中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030420

圍多理呀的秘密

學校名稱：桃園縣立大溪國民中學

作者：	指導老師：
國一　江博宇 國一　鄧宇恩 國一　周奕帆	康嘉玲

關鍵詞：正多邊形、木棒圍方、圍法

摘要

我們在「小學趣味數學 100 題」書中找到一個「木棒圍方」的題目:「給定 99 根木棒，長度分別為 1,2,3,......,99，用這些木棒能不能圍成一個正方形？圍的時候每根木棒都必須用上，並且不允許將任何一根木棒折斷或折彎。」，我們覺得相當有趣，接著我們想到，如果不侷限在 99 根木棒，而是一般性的給定 n 根呢？而木棒長度為 1,2,3,......, n 的等差數列，是否也意味著可圍成正方形的木棒數 n 具備某種規律呢？如何圍？圍法是否也具備某種規律呢？有幾種圍法？一時我們的小腦袋裡各自充塞著一些問號，這燃起了我們心中求知若渴的精神，老師肯定我們的疑問，也進一步地提出問題:「如果一般性地換成其他幾何圖形(例如正 k 邊形)又如何呢？」呼！我們熱血沸騰了，就讓我們一起把問題解決吧！

壹、 研究動機

「木棒圍方」原題和以往題目不同的是：木棒長度不一樣了，必須用到等差級數和公式算出長度和為 $\frac{(1+99)\times 99}{2}=4950$ ，則正方形的邊長必須為 $\frac{4950}{4}=1237.5$ ，因為木棒不能折斷或折彎，所以這顯然不能達成。「木棒圍方」原題相當容易，但延伸至「對任意大於或等於 3 的正整數 k ，給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正 k 邊形？如何圍？且可圍成正 k 邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律？」讓我們覺得非常具有挑戰性，且非常激發我們的思考力，配合國中數學第一冊因數與倍數，第四冊等差數列與等差級數，還有網路資料—數學歸納法，繼以老師的指導，我們「觀察再觀察」、「尋找規律」、「嘗試錯誤」、「猜測」、「大膽假設小心求證」、「思考再思考」、「邏輯推理」，儼然走了一趟「最完整的數學之旅」，希望我們三個「臭皮匠」能製造出勝於一個「諸葛亮」的能量，不負這一次的「數學洗禮」。

貳、研究目的

一、(一) 任意給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正三角形？如何圍？又可圍成正三角形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？

(二) 同上，如果為其他幾何圖形，如正方形、正五邊形、正六邊形、⋯⋯又如何呢？

二、 對研究目的一作一般性的討論！

即：對任意大於或等於 3 的正整數 k ，給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，n 根木棒可否圍成正 k 邊形？如何圍？且可圍成正 k 邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律？

參、 研究設備及器材

Excel、撲克牌、筆、A4 紙、嚴密的數學邏輯推理、熱愛學習的小頭腦、不畏懼失敗的決心

肆、 研究過程或方法

一、(一)討論：「給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正三角形？如何圍？又可圍成正三角形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？」

我們先就此問題的 n 來討論：

n =1,2,3,4 時，顯然不可能圍成正三角形。

n =5 時，將 1 單位長和 4 單位長木棒為一組，2 單位長和 3 單位長木棒為一組，而 5 單位長木棒為另一組，則可圍成一邊長為 5 單位長的正三角形。
我們不妨用 a、b、c 表示正三角形的邊長，將剛才圍正三角形的方法
記為 a=(1,4)、b=(2,3)、c=(5) 。

n =6 時，將 1 單位長和 6 單位長木棒為一組，2 單位長和 5 單位長木棒為一組，而 3 單位長和 4 單位長木棒為另一組，則可圍成邊長為 7 單位長的正三角形。
記為 a=(1,6)、b=(2,5)、c=(3,4)。

n =7 時，此 7 根木棒的總長度為 $\frac{(1+7)\times 7}{2}=28$ ，若欲圍成一正三角形時，邊長 a=b=c= $\frac{28}{3}$ ，但我們的木棒長度是整數，在不把木棒折彎或折斷的前提下，是不可能圍成邊長為 $\frac{28}{3}$ 單位長的正三角形的。
討論到這裡，我們想到，其實只要 n 根木棒欲圍成的正三角形的邊長《即 a=b=c= $\frac{n(n+1)}{2\times 3}$ 》不為整數，便可確定此 n 不能圍成正三角形。也就是，要圍成正三角形，邊長為整數是必要條件。

n =8 時，a=b=c= $\frac{(1+8)\times 8}{2\times 3}=12$ ，12 是整數，所以我們必須進一步確定 n =8 時是否真能圍成一邊長為 12 的正三角形。很快的，我們找到了 3 種圍法，如下所示！

	a	b	c
圍法 1	(1,2,3,6)	(5,7)	(4,8)
圍法 2	(1,5,6)	(2,3,7)	(4,8)
圍法 3	(2,4,6)	(5,7)	(1,3,8)

n =9 時，a=b=c= $\frac{(1+9)\times 9}{2\times 3}=15$ ，15 是整數，所以我們必須進一步確定 n =9 時是否真能圍成一邊長為 15 的正三角形。同樣的，我們很快找到了幾種圍法，但為了能正確數出所有的圍法而不遺漏，我們想到了用撲克牌來幫忙，用牌上面的點數代替數字，並有秩序地進行模擬圍正三角形的步驟，結果我們找到 9 種圍法，如下所示！

	a	b	c
圍法 1	(1,2,3,4,5)	(7,8)	(6,9)
圍法 2	(1,3,4,7)	(2,5,8)	(6,9)
圍法 3	(1,2,5,7)	(3,4,8)	(6,9)
圍法 4	(3,5,7)	(1,2,4,8)	(6,9)
圍法 5	(2,3,4,6)	(7,8)	(1,5,9)
圍法 6	(2,6,7)	(3,4,8)	(1,5,9)
圍法 7	(1,3,5,6)	(7,8)	(2,4,9)
圍法 8	(3,5,7)	(1,6,8)	(2,4,9)
圍法 9	(4,5,6)	(7,8)	(1,2,3,9)

n =10 時，a=b=c= $\frac{(1+10)\times 10}{2\times 3}=\frac{55}{3}$ ，$\frac{55}{3}$ 不是整數，所以 n =10 時不能圍成正三角形。

n =11 時，a=b=c= $\frac{(1+11)\times 11}{2\times 3}=22$ ，22 是整數，所以必須我們進一步確定 n =11 時是否真能圍成一邊長為 22 的正三角形。同樣的，我們用撲克牌 **A~J** 來幫忙數，共找到了 40 種圍法，如下所示！

	a	b	c
圍法 1	(2,3,4,6,7)	(5,8,9)	(1,10,11)
圍法 2	(4,5,6,7)	(2,3,8,9)	(1,10,11)
圍法 3	(2,3,4,5,8)	(6,7,9)	(1,10,11)
圍法 4	(3,5,6,8)	(2,4,7,9)	(1,10,11)

圍法 5	(3,4,7,8)	(2,5,6,9)	(1,10,11)
圍法 6	(2,5,7,8)	(3,4,6,9)	(1,10,11)
圍法 7	(1,3,5,6,7)	(4,8,10)	(2,9,11)
圍法 8	(4,5,6,7)	(1,3,8,10)	(2,9,11)
圍法 9	(1,3,4,6,8)	(5,7,10)	(2,9,11)
圍法 10	(3,5,6,8)	(1,4,7,10)	(2,9,11)
圍法 11	(3,4,7,8)	(1,5,6,10)	(2,9,11)
圍法 12	(1,6,7,8)	(3,4,5,10)	(2,9,11)
圍法 13	(4,5,6,7)	(1,2,9,10)	(3,8,11)
圍法 14	(1,2,4,6,9)	(5,7,10)	(3,8,11)
圍法 15	(2,5,6,9)	(1,4,7,10)	(3,8,11)
圍法 16	(2,4,7,9)	(1,5,6,10)	(3,8,11)
圍法 17	(1,5,7,9)	(2,4,6,10)	(3,8,11)
圍法 18	(1,2,5,6,8)	(3,9,10)	(4,7,11)
圍法 19	(3,5,6,8)	(1,2,9,10)	(4,7,11)
圍法 20	(2,5,6,9)	(1,3,8,10)	(4,7,11)
圍法 21	(2,3,8,9)	(1,5,6,10)	(4,7,11)
圍法 22	(1,2,4,7,8)	(3,9,10)	(5,6,11)
圍法 23	(3,4,7,8)	(1,2,9,10)	(5,6,11)
圍法 24	(1,2,3,7,9)	(4,8,10)	(5,6,11)
圍法 25	(2,4,7,9)	(1,3,8,10)	(5,6,11)
圍法 26	(1,4,8,9)	(2,3,7,10)	(5,6,11)
圍法 27	(2,3,8,9)	(1,4,7,10)	(5,6,11)
圍法 28	(4,5,6,7)	(3,9,10)	(1,2,8,11)
圍法 29	(3,4,6,9)	(5,7,10)	(1,2,8,11)
圍法 30	(2,5,6,9)	(4,8,10)	(1,3,7,11)
圍法 31	(5,8,9)	(2,4,6,10)	(1,3,7,11)

圍法 32	(2,5,7,8)	(3,9,10)	(1,4,6,11)
圍法 33	(2,3,8,9)	(5,7,10)	(1,4,6,11)
圍法 34	(5,8,9)	(2,3,7,10)	(1,4,6,11)
圍法 35	(1,5,7,9)	(4,8,10)	(2,3,6,11)
圍法 36	(1,4,8,9)	(5,7,10)	(2,3,6,11)
圍法 37	(5,8,9)	(1,4,7,10)	(2,3,6,11)
圍法 38	(1,6,7,8)	(3,9,10)	(2,4,5,11)
圍法 39	(6,7,9)	(1,3,8,10)	(2,4,5,11)
圍法 40	(6,7,9)	(4,8,10)	(1,2,3,5,11)

研究 n =11 時的過程中，我們發現如果不研究圍法的方法數，單就可不可圍這個題目來講，是很容易的。因為任意六個連續整數皆可頭尾一組，併成和一樣的三組數，例如：6,7,8,9,10,11 六個連續整數，將頭尾 6,11 一組，餘四數再頭尾 7,10 一組，最後 8,9 一組，即可組成和皆為 17 的三組數。因此 n =11 時，因 n =5 時可圍且三邊 a=(1,4)、b=(2,3)、c=(5)，只需各加入一組數即可，也就是 a=(1,4,6,11)、b=(2,3,7,10)、c=(5,8,9) 即可圍成一邊長為 22 的正三角形。

n =12 時，同理因 n =6 可圍，所以 n =12=6+6 必可圍。

取 a=(1,6,7, 12)、b=(2,5,8,11)、c=(3,4,9,10) 即可圍成一邊長為 26 的正三角形。

n =13 時，a=b=c= $\frac{(1+13)\times 13}{2\times 3}=\frac{91}{3}$ ，$\frac{91}{3}$ 不是整數，所以 n =13 時不成圍成正三角形。

n =14 時，同理因 n =8 可圍，所以 n =14=8+6 必可圍。

取 a=(1,2,3,6,9,14)、b=(5,7,10,13)、c=(4,8,11,12) 即可圍成一邊長為 35 的正三角形。

n =15 時，同理因 n =9 可圍，所以 n =15=9+6 必可圍。

取 a=(1,2,3,4,5,10,15)、b=(7,8,11,14)、c=(6,9,12,13) 即可圍成一邊長為 40 的正三角形。

依此類推……

我們將 n 的情形紀錄如下：

n	1	2	3	4	5	6
是否圍成正三角形	否	否	否	否	是	是
n	7	8	9	10	11	12
是否圍成正三角形	否	是	是	否	是	是
n	13	14	15	16	17	18
是否圍成正三角形	否	是	是	否	是	是
n	19	20	21	22	23	24
是否圍成正三角形	否	是	是	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正三角形，至少要 5 根木棒。此外，只要 n 為 3 的倍數減 1 或 3 的倍數，則此 n 根木棒可圍成正三角形。

(二)討論:「給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正方形？如何圍？又可圍成正方形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？」

◎和圍三角形一樣，我們知道其實只要 n 根木棒欲圍成的正方形的邊長《即 a=b=c=d= $\frac{n(n+1)}{2\times4}$)》不為整數，便可確定此 n 根木棒不能圍成正方形。

也就是，要圍成正方形，邊長為整數是必要條件。

因此，我們就此問題的 n 快速討論如下：

n =1,2,3,4 時，顯然不可能圍成正方形。

n =5 時，a=b=c=d= $\frac{5\times(5+1)}{2\times4}=\frac{15}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n =6 時，a=b=c=d= $\frac{6\times(6+1)}{2\times4}=\frac{21}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n =7 時，a=b=c=d= $\frac{7\times(7+1)}{2\times4}=7$ 為整數，我們進一步確定 n =7 時是否可圍，只有一種圍法 a=(1,6)、b=(2,5)、c=(3,4)、d=7。

n =8 時，a=b=c=d= $\frac{8\times(8+1)}{2\times4}=9$ 為整數，我們進一步確定 n =8 時是否可圍，只有一種圍法 a=(1,8)、b=(2,7)、c=(3,6)、d=(4,5)。

n =9 時，a=b=c=d= $\frac{9\times(9+1)}{2\times4}=\frac{45}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=10 時，a=b=c=d=$\frac{10\times(10+1)}{2\times4}=\frac{55}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=11 時，a=b=c=d=$\frac{11\times(11+1)}{2\times4}=\frac{66}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=12 時，a=b=c=d=$\frac{12\times(12+1)}{2\times4}=\frac{78}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=13 時，a=b=c=d=$\frac{13\times(13+1)}{2\times4}=\frac{91}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=14 時，a=b=c=d=$\frac{14\times(14+1)}{2\times4}=\frac{105}{4}$ 不為整數，不能圍成正方形。

n=15 時，同樣的，任意八個連續整數皆可頭尾一組，併成和一樣的四組數，例如：8,9,10,11,12,13,14,15 八個連續整數，將頭尾 8,15 一組，餘六數再頭尾 9,14 一組，餘四數再頭尾 10,13 一組，最後 11,12 一組，即可組成和皆為 23 的四組數。

因此n=15 時，因n=7 可圍，所以n=15=7+8 必可圍。(圍法甚多)

取 a=(1,6, 8,15)、b=(2,5, 9,14)、c=(3,4, 10,13) 、d=(7, 11,12) 即可圍成一正方形。

n=16 時，因n=8 可圍，所以n=16=8+8 必可圍。(圍法甚多)

取 a=(1,8, 9,16)、b=(2,7, 10,15)、c=(3,6, 11,14) 、d=(4,5, 12,13) 即可圍成一正方形。

依此類推……

我們將n的情形紀錄如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
是否圍成正方形	否	否	否	否	否	否	是	是
n	9	10	11	12	13	14	15	16
是否圍成正方形	否	否	否	否	否	否	是	是
n	17	18	19	20	21	22	23	24
是否圍成正方形	否	否	否	否	否	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正方形，至少要 7 根木棒。此外，只要n為 8 的倍數減 1 或 8 的倍數，則此n根木棒可圍成正方形。

(三) 討論：「給定長度分別為 $1,2,3,\ldots\ldots,n$ 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正五邊形？如何圍？又可圍成正五邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？」

我們就此問題的 n 討論如下：

n =1,2,3,4,5 時，顯然不可能圍成正五邊形。

n =6、7、8 時，a=b=c=d=e 不為整數，不能圍成正五邊形。

n =9 時，a=b=c=d=e = $\frac{9\times(9+1)}{2\times5}=9$ 為整數，我們進一步確定只有一種圍法

a=(1,8)、b=(2,7)、c=(3,6)、d=(4,5)、e=9。

n =10 時，a=b=c=d=e = $\frac{10\times(10+1)}{2\times5}=11$ 為整數，我們進一步確定只有一種圍法

a=(1,10)、b=(2,9)、c=(3,8)、d=(4,7)、e=(5,6)。

n =11、12、13 時，a=b=c=d=e 不為整數，不能圍成正五邊形。

n =14 時，a=b=c=d=e = $\frac{14\times(14+1)}{2\times5}=21$ 為整數，確實可圍但圍法甚多，我們只呈現一種圍法：a=(1,2,3,4,5,6)、b=(7,14)、c=(8,13)、d=(9,12)、e=(10,11)。

n =15 時，a=b=c=d=e = $\frac{15\times(15+1)}{2\times5}=24$ 為整數，確實可圍但圍法甚多，我們只呈現一種圍法：a=(1,2,3,5,6,7)、b=(4,8,12)、c=(9,15)、d=(10,14)、e=(11,13)。

n =16、17、18 時，a=b=c=d=e 不為整數，不能圍成正五邊形。

n =19 時，因 n =9 可圍，所以 n =19=9+2×5 必可圍。(圍法甚多)
取 a=(1,8, <u>10,19</u>)、b=(2,7, <u>11,18</u>)、c=(3,6, <u>12,17</u>)、d=(4,5, <u>13,16</u>)、e=(9, <u>14,15</u>)
即可圍成一正五邊形。

n =20 時，因 n =10 可圍，所以 n =20=10+2×5 必可圍。(圍法甚多)
取 a=(1,10,<u>11,20</u>)、b=(2,9,<u>12,19</u>)、c=(3,8,<u>13,18</u>)、d=(4,7,<u>14,17</u>)、e=(5,6,<u>15,16</u>)
即可圍成一正五邊形。

依此類推……

我們將 n 的情形紀錄如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
是否圍成正五邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	**是**	**是**
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
是否圍成正五邊形	否	否	否	**是**	**是**	否	否	否	**是**	**是**
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
是否圍成正五邊形	否	否	否	**是**	**是**	否	否	否	**是**	**是**

…………

由此，我們發現要圍成正五邊形，至少要 9 根木棒。此外，只要 n 為 5 的倍數減 1 或 5 的倍數，則此 n 根木棒可圍成正五邊形。

(四) 討論：「給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正六邊形？如何圍？又可圍成正六邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？」

我們就此問題的 n 討論如下：

n =1,2,3,4,5,6 時，顯然不可能圍成正六邊形。

n =7 時，a=b=c=d=e=f 不為整數，不能圍成正六邊形。

n =8 時，a=b=c=d=e=f= $\frac{8\times(8+1)}{2\times6}=6$ 為整數，但 8 單位長的木棒已經超過邊長 6 了，故顯然不能圍成正六邊形。

n =9、10 時，a=b=c=d=e=f 不為整數，不能圍成正六邊形。

n =11 時，a=b=c=d=e=f= $\frac{11\times(11+1)}{2\times6}=11$ 為整數，我們進一步確定只有一種圍法

a=(1,10)、b=(2,9)、c=(3,8)、d=(4,7)、e=(5,6)、f=11 。

n =12 時，a=b=c=d=e=f= $\frac{12\times(12+1)}{2\times6}=13$ 為整數，我們進一步確定只有一種圍法

a=(1,12)、b=(2,11)、c=(3,10)、d=(4,9)、e=(5,8)、f=(6,7) 。

n =13、14 時，a=b=c=d=e=f 不為整數，不能圍成正六邊形。

n=15 時，a=b=c=d=e=f = $\dfrac{15\times(15+1)}{2\times 6}=20$ 為整數，確實可圍但圍法甚多，我們只呈現一種圍法：a=(1,2,3,4,10)、b=(5,15)、c=(6,14)、d=(7,13)、e=(8,12)、f=(9,11)。

n=16、17、18、19 時，a=b=c=d=e=f 不為整數，不能圍成正六邊形。

n=20 時，a=b=c=d=e=f = $\dfrac{20\times(20+1)}{2\times 6}=35$ 為整數，確實可圍但圍法甚多，我們只呈現一種圍法：a=(1,2,3,6,<u>9,14</u>)、b=(5,7,<u>10,13</u>)、c=(4,8,<u>11,12</u>)、
d=(15,20)、e=(16,19)、f=(17,18) 。
(d=最長的 20 配上 15，接著 e=16 配 19、f=17 配 18，
之後剩 1,2,3,….,14 木棒圍三邊，正好是圍成三角形的情形，即得 a、b、c)

n=21、22 時，a=b=c=d=e=f 不為整數，不能圍成正六邊形。

n=23 時，因n=11 可圍，所以n=23=11+2×6 必可圍。(圍法甚多)
取 a=(1,10,<u>12,23</u>)、b=(2,9,<u>13,22</u>)、c=(3,8,<u>14,21</u>)、d=(4,7,<u>15,20</u>)、e=(5,6,<u>16,19</u>)、f=(11,<u>17,18</u>) 即可圍成一正六邊形。

n=24 時，因n=12 可圍，所以n=24=12+2×6 必可圍。(圍法甚多)
取 a=(1,12,<u>13,24</u>)、b=(2,11,<u>14,23</u>)、c=(3,10,<u>15,22</u>)、d=(4,9,<u>16,21</u>)、e=(5,8,<u>17,20</u>)、f=(6,7,<u>18,19</u>) 即可圍成一正六邊形。

依此類推……
我們將n的情形紀錄如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
是否圍成正六邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
是否圍成正六邊形	否	否	是	否	否	否	否	是	否	否	是	是
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
是否圍成正六邊形	否	否	是	否	否	否	否	是	否	否	是	是
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
是否圍成正六邊形	否	否	是	否	否	否	否	是	否	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正六邊形，至少要 11 根木棒。此外，只要n為 <u>12 的倍數減 1</u> 或 <u>12 的倍數</u>或 <u>12 的倍數加 3</u> 或 <u>12 的倍數加 8</u>，則此n根木棒可圍成正六邊形。

(五) 討論：「給定長度分別為 1,2,3,......,n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正七、八、九…邊形？如何圍？又可圍成正七、八、九…邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律呢？」

討論模式都雷同，因此我們直接紀錄 n 的情形如下：

正七邊形：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
是否圍成正七邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
是否圍成正七邊形	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	是	是
n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
是否圍成正七邊形	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	是	是
n	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
是否圍成正七邊形	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正七邊形，至少要 13 根木棒。此外，只要 n 為 7 的倍數減 1 或 7 的倍數，則此 n 根木棒可圍成正七邊形。

正八邊形：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
是否圍成正八邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
是否圍成正八邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
是否圍成正八邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
是否圍成正八邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正八邊形要 15 根木棒。此外，只要 n 為 16 的倍數減 1 或 16 的倍數，則此 n 根木棒可圍成正八邊形。

正九邊形：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
是否圍成正九邊形	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
是否圍成正九邊形	否	否	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
是否圍成正九邊形	否	否	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	否	否	是	是
n	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
是否圍成正九邊形	否	否	否	否	否	否	否	是	是	否	否	否	否	否	否	否	是	是

…………

由此，我們發現要圍成正九邊形要 17 根木棒。此外，只要 n 為 9 的倍數減 1 或 9 的倍數，則此 n 根木棒可圍成正九邊形。

其實，針對任何一個特定的 k (正 k 邊形)，要討論可圍成正 k 邊形的木棒數 n 並非難事，但我們想進一步挑戰可圍成正 k 邊形的木棒數 n 與 k 的關係是否存在著特定的規律！

二、討論：「對任意大於或等於 3 的正整數 k，給定長度分別為 1,2,3,……,n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒可否圍成正 k 邊形？ 如何圍？且可圍成正 k 邊形的木棒數 n 具備怎樣的規律？」

研究 n 與 k 的關係的過程中，兩個未知數數度攪得我們暈頭轉向，甚至頻遇瓶頸，但「成就險中求」，我們執著的往下走，還好有老師的指導與支持，我們一步一步走出陰霾，而過程中有不少有趣的發現，我們決定在總結上述研究目的前先行介紹：

(一)引理 1：$n \geq 2k-1$　即圍成一正 k 邊形，至少需要 $2k-1$ 根木棒。

【說明】若 $n<2k-1$ 時，

因為 n 根木棒都不一樣長，若要組合成一些一樣的長度，除了最長邊 n 外，其它至少得兩兩一組，因此最多可圍成 $\frac{n-1}{2}+1$ 邊，又因為 $n<2k-1$，所以最多可圍成 $\frac{n-1}{2}+1<\frac{(2k-1)-1}{2}+1=k$ 邊。

故 圍成一正 k 邊形，至少需要 $2k-1$ 根木棒。

(二)引理 2：當 $n=2kt-1$　($t \in \mathbb{N}$)時，必可圍成正 k 邊形。

【說明】(1) t=1 時

取$(2k-1),(1,2k-2),(2,2k-3),\ldots\ldots,(k-1,k)$分別為 k 個邊長，即可圍成一邊長為 $2k-1$ 的正 k 邊形。

(2)若 t=r 時成立，令此時圍成的正k邊形邊長分別為ℓ_1、ℓ_2、……、ℓ_k，

則 t=r+1 時，

取$(2k\mathrm{r}, 2k\mathrm{r}+2k-1, \ell_1)$,$(2k\mathrm{r}+1, 2k\mathrm{r}+2k-2, \ell_2)$,$(2k\mathrm{r}+2, 2k\mathrm{r}+2k-3, \ell_3)$,…….

…,$(2k+k-1, 2k\mathrm{r}+k, \ell_k)$ 分別為k個邊長，即可圍成一正k邊形。

(3)根據數學歸納法，即得證。

(三)引理 3：當$n=2k\mathrm{t}$ ($\mathrm{t}\in\mathbb{N}$)時，必可圍成正k邊形。

【說明】(1) t=1 時

取$(1,2k)$,$(2,2k-1)$,$(3,2k-2)$,…….,$(k, k+1)$分別為k個邊長，即可圍成一邊長為 $2k+1$ 的正k邊形。

(2)若 t=r 時成立，令此時圍成的正k邊形邊長分別為ℓ_1、ℓ_2、……、ℓ_k，

則 t=r+1 時，

取$(2k\mathrm{r}+1,2k\mathrm{r}+2k, \ell_1)$,$(2k\mathrm{r}+2,2k\mathrm{r}+2k-1, \ell_2)$, ,……., $(2k\mathrm{r}+k, 2k\mathrm{r}+k+1, \ell_k)$

分別為k個邊長，即可圍成一正k邊形。

(3)根據數學歸納法，即得證。

(四)引理 4：我們知道此n根木棒要圍成一正k邊形必要條件為：

$n\geq$**2k-1 且** n**可讓邊長**$\ell=\dfrac{n(n+1)}{2k}$**為正整數**

【說明】(1) 根據引理 1：$n\geq 2k-1$

(2) 因為我們的木棒長度在不能折斷或折彎的前題下皆是正整數，根據〈正整數加法封閉性〉，這些木棒無論如何組合，長度必為正整數，即得證。

換言之，n必須可讓邊長$\ell=\dfrac{n(n+1)}{2k}$為正整數才可能圍成一正k邊形。

(五)依循引理 4，我們利用 Excel 來計算邊長$\ell=\dfrac{n(n+1)}{2k}$，以便尋找滿足可讓邊長

$\ell=\dfrac{n(n+1)}{2k}$為正整數的n，再進一步確定是否可圍成一正k邊形。〈如附件一〉

在 Excel 的協助下，我們輕易地計算出邊長，也驚訝地發現兩個規律：

1. 當k只有質因數 2 時，只有n是 $2k$ 的倍數減 1 或 $2k$ 的倍數時可以讓邊長是正整數。

   也就是：當$k=2^m$ ($m\in\mathbb{N}$)時，n根木棒要圍成正k邊形的必要條件

   為： n**=2**k**t-1 或** n**=2**k**t (t**$\in\mathbb{N}$**)**

2. 當 k 只有一個質因數 p ，此質因數 $p \neq 2$ 時，只有 n 是 k 的倍數減 1 或 k 的倍數時可以讓邊長是正整數。

也就是：當 $k = p^m$ （$m \in \mathrm{N}$），質數 $p \neq 2$ 時，n 根木棒要圍成正 k 邊形的必要條件

為： **$n = k$ t-1 或 $n = k$ t (t$\in \mathrm{N}$,t≥ 2)**

這兩個發現令人興奮，但初出茅廬的我們不敢妄自斷言，在老師的指導下，我們謹慎地進一步求證如下(引理 5、引理 6)。

(六)引理 5：當 $k = 2^m$ （$m \in \mathrm{N}$）時，n 根木棒要圍成一正 k 邊形必要條件

為： **n =2 k t-1 或 n =2 k t (t$\in \mathrm{N}$)**。

【說明】欲使邊長 $\ell = \dfrac{n(n+1)}{2k}$ 成為整數，則 $2k \mid n(n+1)$

因 $k = 2^m$ （$m \in \mathrm{N}$），所以 $2k \mid n(n+1) \Rightarrow 2^{m+1} \mid n(n+1)$

又 $n, n+1$ 為兩連續整數，必為一奇數一偶數，因此分為兩類狀況來討論

(1) 若 n 是偶數 $\Rightarrow 2$ 不整除 $n+1$

故欲使 $2^{m+1} \mid n(n+1)$ ，則 $2^{m+1} \mid n$

即 n =2 k t(t$\in \mathrm{N}$)

(2) 若 n 是奇數 $\Rightarrow 2$ 不整除 n

故欲使 $2^{m+1} \mid n(n+1)$ ，則 $2^{m+1} \mid n+1$

即 n =2 k t-1(t$\in \mathrm{N}$)

因此只有 n =2 k t、 n =2 k t-1 (t$\in \mathrm{N}$) 才能讓邊長 ℓ 是整數，

故根據引理 4 即得證。

(七)定理 1：當 $k = 2^m$ （$m \in \mathrm{N}$）時，n 根木棒要圍成一正 k 邊形充分必要條件

為： **n =2 k t-1 或 n =2 k t (t$\in \mathrm{N}$)**。

【說明】($\Rightarrow$)根據引理 2、引理 3，n =2 k t-1 或 n =2 k t (t$\in \mathrm{N}$)時必可圍成正 k 邊形。

($\Leftarrow$)根據引理 5，得證。

(八)引理 6：當 $k = p^m$ （$m \in \mathrm{N}$），且質數 $p \neq 2$ 時，n 根木棒要圍成一正 k 邊形必要條件

為： **$n = k$ t-1 或 $n = k$ t (t$\in \mathrm{N}$,t≥ 2)**

(即 $n \in \{$ 2 k t-1 , 2 k t , 2 k t+ k -1 , 2 k t+ k | t$\in \mathrm{N}$ $\}$)

【說明】欲使邊長 $\ell = \dfrac{n(n+1)}{2k}$ 成為整數，則 $2k \mid n(n+1)$

又 $k = p^m$ （$m \in \mathrm{N}$），質數 $p \neq 2$ 時，k 是奇數

且 $n, n+1$ 為兩連續整數，必為一奇數一偶數，因此分為兩類狀況來討論

(1) 若n是偶數$\Rightarrow$ 2不整除$n+1$

故欲使$2k \mid n(n+1)$，則 ① $2k \mid n$ 或 ② $2 \mid n$且$k \mid n+1$

即 ① $n=2k$t (t$\in\mathbb{N}$) 或 ② $n=2k$t+k-1 (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$)

(2) 若n是奇數$\Rightarrow$ 2不整除n

故欲使$2k \mid n(n+1)$，則 ① $2k \mid n+1$ 或 ② $2 \mid n+1$ 且$k \mid n$

即 ① $n=2k$t-1 (t$\in\mathbb{N}$) 或 ② $n=2k$t+k (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$)

故只有$n=2k$t (t$\in\mathbb{N}$)、$n=2k$t+k-1 (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$)、$n=2k$t-1 (t$\in\mathbb{N}$)、$n=2k$t+k (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$)時，才能讓邊長ℓ會為整數。

又 $n=2k$t+k-1 (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$)、$n=2k$t-1 (t$\in\mathbb{N}$) 可併成$n=k$**t-1 (t**$\in\mathbb{N}$**)**

而 $n=2k$t (t$\in\mathbb{N}$)、$n=2k$t+k (t=0 或 t$\in\mathbb{N}$) 可併成$n=k$**t (t**$\in\mathbb{N}$**)**

也就是$n=k$**t-1 或** $n=k$**t (t**$\in\mathbb{N}$**)**才能讓邊長是整數。

但上述$n=k$**t-1 或** $n=k$**t (t**$\in\mathbb{N}$**)**中，t=1 的狀況(即$n=k$-1 和$n=k$)雖可使邊長為正整數，但因此時的$n<2k$-1(不滿足引理 1)，故很顯然不能圍成正k邊形。故$n=k$**t-1 或** $n=k$**t (t**$\in\mathbb{N}$**,t**$\geq$**2)** 為圍成一正k邊形的必要條件。

(九)定理 2：當$k=p^m$ ($m\in\mathbb{N}$)，且質數$p\neq 2$時，n根木棒要圍成一正k邊形充分必要條件為：$n\in\{$ **2kt-1 , 2kt , 2kt+k-1 , 2kt+k | t**$\in\mathbb{N}$ $\}$

【說明】($\Rightarrow$)分$n=2k$t-1、$n=2k$t、$n=2k$t+k-1 和$n=2k$t+k (t$\in\mathbb{N}$)四種狀況來討論

1. $n=2k$t-1 (t$\in\mathbb{N}$)時：根據引理 2，得證。
2. $n=2k$t (t$\in\mathbb{N}$)時：根據引理 3，得證。
3. $n=2k$t+k-1 (t$\in\mathbb{N}$)時：

(1) t=1 時，$n=3k$-1

也就是，木棒數$n=3k$-1 根時，我們想證明真的可以圍成正k邊形；

在此研究過程中，對於任意的$k=p^m$ ($m\in\mathbb{N}$,質數$p\neq 2$)，要設立

一套統一的圍法相當不容易，我們試了好幾種方式，才發現了**《第一套圍法》**，且奇數k必須分成兩大類狀況來討論：一類k為 4S+1 時，邊長ℓ為偶數，狀況較為單純，而另一類k為 4S+3 時，邊長ℓ為奇數，狀況較為複雜，在這一類狀況我們又花了好多精神才發現規律，是四個四個一次循環，必須再細分為四種情形討論。

但在我們的研究說明就要寫下最後句點時，一位同伴的突發奇想，反而激出更好的**《第二套圍法》**，它和《第一套圍法》一樣的討論模式，但在第二類狀況時單純得多，不必細分四種情形，這實在令人振奮。

這兩套圍法雖有優劣，但都是我們的心血結晶，我們實在不忍割捨，因此皆忠實呈現如下。希望各位讀者能一起見證我們的努力和成長。

我們將奇數k分為 4S+1 和 4S+3 (S=0,1,2,3,.....)兩種狀況討論如下：

〈1〉k=4S+1 時

此時n=3k-1=3(4S+1)-1 =12S+2，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(12\mathrm{S}+2)(12\mathrm{S}+3)}{2(4\mathrm{S}+1)}=3(6\mathrm{S}+1)=18\mathrm{S}+3$$

1,2,3,...,n

1,2,3,..,6S,||6S+1,.........................,12S+2

取(6S+1,12S+2), (6S+2,12S+1),....., (9S+1,9S+2)共組成 3S+1 個邊

令 $k'=k$-(3S+1)= (4S+1)-(3S+1) =S

n'=6S

則n'=6k' 即n'=2k't, t=3 時的狀況，根據引理 3 可知n'根木棒可圍成正k'邊形(也就是n'根木棒可組成k'=S 個邊長為ℓ=18s+3 的邊)，因此再加(6S+1,12S+2), (6S+2,12S+1),..........., (9S+1,9S+2)等組成的 3S+1 個邊，即可證出此n根木棒可圍成正k邊形。

〈2〉k=4S+3 時

※《第一套圍法》

再細分為k=16u+3、k=16u+7、k=16u+11、k=16u+15(u=0,1,2,...)四種情形：

① k=16u+3 時

此時n=3k-1=3(16u+3)-1=48u+9-1=48u+8，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(48\mathrm{u}+8)(48\mathrm{u}+9)}{2(16\mathrm{u}+3)}=3(24\mathrm{u}+4)=72\mathrm{u}+12$$

《步驟一》

1,2,3,...,n

1,2,3,.....................................,24u+3,||24u+4,...............,48u+8

取(24u+4, 48u+8),(24u+5,48u+7),......,(36u+5,36u+7)

共組成 12u+2 個邊。

《步驟二》令$k'=k$-(12u+2)=(16u+3)-(12u+2)=4u+1，此時木棒剩下

1,2,3,.....................................,24u+3,||36u+6

1,2,3,....,12u+2,||12u+3,.....,24u+3,||36u+6

先取(12u+3, 24u+3), (12u+4, 24u+2),........, (18u+2, 18u+4) 共組成 6u 組邊長為 36u+6(=$\frac{\ell}{2}$)單位長木棒，再兩兩一組共可組成$\frac{6\mathrm{u}}{2}$=3u 個邊。

《步驟三》令 $k''=k'$ -3u=(4u+1)-3u=u+1，且木棒剩下

1,2,3,....,12u+1,12u+2,||18u+3,||36u+6

取(1,12u+1), (2,12u),........, (6u, 6u+2) 共組成 6u 組邊長為

12u+2(=$\frac{\ell}{6}$)單位長木棒，再六六一組共可組成 $\left\lfloor \frac{6u}{6} \right\rfloor$=u 個邊。

(PS. $\lfloor\ \rfloor$為高斯符號)

《步驟四》令 $k'''=k''$ -u=(u+1)-u=1，且此時木棒只剩下

6u+1, 12u+2,||18u+3,||36u+6

而這些全取即可組成最後一邊。

由此四步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

② k =16u+7 時

此時 n =3 k -1=3(16u+7)-1=48u+20，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(48u+20)(48u+21)}{2(16u+7)}=3(24u+10)=72u+30$$

《步驟一》

1,2,3,.., n

1,2,3,.......................................,24u+9,||24u+10,.........,48u+20

取(24u+10, 48u+20),(24u+11,48u+19),.....,(36u+14,36u+16)

共組成 12u+5 個邊。

《步驟二》令 $k'=k$ -(12u+5)=(16u+7)-(12u+5)=4u+2，此時木棒剩下

1,2,3,.......................................,24u+9,||36u+15

1,2,3,....,12u+5,||12u+6,......,24u+9,||36u+15

先取(12u+6, 24u+9), (12u+7, 24u+8),........, (18u+7, 18u+8)共組成 6u+2 組邊長為 36u+15(=$\frac{\ell}{2}$)單位長木棒，再兩兩一組共可組成 $\frac{6u+2}{2}$=3u+1 個邊。

《步驟三》令 $k''=k'$ -(3u+1)=(4u+2)-(3u+1)=u+1，且木棒剩下

1,2,3,......,12u+4,12u+5,||36u+15

取(1,12u+4), (2,12u+3),........, (6u+2,6u+3) 共組成 6u+2 組邊長為 12u+5(=$\frac{\ell}{6}$)單位長木棒，再六六一組共可組成 $\left\lfloor \frac{6u+2}{6} \right\rfloor$=u 個邊，並餘兩組 $\frac{\ell}{6}$ 單位長木棒，例如為(1,12u+4), (2,12u+3)兩組木棒

《步驟四》令 $k'''=k''$ -u=(u+1)-u=1，且此時木棒只剩下

(1,12u+4), (2,12u+3) ,12u+5,|| 36u+15

而這些全取即可組成最後一邊。

由此四步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

③ k =16u+11 時

此時 n =3 k -1=3(16u+11)-1=48u+32，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(48\mathrm{u}+32)(48\mathrm{u}+33)}{2(16\mathrm{u}+11)}=3(24\mathrm{u}+16)=72\mathrm{u}+48$$

《步驟一》

1,2,3,…………………………………………………………………………, n

1,2,3,…………………………….,24u+15,||24u+16,………..,48u+32

取(24u+16, 48u+32),(24u+17,48u+31),…..,(36u+23,36u+25)共組成 12u+8 個邊。

《步驟二》令 $k'=k$ -(12u+8)=(16u+11)-(12u+8)=4u+3，此時木棒會剩下

1,2,3,……………………………….,24u+15,||36u+24

1,2,3,…,12u+8,||12u+9,……,24u+15,||36u+24

先取(12u+9, 24u+15),(12u+10, 24u+14),…..,(18u+11, 18u+13)

共組成 6u+3 組邊長為 36u+24(= $\frac{\ell}{2}$)單位長木棒，再加上步驟一剩下的 36u+24(= $\frac{\ell}{2}$)單位長的木棒，共有 6u+4 組邊長為 $\frac{\ell}{2}$ 單位長木棒，故再兩兩一組可組成 $\frac{6\mathrm{u}+4}{2}$ =3u+2 個邊。

《步驟三》令 $k''=k'$ -(3u+2)=(4u+3)-(3u+2)=u+1，且木棒剩下

1,2,3,……. ,12u+7,12u+8,||18u+12

取(1,12u+7), (2,12u+6),…….., (6u+3, 6u+5) 共組成 6u+3 組邊長為 12u+8(= $\frac{\ell}{6}$)單位長木棒，再六六一組共可組成

$\left\lfloor\frac{6\mathrm{u}+3}{6}\right\rfloor$ =u 個邊，並餘三組 $\frac{\ell}{6}$ 單位長木棒，例如為(1,12u+7), (2,12u+6), (3,12u+5) 三組木棒。

《步驟四》令 $k'''=k''$ -u=(u+1)-u=1，且此時木棒只剩下

6u+4, (1,12u+7), (2,12u+6), (3,12u+5),12u+8||18u+12

而這些全取即可組成最後一邊。

由此四步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

④ k =16u+15 時

此時 n =3 k -1=3(16u+15)-1=48u+44，

$$\ell = \frac{n(n+1)}{2k} = \frac{(48u+44)(48u+45)}{2(16u+15)} = 3(24u+22) = 72u+66$$

《步驟一》

1,2,3,……………………………………………………………………………, n

1,2,3,………………………………,24u+21,||24u+22,……….,48u+44

取(24u+22,48u+44),(24u+23,48u+43),…..,(36u+32,36u+34)共組成 12u+11 個邊。

《步驟二》令 k' = k -(12u+11)=(16u+15)-(12u+11)=4u+4，此時木棒會剩下:

1,2,3,…………………………………,24u+21,||36u+33

1,2,3,…,12u+11,l l12u+12,…,24u+21,||36u+33

先取(12u+12,24u+21), (12u+13,24u+20),….,(18u+16,18u+17)

共組成 6u+5 組邊長為 36u+33(= $\frac{\ell}{2}$)單位長木棒，再加上步驟一剩下的 36u+33(= $\frac{\ell}{2}$)單位長的木棒，共有 6u+6 組邊長為 $\frac{\ell}{2}$ 單位長木棒,故再兩兩一組可組成 $\frac{6u+6}{2}$ =3u+3 個邊。

《步驟三》令 k'' = k' -(3u+3)=(4u+4)-(3u+3)=u+1，且木棒剩下

1,2,3,………,12u+11

令 n'' = 12u+11

則 n'' =12 k'' -1 即 n'' =2 k'' t-1, t=6 時的狀況，根據引理 2 可知 n'' 根木棒可圍成正 k'' 邊形。

由此三步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

※《第二套圍法》

k =4S+3

此時 n =3 k -1=3(4S+3)-1=12S+8，

$$\ell = \frac{n(n+1)}{2k} = \frac{(12S+8)(12S+9)}{2(4S+3)} = 3(6S+4) = 18S+12$$

《步驟一》

1,2,3,……………………………………………………………………………, n

1,2,3,…………………………………, 6S+3,|| 6S+4,……………, 12S+8

取(6S+4, 12S+8),(6S+5, 12S+7),…..,(9S+5, 9S+7)共組成 3S+2

個邊。

《步驟二》令 $k'=k$ -(3S+2)=(4S+3)-(3S+2)= S+1，此時木棒會剩下:

1,2,3,......................................,6S+3,|| 9S+6

先取(1, 6S+3), (2, 6S+2),....,(3S+1, 3S+3)共組成 3S+1 組邊長為 6S+4 (=$\frac{\ell}{3}$)單位長木棒，再三三一組可組成$\left\lfloor \frac{3S+1}{3} \right\rfloor$=S 個邊，並餘一組$\frac{\ell}{3}$單位長木棒，例如為(1, 6S+3) 一組木棒。

《步驟三》令 $k''=k'$ -S=(S+1)-S= 1，且此時木棒只剩下

3S+2, (1, 6S+3), || 9S+6

而這些全取即可組成最後一邊。

由此三步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

由以上討論可知，t=1 時，n=3k -1 根木棒確可圍成一正 k 邊形。

(2) 若 t=r 時成立，令此時圍成的正 k 邊形邊長分別為 ℓ_1、ℓ_2、......、ℓ_k，

則 t=r+1 時，

取(2kr+k ,2kr+3k-1, ℓ_1),(2kr+k+1, 2kr+3k-2, ℓ_2),.......,

(2kr+2k-1,2kr+2k, ℓ_k)分別為 k 個邊長，即可圍成一正 k 邊形。

(3) 根據數學歸納法，即得證。

4. n=2kt+k (t$\in \mathrm{N}$)時：

(1) t=1 時，即 n=3k 。

研究過程和 n=3k -1 時的狀況相當類似，但有了上次的經驗，這次的速度加快了許多，同樣地，k 也必須分成 4S+1 和 4S+3 兩大類狀況來討論，只不過狀況有點互換，因而此次，我們不贅述**《第一套圍法》**只呈現較優的**《第二套圍法》**。

我們將奇數 k 分為 4S+1 和 4S+3 (S=0,1,2,3,.....)兩種狀況討論如下：

〈1〉k=4S+1 時

此時 n=3k=3(4S+1)=12S+3，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(12S+3)(12S+4)}{2(4S+1)}=3(6S+2)=18S+6$$

《步驟一》

1,2,3,...,n

1,2,3,......................................,6S+2,|| 6S+3,...............,12S+3

取(6S+3,12S+3),(6S+4,12S+2),...,(9S+2,9S+4)共組成 3S 個邊。

《步驟二》令 $k'=k$ -3S=(4S+1)-3S= S+1，此時木棒剩下:

1,2,3,............................,6S+1,6S+2,|| 9S+3

先取(1,6S+1),(2,6S),....,(3S,3S+2)共組成 3S 組邊長為 6S+2

(=$\frac{\ell}{3}$)單位長木棒，再三三一組可組成 $\frac{3S}{3}$ =S 個邊。

《步驟三》令 $k''=k'$ -S=(S+1)-S= 1，且此時木棒只剩下

3S+1,6S+2,|| 9S+3

而這些全取即可組成最後一邊。

由此三步驟，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

〈2〉k =4S+3 時，

此時 n =3k=3(4S+3) =12S+9，

$$\ell=\frac{n(n+1)}{2k}=\frac{(12S+9)(12S+10)}{2(4S+3)}=3(6S+5)=18S+15$$

1,2,3,..,n

1,2,3,.....................................,6S+5,||6S+6,.......................,12S+9

取(6S+6,12S+9), (6S+7,12S+8),....., (9S+7,9S+8)共組成 3S+2 個邊

令　$k'=k$ -(3S+2)= (4S+3)-(3S+2) =S+1

n' =6S+5

則 $n'=6k'-1$　即 $n'=2k'$t-1, t=3 時的狀況，根據引理 2 可知 n′ 根木棒可圍成正 k' 邊形(也就是 n' 根木棒可組成 k' =S+1 個邊長為 ℓ 的邊)，因此再加上(6S+6,12S+9),(6S+7,12S+8), ..., (9S+7,9S+8)等組成的 3S+2 個邊，即可證出此 n 根木棒可圍成正 k 邊形。

由以上討論可知，t=1 時，$n=3k$ 根木棒確可圍成一正 k 邊形。

(2) 若 t=r 時成立，令此時圍成的正 k 邊形邊長分別為 ℓ_1、ℓ_2、......、ℓ_k，

則 t=r+1 時，

取($2kr+k+1,2kr+3k,\ell_1$),($2kr+k+2,2kr+3k-1,\ell_2$),..........,

($2kr+2k,2kr+2k+1,\ell_k$) 分別為 k 個邊長，即可圍成一正 k 邊形。

(3)根據數學歸納法，即得證。

($\Leftarrow$)根據引理 6，得證。

(十)我們發現似乎只要n滿足$n \geq$**2**k**-1** 且n**可讓邊長**$\ell = \dfrac{n(n+1)}{2k}$**為正整數**，則

此n根木棒必可圍成一正k邊形，我們大膽猜測，並命名為《圍多多猜想》。

即

《圍多多猜想》: 分別為 1,2,3,……,n單位長的n根木棒要圍成一正k邊形充分必要條件

為： $n \geq$**2**k**-1** 且n**可讓邊長**$\ell = \dfrac{n(n+1)}{2k}$**為正整數**。

伍、研究結果

「對任意大於或等於 3 的正整數k，給定長度分別為 1,2,3,……,n單位長的n根木棒，此n根木棒欲圍成正k邊形應具備怎樣的特質？如何圍？」

(一) 引理 1：$n \geq 2k$-1　即圍成一正k邊形，至少需要 2k-1 根。

(二) 引理 2：當n=2kt-1　(t$\in \mathrm{N}$)時，必可圍成正k邊形。

(三) 引理 3：當n=2kt　(t$\in \mathrm{N}$)時，必可圍成正k邊形。

(四) 定理 1：當$k = 2^m$　($m \in \mathrm{N}$)時，n根木棒要圍成一正k邊形充分必要條件
為：**n=2kt-1 或n=2kt　(t$\in \mathrm{N}$)**。

(五) 定理 2：當$k = p^m$　($m \in \mathrm{N}$)，且質數$p \neq 2$時，n根木棒要圍成一正k邊形充分必要條件為：$n \in \{$ **2kt-1 , 2kt , 2kt+k-1 , 2kt+k | t$\in \mathrm{N}$** $\}$

(六)**《圍多多猜想》**:分別為 1,2,3,……,n單位長的n根木棒要圍成一正k邊形充分必要條件為：

$n \geq$**2**k**-1** 且 n**可讓邊長**$\ell = \dfrac{n(n+1)}{2k}$**為正整數**。

陸、討論

(一)其實**【 引理 6：**當$n = p^m$　($m \in \mathrm{N}$)，且質數$p \neq 2$時，n根木棒要圍成一正k邊形的

必要條件為： **n=kt-1 或 n=kt　(t$\in \mathrm{N}$,t$\geq$2) 】**

的【說明】對任意的奇數k皆成立，並不侷限在p^m　($m \in \mathrm{N}$，質數$p \neq 2$)時，只不過k為奇數且含有兩個質因數以上時，除了木棒數**n=kt-1 或 n=kt (t$\in \mathrm{N}$,t$\geq$2)** 外，還有其它的木棒數也能圍成正k邊形，例如：k=15=3×5 有兩個質因數，除了木棒數**n=15t-1 或 n=15t (t$\in \mathrm{N}$,t$\geq$2)** 外，還有**n=15t+5 或 n=15t+9 (t$\in \mathrm{N}$,t$\geq$2)** 也能圍成正k邊形。也就是，n根木棒圍成正 15 邊形充分必要條件為：$n \in \{$ **15t-1 , 15t , 15t+5 , 15t+9 | t$\in \mathrm{N}$,t$\geq$2** $\}$

(二)在研究之初，我們一度想研究圍法的方法數，但光 11 根木棒圍成正三角形的方法數就已高達 40 種，12 根木棒時就已破百，且對於規律毫無頭緒，我們只得先暫停方法數的討論，先就可不可圍下手，但待完成，時間已不夠我們回頭研究方法數，期待未來有機會，我們一定要繼續研究。

柒、結論

此次的科展，我們從毫無線索地慢慢抽絲剝繭，慢慢的鑽研、探討，有今日的成績，我們覺得很有成就感，我們打從心底感謝指導老師帶領我們這一趟「數學之旅」。

研究這個題目，我們幾乎一直在數字堆裡打滾，《圍多多猜想》是我們屢試不爽的一個大膽猜測，我們也很努力地想將它完整證明完，讓它成為《圍多多定理》，但可能時間不夠、可能我們所學有限，我們只證出 k 只有一個質因數時的部分(定理1、定理2)，但有朝一日，我們一定要完成它，並將之再加深加廣，例如：「圍法方法數的探討」、「木棒長度改為其它等差數列時，n 與 k 的關係為何？」　、「如果改為圍成其他的幾何圖形(如長方形、長方體...)時，又會有怎樣不同的發現呢？」 等等。我們也相信相關主題還有很大的探討空間，也期許將來有機會做進一步研究，以發現更奧妙的《圍多理呀的秘密》。

另外，我們覺得這是個很有趣的主題，很適合開發成「幼兒益智遊戲之教材」供小朋友藉由實際動手操作中學習簡單的加法運算，並從成功圍成正三角形、正方形等美麗的圖形中獲得成就感；也可進一步開發成「益智遊戲遊戲軟體」讓各階段的人們激盪腦力、寓教於樂。

捌、參考資料及其他

1. 單墫 (1999)。木棒圍方。**小學趣味數學 100 題** (54-55 頁)。台北市：九章出版社。
2. 第二章第一單元：因數與倍數。**國民中學數學第一冊**，2012，南一出版社。
3. 第一章：等差數列與等差級數。**國民中學數學第四冊**，2012，南一出版社。
4. 維基百科/數學歸納法（Mathematical Induction，通常簡稱為 MI）
http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E6%AD%B8%E7%B4%8D%E6%B3%95
5. 台灣網路科教館/科展群傑聽/全國中小學科展作品
http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821

【評語】030420

1. 作品說明條理分明，團隊合作良好。
2. 主題與國中教材連接適切。
3. 附件所述實驗數據完整。
4. 所用數學理論簡易。
5. 主題內容未見創新。
6. 所提猜想未見更深入探討。