中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030422

天生「火柴」必有用

－幾何圖形的變化與多元性之探討

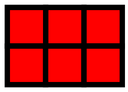
學校名稱：桃園縣私立新興高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 盧德倫 國二 譚蔚寧	陳怡君

關鍵詞：有限數列、正多邊形、幾何證明

摘要

本研究從探討右圖中一種益智火柴遊戲開始，我們在反覆的尋找解答與討論中，發現其解答的個數與圖形之間有某種規律。因此，第一章，我們從一些相類似的題目，歸納出一套解題的方法與技巧。第二章，我們定義「拆解後火柴棒數與原有火柴棒數的差」為「重複」,「重複」是圖形的其中一項要素，且在下一章探討中扮演重要的角色。在第三章中，我們針對有關益智題型的「移除」做探討，瞭解「移除 s 根火柴棒使其變成 n 個正方形」之題型，尋其規律。



上圖是一種由火柴棒所組成的2×3矩形，請試著取走 3 支火柴棒，使其只剩下 4 個相同的正方形？

壹、研究動機

在決定要做數學科展後，我們不斷上網搜索與數學有關的小遊戲與程式......諸如此類。偶然間玩起了移動火柴的題目，在一次次的破關中，我們察覺這些圖形有一定的規律，移動的方法也遵循著某些規則。於是我們進行了初步的運算，發現可以藉由數學方法解得答案，也可已藉由邏輯推算出移動可能性的變化值。

貳、研究目的

研究問題一： 在特定火柴棒所組成的圖形中，指定取走棒數s與剩餘火柴棒所組成的正方形個數n ，其解是否存在。

研究問題二： 在不斷的計算與數據歸納下，我們將各個圖形排列時火柴棒的重複量數，若將研究問題一的結果予以分析，也可歸納出類似結果。本問題即是探討此變量的變化過程。

研究問題三： 本章將深入問題核心，對於給定圖形給出其火柴棒在移動之後所形成圖形的各標準解，並定義其為一變量，探討各變量之間的變化關係，予以詮釋說明。

參、研究設備及器材

電腦，火柴棒與竹籤，電腦(Word、Excel、小畫家、power point)

肆、研究過程與討論

研究問題一

一、研究目的：在特定火柴棒所組成的圖形中，指定取走棒數 s 與剩餘火柴棒所組成的正方形個數 n ，其解是否存在。

二、規則與說明：

(一).拿取 s 根火柴棒時，剩餘的 n 個火柴棒須為完整圖形，如有不成圖形之火柴棒殘餘，則此動作不計。

(二)拿取 3 根火柴棒時，剩餘 4 個正方形，即用[3，4]表示。

(三)為方便說明，研究過程中取走指定火柴，將依圖 1 之編碼說明。

(四)我們定義同一橫直線與同一縱直線如圖 2)

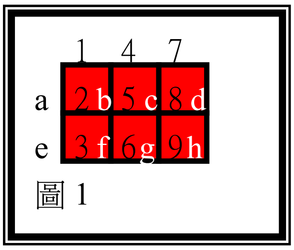


圖 1

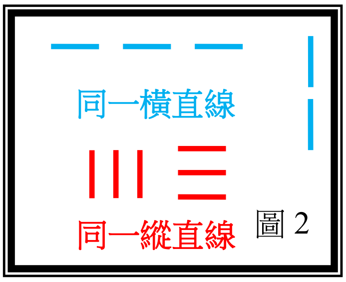


圖 2

三、研究問題一的過程與討論

我們將拿取的棒數分為二部份探討，其一是移除的棒數位於同一直線，其二是移除的棒數不位於同一直線。

(一)移除的火柴棒位於同一直線

1.當移除之三根火柴棒位於同一橫直線(表一)

表一		
當移除之三根火柴棒位於同一橫直線		計入(O or X)
拿取可能	拿取後結果	
(1，4，7)	殘餘 a、b、c、d	X
(2，5，8)	殘餘 e、f、g、h	X
(3，6，9)	無法組成任何1×1正方形	X

2.當移除之三根火柴棒位於同一縱直線(表二)

表二		
當移除之三根火柴棒位於同一行直線		計入(O or X)
拿取可能	拿取後結果	
(1，2，3)	殘餘 a、e	X
(4，5，6)	代入恰有一解	O
(7，8，9)	殘餘 d，h	X
(a，b，c)	殘餘 1、4，7，d	X
(b，c，d)	殘餘 1、4，7，a	X
(e，f，g)	殘餘 3、6，9， h	X
(f，g，h)	殘餘 3、6，9，e	X

(二)移除的火柴棒不位於同一直線

1.當移除之三根火柴棒位不位於同一橫直線

將討論要移除的兩根火柴棒位於同一列後，另一根火柴棒位於不同列，以及要移除的三根火柴棒都不在同一列直線上，其中共分成以下三種狀況(表三)

第一種：位於同一列直線的兩根火柴棒相鄰

第二種：位於同一列直線的兩根火柴棒不相鄰

第三種：要移除的三根火柴棒皆不位於同一列直線上

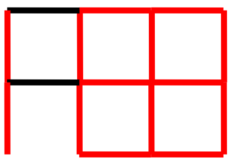
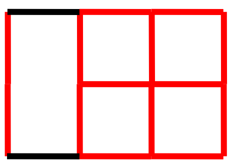
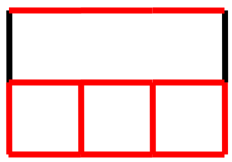
<table>
<tr><th colspan="4">表三</th></tr>
<tr><th colspan="3">當移除之三根火柴棒位不位於同一列直線</th><th rowspan="2">計入
(O or X)</th></tr>
<tr><th>分類</th><th>拿取可能</th><th>拿取後結果</th></tr>
<tr><td>第一種</td><td>(1，4)、(4，7)、(2，5)、
(5，8)、(3，6)、(6，9)、
(a，e)、(b，f)、(c，g)、(d，h)</td><td rowspan="2">剩餘的火柴棒跟數都將大於 1，無法用剩餘取走一根的動作來使圖形無殘餘。</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二種</td><td>(1，7)、(3，9)</td><td rowspan="2">X</td></tr>
<tr><td>(2，8)</td><td>殘餘 1，7，3，9，a，d，e，h</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第三種</td><td colspan="2">研究方法：
以「擬定一根，找出第二根，再刪除第三根可能」的步驟來執行。
以數對{指定移除火柴棒，剩餘火柴棒數}表示</td><td rowspan="4">X</td></tr>
<tr><td colspan="2">{1，1}、{4，0}、{7，1}、{2，4}、{8，4}、{3，1}、{6，0}、{9，1}</td></tr>
<tr><td colspan="2">{a，1}、{d，1}、{e，1}、{h，1}</td></tr>
<tr><td colspan="2">{b，3}、{c，3}、{f，3}、{g，3}</td></tr>
</table>

2.當移除之三根火柴棒不位於同一縱直線 ，我們將種類分作三種(表四)：

第一種：要移除的 2 根火柴棒間隔一格

第二種：當移除的 2 根火柴棒間隔兩格

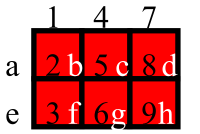
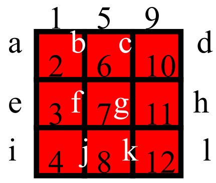
第三種：當移除的 2 根火柴棒間隔三格

<table>
<tr><th colspan="5">表四</th></tr>
<tr><th colspan="4">當移除之三根火柴棒不位於同一行直線</th><th rowspan="2">計入
(O or X)</th></tr>
<tr><th>分類</th><th>參考圖</th><th>拿取可能</th><th>剩餘根數
(不成立)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">第一種</td><td rowspan="4"></td><td>(4，5)、(5，6)</td><td>1</td><td>O</td></tr>
<tr><td>(b，c)、(f，g)</td><td>無法組成圖形</td><td rowspan="3">X</td></tr>
<tr><td>(a，b)、(c，d)、(e，f)、(g，h)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(1，2)、(2，3)、(7，8)、(8，9)</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二種</td><td rowspan="2"></td><td>(1，3)、(4，6)、(7，9)</td><td>3</td><td rowspan="2">X</td></tr>
<tr><td>(a，b)、(c，d)、(e，f)、(g，h)</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第三種</td><td></td><td>(a，d)、(e，h)</td><td>2</td><td>X</td></tr>
</table>

※其餘題目也依照這種方式解題，得各題目解如下:

(三)解(解可能不只一種)(表五)

以下題目若取走 s 支火柴棒，使其剩下 n 個正方形，將表示為 $[s,n]$

表五			
		解	參考圖
1.對於圖 2 之解(4 項)	(1)[3，4]	(4，5，6)	 橫線數字，縱線英文
	(2)[4，4]	(4，7，c，d)、(1，7，a，d)	
	(3)[5，3]	(1，6，7，a，d)	
	(4)[6，3]	(3，4，7，c，e，d) (3，4，5，6，e，f)	
2.對於圖 3 之解(4 項)	(1)[8，2]	(2，3，10，11，b，c，j，k) (2，6，10，11，b，f，j，k)	 橫線數字，縱線英文
	(2)[8，3]	(6，7，10，11，c，g，j，k) (2，4，9，10，b，d，i，k)	
	(3)[8，4]	(2，4，11，12，b，h，i，l) (5，6，7，8，e，f，g，h)	
	(4)[8，5]	(1，5，6，9，a，b，c，d) (1，4，9，12，a，d，i，l) (1，5，9，a，b，c，d，f)	
	補充：[8，6]	(1，5，7，9，a，b，c，d)	

研究問題二

一、研究目的：探討一給定圖形中，隨著邊長的不斷增加，其重複(定義如下)有何規律變化

二、題目附屬規則：

重複的定義：在一給定矩形中，將其拆解後共可分解出 n 個正方形(因此經拆解後共需 $4n$ 根火柴棒)但實際上，此圖形並不需要這麼多火柴(棒數為重疊)，我們設原有火柴 f 根，重複為 r，則得一恆等式 $r=4n-f$ (重複＝4×正方形個數 - 原有火柴棒數)，其中 $4n \geq f$，我們將以此計算 r。<例>令一 2×3 矩形。拆解後共可拆解出 6 個正方形，即 $n=6$ (共需 $4\times6=24$ 根火柴棒)。實際上我們只用了 17 根，即 $f=17$，因此， 重複(r)即 $=24-17=7$。

三、研究問題：

(一)探討正方形與正方形之間的重複有何規律(設邊長 $=l$)

研究問題：給定一個邊長為 l 的正方形，當其邊長增為 $l+1$，則此 $(l+1)\times(l+1)$ 之正方形和 $l\times l$ 之正方形之間的重複有何變化?是否存在規則？

(二)探討長方形與長方形之間的重複有何規律

研究問題：給定一長方形，當其長、寬增加，則新圖形與原圖形的重複有何規則變化？

(三)探討正三角形與正三角形之間的重複有何規律(設層數為 m)

研究問題：給定一個層數為 m 的正三角形，能否以 m 表達其重複?

(四)探討其他圖形的重複有何規律

研究問題：概述其他圖形(找到重複規律)

四、研究過程及問題討論

(一)探討正方形與正方形之間的重複有何規律(設邊長 $=l$)

1.問題說明：正方形之重複棒數即為拆解後火柴棒數減原有火柴棒數。因此我們分兩部探

討：拆解後火柴棒數(定義為 j)及原有火柴棒數(定義為 f)

2.名詞釋義：

(1)拆解後火柴棒數：將一矩形(在本章節中)拆解後，分成各個小正方形：1×1 ，2×2 ，3×3……等各個圖形後，其火柴棒數總和，並將其定義為 j。(ex： 2×2 的矩形可拆解成 4 個 1×1 的正方形和 1 個 2×2 的正方形，如圖 3。得其 $j=4\times4+8\times1=24$)

(2)原有火柴棒數：給定一正方形，其實際組成棒數定義為 f (例： 2×2 正方形 $f=12$)

3.研究過程

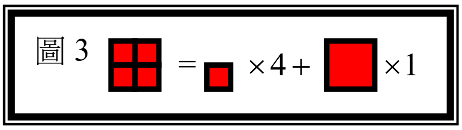


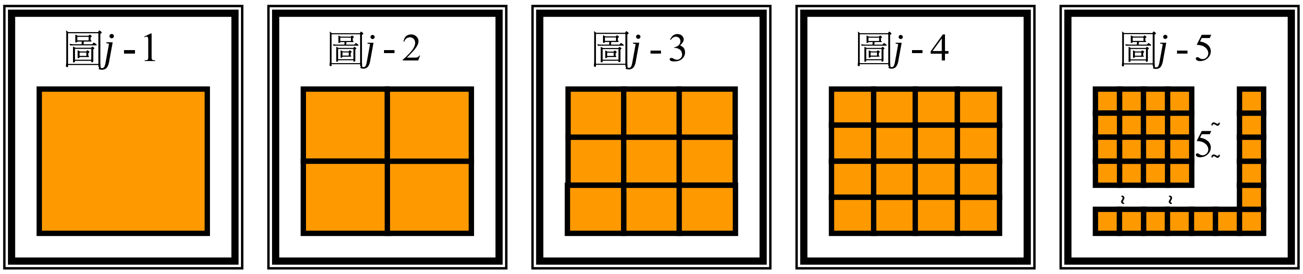
圖 3

(1)拆解後火柴棒數 (j)

因正方形邊長均相等，因此我們由 1×1 開始探討至 $l\times l$ ，並表示拆解後火柴棒數為 $j=j(l)$ (函數)(如表六，附圖 $j-1\sim j-5$)

表六

l	圖形	正方形個數					拆解後火柴棒數 (j)
		1×1	2×2	3×3	4×4	$l\times l$	
1	圖 $j-1$	1	x	x	x	x	$4\times1=4$
2	圖 $j-2$	4	1	x	x	x	$8\times1+4\times4=24$
3	圖 $j-3$	9	4	1	x	x	$12\times1+8\times4+4\times9=4(3+8+9)$
4	圖 $j-4$	4^2	3^2	2^2	1^2	x	$4[4\times1^2+3\times2^2+2\times3^2+1\times4^2]$ $=4[1\times4^2+2\times3^2+3\times2^2+4\times1^2]$
l	圖 $j-5$	l^2	$(l-1)^2$	$(l-2)^2$	$(l-3)^2$	1^2	$4\{l^2+2(l-1)^2+3(l-2)^2+\cdots\cdots+l[l-(l-1)]^2\}$



結論：拆解後火柴棒數 (j) 即為下述：

$$j=4\{l^2+2(l-1)^2+3(l-2)^2+......+l[l-(l-1)]^2\}=4\sum_{k=1}^{l}k[l-(k-1)]$$

(2)原有火柴棒數 (f)

※因為列數為邊長數+1，令一正方形邊長為 l ，則列數為 $l+1$ 。由於上述觀念的產生，我們將正方形分為兩部分(如圖 4)推論(證明)：如圖 4，共兩組 $l(l+1)$ 個火柴，即 $2l(l+1)$

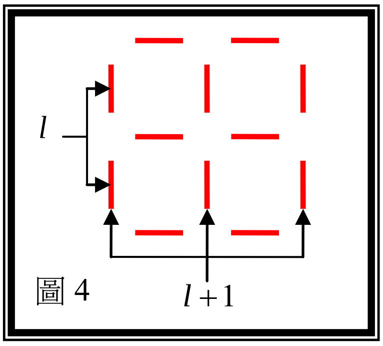


圖 4

※另一解：我們將 $l=1\sim l$ 的正方形數據列出後，得

$f=4\sum_{k=1}^{h}k$ (表示法轉換)(如表七)

表七				
l	1	2	3	l
f	4 根	10 根	24 根	$4(1+2+3+...+l)$
$f/4$ 的展開	1	1+2	1+2+3	$(1+2+3+...+l)$

(3)結論：重複火柴棒數 $r_{正方形} = j - f = 4\sum_{k=1}^{l} k[l-(k-1)]^2 - 4\sum_{k=1}^{l} k = \frac{4}{3}l(l+1)(l-1)(l+4)$

(二)探討長方形與長方形之間的重複有何規律

1.題目說明：

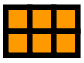
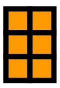
(1)本章節題目有了長(h)、寬(l)的出現，並且的最小單位仍使用正方形

(2)由於正方形之邊長(l)可無限增大，因此本章節分步驟探討，第一步驟，整合已1×1正方形組合的各長方形之間的規律，第二步驟，即探討2×2，以此類推

(3)其重複(r)公差以d_y^x表示之，x即為步驟數(非次方數)，y為列數，其後會詳細說明之

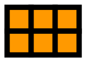
2.研究過程與問題討論 (設公差為d_y^x，x為步驟數，y為圖形編碼，$x\in N$，$y\in N$)

(1)第一步驟：只探討1×1正方形(如表八)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$l(y)$ \ h</td><td colspan="4">表八</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>d_y^1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>圖形</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">$d_1^1 = 1-0 = 2-1 = 1$</td></tr>
<tr><td>r</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d_r(間距)</td><td></td><td>1-0=1</td><td>2-1=1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>圖形</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">$d_2^1 = 4-1 = 7-4 = 3$</td></tr>
<tr><td>r</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>d_r(間距)</td><td></td><td>4-1=3</td><td>7-4=3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>圖形</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">$d_3^1 = 7-2 = 12-7 = 5$</td></tr>
<tr><td>r</td><td>2</td><td>7</td><td>12</td></tr>
<tr><td>d_r(間距)</td><td></td><td>7-2=5</td><td>12-7=5</td></tr>
</table>

簡化上述公差後，得解如右：$d^1 = d_2^1 - d_1^1 = d_3^1 - d_2^1 = 5-3 = 3-1 = 2$

(2)第二步驟：探討1×1，2×2正方形(如表九)

$l(y)$ \ h		1	2	3	d_y^2
		表九			
1	圖形				$d_1^2 = 1-0 = 2-1 = 1$
	r	0	1	2	
	d_r(間距)		1-0=1	2-1=1	
2	圖形				$d_2^2 = 12-1 = 23-12 = 11$
	r	1	12	23	
	d_r(間距)		12-1=11	23-12=11	

簡化上述公差後，得解如下：$d^2 = d_2^2 - d_1^2 = 11-1 = 10$

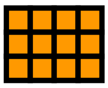
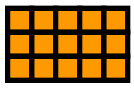
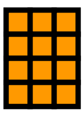
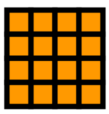
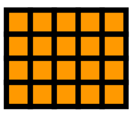
※從此步驟開始，各列(y變化量)都從此排所有的第一個正方形(同時也是唯一一個)開始探討。不斷計算已有的數據無任何意義(ex：3×4的矩形不管在第三步驟或第四步驟，其重複數都為 89，探討此例對公差整體趨勢並無幫助)

ex：第三步驟：從3×3正方形開始探討(第三排第三個)

第五步驟：從5×5正方形開始探討(第五排第五個)

(即從d_y^x開始探討且$x = y$)

(3)第三步驟：探討1×1，2×2，3×3正方形(如表十)

$l(y)$ \ h		3	4	5	d_y^3
		表十			
3	圖形				$d_3^3 = 89-56 = 122-89 = 33$
	r	56	89	122	
	d_r(間距)		89-56=33	122-89=33	
4	圖形				$d_4^3 = 199-144 = 144-89 = 55$
	r	89	144	199	
	d_r(間距)		144-89=55	199-144=55	

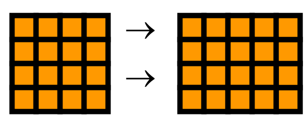
簡化上述公差後，得解如下：$d^3 = d_2^3 - d_1^3 = 55-33 = 22$

(4)第四步驟：探討$1\times1 \sim 4\times4$正方形：

※從此步驟開始，將以計算方式表示之(表格太過龐大)

由圖 5 可知：增加了一排，增加 9 根增加了 4 個1×1正方形，3 個2×2正方形，2 個3×3正方形，1 個4×4正方形

圖 5



$\rightarrow d_4^4 = 4\times4+3\times8+2\times12+1\times16-9=71$

同理，$d_5^4 = 5\times4+4\times8+3\times12+2\times16-11=109 \rightarrow d^4 = d_5^4 - d_4^4 = 109-71=38$

(5)第五步驟：探討$1\times1 \sim 5\times5$正方形：

$d_5^4 = 5\times4+4\times8+3\times12+2\times16+1\times20-11=129$

$d_5^4 = 6\times4+5\times8+4\times12+3\times16+2\times20-13=187$

$\rightarrow d^5 = 187-129=58$

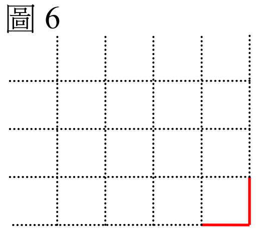
3.討論(以數據推算)：$d^l = 4\sum_{k=1}^{i} k - 2 = 2l(l+1)-2 = 2(l^2+l-1)$

關於以上結論，我們以兩種方式進行結論說明；代數方法證明與圖形(幾何)論證

(1)以計算(代數)方法證明公式

每個d之間因一次多計算了2×2，$3\times3\cdots\cdots l\times l$，所以每次皆會多了$4\times l$，而(-2)則是為每個$d$之間都會增加兩根(如圖 6)：

圖 6



$$2 \xrightarrow{8=4\times2} 10 \xrightarrow{12=4\times3} 22 \xrightarrow{16=4\times4} 38 \xrightarrow{20=4\times5} 58$$

由此規律地增可歸納出一般項：

$$d^1 = 4\times1-2 = 4\times1-2$$
$$d^2 = 4\times3-2 = 4\times(1+2)-2$$
$$d^3 = 4\times6-2 = 4\times(1+2+3)-2$$
$$d^4 = 4\times10-2 = 4\times(1+2+3+4)-2$$
$$d^5 = 4\times15-2 = 4\times(1+2+3+4+5)-2$$
$$d^l = 4\times(1+2+\ldots\ldots+l)-2$$

公式即為$d^l = (4\sum_{k=1}^{l} k)-2$

(2)圖形(幾何)論證

列 1：每個圖形間皆增加了 3 根，多了一個1×1正方形，得其各圖形 d=1

列 2：每個圖形間皆增加了 5 根，多了一個2×2、兩個1×1正方形……

以下表(表十一)探討各圖形間的差異：

	表十一							
	增加根數(各圖形之間)	增加圖形(正方形) 1×1	2×2	3×3	4×4		$l\times l$	多的重複(r)
列 1	3	1 個	x	x	x		x	$4\times1-3$
列 2	5	2 個	1 個	x	x		x	$4\times2+8\times1-5$
列 3	$2\times3+1$	3 個	2 個	1 個	x		x	$4\times3+8\times2+12\times1-7$
列 4	$2\times4+1$	4 個	3 個	2 個	1 個		x	$4\times4+\ldots+16\times1-9$
列l	$2\times l+1$	l個	$l-1$個	$l-2$個	$l-3$個		$[l-(l-1)]$個	$4\sum_{k=1}^{l} k[n-(k-1)]$

(可證明圖形間的重複確實存在公差 d_r ，而非不規則性的數字)

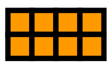
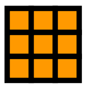
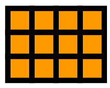
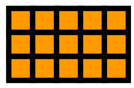
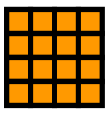
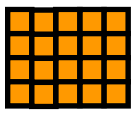
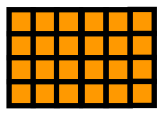
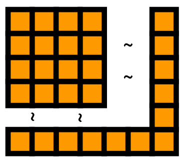
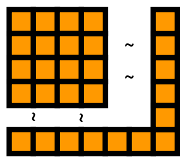
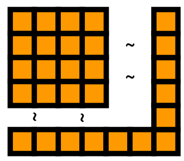
下表(表十二)將統整表十一的數據，務求列 $g-1 \to$ 列 g 的變量探討：

	表十二							
	增加根數(各圖形之間)	增加圖形(正方形)						多的重複 (r)
		1×1	2×2	3×3	4×4		$l\times l$	
列1 $\to$ 列2	2 根	x	x	x	x		x	$4\times1-2$
列2 $\to$ 列3	2 根	1 個	x	x	x		x	$4\times(1+2)-2$
列3 $\to$ 列4	2 根	1 個	1 個	x	x		x	$4\times(1+2+3)-2$
列4 $\to$ 列5	2 根	1 個	1 個	1 個	x		x	$4\times(1+...+4)-2$
列 $(l-1) \to$ 列 l	2 根	1 個	1 個	1 個	1 個		1 個	$(4\sum_{k=1}^{l}k)-2$

公式即為 $d^l=(4\sum_{k=1}^{l}k)-2$

4.結論：

本研究(長方形之重複)均架構在「給定一能存在於長方形中的最大正方形，並代入正方形公式和公差」，經化簡(將第一項歸為 $h\times l$ 正方形)後可得下表(表十三)：

l \ h	表十三			
	l	$l+1$	$l+2$	適用公差 d_r
1				$4\times1-2$
2				$4\times3-2$
3				$4\times6-2$
4				$4\times10-2$
l				$(4\sum_{k=1}^{l}k)-2$

我們令 $l\times l$ 為首項，則一 $h\times l(h\geq l)$ 的矩形為第 $h-l+1$ 項

$$*\,a_1=\frac{4}{3}l(l+1)(l-1)(l+4)$$

根據等差數列公式 $a_p=a_1+(p-1)d$ ，可知： $*\,p=h-l+1$

$$*\,d=\left\{\sum_{k=1}^{l}[k(l-k+1)]\right\}-(2l+1)$$

則經整理可得：$r=\frac{4}{3}l(l+1)(l-1)(l+4)+(h-l)d$

$$=\frac{4}{3}l(l+1)(l-1)(l+4)+(h-l)[\frac{2}{3}l(l+1)(5l+4)-2l-1]$$

(三)正三角形：給定一個層數為 m 的正三角形，能否以 m 表達其重複?

1.目的：探討正三角形面積向下增加時，其重複有何規則性變化

2.探討：(只以邊長=1 之正三角形為基礎圖形，因圖形變量只向下，即單維遞增，探討邊長大於 1 之正三角形重複無意義)

(1)思考過程：

a.三角形和長方形不同，不能以向右及向下為研究動向，因此以唯一可遞增的方向→向下增加

b.我們有空心的想法如圖 7：

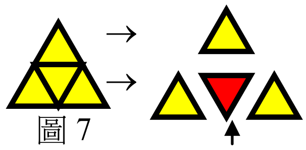


圖 7

則中心之三角形(即空心)為所有重複

(2)計算過程：

只須求出空心三角形即可，設層數 m ，重複數 r (如表十四)

表十四

m	1	2	3	4	m
空心三角形個數	0	1	3	1+2+3	$3[1+2+...(m-2)+(m-1)]$
r	0	3	9	3(1+2+3)	$[1+2+...(m-2)+(m-1)]$

(3)推導出公式如右：$r=3\sum_{k=1}^{m-1}k$

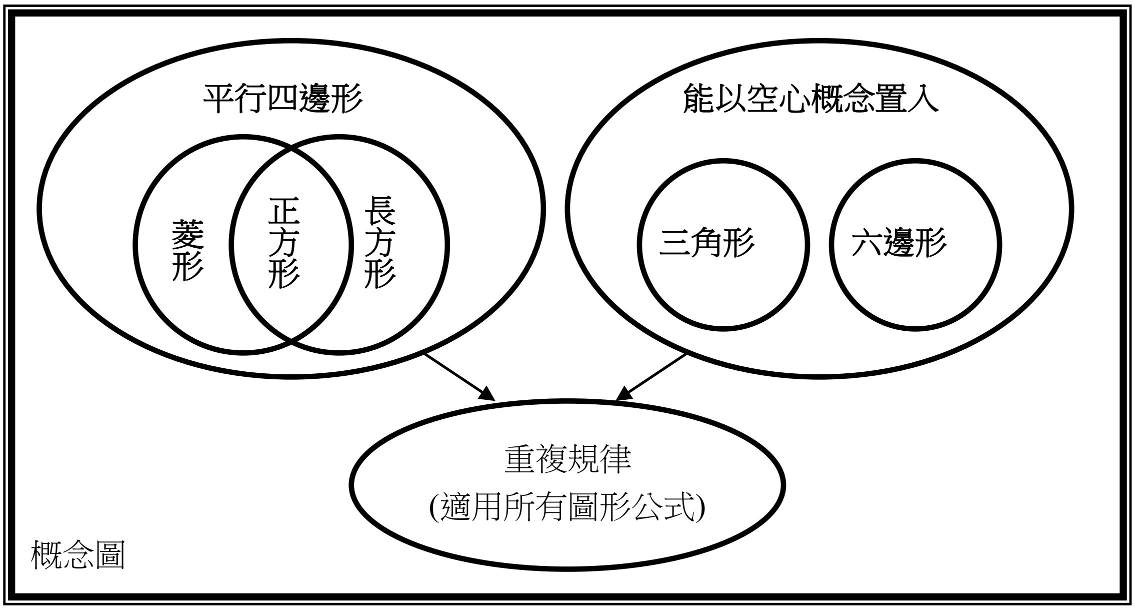
3.結論：$r_{正三角形}=3\sum_{k=1}^{m-1}k=\frac{3}{2}m(m-1)$

(四)其他圖形之討論

1.題目說明

(1)上述公式解只適用於其所使用的圖形。因此我們將進一步探討一些較常見之圖形的重複規律。

(2)概念圖：



概念圖

(3)重複之探討以圖形遞增為基礎，一般而言，其發展有無限可能(各邊獨立發展)但前述討論其接線在兩變量之下。注意：本研究問題之圖形探討在於：a 某圖形複製 k 個後，其仍能組成某圖形。

(4)圖形之種類有無限多種，我們不能一一探討，因此，由於超過一變量(實際上，每個圖型皆有 2 種以上變量，正三角形屬特例)之圖形，其邊角會相契合(ex：正六角形)，可知其各內角角度皆為 360 之因數。本研究問題將以此篩選圖形。

2.研究過程及問題討論

(1)菱形：菱形即正方形之角度扭曲，因此其規律仍同正方形

(2)平行四邊形：平行四邊形即長方形之角度扭曲，因此其規律仍同長方形

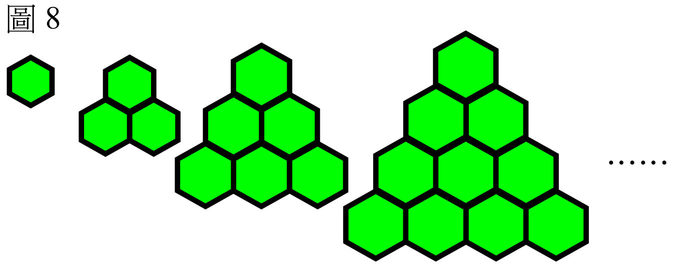
(3)正六角形：

已知無論如何拼湊正六角形皆無法再次組出正六角形，因此我們藉三角形的排列方法來說明此題。

a.原有火柴棒數(j)(如圖 8)：

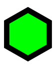
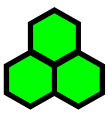
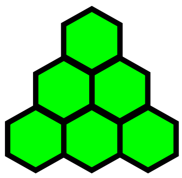
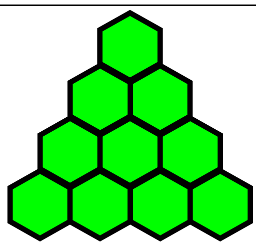
由圖 8，若用一般式表示原用火柴棒數(j)，設層數為 m，得 $j=6\sum_{k=1}^{m}k=\frac{1}{2}m(m+1)\times 6=3m(m+1)$

圖 8



b.實際使用的火柴棒數(f)(如表十五)

表十五

m	1	2	3	4	m
圖形					
∧個數	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	$\sum_{k=1}^{m}k$
|個數	2	2+3	2+3+4	2+3+4+5	$\sum_{k=2}^{m+1}k$
∨個數	1	2	3	4	m
f	6	15	27	42	$(2\sum_{k=1}^{m}k)+(\sum_{k=1}^{m+1}k)+2m$

$$f=(2\sum_{k=1}^{m}k)+(\sum_{k=1}^{m+1}k)+2m=\frac{3}{2}m(m+3)$$

(3) $r_{\text{正六角形}}=j-f=3m(m+1)-\frac{3}{2}m(m+3)=\frac{3}{2}m(m-1)$【與正三角形相同】

(4)針對其他正多邊形，只要代入 $\theta_{\text{內角}}=\frac{180(n-2)}{n}$ 的內角公式，就可知其不整除 360 度，即 $\text{n}\notin\{3,4,6\}\Leftrightarrow\frac{180^{\circ}(\text{n}-2)}{\text{n}}\mid 360^{\circ}$

(5)小結：可知不論任何圖形，其重複不可能有完全相同的算法，共兩公式涵蓋 $\frac{180^{\circ}(\text{n}-2)}{\text{n}}\mid 360^{\circ}$ 之圖形列出如下：

※ $r_{\text{矩形h×l}}=\frac{4}{3}l(l+1)(l-1)(l+4)+(h-l)[\frac{2}{3}l(l+1)(5l+4)-2l-1]$

※ $r_{\text{正六邊形、正三角形}}=\frac{3}{2}m(m-1)$

研究問題三

一、研究目的：

研究問題三正式進入「研究問題一的規律探討」。在研究問題三，藉由研究問題二「重複」的概念繼續深入問題核心。研究問題三之目的為尋求各個圖形(各個解)之規律，我們定義的規律共兩項：

(一)對於任一 $h\times l$ 矩形，在拿掉 s 根火柴棒之後，其能組成的圖形個數之規律

(二)對於任一 $h\times l$ 矩形，在拿掉 s 根火柴棒之後，其能組成的圖形具有何種特徵

(對數據探討而言，圖型特徵變化存在的規律参表即知)

二、名詞釋義：

(一) $h\times l$ ：定義為一 $h\times l$ 之矩形， h 、 l 均為邊長且 $h\geq l$

(二) s ：移除棒數

(三) r ：重複

(四) k ：移除正方形個數

(五) n ：剩餘火柴棒個數

(六) s' ：移除解的個數

註： $k+n=h\times l$

註： $2(h\times l)+h+l=4(h\times l)-r=$ 原有火柴棒數(f)

註： $2(h\times l)+h+l-s=4n-r$

三、題目附屬規則：

拿取 s 根火柴棒時，剩餘的 n 個火柴棒須為完整圖形，如不成圖形之火柴棒殘餘，則此動作不計。

四、問題討論(依據)

規律一探討：對於任一 $h\times l$ 的矩形，在拿掉 s 根火柴棒之後，其能組成的圖形個數之規律

(一)數據計算與幾何論證

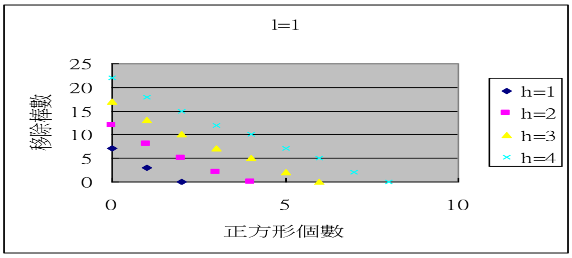
一開始，我們將所有的數據統整，並記錄(解法同研究問題一)如下表十六(另附 xy 座標圖使明瞭趨勢變化)。本研究針對任一 $h\times l$ 矩形，並令 h 為固定值，以 l 的變化作為研究依據。但是因規則複雜，無法以直接觀察數據尋找規律。本章節雖無規律，但之後的「最大值與最小值」章節中，此提供了數據與 xy 座標趨勢圖，不可忽略。

1. l=1(無規律)

表十六

$h=1$	正方形個數	2	1	0						
	移除棒數	0	3	7						
$h=2$	正方形個數	4	3	2	1	0				
	移除棒數	0	2	5	8	12				
$h=3$	正方形個數	6	5	4	3	2	1	0		
	移除棒數	0	2	5	7	10	13	17		
$h=4$	正方形個數	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	移除棒數	0	2	5	7	10	12	15	18	22

圖示



由上圖可知，l 本身有個別規律，但 l 的個體範圍之間卻沒有共通規律

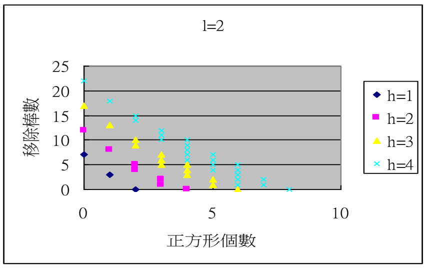
2. l=2(無規律)

此探討亦無規律。由 $h=2$ 開始，每個正方形個數開始有不同的組合。因變數更多，因此更難尋找規律。(表十七)(ex： $h=4$ 時，當剩餘正方形個數為 7 時，移除棒數有 1 或 2 的可能)

表十七

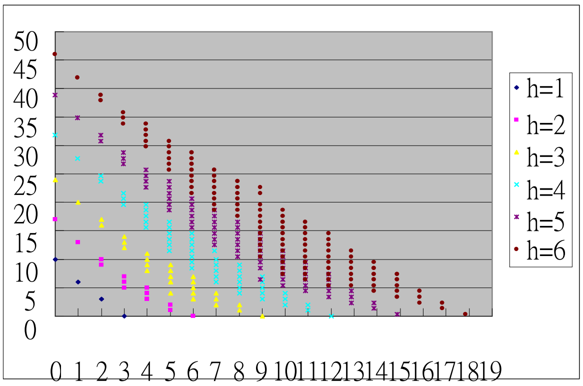
$h=1$	正方形個數	2	1	0																					
	移除棒數	0	3	7																					
$h=2$	正方形個數	4	3	3	2	2	1	0																	
	移除棒數	0	1	2	4	5	8	12																	
$h=3$	正方形個數	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	1	0											
	移除棒數	0	1	2	3	4	5	5	6	7	9	10	13	17											
$h=4$	正方形個數	8	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	2	2	1	0
	移除棒數	0	1	2	1	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	10	10	11	12	14	15	18	22

圖示



3. l=3(無規律)

$l=3$ 正方形個數有不同的組合較更為繁雜。(ex： $h=6$ 時，當剩餘正方形個數為 8 時，移除棒數有 13、12、11、10、9、8、7 的可能)(由 $l=1$ 的規律類推出上方座標，由於表格內容過大，因此表格不列出)



※下圖 9 以 n (正方形個數)為橫座標， s (移除棒數)為縱座標，探討 s' (所求解的個數總和)。由圖可大概判斷： s' 的座標以弧形為架構，

但 s'_{MAX} (最大值，即弧形的巔峰)不位於正中間[即$\frac{1}{2}(h \times l)$]，而是些許小於正中間的值

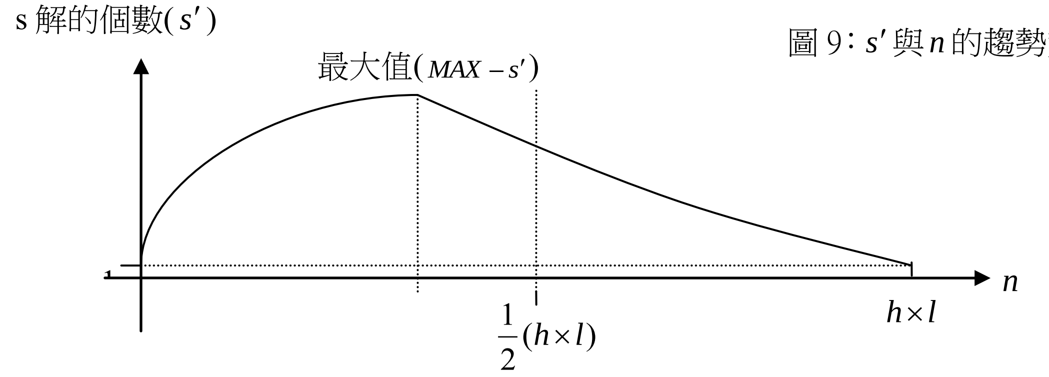


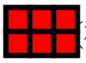
圖 9：s' 與 n 的趨勢變化圖

(二)研究重複與移除的關係

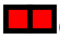
在剛做移除時，我們只探討 2×3、3×3 兩圖形，並試求從其重複數 r 與移除數尋找規律。(經由研究問題二的幾何論證可知連續性圖形皆有規律可言，所以找到一除數與重複數的關聯規律成立)規律存在，但無法推導以後的圖形。下列式研究過程，概述移除的小規則如何影響移除數本身的規律。

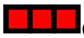
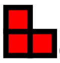
1.名詞釋義: (1) a :面積 (2) s :移除數 (3) r :重複數

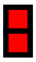
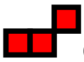
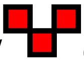
2.研究目的與探討：研究定定圖形面積時，其重複與移除有何關聯性

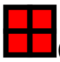
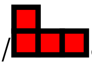
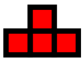
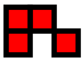
(1) 2×3 矩形 移除棒數，重複棒數) (s, r)

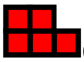
※ $a=1$ (13,0)

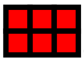
※ $a=2$ (10,1) / (9,0)

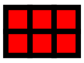
※ $a=3$ or (7,2)/

 or  (6,1) /  (5,0)

※ $a=4$ (5,4) /or  (4,3)/  (3,2)

※ $a=5$ (2,5)

※ $a=6$ (0,7)

(2)  之規律(統整)

第一點：每一行的 $s-r$ 皆為定值

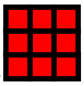
第二點：以 $a=4$ 為分野，向上 $s-r$ 增加，向下 $s-r$ 減少

第三點：1之 $s-r=4 \times 3-1=4 \times (4-1)+1$　　4之 $s-r=4 \times 0-1=4 \times (4-4)+1$

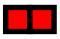
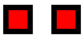
2之 $s-r=4 \times 2-1=4 \times (4-2)+1$　　5之 $s-r=4 \times (-1)-1=4 \times (4-5)+1$

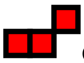
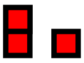
3之 $s-r=4 \times 1-1=4 \times (4-3)+1$　　6之 $s-r=4 \times (-2)-1=4 \times (4-6)+1$

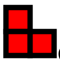
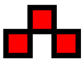
$\rightarrow s-r=4(4-a)+1$

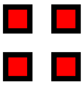
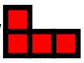
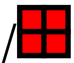
(3) 3×3 矩形(s,r)

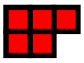
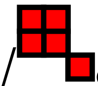
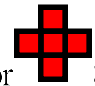
※ $a=1$  (20,0)

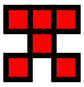
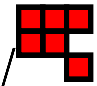
※ $a=2$  (17,1)/  (16,0)

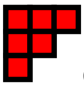
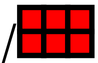
※ $a=3$  or  (13,1)/

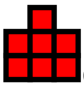
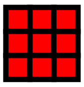
 or  (13,1)/  (12,0)

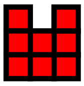
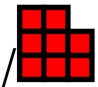
※ $a=4$  (8,0) / (11,3) / (12,4)

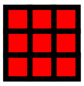
※ $a=5$  (9,5) / or  8,4)

※ $a=6$  (3,3) / (5,5)/

 (6,6) / (7,7)

※ $a=7$ (4,8) ※ $a=9$  (0,12)

※ $a=8$  (1,9) / (2,10)

(4) 之規律

第一點：每一行的 $s-r$ 皆為定值

第二點：以 $a=6$ 為分野，向上 $s-r$ 增加，向下 $s-r$ 減少

第三點：

1之$s-r=4\times5=4\times(6-1)$	6之$s-r=4\times0=4\times(6-6)$
2之$s-r=4\times4=4\times(6-2)$	7之$s-r=4\times(-1)=4\times(6-7)$
3之$s-r=4\times3=4\times(6-3)$	8之$s-r=4\times(-2)=4\times(6-8)$
4之$s-r=4\times2=4\times(6-4)$	9之$s-r=4\times(-3)=4\times(6-9)$
5之$s-r=4\times1=4\times(6-5)$	$\rightarrow s-r=4(6-a)$

(5)推論

由上述證明 2×3 矩形及 3×3 矩形的 $s-r$ 具有一定的規則可循，我們推斷其後的圖形也可依此例進行推導，然而上述兩點雖有規則，卻沒有互相交集(可能存在，未發現)，其分野、公式皆毫無條理。由於接下來的圖形演算過於龐大，難以計算。且後述之最大值與最小值可僅針對一變量(移除)探討(雖目的是找出兩變量關聯性，但若移除之公式與重複之公式存在規律，則亦可達到目的)，過程而言也較簡潔，於是僅推導出兩個小結論方便計算。

(6)小結： 2×3 矩形： $s-r=4(4-a)+1$

3×3 矩形： $s-r=4(6-a)$

五、最大值與最小值

(一)題目說明：在前一回「數據計算與幾何論證」中，某些數據有其規律性，某些則無，然而終究無法化簡出一通用式表達個數的計算方法。於是我們引用前一回的方法，並進行化簡處理，可知對於任一 $h\times l$ 的矩形，當其剩餘 n 個正方形時，其移除會有最大值(MAX)與最小值(min)。若用最大值減去最小值，便可解得個數，因此分兩步驟探討最大值(MAX)與最小值

(min)。(自然，在前一回「數據計算與幾何論證」有出現最大值(MAX)與最小值(min)中有不存在的移除棒數$\bar{s}$，我們將留置第三步探討)

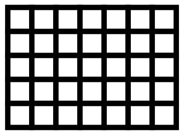
(二)名詞釋義：

1. s_{MAX} ：移除棒數之最大值
2. $s_{\min}$ ：移除棒數之最小值
3. $p \times q$ ：剩餘火柴個數n之組合邊長(p 、 q 皆為邊長)且 $p \geq q$
4. α ：缺角矩形所缺角之正方形個數

註： $s' = s_{MAX} - s_{\min} + 1 - \bar{s}$

(三) 問題討論： s_{MAX} 之探討

圖 10



在前一回「數據計算與幾何論證」中，不斷的反覆運算得知若要取得移除最大值，則其重複必為最大，換句話說即是圖形中的各個正方形之間越緊密契合，以下將舉例並證明上述假設為真。

(例)4×7 矩形(如圖 10)，可知h=7， l=4

$n = 27$ ，則$k = 1$且s_{MAX}=2(從右上角取兩根)； $n = 26$ ，則$k = 2$且s_{MAX}=4 (從右上角取四根)

$n = 25$，則$k = 3$且s_{MAX}=6 (從右上角取六根)；$n = 24$，則$k = 4$且s_{MAX}=9(從右側取九根) ……

這樣的循環將會循環至 4×3，我們稱此循環為$(h - l + 1)$循環，因為$(h - l + 1)$循環在$(h - l + 1)$排內都成立，若要從剩下的正方形繼續取走棒數，則：

$n = 11$，則$k = 17$且$s_{MAX} = 36 + 2$ (從左下角取走兩根)

$n = 10$ ，則$k = 18$且$s_{MAX} = 36 + 4$ (從左下角取走四根)

$n = 9$ ，則$k = 19$且s_{MAX} $36 + 7$ (從下側取走 7 根)……

這樣的循環會無限循環至此矩形不剩任何正方形(即$n = 0, k = 24$)，我們稱此循環為$(l - 1)$循環，因為$(l - 1)$循環在$(l - 1)$排內都成立，詳細比對各個圖形的重複棒數及所需的移除棒數後，可得出以下結論作為s_{MAX}的計算方法：

(1)重複越大，移除棒數也越大(在某些圖形內， $s - r$ 為定值)

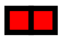
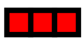
(2)若要令移除棒數為最大，則「開始取走棒數之邊」必為剩餘圖形 $p \times q - \alpha$ 之最短邊(ex：4×7 矩形之最短邊為 4，因此從偏 4 之側面開始取走移除所需棒數)

1. $(h - l + 1)$循環

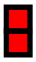
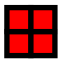
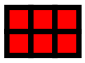
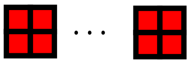
在反覆計算中，可發現s_{MAX}的變化均是：2+…+2+3，…，2+2+3，2+3，3+4

在圖形變化的過程中亦是如此：

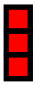
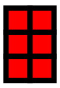
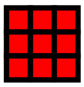
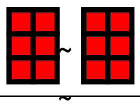
(1)$l = 1$(不列入計算)(表十八)

表十八			
h	圖形	s_{MAX} 移除順序	規律
1		4	4
2		$3 \to 4$	$3 \times (2 - 1) + 4$
3		$3 \to 3 \to 4$	$3 \times (3 - 1) + 4$
h		$3 \to 3 \to 3 \to \cdots\cdots \to 4$	$3 \times (l - 1) + 4$

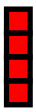
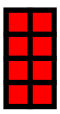
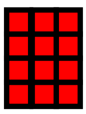
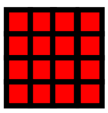
(2) $l=2$ (表十九)

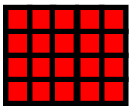
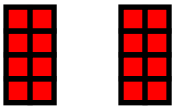
表十九			
h	圖形	s_{MAX} 移除順序	規律
1		$3 \to 4$	3+4
2		$2 \to 3 \to 3 \to 4$	(2+3)(2-1)+3+4
3		$2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	(2+3)(3-1)+3+4
h		$2 \to 3 \to 2 \to 3 \to \ldots\ldots \to 3 \to 4$	$(2+3)(l-1)+3+4$

(3) $l=3$ (表二十)

表二十			
h	圖形	s_{MAX} 移除順序	規律
1		$3 \to 3 \to 4$	3+3+4
2		$2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	2(2+3)+3+4
3		$2 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	(2+2+3)(3-2)+ 2(2+3)+3+4
h		$2 \to 2 \to 3 \to \ldots\ldots \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	$(2+2+3)(l-2)+2(2+3)+3+4$

(4) $l=4$

表二十一			
h	圖形	s_{MAX} 移除順序	規律
1		$3 \to 3 \to 3 \to 4$	3+3+3+4
2		$2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	3(2+3)+3+4
3		$2 \to 2 \to 3 \to 2 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$	2[(2+2+3)+(2+3)]+3+4
4		$2 \to 2 \to 2 \to 3 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3 \to$ $2 \to 2 \to 2 \to 3 \to 3 \to 3 \to 3 \to 4$	2[(2+2+2+3)+(2+2+3)+(2+3)] +3+4

5		$2\to2\to2\to3\to2\to2\to2\to3\to2\to2\to3\to$ $2\to2\to3\to2\to3\to2\to3\to3\to4$	(2+2+2+3)(5-4)+ 2[(2+2+2+3)+(2+2+3)+(2+3)] +3+4
h		$2\to2\to2\to3\to2\to2\to2\to3\to\ldots\ldots\to$ $2\to2\to3\to2\to2\to3\to2\to3\to2\to3\to3\to4$	(2+2+2+3)(l-4)+ 2[(2+2+2+3)+(2+2+3)+(2+3)] +3+4

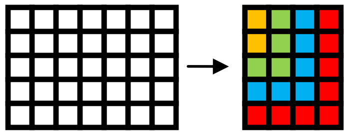
由上述圖形說明可知兩規律：

a. $k\mid l$且$\dfrac{k}{l}=N$,則$s_{MAX}=N[2(l-1)+3]$

我們令$=\beta(N)=\mathrm{N}[2(l-1)+3]$，方便($l$-1)循環之計算

b. k不整除l且$\left\lfloor\dfrac{k}{l}\right\rfloor=N$,則$\mathrm{s_{MAX}}=2k+N$

圖 10



2. $(l-1)$ 循環

經由「數據計算與幾何論證」知，其移除棒數到了$(l-1)$排時，會有對稱性變化

[例]：5×7 矩形($l=5,h=7$) 在$(h-l+1)$循環可被取至 5×4(如圖 10)

接著從下側取走 2+2+2+3 根，再從右側取走 2+2+2+3 根→從 4 的那側開始取$2\times(2\times3+3)$

接著從下側取走 2+2+3 根，再從右側取走 2+2+3 根→從 3 的那側開始取$2\times(2\times2+3)$

接著從下側取走 2+3 根，再從右側取走 2+3 根→從 2 的那側開始取$2\times(2\times1+3)$

最後取走 3+4 根

由觀察可知，其實若把 4 改寫成$(l-1)$，則 2×(2×3+3)中的 3 可改寫為$(l-2)$ [幾何證明如圖 11]

最後可將圖 11 的說明寫成$2\sum_{a=1}^{l-2}(2a+3)$。若此式為規律，無法實質求得當剩n個正方形時其最大移除棒數s_{MAX}。因此，在觀察「數據計算與幾何論證」後，我們將n分為下述 4 種分別探討：

n可分為 4 大類　(1)　p^2(即為正方形)

(2)　$p^2-\alpha$(缺角正方形)

(3)　$p\times(p+1)$(一般矩形)

(4)　$p\times(p+1)-\alpha$(缺角矩形)

分類原則：由上述$(h-l+1)$循環的探討可知：重複越大，移除棒數也越大；換句話說即是圖形中的各個正方形之間越緊密契合。而最契合的圖形即是正方形，其次為邊長差 1 的矩形，其餘的皆使用缺角來表示：

ex：$n=5$可拼為1×5或$2\times3-1$，如圖 12。

觀察圖 12 後可發現，$2\times3-1$的r較1×5的r要大，因此其s也會較1×5要大

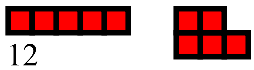


圖 12

(1)　$n=p^2$

當剩餘正方形數剛好為一完全平方數時(即可組成正方形)，按照上方循環規律，將會剩下$l\times(l-1)$個正方形(l為組成矩形之邊長)。為了剩下$l\times(l-1)$個正方形，我們將下側的 p 個正方形取走，則取走棒數為$2p+1$根火柴棒。再運用上方循環規律以及$(h-l+1)$循環、「數據計

算與幾何論證」得知公式 $s_{MAX} \rightarrow s_{h\times l} = 2\sum_{a=p}^{l-2}(2a+3)+(2p+1)+\beta(h-l+1)$

ex：以(5×7)圖形為例 (如圖 13)

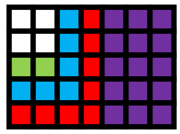


圖 13

如果 k(移除正方形個數) $=31$，則 n(剩餘正方形個數) $=4$，且 4 為完全平方數，符合 $n=p^2(n=4,p=2)$ 因此，首先我們依照「數據計算與幾何論證」，算出數據(此數據數量極多，不列入)後，運用 $(h-l+1)$ 循環取走 3x5 個正方形(詳見 $(h-l+1)$ 循環部分)後，開始從下側和右側取走 2+2+2+3 根，再從下側和右側取走 2+2+3 根，接著就會剩下 6 個正方形(依據題意還要移除掉 2 個正方形)，而其二個正方形的 s (移除棒數)為 2+3=2+2+1=2×2+1=$2p+1$。得其解為 $(h-l+1)$ 循環之 $\beta_{l=5}(3)$=3(排)×[(3-1)×2+3](根)=21 根(l -1)循環之 2(下側及右側)× [(2+2+2+3)+(2+2+3)](根)=32 根以及最後計算的 $2p+1=2\times2+1=5$ 總計由 5×7 的圖形取走 31 個正方形(k=31，n=4=2^2) s_{MAX} =21+32+5=58 根。我們經由此例可將上述公式予以解釋，將上式改寫如下：

$(h-l+1)$ 循環之 $\beta_{l=5}(3)$ 可改寫為 $\beta_{l=5}(7-5+1)=\beta_{l=l}(h-l+1)$

(l -1)循環之 2×[(2+2+2+3)+(2+2+3)]=2×[(2×3+3)+(2×2+3)] $=2\sum_{a=p}^{l-2}2a+3$

$$=2(l+p-2)(l-p-1)+3(l-p-2)=\mu(p)$$

以及最後計算的 $2\times2+1$ 可改寫為 $2p+1$，將上述三點予以合併的式如下：

$(n=p^2)s_{h\times l}=\mu(p)+\beta(h-l+1)+(2p+1)$

[注]此式僅適用 $n=p^2$

$\boxed{(2)\ \ n=p^2-\alpha}$

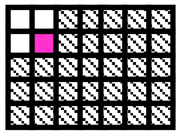


圖 14

同樣以 5×7 為例(如圖 14)

如果 k(移除正方形個數) $=32$ ，則 n(剩餘正方形個數) $=3$

$n=3=2^2-1, p=2, \alpha=1$

前要步驟與 $n=p^2$ 完全相同，此例與 $n=2\times2$ 正方形唯一不同之處為 α 的存在，而該如何利用 α 來運算多出的移除棒數，即是本章的課題。基本上，由「數據計算與幾何論證」可得出若多取走 α 個正方形，多出的 s (移除棒數)即為 2α ，事實上，由圖形也可輕易得解。

可得式： $(n=p^2-\alpha)s_{h\times l}=\mu(p)+\beta(h-l+1)+(2p+1)+2\alpha$

$\boxed{(3)\ \ n=p\times(p+1)}$

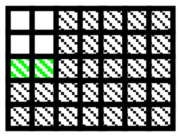


圖 15

同樣以 5×7 為例(如圖 15)

如果 k(移除正方形個數) $=29$ ，則 n(剩餘正方形個數) $=6$

$n=6, p=2$

前要步驟與 $n=p^2$ 完全相同，不同之處為此例不計入 2p+1 因此導出公式如下：

$(n=p\times(p+1))s_{h\times l}=\mu(p)+\beta(h-l+1)$

$\boxed{(4)\ \ n=p\times(p+1)-\alpha}$

由(2)及(3)可直接歸納出式子 $(n=p\times(p+1)-\alpha)s_{h\times l}=\mu(p)+\beta(h-l+1)+2\alpha$

3. 整理

我們將上述所有式子化成樹狀圖以供參考：

※我們定義 $\gamma(p)=\mu(p)+\beta(h-l+1)$

$$
s_{MAX}\begin{cases}
n\geq l\times(l-1)\begin{cases}\dfrac{k}{l}=N\rightarrow s_{MAX}=\mathrm{N}[2(\mathrm{l}\text{-}1)+3]=\beta(\mathrm{N})\\[2mm] \left[\dfrac{k}{l}\right]=N\rightarrow s_{MAX}=2\mathrm{k}+\mathrm{N}\end{cases}\\[6mm]
n\leq l\times(l-1)\begin{cases}n=p^{2}\rightarrow s_{MAX}=\gamma(p)+(2p+1)\\ n=p^{2}-\alpha\rightarrow s_{MAX}=\gamma(p)+(2p+1)+2\alpha\\ n=p\times(p+1)\rightarrow s_{MAX}=\mu(p)+\beta(h-l+1)=\gamma(p)\\ n=p\times(p+1)-\alpha\rightarrow s_{MAX}=\gamma(p)+2\alpha\end{cases}
\end{cases}
$$

[註] $n=l\times(l-1)$ 兩者皆可用，他是 $(h-l+1)$ 循環的結尾，$(l-1)$ 循環的起頭

(四) 問題討論：$s_{\min}$ 之探討

1.關於$s_{\min}$的定義，就是在一個$h\times l$舉行中，當我們令剩下的正方形個數(n)為定值時，$s_{\min}$代表「所能移除棒數之最小值」，亦即此圖形重複之最小值。我們一開始仍以「數據計算與幾何論證」作為探討重點(失敗。我們歸納可發現以「給定移除正方形個數(k)並探討拿走火柴棒數」可作為探討，也就是以完全相反的作法重新定義$s_{\min}$。不過此方法探討到一半，卻因數據過於複雜，難以計算。以下第二點，我們將說明此方法有用之處與失敗的原因。

2.此方法共分六步驟，其分類法則以「移除火柴棒數(s) $\rightarrow$ 移除正方形個數(k)」作為命名和歸納(在一矩形中，移除火柴棒數與移除正方形個數之間的多寡會因$h\times l$矩形而有所不同，概述如下：

(1) $\mathrm{n}\rightarrow 2\mathrm{n})\Rightarrow$ 代表當拿走根火柴棒, 會拿走個正方形

(2) $(\mathrm{n}\rightarrow \mathrm{n}+1)\Rightarrow$ 代表當拿走 $\mathrm{n}+1$根火柴棒, 會拿走 個正方形

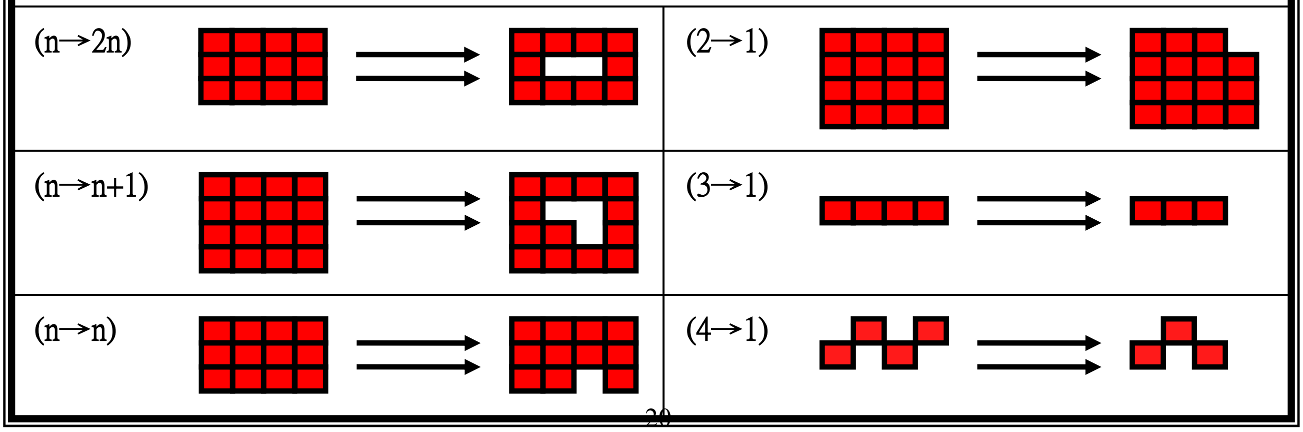
(3) $(\mathrm{n}\rightarrow \mathrm{n})\Rightarrow$ 代表當拿走 n根火柴棒, 會拿走 個正方形

(4) $(2\rightarrow 1)$ 代表當拿走2根火柴棒, 會拿走 1個正方形

(5) $(3\rightarrow 1)$ 代表當拿走3根火柴棒, 會拿走 1個正方形

(6) $(4\rightarrow 1)$ 代表當拿走4根火柴棒, 會拿走 1個正方形(a. ~ f.表示如下圖)

圖 16



雖然上述的六點對於最小值的探討皆不是完全無益，但對於s_{min}的實際數據計算仍有落差，為了能更有效率的探討，之後將敘述具可能性的新方法(重複與最小值的探討)。不過由於$(n \to 2n)$以及$(4 \to 1)$的計算與新方法有所關聯。我們將先討論$(n \to 2n)$和$(4 \to 1)$。

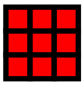
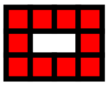
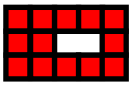
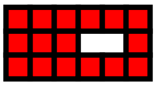
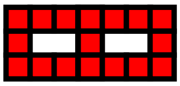
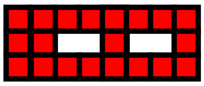
3. $(n \to 2n)$的探討

在「數據計算與幾何論證」探討過程中，我們發現對於各圖形隨邊長變化，其可以「拿走n根正方形，會拿走$2n$個正方形」的各數據有規律，那麼以下仍以邊長探討(以l為給定邊長)

(1) $l=1$，2

$(n \to 2n)$不存在，個數恆為 0。

(2) $l=3$(如表二十二)

表二十二						
h	3	4	5	6	7	8
圖形						
(n→2n)個數	0	1	1	1	2	2

由圖形即可證明每三個一循環，且對於取走的兩個長方形，其排列方式唯一(橫向)，將數據整理後得出如右的公式：$(n \to 2n)$個數 $=\begin{cases} \text{h} \in 3\text{的倍數} \to \dfrac{\text{h}}{3}-1 \\ \text{h} \notin 3\text{的倍數} \to \left[\dfrac{\text{h}}{3}\right] \end{cases}$

(3) $l=4$

$l=4$與$l=3$之間的差異性非常的大，$l=3$是所有圖形中，唯一存在單方向排列的圖形(即是l-2=1)，對於任一$l-2>1$的圖形，我們將$(n \to 2n)$中長方形的排列方法又分為橫向與縱向及橫縱同時存在，並針對三點進行討論。(如表二十三)

表二十三					
h	4	5	6	7	8
橫向排列$(n \to 2n)$個數	1	1	2	2	3
縱向排列$(n \to 2n)$個數	1	2	2	3	3
橫縱共存$(n \to 2n)$個數	**不存在**	**不存在**	2	2	3

縱向排列的個數與橫向排列始終存在差距，由圖形也可證明。那對於每兩個一循環的$l=4\,(n \to 2n)$個數，公式如右：$(n \to 2n)$的個數 $=\begin{cases} h \in 2\text{的倍數} \to \dfrac{h}{4} \\ h \notin 2\text{的倍數} \to \left[\dfrac{h}{4}\right]+1 \end{cases}$

(4) l=5(如表二十四)

表二十四						
h	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
橫向排列$(n\to 2n)$個數	**2**	**3**	**3**	**5**	**5**	**7**
縱向排列$(n\to 2n)$個數	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**
橫縱共存$(n\to 2n)$個數	**2**	**3**	**3**	**4**	**5**	**5**

對於l=5，其橫向排列的個數大於縱向排列的個數，我們猜想對於l為奇數的圖形，橫向排列的個數較大；反之，l為偶數時，縱向排列的個數較大。(本部份還無法證明)

。至於l=5 的規律如右：$(n\to 2n)$個數$\begin{cases} h\in 2\text{的倍數}\to \frac{1}{2}h \\ h\notin 2\text{的倍數}\to \frac{1}{2}(h-1) \end{cases}$

(5) l=6(首先嘗試不計入橫縱共存$(n\to 2n)$個數) (如表二十五)

表二十五						
h	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
橫向排列$(n\to 2n)$個數	**4**	**4**	**6**	**6**	**7**	**7**
縱向排列$(n\to 2n)$個數	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

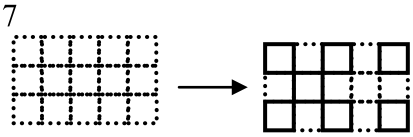
公式如右：$(n\to 2n)$個數$=h-2$(驗證猜想)

(6) 結論：對於$(n\to 2n)$的實際量值我們還無法以一式完全表達，然而對於l為奇數的圖形，橫向排列的個數較大；l為偶數時，縱向排列的個數較大。有助於之後的計算。並且l=1、2、3 也會在後述詳細使用。

4. (4→1)的探討

關於(4→1)的定義即是「當拿走 4 根火柴棒，會拿走 1 個正方形」。我們令「在一給定範圍中，當重複=0 時，所能容納的最多正方形個數」為 T，舉例如右上圖。而 T 值即是我所要探討的(4→1)規律。充分計算「當$l=1$、2、3的T值」後，可得表二十六：

圖 17



在限定範圍 3×5 矩形中，以重複為 0 的情況下，其定義的 T 值=7

(1)當$l=1$時$\begin{cases} h\text{為奇數}\to T=\frac{1}{2}(h+1) \\ h\text{為偶數}\to T=\frac{1}{2}h \end{cases}$

(2)$l=2$時，$T=h$

(3)當$l=3$時$\begin{cases} h=4g+1\to T=5g+2 \\ h=4g+2\to T=5g+3 \\ h=4g+3\to T=5g+5 \\ h=4g+4\to T=5g+5 \end{cases}$

表二十六												
h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l=1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
l=2		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l=3			5	5	7	8	10	10	12	13	15	15

5. 重複(r)與最小值($s_{\min}$)的探討

在關於 s_{MAX} 的討論中，我們已經歸納出「重複與移除成正相關(重複與移除的差成定值)」這個結論。接著我們將以重複的最小值來討論移除。也會將對於 $h\times l$ 矩形的兩邊長變化進行討論。

(1) 名詞釋義

$s_{\min}$：移除棒數最小值

s_{MAX}：移除棒數最大值

a：所剩餘的面積(亦即k：剩餘正方形個數)

h、l：矩形的任意兩邊長，又$h\geq l$

T：對任意矩形$(4\rightarrow 1)$的最大值(後面詳細討論)

r：重複

(2) 研究過程與討論

我們同樣以對於定值一邊長為討論原則。數據與計算將以表格列出。表格內容以 h (邊長)與 a(面積)為固定變量，探討對於該圖形重複的最小值(亦即 $s_{\min}$)。

l =1(單數欄中的 a 為面積，偶數欄為重複) (如表二十七)

表二十七

a	1×1	a	1×2	a	1×3	a	1×4	a	1×5	a	1×6	a	1×7	a	1×8
1	0	1	0	1~2	0	1~2	0	1~3	0	1~3	0	1~4	0	1~4	0
		2	1	3	2	3	1	4	2	4	1	5	2	5	1
						4	3	5	4	5	3	6	4	6	3
										6	5	7	6	7	5
														8	7

由表格可以清楚的發現不管是重複不為 0 的個數或重複的值都具有一定的規律，那麼這些規律與圖形必然相關，我們以下述表格說明l =1 的結論。

由(4→1)和 T 的討論可清楚知道對於l =1 而言，重複為 0 的給定面積將會持續至

$a=\begin{cases} h為奇數\rightarrow h \\ h為偶數\rightarrow h\text{-}1 \end{cases}$，接續的給定面積直到$a=h$規律都是絕對的，把自(4→1)結束後的

第一項面積設為a_1則若$a=\begin{cases} h為奇數\rightarrow 2(a-a_1)+2 \\ h為偶數\rightarrow 2(a-a_1)+1 \end{cases}$。

l=2(單數欄中的 a 為面積，偶數欄為重複) (如表二十八)

表二十八

A	2×2	a	2×3	a	2×4	a	2×5	a	2×6	a	2×7	a	2×8
1~2	0	1~3	0	1~4	0	1~5	0	1~6	0	1~7	0	1~8	0
3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2	9	2
4	4	5	4	6	4	7	4	8	4	9	4	10	4
		6	7	7	7	8	7	9	7	10	7	11	7
				8	10	9	10	10	10	11	10	12	10
						10	13	11	13	12	13	13	13
								12	16	13	16	14	16
										14	19	15	19
												16	22

l=2 的數列非常有系統性的成一等差數列(唯首項例外)，由(4→1)和 T 的討論可知道對於l=2 而言，重複為 0 的給定面積將會持續至$a=h$，把自(4→1)結束後的第一項面積設為a_2(亦即$a_2=h+1$)，那依據等差數列求項公式可知

$$\begin{cases} a=a_2 \rightarrow r=2 \\ a\text{大於}a_2 \rightarrow r=2+3(a-a_2)-1=3(a-h)-2 \end{cases}$$

表二十九

a	3×3	a	3×4	a	3×5	a	3×6	a	3×7	a	3×8	a	3×9	a	3×10
1~5	0	1~5	0	1~7	0	1~8	0	1~10	0	1~10	0	1~12	0	1~13	0
6	3	6	1	8	2	9	2	11	2	11	1	13	2	14	2
7	6	7	2	9	4	10	4	12	4	12	2	14	4	15	4
8	9	8	4	10	6	11	6	13	6	13	4	15	6	16	6
9	12	9	7	11	9	12	8	14	9	14	6	16	8	17	8
		10	10	12	12	13	11	15	12	15	9	17	10	18	10
		11	14	13	15	14	14	16	15	16	12	18	13	19	12
		12	17	14	19	15	17	17	18	17	15	19	16	20	14
				15	22	16	20	18	22	18	18	20	19	21	17
						17	24	19	25	19	21	21	22	22	20
						18	27	20	29	20	24	22	25	23	23
								21	32	21	28	23	28	24	26
										22	31	24	32	25	30
										23	34	25	35	26	33
										24	37	26	39	27	37
												27	42	28	40
														29	44
														30	47

l=3(單數欄中的 a 為面積，偶數欄為重複) (如表二十九)

l=3 不同於l=2 具有系統性的數列，數據繁雜。我們將探討分作五步驟方便討論：

※把自(4→1)結束後的第一項面積設為a_3($a=a_3$之前皆適用$(4\to 1)$)

※能拿走一根同時取走一個正方形的，單一h欄位最多只會出現兩次並且只存在於$h\in 4$的倍數時(圖形證明公式)。

※能拿走兩根同時取走一個正方形的(即$2\to 1$)規律隨圖形而變化，簡明易懂：

$$\begin{cases} h=4g-1\to 2(g-1) \\ h=4g\to 2(g-1) \\ h=4g+1\to 2g+1 \\ h=4g+2\to 2(g+1) \end{cases}$$ (圖形證明公式)

※對於拿走三根同時取走一個正方形的(即$3\to 1$)，無法直接計算只得以總重複數減取上下兩部份取其間距計算個數

※l=3 開始存在(n→2n)，並且其規律為(n→2n)個數$\times(3+4)$，每一 3 與 4 接多取一圖形，取至完畢。

(3)結論

上述探討了l=1，2，3 的最小值，並得出一定規律，不過上述的值皆是重複(r)，我們可將上述結果代入移除與重複的轉換公式：$2(h\times l)+h+l-s=4n-r$ (任一矩形的重複-移除數=4×拿取正方形個數-剩餘重複)。又$4n=4(h\times l-a)$，故將上述重複結論帶入$s=2(h\times l)+h+l-4(h\times l-a)+r=h+l-2(h\times l)+4a+r$即可得出$s_{\min}$的結論。

伍、研究結果

一、對於重複而言共有兩公式可循：

(一) $r_{矩形h\times l}=\dfrac{4}{3}l(l-1)(l+1)(l+4)+(h-l)[\dfrac{2}{3}l(l+1)(5l+4)-2l-1]$

(二) $r_{正六邊形、正三角形}=\dfrac{3}{2}m(m-1)$

二、對於移除的結論

※我們定義$\gamma(p)=\mu(p)+\beta(h-l+1)$

$$(一)\ s_{MAX}\begin{cases} n\ge l\times(l-1)\begin{cases} \dfrac{k}{l}=N\to s_{MAX}=\mathrm{N}[2(\mathrm{l}-1)+3]=\beta(\mathrm{N}) \\ \left[\dfrac{k}{l}\right]=N\to s_{MAX}=2\mathrm{k}+\mathrm{N} \end{cases} \\ n\le l\times(l-1)\begin{cases} n=p^2\to s_{MAX}=\gamma(p)+(2p+1) \\ n=p^2-\alpha\to s_{MAX}=\gamma(p)+(2p+1)+2\alpha \\ n=p\times(p+1)\to s_{MAX}=\mu(p)+\beta(h-l+1)=\gamma(p) \\ n=p\times(p+1)-\alpha\to s_{MAX}=\gamma(p)+2\alpha \end{cases} \end{cases}$$

$$
(\text{二})s_{\min}\begin{cases}
l=1\rightarrow r_{\min}\begin{cases}
\text{重複為0的給定面積持續至}a=\begin{cases}h\text{為奇數}\rightarrow h\\ h\text{為偶數}\rightarrow h-1\end{cases}\\
\text{把自}(4\rightarrow 1)\text{結束後的第一項面積設為}a_1\text{, 則若a}=\begin{cases}h\text{為奇數}\rightarrow 2(a-a_1)+2\\ h\text{為偶數}\rightarrow 2(a-a_1)+1\end{cases}
\end{cases}\\
l=2\rightarrow r_{\min}\begin{cases}
\text{重複為0的給定面積持續至}a=h\\
\text{把自}(4\rightarrow 1)\text{結束後的第一項面積設為}a_2\text{, 則}\begin{cases}a=a_2\rightarrow 2\\ a\text{大於}a_2\rightarrow 3(a-h)-2\end{cases}
\end{cases}\\
l=3\rightarrow r_{\min}\begin{cases}
\text{重複為0的給定面積持續至}a_3\begin{cases}h=4g+1\rightarrow T(a_3)=5g+2\\ h=4g+2\rightarrow T(a_3)=5g+3\\ h=4g+3\rightarrow T(a_3)=5g+5\\ h=4g+4\rightarrow T(a_3)=5g+5\end{cases}\\
(1\rightarrow 1)\text{只存在於}h\text{為4的倍數時(存在2個)}\\
(2\rightarrow 1)\begin{cases}\mathrm{h}=4\mathrm{g}-1\rightarrow 2(g-1)\\ \mathrm{h}=4\mathrm{g}\rightarrow 2(g-1)\\ \mathrm{h}=4\mathrm{g}+1\rightarrow 2g+1\\ \mathrm{h}=4\mathrm{g}+1\rightarrow 2(g+1)\end{cases}\\
(3\rightarrow 1)\rightarrow\text{取差距}\\
(4\rightarrow 1)\rightarrow(\mathrm{n}\rightarrow 2\mathrm{n})\text{的個數}=\begin{cases}h\text{為3的倍數}\rightarrow\dfrac{h}{3}-1\\ h\text{不為3的倍數}\rightarrow\left[\dfrac{h}{3}\right]\end{cases}
\end{cases}\\
\text{接著代入}s=h+l-2(h-l)+4a+r\text{轉換，再取}s'=s_{MAX}-s_{\min}+1-\bar{s}\text{即可}
\end{cases}
$$

陸、 參考資料及其他

一、參考資料

1. http://home.educities.edu.tw/mario123/ (Hercules 的數學世界)

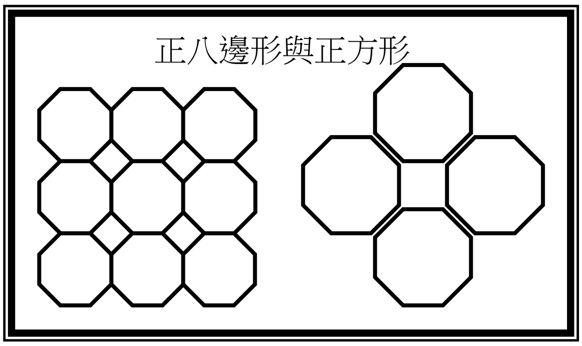
2.http://www.chiuchang.com.tw/ (九章數學出版社)

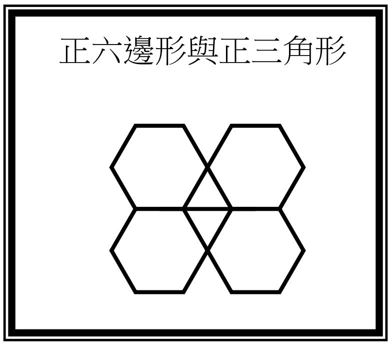
二、推廣與建議

(一)經由研究問題二和三的探討(重複和移除)，我們得知的規律，可充分解釋火柴遊戲的規則與變化。在研究過程中，我們從「移除」發現了「移動」(及棒數不變但圖形改變)的存在，決定以此為下依研究標題。另外，在變量的探討中，我們針對一維及二維的方向探討有許多疑惑，並對於求知三維(立體)的可能性有強烈的興趣，也決定一起計入本報告的研究探討中。

(二)火柴棒遊戲包含廣泛，本報告探討以火柴棒組成圖形，並探討移除與移動的規律。其他關於火柴棒的益智遊戲有；以火柴組成數字並形成一不成立的算式，並藉由移除(或移動)若干根火柴棒使算式成立……等。

(三)在研究問題二(火柴棒的重複)的討論中，我們發現：三角形、矩形、正方形、平行四邊形和菱形的拼湊可向下無限延續，此方法可在生活中運用在拼貼磁磚和圖形的裁割刀數；而在研究問題三(火柴棒的移除)的討論，最大值與最小值可利用於圖形排列的緊密程度，最大值是將整個圖形排列至最散，最小值即是將整個圖形排列至最緊密，也可作為平面的生活運用。另外，兩種以上的正多邊形已可進行排列，舉例如下圖。





【評語】030422

本作品從益智火柴遊戲出發，探討在拿去數根火柴之後，所留下來圖樣的相關性。基本上從矩形圖樣開始，研究拿走最少及最多的火柴讓留下來的圖樣留下給定的方格數。

這個研究與圖論(Graph Theory)相關性很大，作者可參考相關書籍，給出更明確與具體的答案。