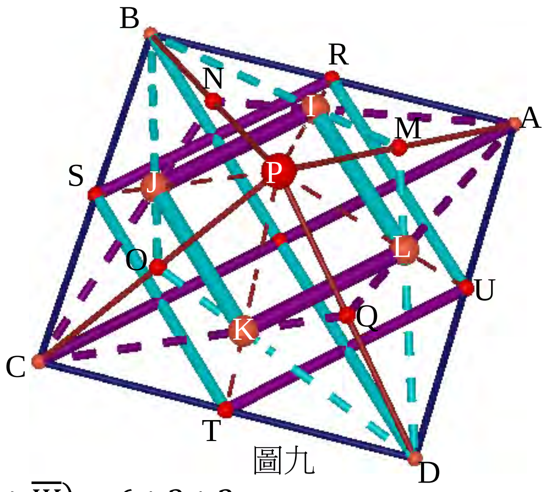
2. $\because$三角形兩邊中點連線性質

   $\therefore 2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{TU}+\overline{RU})=2:1$

3. $2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{IJ}+\overline{LK}+\overline{IL}+\overline{JK})=3:1$

   且$2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{TU}+\overline{RU})=2:1$

   $\Rightarrow 2(\overline{AC}+\overline{BD}):(\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{TU}+\overline{RU}):(\overline{IJ}+\overline{LK}+\overline{IL}+\overline{JK})=6:3:2$



圖九

【性質三】空間中，給定正四邊形 ABCD，移動 P 點位置，四邊形 IJKL 恆全等不變，

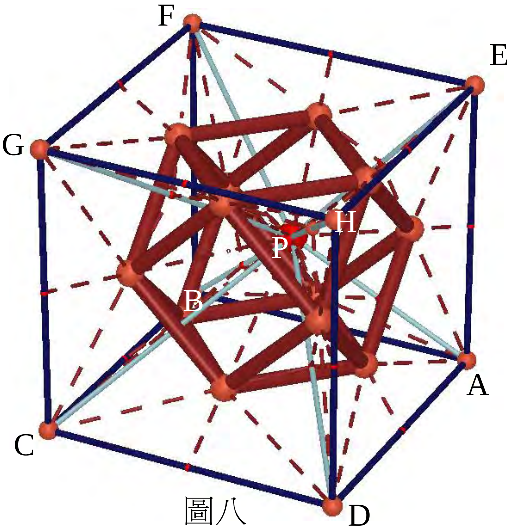
此性質可視為【肆-一-(二)性質三】的延伸推廣。

【證明】四邊形 ABCD 和四邊形 IJKL 中

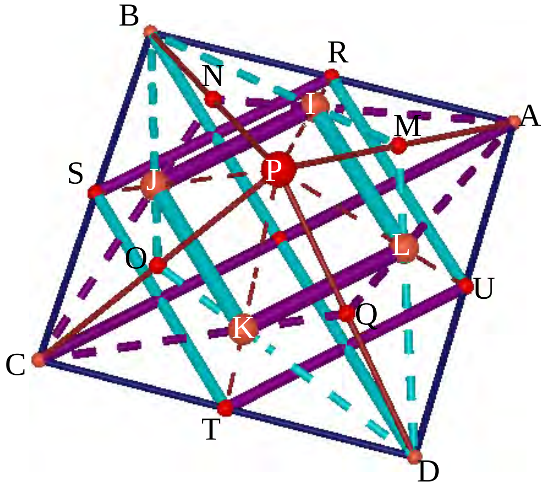
∵ $\overline{AC}：\overline{IJ}=\overline{AC}：\overline{LK}=\overline{BD}：\overline{IL}=\overline{BD}：\overline{JK}=3：1$ 且$\overline{IJ} \parallel \overline{LK} \parallel \overline{AC}$，$\overline{IL} \parallel \overline{JK} \parallel \overline{BD}$

∴四邊形 IJKL 為平行四邊形(一組對邊平行且相等)

⇒給定正四邊形 ABCD，則移動 P 點位置，四邊形 MNOQ 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)，得證。



圖八



圖九

(五) 正十二面體

給定正十二面體，在空間中任取一 P 點，作一 P 點重心多面體，發現其為截半二十面體(如圖十)，擷取六面體 P-ABCDE(如圖十一)，我們發現性質如下：

【性質一】$\overline{JI} \parallel \overline{AD}$，$\overline{GH} \parallel \overline{BD}$，$\overline{HI} \parallel \overline{CE}$，$\overline{FG} \parallel \overline{AC}$，$\overline{FJ} \parallel \overline{BE}$

【證明】

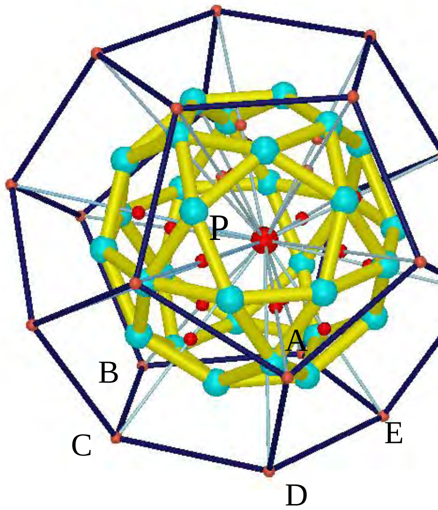
1. △ACL 和△FGL 中

   ∵ ∠ALC共用且$\overline{AL}：\overline{FL}=\overline{CL}：\overline{GL}=3：1$(重心性質)

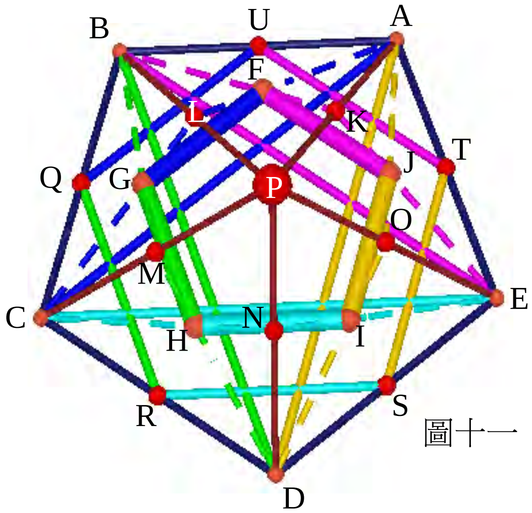
   ∴△ACL～△FGL(SAS 相似性質)

   ⇒ ∠ACL=∠FGL，可推得$\overline{FG} \parallel \overline{AC}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{JI} \parallel \overline{AD}$，$\overline{GH} \parallel \overline{BD}$，$\overline{HI} \parallel \overline{CE}$，$\overline{FJ} \parallel \overline{BE}$，得證。



圖十



圖十一

【性質二】$(\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE})：(\overline{UQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT})：(\overline{FG}+\overline{FG}+\overline{HI}+\overline{JI}+\overline{FJ})$

$=6：3：2$

【證明】證法同【肆–三–(一)性質二】

【性質三】給定正五邊形 ABCDE，移動 P 點位置，五邊形 FGHIJ 恆全等不變。

此性質可視為【肆–一–(三)性質三】的延伸推廣。

【證明】五邊形 ABCDE 和五邊形 FGHIJ 中

$\overline{AC}：\overline{FG}=\overline{BD}：\overline{FG}=\overline{CE}：\overline{HI}=\overline{AD}：\overline{JI}=\overline{BE}：\overline{FJ}=3：1$

且$\overline{JI} \parallel \overline{AD}$，$\overline{GH} \parallel \overline{BD}$，$\overline{HI} \parallel \overline{CE}$，$\overline{FG} \parallel \overline{AC}$，$\overline{FJ} \parallel \overline{BE}$

⇒給定正五邊形 ABCDE，移動 P 點位置，五邊形 FGHIJ 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)，得證。

伍、 延伸討論與證明

一、探討 P 點重心 n 邊形的性質及原 n 邊形與 P 點重心 n 邊形的關係

我們發現【肆–一–(一)~(三)性質二】分別有些許的不同：

- 三角形：原三角形周長：P 點重心三角形周長=3：1。
- 四邊形：2 ×(原四邊形相隔對角線)：P 點重心四邊形周長=3：1。
- 五邊形：原五邊形相隔對角線：P 點重心五邊形周長=3：1。

至於為何會有如此現象，理由說明如下：

- 三角形：原三角形相隔對角線等同於原三角形邊長。
- 四邊形：原四邊形的四條相隔對角線會兩兩重疊，所以只有兩條。
- 五邊形：原五邊形的相隔對角線不為周長也不重疊。

根據以上性質，我們推論：

n 邊形(n≥ 5)：原 n 邊形的相隔對角線不為周長也不重疊。

為了驗證 n 邊形是否有相同性質，我們**給定任意 n 邊形A_1~A_n**，在平面上設任意點 P，作 P 點重心 n 邊形G_1~G_n(如圖十二)，我們將性質及證明如下：

【性質一】$\overline{G_{k-1}G_{k-2}} \parallel \overline{A_kA_{k-2}}$(k=3,4, …,n，n≥3)，$\overline{G_nG_1} \parallel \overline{A_nA_2}$且$\overline{G_{n-1}G_n} \parallel \overline{A_{n-1}A_1}$

【證明】

1. $\triangle A_kA_{k-2}M_{k-1}$和$\triangle G_{k-1}G_{k-2}M_{k-1}$中

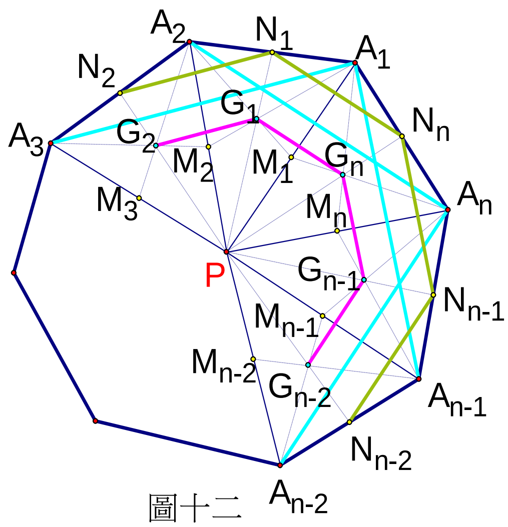
   ∵ $\angle A_{k-2}M_{k-1}A_k$共用且$\overline{A_kM_{k-1}}：\overline{G_{k-1}M_{k-1}}=\overline{A_{k-2}M_{k-1}}：\overline{G_{k-2}M_{k-1}}=3：1$(重心性質)

   ∴$\triangle A_kA_{k-2}M_{k-1} \sim \triangle G_{k-1}G_{k-2}M_{k-1}$ (SAS 相似性質)

   ⇒ $\angle A_kA_{k-2}M_{k-1}=\angle G_{k-1}G_{k-2}M_{k-1}$，可推得$\overline{G_{k-1}G_{k-2}} \parallel \overline{A_kA_{k-2}}$(同位角相等)

2. 同理，$\overline{G_nG_1} \parallel \overline{A_nA_2}$且$\overline{G_{n-1}G_n} \parallel \overline{A_{n-1}A_1}$，得證。

【性質二】$\left(\overline{\mathbf{A_1A_3}}+\overline{\mathbf{A_2A_4}}+\cdots+\overline{\mathbf{A_{n-2}A_n}}+\overline{\mathbf{A_{n-1}A_1}}+\overline{\mathbf{A_nA_2}}\right):\left(\overline{\mathbf{N_1N_2}}+\overline{\mathbf{N_2N_3}}+\cdots+\overline{\mathbf{N_{n-2}N_{n-1}}}+\overline{\mathbf{N_{n-1}N_n}}+\overline{\mathbf{N_1N_n}}\right):\left(\overline{\mathbf{G_1G_2}}+\overline{\mathbf{G_2G_3}}+\cdots+\overline{\mathbf{G_{n-2}G_{n-1}}}+\overline{\mathbf{G_{n-1}G_n}}+\overline{\mathbf{G_1G_n}}\right)=$ **6：3：2**



圖十二

【證明】$\Delta A_1A_3M_2$ 和 $\Delta G_1G_2M_2$ 中

∵相似三角形對應邊成比例　∴ $\overline{AB}：\overline{KJ}=3：1$

$\Rightarrow\left(\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_4}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_1}+\overline{A_nA_2}\right):\left(\overline{G_1G_2}+\overline{G_2G_3}+\cdots+\overline{G_{n-1}G_n}+\overline{G_1G_n}\right)=3:1$

【性質三】給定任意 n 邊形$\mathbf{A_1{\sim}A_n}$，移動 P 點位置，n 邊形 $\mathbf{G_1{\sim}G_n}$恆全等不變(僅跟隨 P 點位移)

【證明】n 邊形$A_1{\sim}A_n$和 n 邊形$G_1{\sim}G_n$中，

$\overline{A_kA_{k-2}}:\overline{G_{k-1}G_{k-2}}=\overline{A_nA_2}:\overline{G_nG_1}=\overline{A_{n-1}A_1}:\overline{G_{n-1}G_n}=3:1$

且$\overline{G_{k-1}G_{k-2}}\parallel\overline{A_kA_{k-2}}$(k=3,4, ...,n，n≥3)，$\overline{G_nG_1}\parallel\overline{A_nA_2}$、$\overline{G_{n-1}G_n}\parallel\overline{A_{n-1}A_1}$

⇒給定任意 n 邊形$A_1{\sim}A_n$，移動 P 點位置，n 邊形$G_1{\sim}G_n$恆全等不變，得證。

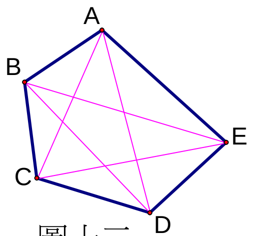
二、給定 P 點重心 n 邊形，用尺規作圖反推任意原 n 邊形，探討其存在性及唯一性

綜合【肆-二-(一)~(三)】的結果，我們猜想：

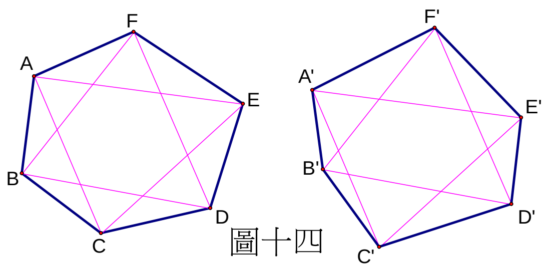
- P 點重心 n 邊形中，$\begin{cases}\text{若 n 為奇數，可作恰有一個原 n 邊形}\\\text{若 n 為偶數，可作無限個原 n 邊形}\end{cases}$

如何證明此猜想？我們作圖證明如下：

1. 奇數邊形的原 n 邊形相隔對角線為奇數，各對應連線段無法任意改變其相對位置(如圖十三)，因為各對應邊等長且對應角相等，所以恰可作出唯一一個原 n 邊形
2. 偶數邊形的原 n 邊形相隔對角線為偶數，各對應連線段可以作出兩個$\frac{n}{2}$邊形，如圖十五中△ABC、△DEF 與△A'B'C'、△D'E'F'，因其可任意改變其相對位置，所以能作出無限個原 n 邊形。以六邊形為例(如圖十四)，由六邊形 ABCDEF 和六邊形 A'B'C'D'E'F'可知原六邊形並不唯一。



圖十三

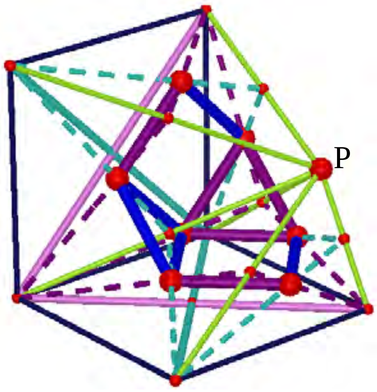


圖十四

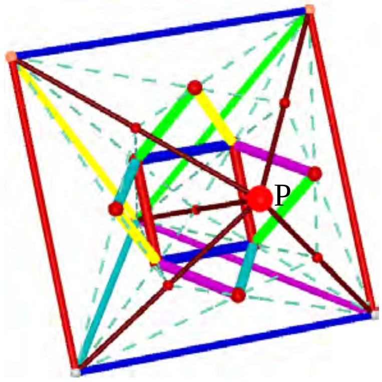
	存在性	唯一性
三角形	皆存在	唯一
四邊形	部分存在(必為平行四邊形)	不唯一(無限個)
五邊形	部分存在(無任意對邊平行)	唯一

三、探討 P 點重心多面體的性質及原正 n 面體與 P 點重心多面體的關係

在作原正六面及原正八面體的 P 點重心多面體時，我們發現不同的原正多面體作出來的 P 點重心多面體卻是相同的。在原正六面體，一個頂點有三個面交接，而三個四邊形的邊會共點相接形成三角形，因此 P 點重心多面體會有三角形存在(如圖十五)；在原正八面體，一個頂點有四個三角形交接，而四個三角形的邊會共點相接形成四邊形，因此 P 點重心多面體會有四邊形存在(如圖十六)，不同的原正多面體給予 P 點重心多面體相同的條件：每個頂點有兩個三角形和兩個四邊形。



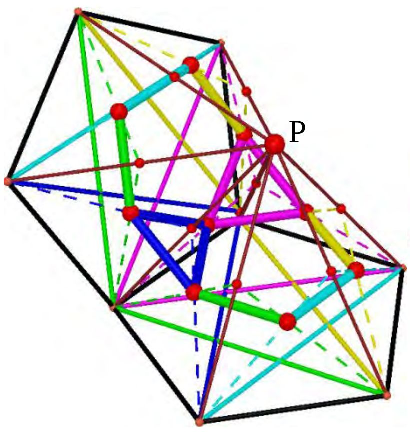
圖十五



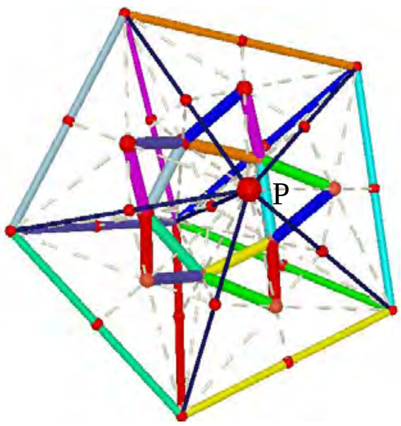
圖十六

由此可知，原正六面體及原正八面體作出來的圖形會是相同的截半立方體，只是構成元素分別為四邊形和三角形。

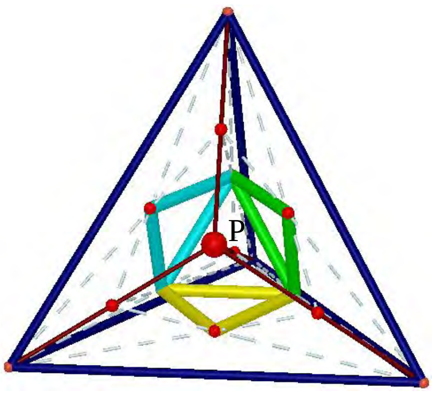
原正十二面體及原正二十面體道理相同(如圖十七、圖十八)。



圖十七



圖十八

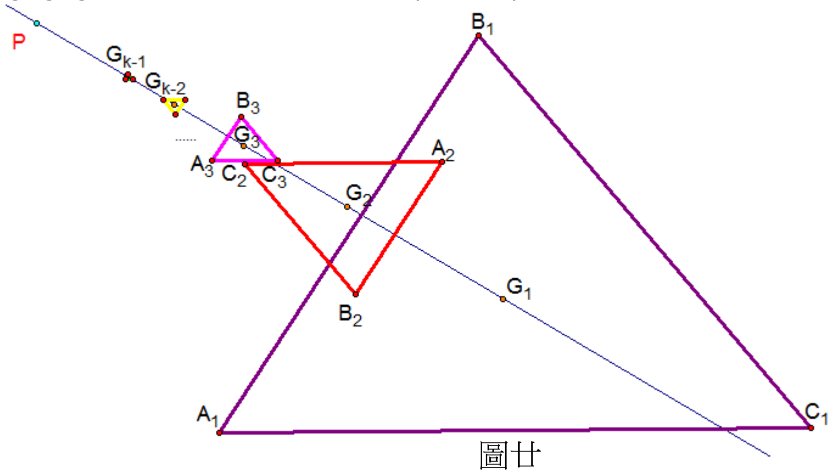


圖十九

原正四面體的 P 點重心多面體為正八面體的原因，則是因為原正四面體可以與 P 點作出四個正三角形，而四個正三角形分別共點，其共點位置會在空間中形成另外四個三角形，因此用原正四面體做出的 P 點重心多面體為正八面體(如圖十九)。

四、重複疊作 P 點重心三角形之延伸探討

給定任意$\Delta A_1B_1C_1$，在平面上取任意 P 點，作 P 點重心$\Delta A_2B_2C_2$，再以 P 點對$\Delta A_2B_2C_2$繼續作 P 點重心$\Delta A_3B_3C_3$，以此類推得$\Delta A_kB_kC_k(k=1\sim n)$，分別作各重心$G_1$、$G_2 ... G_n$(圖廿)。



圖廿

假設A_1座標(x_1,y_1)，B_1座標(x_2,y_2)，C_1座標(x_3,y_3)，P 座標(x_0,y_0)，利用內分點公式求得A_2、B_2、C_2、A_3、B_3、C_3……座標後，我們歸納出A_k、B_k、C_k、G_k座標如下：

若 k=n 且 n 為奇數，

$$A_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_1+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_1+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right)$$

$$B_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_2+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_1+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_2+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_1+y_3)}{3^{k-1}}\right)$$

$$C_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_3+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_1+x_2)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_3+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_1+y_2)}{3^{k-1}}\right)$$

$$\text{且}G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$$

若 k=n 且 n 為偶數，

$$A_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_1+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_1+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right)$$

$$B_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_2+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_2+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_1+y_3)}{3^{k-1}}\right)$$

$$C_k\left(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_3+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_2)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_3+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_1+y_2)}{3^{k-1}}\right)$$

$$\text{且}G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$$

我們利用**數學歸納法證明**如下：

1. 當 n=1 時，A_1座標(x_1,y_1)

$$=\left(\frac{(3^{1-1}-2^{1-1})x_0+\frac{2^{1-1}+2}{3}x_1+\frac{2^{1-1}-1}{3}(x_2+x_3)}{3^{1-1}},\frac{(3^{1-1}-2^{1-1})y_0+\frac{2^{1-1}+2}{3}y_1+\frac{2^{1-1}-1}{3}(y_2+y_3)}{3^{1-1}}\right)\text{，成立。}$$

同理可證B_1、C_1成立。

利用重心坐標公式，G_1座標$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$$=\left(\frac{3(3^{1-1}-2^{1-1})x_0+2^{1-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{1-1}},\frac{3(3^{1-1}-3\times2^{1-1})y_0+2^{1-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{1-1}}\right)\text{，成立。}$$

當 n=2 時，利用重心坐標公式，A_2座標$\left(\frac{x_2+x_3+x_0}{3},\frac{y_2+y_3+y_0}{3}\right)$

$=(\frac{(3^{2-1}-2^{2-1})x_0+\frac{2^{2-1}-2}{3}x_1+\frac{2^{2-1}+1}{3}(x_2+x_3)}{3^{2-1}},\frac{(3^{2-1}-2^{2-1})y_0+\frac{2^{2-1}-2}{3}y_1+\frac{2^{2-1}+1}{3}(y_2+y_3)}{3^{2-1}})$，成立。

同理可證B_2、C_2成立。

利用重心座標公式，G_2座標$\left(\frac{3x_0+2x_1+2x_2+2x_3}{9},\frac{3y_0+2y_1 2y_2+2y_3}{9}\right)$

$=(\frac{3(3^{2-1}-2^{2-1})x_0+2^{2-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{2-1}},\frac{3(3^{2-1}-2^{2-1})y_0+2^{2-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{2-1}})$，成立。

2. 假設 n=k 且 n 為奇數時成立，可得

$A_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_1+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_1+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_2+y_3)}{3^{k-1}})$

$B_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_2+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_1+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_2+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_1+y_3)}{3^{k-1}})$

$C_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}x_3+\frac{2^{k-1}-1}{3}(x_1+x_2)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}+2}{3}y_3+\frac{2^{k-1}-1}{3}(y_1+y_2)}{3^{k-1}})$

且$G_k(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-3\times2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}})$

假設 n=k 且 n 為偶數時成立，可得

$A_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_1+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_1+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_2+y_3)}{3^{k-1}})$

$B_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_2+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_2+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_1+y_3)}{3^{k-1}})$

$C_k(\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}x_3+\frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_2)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2}{3}y_3+\frac{2^{k-1}+1}{3}(y_1+y_2)}{3^{k-1}})$

且$G_k(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}})$

3. 當 n=k+1 且 k 為奇數時，則 k+1 為偶數。

由假設得知此時A_{k+1}為ΔB_kC_kP的重心，

$A_{k+1}=$

$(\frac{(3\times3^{k-1}-2\times2^{k-1})x_0+\frac{2\times2^{k-1}-2}{3}x_1+\frac{2\times2^{k-1}+1}{3}(x_2+x_3)}{3^k},\frac{(3\times3^{k-1}-2\times2^{k-1})y_0+\frac{2\times2^{k-1}-2}{3}y_1+\frac{2\times2^{k-1}+1}{3}(y_2+y_3)}{3^k})$

$=(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k-2}{3}x_1+\frac{2^k+1}{3}(x_2+x_3)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k-2}{3}y_1+\frac{2^k+1}{3}(y_2+y_3)}{3^k})$

同理，$B_{k+1}(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k-2}{3}x_2+\frac{2^k+1}{3}(x_1+x_3)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k-2}{3}y_2+\frac{2^k+1}{3}(y_1+y_3)}{3^k})$

$C_{k+1}(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k-2}{3}x_3+\frac{2^k+1}{3}(x_1+x_2)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k-2}{3}y_3+\frac{2^k+1}{3}(y_1+y_2)}{3^k})$

則$G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2+2}{3}(x_1+x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2+2}{3}(y_1+y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right)$

$=(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}})$，成立。

當 n=k+1 且 k 為偶數時，則 k+1 為奇數。

$A_{k+1} =$

$$\left(\frac{(3\times3^{k-1}-2\times2^{k-1})x_0+\frac{2\times2^{k-1}+2}{3}x_1+\frac{2\times2^{k-1}-1}{3}(x_2+x_3)}{3^k},\frac{(3\times3^{k-1}-2\times2^{k-1})y_0+\frac{2\times2^{k-1}+2}{3}y_1+\frac{2\times2^{k-1}-1}{3}(y_2+y_3)}{3^k}\right)$$

$$=\left(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k+2}{3}x_1+\frac{2^k-1}{3}(x_2+x_3)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k+2}{3}y_1+\frac{2^k-1}{3}(y_2+y_3)}{3^k}\right)$$

同理，$B_{k+1}\left(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k+2}{3}x_2+\frac{2^k-1}{3}(x_1+x_3)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k+2}{3}y_2+\frac{2^k-1}{3}(y_1+y_3)}{3^k}\right)$

$C_{k+1}\left(\frac{(3^k-2^k)x_0+\frac{2^k+2}{3}x_3+\frac{2^k-1}{3}(x_1+x_2)}{3^k},\frac{(3^k-2^k)y_0+\frac{2^k+2}{3}y_3+\frac{2^k-1}{3}(y_1+y_2)}{3^k}\right)$

則$G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+\frac{2^{k-1}-2+2}{3}(x_1+x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+\frac{2^{k-1}-2+2}{3}(y_1+y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right)$

$= \left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$，成立。

綜合上述討論，由數學歸納法得 n=k 且 k 為偶數時的G_k坐標，與 n=k 且 k 為奇數時的G_k坐標相同。

由此，我們可推論出$G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$，k=1~n

【性質一】G_1、G_2、…、G_k與 P 點共線，k=1~n

【證明】

1. 利用三角形重心座標公式，得$G_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，$G_2\left(\frac{3x_0+2x_1+2x_2+2x_3}{9},\frac{3y_0+2y_1 2y_2+2y_3}{9}\right)$，$G_3\left(\frac{15x_0+4x_1+4x_2+4x_3}{27},\frac{15y_0+4y_1+4y_2+4y_3}{27}\right)$，……

   可得知$G_{k-1}\left(\frac{(3^{k-1}-3\times2^{k-2})x_0+2^{k-2}(x_1+x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-2^{k-2})y_0+2^{k-2}(y_1+y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right)$

   $G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$

2. 承上，$\overleftrightarrow{G_kG_{k-1}}$斜率$=\frac{(3^k-3\times2^{k-1}-3^k+3^2\times2^{k-2})y_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(y_1+y_2+y_3)}{(3^k-3\times2^{k-1}-3^k+3^2\times2^{k-2})x_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(x_1+x_2+x_3)}$

   $=\frac{2^{k-2}(3y_0-y_1-y_2-y_3)}{2^{k-2}(3x_0-x_1-x_2-x_3)}$

   $=\frac{3y_0-y_1-y_2-y_3}{3x_0-x_1-x_2-x_3}$

   又，$\overleftrightarrow{PG_k}$斜率$=\frac{(3^k-3^k+3\times2^{k-1})y_0-2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{(3^k-3^k+3\times2^{k-1})x_0-2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}$

   $=\frac{2^{k-1}(3y_0-y_1-y_2-y_3)}{2^{k-1}(3x_0-x_1-x_2-x_3)}$

   $=\frac{3y_0-y_1-y_2-y_3}{3x_0-x_1-x_2-x_3}=\overleftrightarrow{G_kG_{k-1}}$斜率

   $\Rightarrow$ P、G_k、G_{k-1}三點共線，k=2~n

   $\Rightarrow$P、G_1、G_2、……、G_k共線，得證。

【性質二】重複疊作$\triangle A_kB_kC_k$的重心G_k，k=1~n，n 足夠大時G_n會收斂至 P，即$\lim\limits_{n\to\infty} G_n = P$

【證明】

承性質一，$G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$，k=1~n

$$
\begin{aligned}
\text{則}\lim_{n\to\infty} G_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(3^{n-1}-2^{n-1})x_0+2^{n-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{n-1}},\frac{3(3^{n-1}-2^{n-1})y_0+2^{n-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{n-1}}\right)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^n-\frac{3}{2}\times2^n\right)x_0+\frac{1}{2}\times2^n(x_1+x_2+x_3)}{3^n},\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^n-\frac{3}{2}\times2^n\right)y_0+\frac{1}{2}\times2^n(y_1+y_2+y_3)}{3^n}\right)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)x_0+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n(x_1+x_2+x_3)\right],\ \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)y_0+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n(y_1+y_2+y_3)\right]\right)\\
&=(x_0,\ y_0)=P \qquad \left(\because\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0\right)\text{，得證。}
\end{aligned}
$$

【性質三】$\overline{G_{k-2}G_{k-1}}:\overline{G_{k-1}G_k}$ =3：2，k=3~n

【證明】

承性質一，$G_k\left(\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3)}{3\times3^{k-1}},\frac{3(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3)}{3\times3^{k-1}}\right)$，k=1~n

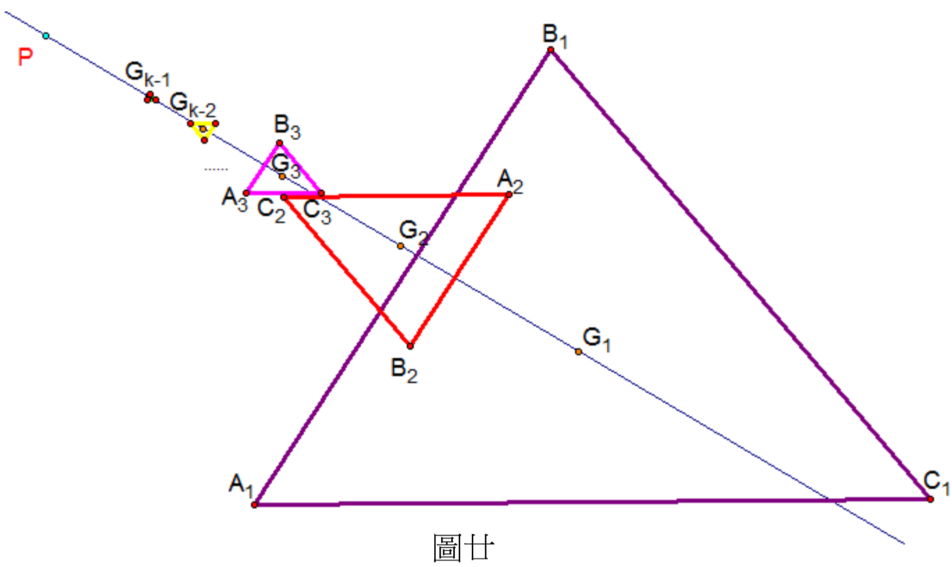
$$
\begin{aligned}
\text{可得}\overline{G_{k-2}G_{k-1}} &= \sqrt{\begin{aligned}&\left[\frac{(3^{k-1}-3\times2^{k-2}-3^{k-1}+3^2\times2^{k-3})x_0+(2^{k-2}-3\times2^{k-3})(x_1+x_2+x_3)}{3^{k-1}}\right]^2\\&+\left[\frac{(3^{k-1}-3\times2^{k-2}-3^{k-1}+3^2\times2^{k-3})y_0+(2^{k-2}-3\times2^{k-3})(y_1+y_2+y_3)}{3^{k-1}}\right]^2\end{aligned}}\\
&=\frac{2^{k-3}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^{k-1}} \qquad \text{......【A】}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{G_{k-1}G_k} &= \sqrt{\begin{aligned}&\left[\frac{(3^k-3\times2^{k-1}-3^k+3^2\times2^{k-2})x_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(x_1-x_2-x_3)}{3^k}\right]^2\\&+\left[\frac{(3^k-3\times2^{k-1}-3^k+3^2\times2^{k-2})y_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(y_1-y_2-y_3)}{3^k}\right]^2\end{aligned}}\\
&=\frac{2^{k-2}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^k} \qquad \text{......【B】}
\end{aligned}
$$

由【A】、【B】可得：$\frac{\overline{G_{k-2}G_{k-1}}}{\overline{G_{k-1}G_k}}=\dfrac{\frac{2^{k-3}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^{k-1}}}{\frac{2^{k-2}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^k}}=\frac{3}{2}$，得證。

【性質四】$\overline{G_{k-1}G_k}:\overline{G_{k-1}P}$ =1：3，k=2~ n

【證明】



圖廿

1. 由性質三，$\overline{G_1G_2}:\overline{G_2G_3}=\overline{G_2G_3}:\overline{G_3G_4}=\cdots=\overline{G_{n-2}G_{n-1}}:\overline{G_{n-1}G_n}$ =3：2

$\Longrightarrow \overline{G_1G_2}$, $\overline{G_2G_3},\ldots,$ $\overline{G_{n-1}G_n}$為有 n−1 項且公比= $\frac{2}{3}$的等比數列

又，由性質二，P 為$G_n(n\to\infty)$的收斂點

$\Longrightarrow$ $n\to\infty$時，$\overline{G_1G_2}$, $\overline{G_2G_3},\ldots,$ $\overline{G_{n-1}G_n}$, $\overline{G_nP}$，為公比= $\frac{2}{3}$的無窮等比數列

令$\overline{G_1G_2}$=L，前 n-1 項和=$\overline{G_1G_n}$ $=\dfrac{L[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1]}{\frac{2}{3}-1}$

$$=\frac{L\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]}{-\frac{1}{3}}$$

$$=-3L[(\tfrac{2}{3})^n-1]$$

$$=3L \qquad (\because\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(\tfrac{2}{3})^n=0)$$

$$=\overline{G_1P}$$

2. 由性質三，$\overline{G_{k-1}G_k}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}L$

又，$\overline{G_{k-1}P}=\overline{G_1P}-\left(\overline{G_1G_2}+\overline{G_2G_3}+\cdots+\overline{G_{k-2}G_{k-1}}\right)$

$$=3L-\frac{L[(\frac{2}{3})^{k-1}-1]}{\frac{2}{3}-1}$$

$$=3L-3L\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]=\left(\frac{2^{k-1}}{3^{k-2}}\right)L$$

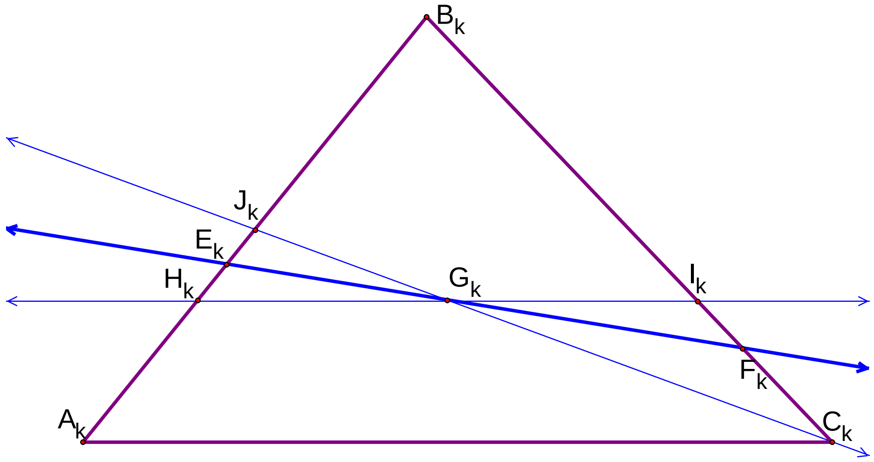
$$\overline{G_{k-1}G_k}:\overline{G_{k-1}P}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}L:\left(\frac{2^{k-1}}{3^{k-2}}\right)L$$

$=2^{k-1}:2^{k-1}\times 3$

$=1:3$，得證。

在研究的過程中，我們發現一個現象：重複疊作$\Delta A_kB_kC_k$並求出重心G_k，若$\overleftrightarrow{G_kP}$不平行於$\Delta A_kB_kC_k$任一邊且不通過任一頂點，則$\overleftrightarrow{G_kP}$切割出的四邊形與三角形的面積比值介於 1~1.25 之間。針對此現象，我們將其推廣到任意三角形，證明如後。

【性質五】在$\Delta A_kB_kC_k$中，G_k為其重心，J_k為$\overline{A_kB_k}$中點，$\overleftrightarrow{H_kI_k}\parallel\overline{A_kC_k}$且通過$G_k$，設$E_k\in\overline{H_kJ_k}$、$F_k\in\overline{C_kI_k}$，則$1\le\frac{\text{四邊形}A_kE_kF_kC_k\text{面積}}{\Delta B_kE_kF_k\text{面積}}\le 1.25$(如圖廿一)



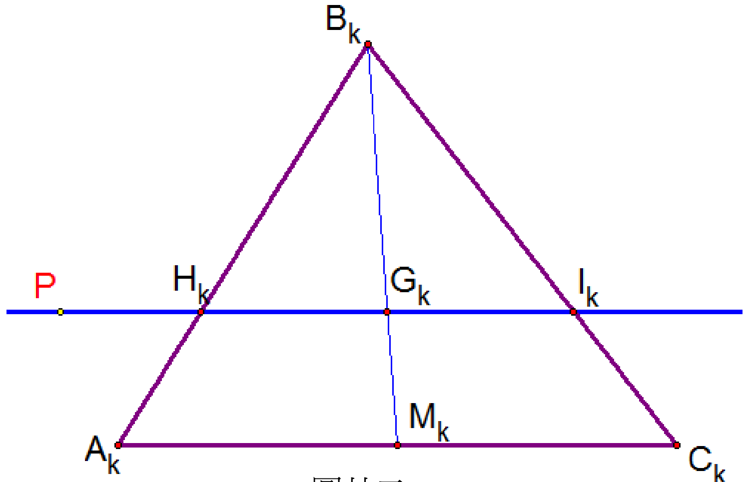
圖廿一

【證明】

以下證明分為三個步驟來進行：

1. 證明$\frac{四邊形A_kH_kI_kC_k面積}{\triangle B_kH_kI_k面積}=1.25$

在$\triangle A_kB_kC_k$中，G_k為其重心，$\overleftrightarrow{H_kI_k} \parallel \overline{A_kC_k}$，$\overline{B_kM_k}$是$\triangle A_kB_kC_k$的中線。(如廿二)



圖廿二

(1) $\overline{B_kM_k}$：$\overline{B_kG_k}$ =3：2(重心性質)

$\triangle A_kB_kM_k$和$\triangle B_kH_kG_k$中，$\overline{A_kB_k}$：$\overline{B_kH_k}$=$\overline{A_kM_k}$：$\overline{H_kG_k}$=$\overline{B_kM_k}$：$\overline{B_kG_k}$ =3：2

$\triangle B_kC_kM_k$和$\triangle B_kG_kI_k$中，$\overline{B_kC_k}$：$\overline{B_kI_k}$=$\overline{C_kM_k}$：$\overline{G_kI_k}$=$\overline{B_kM_k}$：$\overline{B_kG_k}$ =3：2

可得$\overline{A_kC_k}$：$\overline{H_kI_k}$=$\overline{A_kB_k}$：$\overline{B_kH_k}$ = $\overline{B_kC_k}$：$\overline{B_kI_k}$=3：2

(2) 由$\overline{A_kC_k}$：$\overline{H_kI_k}$=$\overline{A_kB_k}$：$\overline{B_kH_k}$ = $\overline{B_kC_k}$：$\overline{B_kI_k}$=3：2

$\Rightarrow\triangle$ $A_kB_kC_k$面積：$\triangle B_kH_kI_k$面積$=3^2$：2^2 =9：4=2.25：1

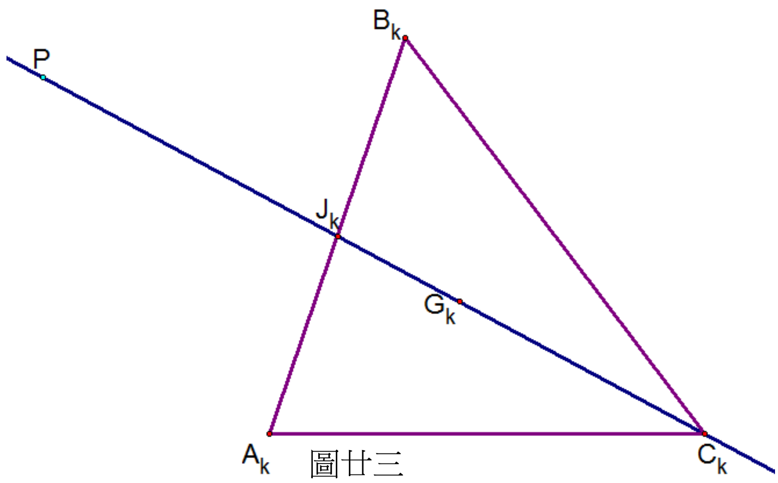
$\Rightarrow\frac{四邊形A_kH_kI_kC_k面積}{\triangle B_kH_kI_k面積}=\frac{2.25-1}{1}=1.25$，得證。

2. 證明$\frac{\triangle A_kC_kJ_k面積}{\triangle B_kC_kJ_k面積}=1$

在$\triangle A_kB_kC_k$中，G_k為其重心，$\overleftrightarrow{G_kP}$通過$C_k$交$\overline{A_kB_k}$於$J_k$(如圖廿三)。

$\triangle A_kB_kC_k$中，G_k為其重心，$\overleftrightarrow{G_kP}$通過$C_k$時，與$\overline{A_kB_k}$的交點$J_k$即為$\overline{A_kB_k}$的中點

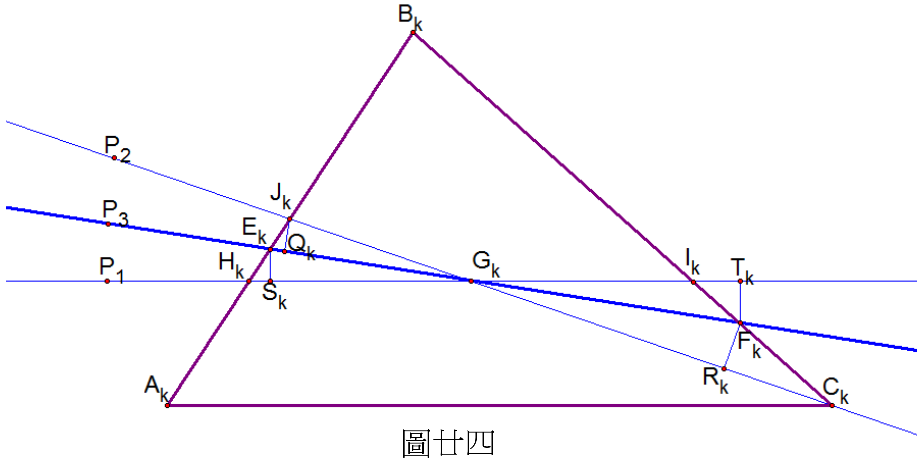
$\Rightarrow\frac{\triangle A_kC_kJ_k面積}{\triangle B_kC_kJ_k面積}=1$(等底同高)，得證。



圖廿三

3. 證明$1 \leq \frac{四邊形A_kE_kF_kC_k面積}{\triangle B_kE_kF_k面積} \leq 1.25$

在$\triangle A_kB_kC_k$中，G_k為其重心，J_k為$\overline{A_kB_k}$中點，$\overleftrightarrow{H_kI_k}$、$\overleftrightarrow{C_kJ_k}$、$\overleftrightarrow{E_kF_k}$分別通過$P_1$、$P_2$、$P_3$且皆通過$G_k$，設$E_k \in \overline{H_kJ_k}$、$I_k \in \overline{C_kI_k}$，$\overline{J_kQ_k}$為$\triangle J_kG_kE_k$在$\overleftrightarrow{E_kF_k}$上的高$\overline{E_kS_k}$、$\overline{T_kF_k}$分別為$\triangle E_kG_kH_k$、$\triangle F_kG_kI_k$在$\overleftrightarrow{H_kI_k}$上的高，$\overline{F_kR_k}$為$\triangle C_kG_kF_k$在$\overleftrightarrow{C_kJ_k}$上的高(如廿四)



圖廿四

(1) 由重心性質，$\overline{C_kG_k}：\overline{G_kJ_k} = 2：1$

令$\overline{C_kG_k} = 2m$，$\overline{G_kJ_k} = m$，$\overline{F_kG_k} = \ell_1$，$\overline{G_kE_k} = \ell_2$，$\angle E_kG_kJ_k = \angle F_kG_kC_k = \theta$

則$\begin{cases} \triangle J_kG_kE_k面積 = \frac{1}{2} \times m \times \ell_2 \times \sin\theta \\ \triangle F_kG_kC_k面積 = \frac{1}{2} \times 2m \times \ell_1 \times \sin\theta \end{cases}$

$\because m < 2m$ 且$\ell_2 \leq \ell_1$

$\therefore \triangle J_kG_kE_k面積 \leq \triangle F_kG_kC_k面積$

$\Rightarrow \triangle B_kC_kJ_k面積 \geq \triangle B_kE_kF_k面積且\triangle A_kC_kJ_k面積 \leq 四邊形A_kE_kF_kC_k面積$

$\Rightarrow \frac{\triangle A_kC_kJ_k面積}{\triangle B_kC_kJ_k面積} \leq \frac{四邊形A_kE_kF_kC_k面積}{\triangle B_kE_kF_k面積}$

(2) 已知$\overline{H_kG_k}=\overline{I_kG_k}$

令$\overline{H_kG_k}=\overline{I_kG_k}=m'$，$\overline{F_kG_k} = \ell_1$，$\overline{G_kE_k} = \ell_2$，$\angle E_kG_kH_k = \angle I_kG_kF_k = \phi$

則$\begin{cases} \triangle E_kG_kH_k面積 = \frac{1}{2} \times m' \times \ell_2 \times \sin\phi \\ \triangle I_kG_kF_k面積 = \frac{1}{2} \times m' \times \ell_1 \times \sin\phi \end{cases}$

$\because \ell_2 \leq \ell\ 1$

$\therefore \triangle E_kG_kH_k面積 \leq \triangle I_kG_kF_k面積$

$\Rightarrow \triangle B_kE_kF_k面積 \geq \triangle B_kH_kI_k面積且四邊形A_kC_kF_kE_k面積 \leq 四邊形A_kC_kH_kI_k面積$

$\Rightarrow \frac{四邊形A_kE_kF_kC_k面積}{\triangle B_kE_kF_k面積} \leq \frac{四邊形A_kH_kI_kC_k面積}{\triangle B_kH_kI_k面積}$

4. 綜合上述 1.、2.、3.，$\begin{cases} \dfrac{\text{四邊形}A_kH_kI_kC_k\text{面積}}{\triangle B_kH_kI_k\text{面積}} = 1.25 \\ \dfrac{\triangle A_kC_kJ_k\text{面積}}{\triangle B_kC_kJ_k\text{面積}} = 1 \\ \dfrac{\triangle A_kC_kJ_k\text{面積}}{\triangle B_kC_kJ_k\text{面積}} \le \dfrac{\text{四邊形}A_kE_kF_kC_k\text{面積}}{\triangle B_kE_kF_k\text{面積}} \le \dfrac{\text{四邊形}A_kH_kI_kC_k\text{面積}}{\triangle B_kH_kI_k\text{面積}} \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \le \dfrac{\text{四邊形}A_kE_kF_kC_k\text{面積}}{\triangle B_kE_kF_k\text{面積}} \le 1.25$，得證。

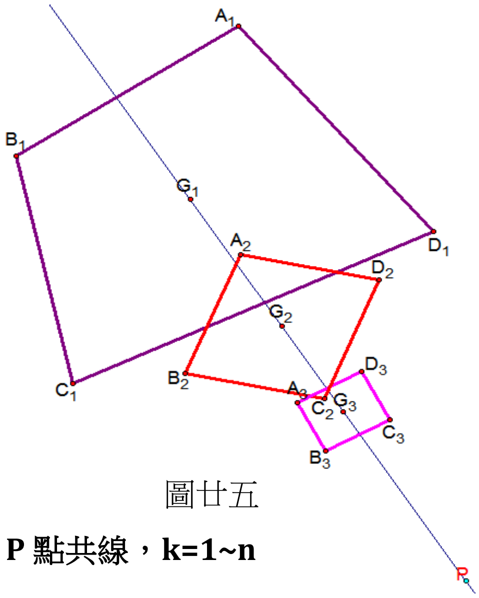
五、重複疊作 P 點重心 n 邊形之延伸探討

完成上述研究後，我們想知道任意 n 邊形是否也存在重心？參考文獻資料後，我們找到了任意多邊形的重心定義：n 邊形$A_1A_2 \ldots A_n$中，若 G 滿足$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$，則稱 G 為 n 邊形$A_1A_2 \ldots A_n$的重心。

知道任意 n 邊形存在重心後，若是依照【伍-四】的作圖方法，所求得的各 P 點重心 n 邊形及各重心，是否會有類似的性質？針對此問題，嘗試利用任意四邊形和任意五邊形研究如後。

(一) 任意四邊形

給定任意四邊形$A_1B_1C_1D_1$及一點P，作P點重心四邊形$A_2B_2C_2D_2$，再以P點對四邊形$A_2B_2C_2D_2$繼續作P點重心四邊形$A_3B_3C_3D_3$，以此類推可得重心四邊形$A_kB_kC_kD_k$(k=1~n)，分別作各重心G_1、G_2、……、G_n(如圖廿五)。設$A_1(x_1,y_1)$，$B_1(x_2,y_2)$，$C_1(x_3,y_3)$，$D_1(x_4,y_4)$，$P(x_0,y_0)$，我們發現性質如下：



圖廿五

【性質一】G_1、G_2、…、G_k與 P 點共線，k=1~n

【證明】

1. 利用內分點公式，得$G_1(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$，$G_2(\frac{4x_0+2x_1+2x_2+2x_3+2x_4}{12},\frac{4y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4}{12})$，$G_3(\frac{20x_0+4x_1+4x_2+4x_3+4x_4}{36},\frac{20y_0+4y_1+4y_2+4y_3+4y_4}{36})$，……

可得知$G_{k-1}(\frac{(3^{k-1}-3\times2^{k-2})x_0+2^{k-2}(x_1+x_2+x_3)}{3^{k-1}},\frac{(3^{k-1}-3\times2^{k-2})y_0+2^{k-2}(y_1+y_2+y_3)}{3^{k-1}})$

$G_k(\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{k-1}},\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{k-1}})$

2. 承上，$\overleftrightarrow{G_kG_{k-1}}$斜率$=\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1}-3^{k-1}+3\times2^{k-2})y_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4(3^{k-1}-2^{k-1}-3^{k-1}+3\times2^{k-2})x_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(x_1+x_2+x_3+x_4)}$

$$=\frac{2^{k-2}y_0-2^{k-2}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{2^{k-2}x_0-2^{k-2}(x_1+x_2+x_3+x_4)}$$
$$=\frac{y_0-y_1-y_2-y_3-y_4}{x_0-x_1-x_2-x_3-x_4}$$

又，$\overleftrightarrow{PG_k}$斜率$=\frac{(3^{k-1}-3^{k-1}+2^{k-1})y_0-2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{(3^{k-1}-3^{k-1}+2^{k-1})x_0-2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}$

$$=\frac{2^{k-1}y_0-2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{2^{k-1}x_0-2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}$$

$=\frac{y_0-y_1-y_2-y_3-y_4}{x_0-x_1-x_2-x_3-x_4}=\overleftrightarrow{G_kG_{k-1}}$斜率

$\Longrightarrow$ P、G_{k-1}、G_k三點共線

$\Longrightarrow$P、G_1、G_2、……、G_k共線，得證。

【性質二】反覆作$A_kB_kC_kD_k$的重心G_k，k=1~n，n→ ∞時G_n會收斂至 P，即$\lim\limits_{n\to\infty}G_n=P$

【證明】

承性質一，$G_k(\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{k-1}},\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{k-1}})$，k=1~n

則$\lim\limits_{n\to\infty}G_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4(3^{n-1}-2^{n-1})x_0+2^{n-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{n-1}},\frac{4(3^{n-1}-2^{n-1})y_0+2^{n-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{n-1}})$

$=(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\times3^n-\frac{1}{2}\times2^n\right)x_0+\frac{1}{2}\times2^n(x_1+x_2+x_3+x_4)}{\frac{4}{3}\times3^n},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\times3^n-\frac{1}{2}\times2^n\right)y_0+\frac{1}{2}\times2^n(y_1+y_2+y_3+y_4)}{\frac{4}{3}\times3^n})$

$=(\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1})x_0+\frac{3}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)]$，$\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1})y_0+\frac{3}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)]$

$=(x_0，y_0)=P(\because\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}=0)$，得證。

【性質三】$\overline{G_{k-2}G_{k-1}}$：$\overline{G_{k-1}G_k}=3：2$，k=3~n

【證明】

1. 承性質一，$G_k(\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{k-1}},\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{k-1}})$，k=1~n

可得$\overline{G_{k-2}G_{k-1}}=\sqrt{(\frac{4(3^{k-2}-2^{k-2}-3^{k-3}+3\times2^{k-3})x_0+(2^{k-2}-3\times2^{k-3})(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{k-2}}]^2+\left(\frac{4(3^{k-2}-2^{k-2}-3^{k-3}+3\times2^{k-3})y_0+(2^{k-2}-3\times2^{k-3})(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{k-2}}\right)^2}$

$=\frac{2^{k-3}\sqrt{(x_0-x_1-x_2-x_3-x_4)^2+(y_0-y_1-y_2-y_3-y_4)^2}}{4\times3^{k-2}}$……【A】

$\overline{G_{k-1}G_k}=\sqrt{[\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1}-3^{k-1}+3\times2^{k-2})x_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4\times3^{k-1}}]^2+[\frac{4(3^{k-1}-2^{k-1}-3^{k-1}+3\times2^{k-2})y_0+(2^{k-1}-3\times2^{k-2})(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4\times3^{k-1}}]^2}$

$=\frac{2^{k-2}\sqrt{(x_0-x_1-x_2-x_3-x_4)^2+(y_0-y_1-y_2-y_3-y_4)^2}}{4\times3^{k-1}}$……【B】

2. 由【A】、【B】可得：$\frac{\overline{G_{k-2}G_{k-1}}}{\overline{G_{k-1}G_k}}=\frac{\frac{2^{k-3}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^{k-1}}}{\frac{2^{k-2}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^k}}=\frac{3}{2}$，得證。

【性質四】$\overline{G_{k-1}G_k}:\overline{G_{k-1}P}=1:3$

【證明】

由**性質三**，$\overline{G_1G_2}:\overline{G_2G_3}=\overline{G_2G_3}:\overline{G_3G_4}=\cdots=\overline{G_{n-2}G_{n-1}}:\overline{G_{n-1}G_n}=3:2$

$\Rightarrow \overline{G_1G_2}$, $\overline{G_2G_3},\ldots,\overline{G_{n-1}G_n}$為有 $n-1$ 項且公比$=\frac{2}{3}$的等比數列

又，由**性質二**，P 為$G_n(n\to\infty)$的收斂點

$\Rightarrow$ $n\to\infty$時，$\overline{G_1G_2}$, $\overline{G_2G_3},\ldots,\overline{G_{n-1}G_n}$, $\overline{G_nP}$，為公比$=\frac{2}{3}$的無窮等比數列

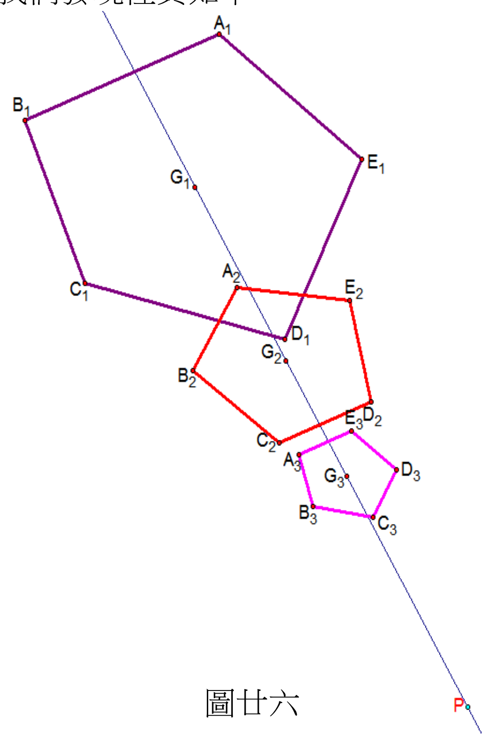
令$\overline{G_1G_2}$=L，由【伍-四-**性質四**】可得$\overline{G_{k-1}G_k}:\overline{G_{k-1}P}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}L:(\frac{2^{k-1}}{3^{k-2}})L$

$=2^{k-1}:2^{k-1}\times 3$

$=1:3$，得證。

(二) 任意五邊形

依照【伍-四】，作五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$、$A_2B_2C_2D_2E_2$、……、$A_kB_kC_kD_kE_k$，分別作各重心G_1、G_2、……、G_n(如圖廿六)。設A_1座標(x_1,y_1)，B_1座標(x_2,y_2)，C_1座標(x_3,y_3)，D_1座標(x_4,y_4)，E_1座標(x_5,y_5)P 座標(x_0,y_0)，我們發現性質如下：



圖廿六

【性質一】G_1、G_2、…、G_k與 P 點共線，k=1~n

【證明】

1. 利用內分點公式，得$G_1(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5})$，

$G_2(\frac{5x_0+2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5}{15},\frac{5y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5}{15})$，

$G_3(\frac{25x_0+4x_1+4x_2+4x_3+4x_4+4x_5}{45},\frac{25y_0+4y_1+4y_2+4y_3+4y_4+4y_5}{45})$，……

可得知$G_{k-1}(\frac{5(3^{k-2}-2^{k-2})x_0+2^{k-2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}{5\times 3^{k-2}},\frac{5(3^{k-2}-2^{k-2})y_0+2^{k-2}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)}{5\times 3^{k-2}})$

$G_k(\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}{5\times 3^{k-1}},\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)}{5\times 3^{k-1}})$

2. 由【伍-四-性質一】，可得$\overleftrightarrow{G_kG_{k-1}}$斜率=$\overleftrightarrow{G_kP}$斜率

$\Longrightarrow$ P、G_k、G_{k-1}三點共線，k=2~n

$\Longrightarrow$P、G_1、G_2、……、G_k共線，得證。

【性質二】反覆作$\mathbf{A_kB_kC_kD_k}$的重心$\mathbf{G_k}$，k=1~n，n→ ∞時$\mathbf{G_n}$會收斂至 P

【證明】

承**性質一**，$G_k(\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}{5\times3^{k-1}},\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)}{5\times3^{k-1}})$

由【伍-四-性質二】，可得$\lim_{n\to\infty}G_n=(x_0，y_0)=P$，得證。

【性質三】$\mathbf{\overline{G_{k-2}G_{k-1}}：\overline{G_{k-1}G_k}}$ =3：2，k=1~n

【證明】

承**性質一**，$G_k(\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}{5\times3^{k-1}},\frac{5(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)}{5\times3^{k-1}})$，k=1~n

由【伍-四-性質三】，可得$\frac{\overline{G_{k-2}G_{k-1}}}{\overline{G_{k-1}G_k}}=\frac{\frac{2^{k-3}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^{k-1}}}{\frac{2^{k-2}\sqrt{(3x_0-x_1-x_2-x_3)^2+(3y_0-y_1-y_2-y_3)^2}}{3^k}}=\frac{3}{2}$，得證。

【性質四】$\mathbf{\overline{G_{k-1}G_k}：\overline{G_{k-1}P}=1：3}$

【證明】

1. 由**性質三**，$\overline{G_1G_2}：\overline{G_2G_3}=\overline{G_2G_3}：\overline{G_3G_4}=……=\overline{G_{n-2}G_{n-1}}：\overline{G_{n-1}G_n}$ =3：2

   $\Longrightarrow\overline{G_1G_2}$ ，$\overline{G_2G_3}$, ……, $\overline{G_{n-1}G_n}$為有 n−1 項且公比= $\frac{2}{3}$的等比數列

   又，由**性質二**，P 為$G_n(n\to\infty)$的收斂點

   $\Longrightarrow$ $n\to\infty$時，$\overline{G_1G_2}$ ，$\overline{G_2G_3}$, ……, $\overline{G_{n-1}G_n}$ ，$\overline{G_nP}$，為公比= $\frac{2}{3}$的無窮等比數列

2. 由【伍-四-性質四】所述方法，可得$\overline{G_{k-1}G_k}：\overline{G_{k-1}P}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}L：(\frac{2^{k-1}}{3^{k-2}})L$

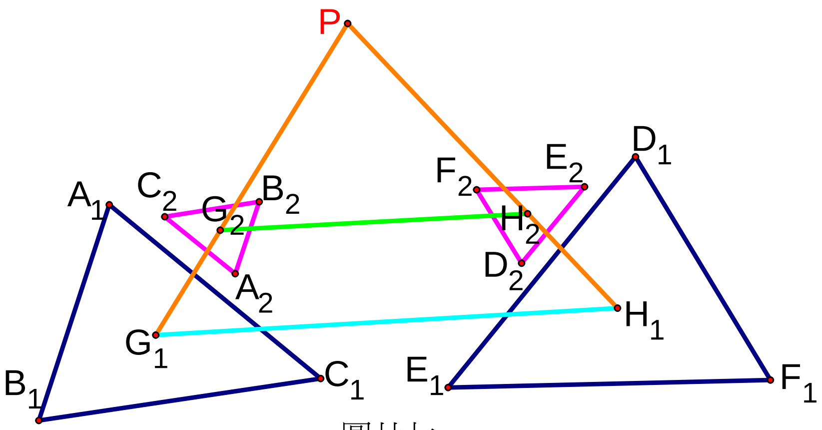
   $=2^{k-1}：2^{k-1}\times3$

   $=1：3$，得證。

六、相異三角形的 P 點重心三角形探討

(一) 相異兩任意三角形

給定任意$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta D_1E_1F_1$，設任意 P 點作$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta D_1E_1F_1$的 P 點重心$\Delta A_2B_2C_2$和$\Delta D_2E_2F_2$，並求出$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、 $\Delta D_1E_1F_1$與$\Delta D_2E_2F_2$的重心G_1、G_2、H_1、H_2(如圖廿七)。我們發現性質及證明如後。



圖廿七

【性質】$\overline{G_1H_1}:\overline{G_2H_2}=3:2$

【證明】

1. 由【伍-四-性質一】P 點分別與G_1、G_2以及H_1、H_2共線，$\overleftrightarrow{PG_1}$會和$\overleftrightarrow{PG_2}$、$\overline{G_1H_1}$、$\overline{G_2H_2}$形成$\Delta G_1PH_1$與$\Delta G_2PH_2$

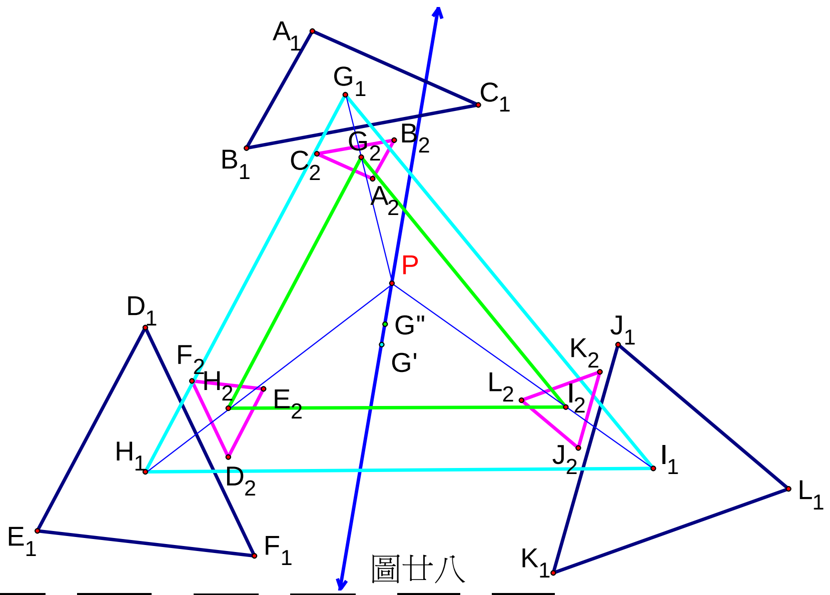
2. $\because \angle G_2PH_1$共用且$\overline{G_1P}:\overline{G_2P}=\overline{H_1P}:\overline{H_2P}=3:2$

   $\therefore \Delta G_1PH_1 \sim \Delta G_2PH_2$(SAS 相似)

   $\Rightarrow \overline{G_1H_1}:\overline{G_2H_2}=\overline{G_1P}:\overline{G_2P}=\overline{H_1P}:\overline{H_2P}=3:2$，得證。

(二) 相異三任意三角形

給定任意$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta G_1H_1I_1$，設任意 P 點作$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta G_1H_1I_1$的 P 點重心$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta G_2H_2I_2$，並求出$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta D_1E_1F_1$、$\Delta G_1H_1I_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta D_2E_2F_2$、$\Delta G_2H_2I_2$的重心G_1、H_1、I_1、G_2、H_2、I_2，再求出$\Delta G_1G_2G_3$、$\Delta H_1H_2H_3$的重心G'、G''(如圖廿八)。我們發現性質如下：



圖廿八

【性質一】$\overline{G_1H_1}:\overline{G_2H_2}=\overline{H_1I_1}:\overline{H_2I_2}=\overline{G_1I_1}:\overline{G_2I_2}=3:2$

【證明】

1. 在$\triangle G_1H_1P$中

   $\because \angle G_1PH_1$共用且$\overline{G_1G_2}:\overline{G_1P}=\overline{H_1H_2}:\overline{H_1P}=1:3$

   $\therefore \triangle G_1H_1P \sim \triangle G_1H_2P$(SAS 相似)

   $\Rightarrow \overline{G_1H_1}:\overline{G_2H_2}=\overline{G_1P}:\overline{G_2P}=\overline{H_1P}:\overline{H_2P}=3:2$

2. 同理，$\overline{H_1I_1}:\overline{H_2I_2}=\overline{G_1I_1}:\overline{G_2I_2}=3:2$，得證。

【性質二】G'、G''、P共線

【證明】

1. 令$A_1(x_1,y_1)$、$B_1(x_2,y_2)$、$C_1(x_3,y_3)$、…、$I_1(x_9,y_9)$，$P\,(x_0,y_0)$，則

   $G'\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9}{9},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9}{9}\right)$

   $G''\left(\frac{9x_0+2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9)}{27},\frac{9y_0+2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9)}{27}\right)$

2. 計算斜率後可得$\overleftrightarrow{G'G''}$斜率=$\overleftrightarrow{G''P}$斜率

   $\Rightarrow$ P、G'、G''三點共線，得證。

【性質三】$\overline{G'G''}:\overline{PG'}=1:3$

【證明】

1. $$\overline{G'G''}=\sqrt{\left[\frac{(3-2)(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9)-9x_0}{27}\right]^2+\left[\frac{(3-2)(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9)-9y_0}{27}\right]^2}$$

   $$=\frac{\sqrt{\begin{matrix}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-9x_0)^2\\+(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9-9y_0)^2\end{matrix}}}{27}$$

2. $$\overline{PG'}=\sqrt{\left[\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-9x_0}{9}\right]^2+\left[\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9-9y_0}{9}\right]^2}$$

   $$=\frac{\sqrt{\begin{matrix}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-9x_0)^2\\+(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9-9y_0)^2\end{matrix}}}{9}$$

   $=\overline{G'G''}\times 3$，得證。

陸、 研究結論

一、P 點重心 n 邊形

- P 點重心 n 邊形各邊分別與原 n 邊形相對應相隔對角線平行
- 原 n 邊形的相隔對角線和：原 n 邊形中點連線：P 點重心 n 邊形的邊長=6：3：2
- 移動 P 點位置，P 點重心 n 邊形恆不變

二、P 點重心 n 邊形反推

- 一 P 點重心奇數邊形可反推一原 n 邊形
- 一 P 點重心偶數邊形可反推無限個原 n 邊形

三、P 點重心多面體

- 原多面體面的形狀、面數決定 P 點重心多面體上一種面的形狀、數量
- 原多面體的頂點連接面數、頂點數決定 P 點重心多面體上一種面的形狀、數量

四、重複疊作 P 點重心三、四、五邊形

- 一組重覆疊作 P 點重心三、四、五邊形，各重心與 P 點共線
- P 點為第 n 層($n\rightarrow\infty$)P 點重心三、四、五邊形重心的收斂點
- 相鄰 P 點重心三、四、五邊形重心的距離比為 3：2
- $1\leq\overline{G_kP}$切割出的四邊形與三角形面積比值≤1.25。

五、相異三角形的 P 點重心三角形

- 相異兩任意三角形的重心連線：兩 P 點重心連線=3：2
- G'、G''與 P 點共線
- $\overline{G'G''}:\overline{PG'}=1:3$

柒、 未來展望

1. 推測 P 點重心 n 邊形的「條件限制」
2. 推出 P 點重心 n 面體的性質及證明方法
3. 重複疊作 P 點重心 n 邊形，探討其性質
4. 求出 n 個任意三角形與其 P 點重心三角形的重心，將兩種三角形的重心分別連線形成兩 n 邊形，探討兩者之間的關係

捌、 參考資料及其他

- 林哲佑、朱柏翰、李沛宸（2012）。**第 52 屆全國中小學科展作品ー心心相印。**2012 年 11 月 27 日，取自「科展群傑廳」：http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9618
- 林福來等（2011）。普通高級中學數學第三冊。**第三章平面向量**。台南市：南一書局。
- 林語謙、林彤、鄧爵明、李堉辰（2009）。**宜蘭高中98學年度學生數理自然科學專題研究ー任意多邊形的重心求法。**2009年，取自：http://blog.ylsh.ilc.edu.tw/life/gallery/45/%E8%87%AA%E7%84%B612-%E4%BB%BB%E6%84%8F%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E7%9A%84%E9%87%8D%E5%BF%83%E6%B1%82%E6%B3%95.pdf

【評語】030423

本作品研究所謂的Ｐ點重心ｎ邊形與原ｎ邊形的性質，有特例也有一般性，相當不錯，而且困難度夠，最後重複疊作求重心的性質，其想法相當好。