中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030418

潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密

學校名稱：桃園縣私立新興高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 游垚騰	陳怡君

關鍵詞：鑲嵌、拼圖、正則多邊形

得獎感言

作科展研究真的會上癮。

回想第一次參加全國科展是小學四年級的時候，那次我顯得很興奮、對比賽的過程及內容充滿想像，雖然最終沒能在全國賽得獎，但收穫依然滿滿。記得當時參觀別人作品的時候，總覺得頭昏腦脹，每件作品都像是無字天書一般。

第二次參加全國科展時，已是國一的學生，有能力可以開始欣賞別人的作品，而且很幸運地那次得到第三名和博通大師國際代表獎，有機會擔任美國英特爾國際科技展覽會(Intel ISEF)的觀察員，到美國去見識全世界最大的中學生科技展覽盛會。

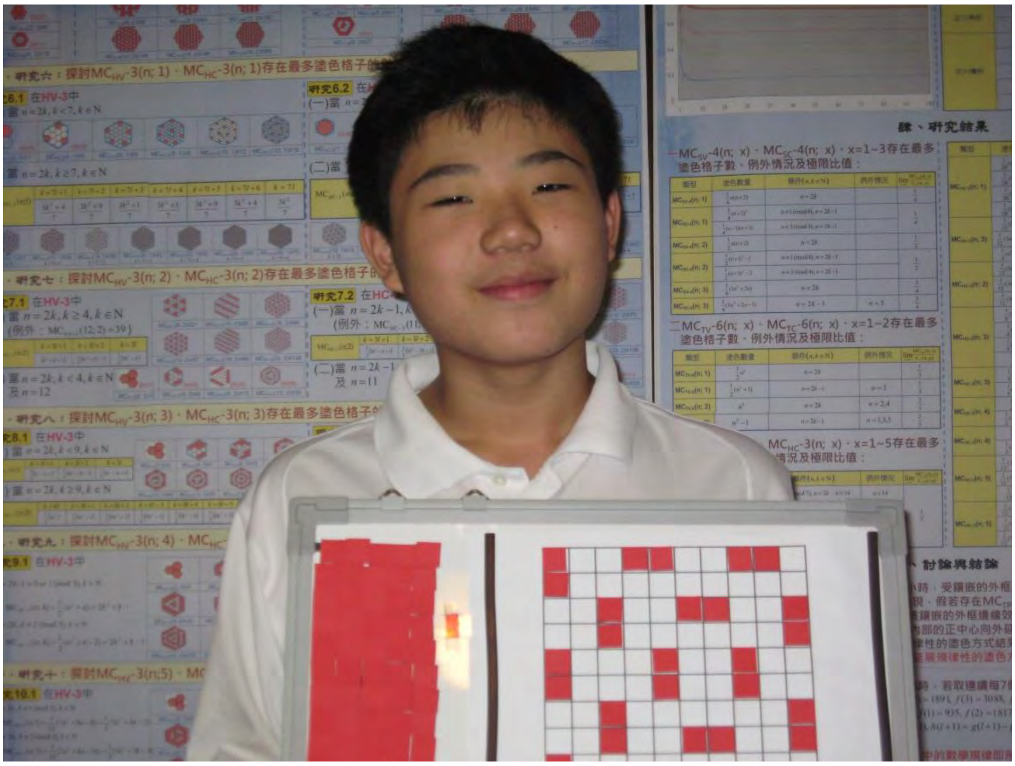
這一次的全國科展，很幸運地獲得第一名，真的有說不出來的高興，當佈展完畢時，就忍不住先去看看、並欣賞別人的作品。此次，對同組的作品、以及高中組數學科的作品有了不同的認知和感受，終於有點感覺自己的數學學科能力有明顯提升，呈現與過去看展時完全不同的感受，或許也因為經常接觸，因此感覺也變得敏銳起來。

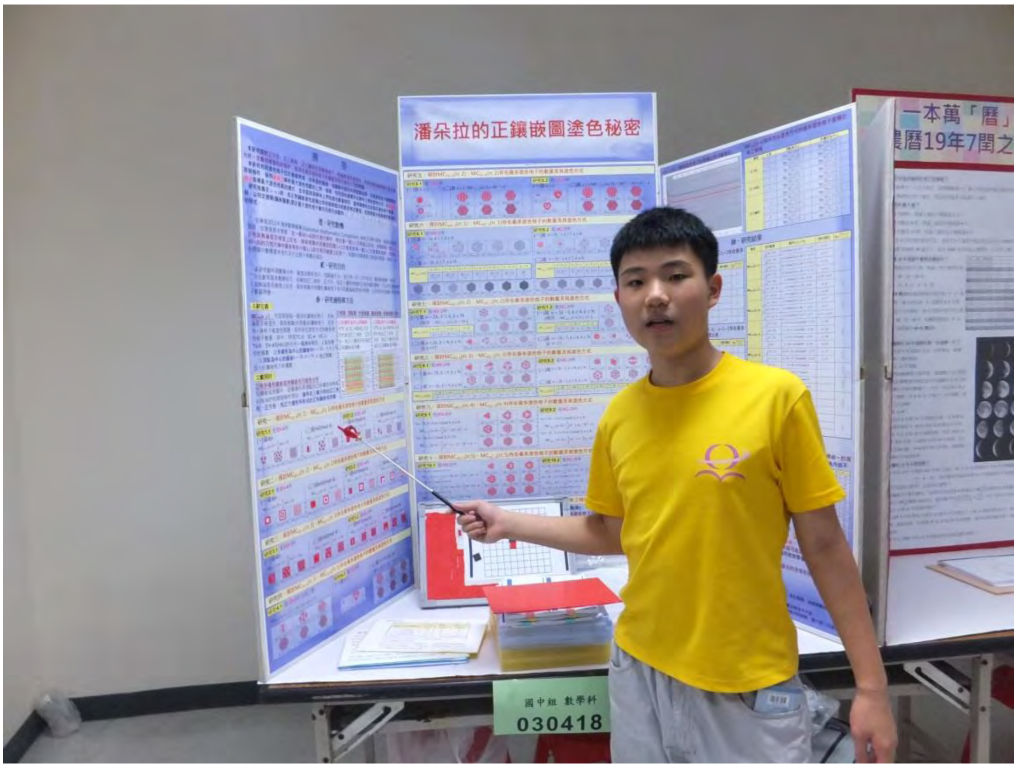
對於這件作品，其實自己並不是挺滿意的，幾度遇到瓶頸、在原地打轉，也一直在探索是否有更好的探討方向或解決問題的方法，作品的文稿從市賽、縣賽、一直持續不斷的修改到全國賽、截稿前準備報名的時候。過程中有煎熬、也有喜悅，交稿後仍然持續不斷的探索、包括找尋自己是否疏漏了哪些地方，...。即便如此，感覺很辛苦，但我仍然樂在其中。

這一路上走來，要感謝的人實在太多了，其中要特別感謝九章孫老師的長期培育與孫媽媽不厭其煩的叮嚀；讀書會的夥伴竑勳、禹埕和可為，大家在一起互相切磋、砥礪、及競爭中成長；新竹教大假日數學科學班、科教館、博通公司裡的許許多多前輩、老師、學長和同學們的指導和共同討論與學習；市賽、縣賽、到全國賽的評審教授們給我的指導與啟發，都對未來我繼續從事科學研究有莫大的幫助。

此外，我要感謝學校對我的通融、給我很大的學習彈性與空間、兩次陪伴我

參加全國科展的怡君老師、持續支持並鼓勵我的家人、以及支持並肯定我作品的評審們，因為您們的鼓勵，我將持續不墜的努力、再接再勵，持續投入科技、技術、工程與數學相關領域的研究。


利用方格道具實際操作演算，進一步確認推導的結果



全國賽賽前衝刺練習口頭報告

潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密

摘　要

本研究探討正方形、正三角形、正六邊形正則鑲嵌格子，無論其是否被塗色，與其相鄰的鑲嵌格子最多僅允許一至數格被塗色的條件，其存在最多塗色格子的數量及存在塗色方式的問題。

本研究利用塗色格子位於邊線角落、非角落的邊線、或鑲嵌內部的共用邊數差異、及與塗色格子總數間的限制條件，採用賦值法解析最大塗色格數的上界。接著，利用塗色建構符合解析上界的塗色方式，以數學歸納法推導最大塗色格數的通式，並求證其與解析上界的塗色數量相同，證得確實存在該最多塗色格子數量。

研究推廣至 $n \to \infty$ 時，各正則鑲嵌塗色面積比率的極限值均收斂至特定數值，且發現當外框邊線效應消失時，以特定週期(鑲嵌層數)累計最大塗色格子數均可表示成數列 $g(l) = f(l) - f(l-1), h(l+1) = g(l+1) - g(l) \equiv C_2, l \in N; f(0) = C_1$ 的形式。

壹、研究動機

在練習 2011 年澳洲數學競賽(Australian Mathematics Competition, AMC)中學中級卷、高級卷第 30 題時，依題意要求需要「在一個 40×40 的格子方陣中，對任意一個 1×1 格子塗上紅色，但限制每一個 1×1 格子其無論是否被塗上紅色，與其相鄰共用邊的四個 1×1 格子至多有一個 1×1 格子是紅色的，求解在 40×40 的格子方陣中最多有多少個 1×1 的格子可被塗上紅色？」

這題的求解過程引發我的興趣，想進一步利用國中數學的基本技巧及方法探討：「在一個 $n \times n$ 的格子方陣中，若限制每一個 1×1 格子其無論是否被塗上紅色，與其相鄰共用邊的四個 1×1 格子至多有一至三個 1×1 格子是紅色」的塗色問題。

文獻探討顯示類似此問題曾出現在 1999 年的國際數學奧林匹亞(International Mathematical Olympiad, IMO)競賽試題 A3，也被收錄在 2005 年馮躍峰編著，華東師範大學出版社出版的數學奧林匹克小叢書—高中卷(第 16 冊)第七章、例 7、第 40~41 頁。

正則多邊型鑲嵌已廣泛被討論及研究，也有許多實質的生活與工程應用。在正則多邊形鑲嵌中，僅存在三種分別由正三角形、正方形、和正六邊形所形成的正則鑲嵌，因此也延伸推廣至類似的塗色問題探討。

貳、研究目的

本研究擬利用數學分析、賦值法解析技巧、和歸納方法，並引用一元一次不等式、數列與級數、極限、二次函數等基本數學技巧，求解由正三角形、正方形、和正六邊形拼接的正則多邊形鑲嵌，可以符合鑲嵌格子其無論是否被塗上紅色，與其相鄰共用邊的鑲嵌格子有不同數量被塗色的問題，以及其存在的最大塗色格子數量問題。

參、研究設備及器材

格子紙、筆、彩色筆、MS Office、筆記型電腦。

肆、研究過程或方法

一、 名辭定義：

(一) 鑲嵌或拼圖：使用全等或非全等的形狀，以緊密無縫隙的方式覆蓋一個平面。

(二) 正則鑲嵌或拼圖：使用全等的正凸多邊形以具備週期性與均勻性的方式進行鑲嵌。

(三) 正則多邊形鑲嵌或拼圖：使用由一個或數個正凸多邊形組成的全等形狀，進行正則鑲嵌。

(四) 共用頂點：在凸多邊形鑲嵌中，數個凸多邊形共用一個頂點，並且圍繞該頂點的多邊形內角和為 360º。

(五) 共用邊或鑲嵌線：在凸多邊形鑲嵌中，被兩個凸正多邊形共用的一邊。

(六) 以多邊形為中心的鑲嵌：在凸多邊形鑲嵌中，使多邊形居中心排列，並沿著共用邊、共用頂點逐次向外拓展進行鑲嵌。令 TC-6、SC-4 和 HC-3 分別代表由正三角形、正方形、和正六邊形所形成的以多邊形為中心的正則鑲嵌。

(七) 以頂點為中心的鑲嵌：在凸多邊形鑲嵌中，使多邊形的共用頂點居中心排列，並沿著共用邊、共用頂點逐次向外拓展進行鑲嵌。令 TV-6、SV-4 和 HV-3 分別代表由正三角形、正方形、和正六邊形所形成的以頂點為中心的正則鑲嵌。

(八) $MC_{TP}(n;x)$：代表限制每一個用於鑲嵌的格子，其無論是否被塗色，與其相鄰(共用邊)的鑲嵌格子，至多有 x 個格子被塗色問題，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量。其中：TP 是 TC-6、SC-4、HC-3、TV-6、SV-4 和 HV-3 的任何一種鑲嵌類型；k 為多邊形的層數，以多邊形為中心的鑲嵌中 $n=2k-1, k\in\mathrm{N}$；以頂點為中心的鑲嵌 $n=2k, k\in\mathrm{N}$ ； x 為正整數，且小於鑲嵌格子的邊數。

二、 文獻探討(參考維基百科網站資料整理)：

(一) 正則多邊形鑲嵌組合可能性分析：

在鑲嵌中，從圍繞共用頂點的凸多邊形內角和必為 360º 的限制條件得知：**僅存在三種分別由正三角形、正方形、和正六邊形所形成的正則鑲嵌**。進一步分析由不同的正凸多邊形組合的形狀必須符合鑲嵌共用頂點的限制條件得知，僅存在由正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、和正十二邊形組合的全等形狀可以符合正則多邊形鑲嵌，並且共有下列 14 種情況：**正三角形、正方形、正六邊形**、三個正三角形+兩個正方形(2 種情況)、二個正三角形+兩個正六邊形(2 種情況)、四個正三角形+一個正六邊形、一個正方形+兩個正八邊形、一個正三角形+兩個正十二邊形、一個正三角形+兩個正方形+一個正六邊形(2 種情況)、一個正方形+一個正六邊形+一個正十二邊形、兩個正三角形+一個正方形+一個正十二邊形。

(二) 格子數、頂點數、外框線數、鑲嵌線數、和邊線數分析：

1. 以多邊形為中心的鑲嵌：

令 $C_C(n)$, $V_C(n)$, $O_C(n)$, $L_C(n)$和 $S_C(n)$分別代表該鑲嵌的格子數、頂點數、外框線數、鑲嵌線數和邊線數，且 $n=2k-1, k\in\mathrm{N}$ 。歸納並整理 TC-6, SC-4

和 HC-3 的正則鑲嵌結果如下表：

n		1	3	5	7	9	...	n = 2k-1
k		1	2	3	4	5	...	k
格子數 $C_C(n)$	TC-6	1	13	37	73	121	...	$C_C(n) = p\ k^2 - p\ k+1$ n=2k-1; p=6 for TC-6, 4 for SC-4, 3 for HC-3
	SC-4	1	9	25	49	81	...	
	HC-3	1	7	19	37	61	...	
頂點數 $V_C(n)$	TC-6	3	12	27	48	75	...	$V_C(n) = q\ k^2$ n=2k-1; q=3 for TC-6, 4 for SC-4, 6 for HC-3
	SC-4	4	16	36	64	100	...	
	HC-3	6	24	54	96	150	...	
外框線數 $O_C(n)$	TC-6	3	9	15	21	27	...	$O_C(n) = q\ (2k-1)$ n=2k-1; q=3 for TC-6, 4 for SC-4, 6 for HC-3
	SC-4	4	12	20	28	36	...	
	HC-3	6	18	30	42	48	...	
鑲嵌線數 $S_C(n)$	TC-6	0	15	48	99	168	...	$S_C(n) = q\ [p\ k^2-(p+2)k+2]/2$ n=2k-1; p=6 for TC-6, 4 for SC-4, 3 for HC-3; q=3 for TC-6, 4 for SC-4, 6 for HC-3
	SC-4	0	12	40	84	144	...	
	HC-3	0	12	42	90	156	...	
邊線數 $L_C(n)$	TC-6	3	24	63	120	195	...	$L_C(n) = O_C(n) + S_C(n)$ n=2k-1

2. 以頂點為中心的鑲嵌

令 $C_V(n)$, $V_V(n)$, $O_V(n)$, $L_V(n)$和 $S_V(n)$分別代表該鑲嵌的格子數、頂點數、外框線數、鑲嵌線數和邊線數，且 $n = 2k, k \in \mathrm{N}$ 。歸納並整理 TV-6, SV-4 和 HV-3 的正則鑲嵌結果如下表：

n		2	4	6	8	10	...	n = 2k
k		1	2	3	4	5	...	k
格子數 $C_V(n)$	TV-6	6	24	54	96	150	...	$C_V(n) = p\ k^2$ n=2k; p=6 for TV-6, 4 for SV-4, 3 for HV-3
	SV-4	4	16	36	64	100	...	
	HV-3	3	12	27	48	75	...	
頂點數 $V_V(n)$	TV-6	7	19	37	61	181	...	$V_V(n) = q\ k^2+q\ k+1$ n=2k; q=3 for TV-6, 4 for SV-4, 6 for HV-3
	SV-4	9	25	49	81	121	...	
	HV-3	13	37	73	121	181	...	
外框線數 $O_V(n)$	TV-6	6	12	18	24	30	...	$O_V(n) = 2q\ k$ n=2k; q=3 for TV-6, 4 for SV-4, 6 for HV-3
	SV-4	8	16	24	32	40	...	
	HV-3	12	24	36	48	60	...	
鑲嵌線數 $S_V(n)$	TV-6	6	30	72	132	210	...	$S_V(n) = q\ (p\ k^2-2k)/2$ n=2k; p=6 for TV-6, 4 for SV-4, 3 for HV-3; q=3 for TV-6, 4 for SV-4, 6 for HV-3
	SV-4	4	24	60	112	180	...	
	HV-3	3	24	63	120	195	...	
邊線數 $L_V(n)$	TV-6	12	42	90	156	240	...	$L_V(n) = O_V(n) + S_V(n)$ n=2k
	SV-4	12	40	84	144	220	...	
	HV-3	15	48	99	168	255	...	

三、研究一：探討 $MC_{SV\text{-}4}(n;1)$、$MC_{SC\text{-}4}(n;1)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

研究 1.1 在 SV-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;1)=\frac{1}{4}n(n+2)=k^2+k,\forall n=2k,k\in\mathrm{N}$ 。

證明 假設塗色的格子中有 a 個位於角落、b 個位於非角落的邊線上、c 個位於鑲嵌內部，則與這些被塗色的格子有共用邊的格子共有 $2a+3b+4c$ 。此外，因角落與邊線上的塗色格子有一條共用邊，故位於角落與邊線上的格子數共有 $2a+2b$ 個。整理得到式(1)和式(2)：

$$2a+3b+4c\le n^2 \qquad (1)$$

$$2a+2b\le n^2-(n-2)^2,\text{即 } a+b\le 2n-2 \qquad (2)$$

由式(2)得知角落和邊線上的塗色格子數最大值恰好是位於角落與邊線上的格子數 $2a+2b$ 的一半。

(一) 當 4|n，$n=4l,l\in\mathrm{N}$ ，角落的位置最多可以出現 2 個塗色格子，因此

$$a\le 2 \qquad (3)$$

將式(1)、式(2)和式(3)相加得 $4a+4b+4c\le n^2+2n$ 。用 $n=4l$ 代入，下取整數得：

$$a+b+c\le\left\lfloor\frac{(4l)^2+2\times 4l}{4}\right\rfloor=4l^2+2l=\frac{1}{4}n(n+2)\text{ 。}$$

(二) 當 n≡2(mod 4)，$n=4l+2,l\in\mathrm{N}$ ，a 的最大值與 $n=4l$ 的情況相同。將式(1)、式(2)和式(3)相加得 $4a+4b+4c\le n^2+2n$ 。用 $n=4l+2$ 代入，下取整數得：

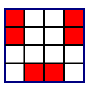
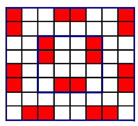
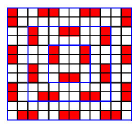
$$a+b+c\le\left\lfloor\frac{(4l+2)^2+2\times(4l+2)}{4}\right\rfloor=4l^2+6l+2=\frac{1}{4}n(n+2)\text{ 。}$$

得證塗色格子數 $a+b+c$ 的可能上界。現在，建構 SV-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 4|n，$n=4l,l\in\mathrm{N}$ 時：塗色格子數為從外部向內層、每兩層劃分為一個區塊，且為每兩層中較外層可塗色格子數為該層格子數的一半，角落的位置最多可以出現 2 個塗色格子，因此歸納得到：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;1)=\sum_{h=1}^{l}\left(\frac{4h\times 4-4}{4}\right)\times 2=\sum_{h=1}^{l}2(4h-1)=\frac{8(1+l)\times l}{2}-2l=4l^2+2l$$

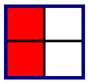
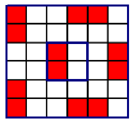
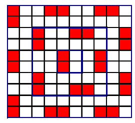
接著，代入 $l=\frac{n}{4}$ ，得 $\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;1)=\frac{1}{4}n(n+2)=k^2+k$ 。

		
$MC_{SV\text{-}4}(4;1)=6$	$MC_{SV\text{-}4}(8;1)=20$	$MC_{SV\text{-}4}(12;1)=42$

(二) 當 n≡2(mod 4)：$n=2$ 特例；$n=4l+2,l\in\mathrm{N}$ 時：塗色格子數為從外部向內層、每兩層劃分為一個區塊，且為每兩層中較外層可塗色格子數為該層格子數的一半，再加上最內一層兩格之和，因此歸納得到：

$$\begin{aligned} MC_{SV-4}(n;1) &= 2+\sum_{h=1}^{l}\left(\frac{(4h+2)\times 4-4}{4}\right)\times 2 \\ &= 2+\sum_{h=1}^{l}\left[2(4h+1)\right]=\frac{8(1+l)\times l}{2}+2l+2=4l^2+6l+2 \end{aligned}$$

接著，代入 $l=\frac{n-2}{4}$，得 $MC_{SV-4}(n;1)=\frac{1}{4}n(n+2)=k^2+k$ 。

		
$MC_{SV-4}(2;1)\equiv 2$ (特例)	$MC_{SV-4}(6;1)\equiv 12$	$MC_{SV-4}(10;1)\equiv 30$

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

研究 1.2 **在 SC-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為**

$$\begin{aligned} &MC_{SC-4}(n;1)=\frac{1}{4}(n+1)^2=k^2,\ \forall n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1,\ k\in \mathrm{N}; \\ &MC_{SC-4}(n;1)=\frac{1}{4}(n-1)(n+3)=k^2-1,\ \forall n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1,\ k\in \mathrm{N} \end{aligned} \text{。}$$

證明 與研究 1.1 SV-4 的塗色格子數可能上界證明類似：

(一) 當 n≡1(mod 4)，$n=4l+1,\ l\in \mathrm{N}$ 時：角落的位置最多可出現 4 個塗色格子，故

$$a\le 4 \qquad (4)$$

將式(1)、式(2)和式(4)相加得 $4a+4b+4c\le (n+1)^2+1$ 。用 $n=4l+1$ 代入，**下取整數得**：$a+b+c\le \left\lfloor \frac{(4l+2)^2+1}{4}\right\rfloor =4l^2+4l+1=\frac{1}{4}(n+1)^2$ 。

(二) 當 n≡3(mod 4)，$n=4l+3,\ l\in \mathrm{N}$ 時：a 的最大值與 $n=4l$ 的情況相同。將式(1)、式(2)和式(3)相加得 $4a+4b+4c\le n^2+2n$ 。用 $n=4l+3$ 代入，**下取整數得**：

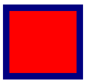
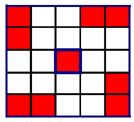
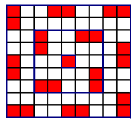
$$a+b+c\le \left\lfloor \frac{(4l+3)^2+2\times(4l+3)}{4}\right\rfloor =4l^2+8l+3=\frac{1}{4}(n-1)(n+3) \text{。}$$

得證塗色格子數 $a+b+c$ 的可能上界。現在，建構 SC-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 n≡1(mod 4)：$n=1$ 為特例；$n=4l+1,\ l\in \mathrm{N}$ 時：塗色格子數為從外部向內層、每兩層劃分為一個區塊，且為每兩層中較外層可塗色格子數為該層格子數的一半，再加上正中心一格之和，因此歸納得到：

$$\begin{aligned} MC_{SC-4}(n;1) &= 1+\sum_{h=1}^{l}\left(\frac{(4h+1)\times 4-4}{4}\right)\times 2 \\ &= 1+\sum_{h=1}^{l}8h=\frac{8(1+l)\times l}{2}+1=4l^2+4l+1 \end{aligned}$$

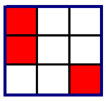
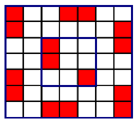
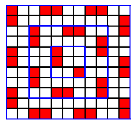
接著，代入 $l=\frac{n-1}{4}$，得 $MC_{SC-4}(n;1)=\frac{1}{4}(n+1)^2=k^2$ 。

		
$MC_{SC\text{-}4}(1;1)=1$ (特例)	$MC_{SC\text{-}4}(5;1)=9$	$MC_{SC\text{-}4}(9;1)=25$

(二) 當 n≡3(mod 4)：$n=3$ 特例；$n=4l+3, l\in \mathrm{N}$ 時：塗色格子數為從外部向內層、每兩層劃分為一個區塊，且為每兩層中較外層可塗色格子數為該層格子數的一半，再加上最內兩層三格之和，因此歸納得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{MC}_{\mathrm{SC-4}}(n;1)&=3+\sum_{h=1}^{l}\left(\frac{(4h+3)\times 4-4}{4}\right)\times 2\\&=3+\sum_{h=1}^{l}4(2h+1)=\frac{8(1+l)\times l}{2}+4l+3=4l^2+8l+3\end{aligned}$$

接著，代入 $l=\dfrac{n-3}{4}$，得 $\mathrm{MC}_{\mathrm{SC-4}}(n;1)=\dfrac{1}{4}(n-1)(n+3)=k^2-1$ 。

		
$MC_{SC\text{-}4}(3;1)=3$ (特例)	$MC_{SC\text{-}4}(7;1)=15$	$MC_{SC\text{-}4}(11;1)=35$

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

四、研究二：探討 $MC_{SV\text{-}4}(n;2)$、$MC_{SC\text{-}4}(n;2)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

研究 2.1 在 SV-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 2 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;2)=\dfrac{1}{2}n(n+2)=2(k^2+k), \forall n=2k, k\in \mathrm{N}$ 。

證明 與研究 1.1 SV-4 的塗色格子數可能上界證明類似，整理得到式(5)和式(6)：

$$2a+3b+4c\le 2n^2 \qquad (5)$$

$$2a+2b\le 2n^2-2(n-2)^2,\quad 即\ a+b\le 4n-4 \qquad (6)$$

因角落的位置最多可以出現 4 個塗色格子，故

$$a\le 4 \qquad (7)$$

將式(5)、式(6)和式(7)相加得 $4a+4b+4c\le 2n^2+4n$ 。

(一) 當 4|n，$n=4l, l\in \mathrm{N}$ 時：$n=4l$ 代入，下取整數得：

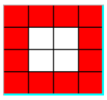
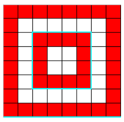
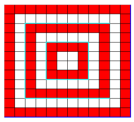
$$a+b+c\le\left\lfloor\frac{(4l)^2\times 2+4\times 4l}{4}\right\rfloor=8l^2+4l=\frac{1}{2}n(n+2)\ 。$$

(二) 當 n≡2(mod 4)，$n=4l+2, l\in \mathrm{N}$ 時：$n=4l+2$ 代入，下取整數得：

$$a+b+c\le\left\lfloor\frac{(4l+2)^2\times 2+4\times(4l+2)}{4}\right\rfloor=8l^2+12l+4=\frac{1}{2}n(n+2)\ 。$$

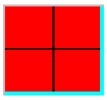
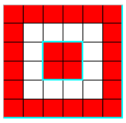
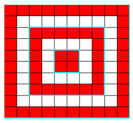
得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 SV-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 4|n，$n=4l, l\in \mathrm{N}$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;2)=\dfrac{1}{2}n(n+2)=2(k^2+k)$ 。

		
MC$\text{MC}_{\text{SV-4}}(4;2)\equiv 12$	$\text{MC}_{\text{SV-4}}(8;2)\equiv 40$	$\text{MC}_{\text{SV-4}}(12;2)\equiv 84$

(二) 當 n≡2(mod 4)：$n=2$ 特例；$n=4l+2, l\in \mathrm{N}$ 時：歸納得到

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{SV-4}}(n;2)=\frac{1}{2}n(n+2)=2(k^2+k)$$ 。

		
$\text{MC}_{\text{SV-4}}(2;2)\equiv 4$ (特例)	$\text{MC}_{\text{SV-4}}(6;2)\equiv 24$	$\text{MC}_{\text{SV-4}}(10;2)\equiv 60$

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

研究 2.2 **在 SC-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 2 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為**

$$\begin{aligned}\mathrm{MC}_{\mathrm{SC-4}}(n;2)&=\frac{1}{2}(n+1)^2-1=2k^2-1, \forall n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4), n=2k-1, k\in \mathrm{N};\\ \mathrm{MC}_{\mathrm{SC-4}}(n;2)&=\frac{1}{2}(n+1)^2-2=2k^2-2, \forall n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4), n=2k-1, k\in \mathrm{N}\end{aligned}$$ 。

證明 與研究 2.1 SV-4 的塗色格子數可能上界證明相同：

(一) 當 n≡1(mod 4)，$n=4l+1, l\in \mathrm{N}$ 時：用 $n=4l+1$ 代入 $4a+4b+4c\le 2n^2+4n$，

下取整數得：$a+b+c\le\left\lfloor\dfrac{(4l+1)^2\times 2+4\times(4l+1)}{4}\right\rfloor=8l^2+8l+1=\dfrac{1}{2}(n+1)^2-1$ 。

(二) 當 n≡3(mod 4)，$n=4l+3, l\in \mathrm{N}$ 時：用 $n=4l+3$ 代入，下取整數得：

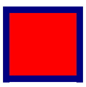
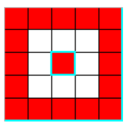
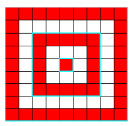
$$a+b+c\le\left\lfloor\frac{(4l+3)^2\times 2+4\times(4l+3)}{4}\right\rfloor=8l^2+16l+7=\frac{1}{2}(n+1)^2-1$$ 。

然而，觀察 $n=3$ 的塗色情況，若所有格子都先給予塗色，則有四個邊上的格子相鄰有三個紅格子，故須將正中心的格子改為不塗色、且四周的四個紅格子至少須選擇二格改為不塗色，因此知道與上式解析結果發生實質矛盾，故實際上存在的上界應再減少一格，為 $\frac{1}{2}(n+1)^2-2$ 。

得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 SC-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

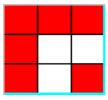
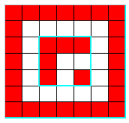
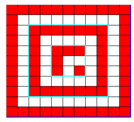
(一) 當 n≡1(mod 4)：$n=1$ 特例；$n=4l+1, l\in \mathrm{N}$ 時：歸納得到：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{SC-4}}(n;2)=\frac{1}{2}(n+1)^2-1=2k^2-1$$ 。

		
$\text{MC}_{\text{SC-4}}(1;2)\equiv 1$ (特例)	$\text{MC}_{\text{SC-4}}(5;2)\equiv 17$	$\text{MC}_{\text{SC-4}}(9;2)\equiv 49$

(二) 當 n≡3(mod 4)： $n=3$ 特例； $n=4l+3, l\in\mathrm{N}$ 時：歸納得到：

$$MC_{SC-4}(n;2)=\frac{1}{2}(n+1)^2-2=2k^2-2 \text{ 。}$$

		
MC$_{SC-4}$(3; 2)=6 (特例)	MC$_{SC-4}$(7; 2)=30	MC$_{SC-4}$(11; 2)=70

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

五、 研究三：**探討 MC$_{SV-4}$(n; 3)、MC$_{SC-4}$(n; 3)存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。**

研究 3.1 在 SV-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 3 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $MC_{SV-4}(n;3)=\frac{1}{4}(3n^2+2n)=3k^2+k, \forall n=2k, k\in\mathrm{N}$ 。

證明 雖然與任一格相鄰的格子最多可被塗色三格(賦值註記為 3)，但經過分析此塗色方式無法實質存在。當邊長 $n\geq 6$ 時，若在邊長 $n-2$ 的內層全部賦值註記為 3 的塗色方式，則最外層格子塗色結果賦值註記總和至少需減除 $2(n-2)$，且因四個角落的格子僅可能與 2 個被塗色的格子相鄰，最多可被賦值註記總和為 4。另一方面，假若最外層四個角落的塗色採用賦值註記總和為 2 的方式、其他格子皆滿足賦值註記為 3，則在邊長 $n-6$ 的內層至少會出現 $2(n-2)$ 個註記為 2 的不能塗色格子，故得知賦值註記總和的最大值 $3n^2-2(n-2)-4$ 。與研究 1.1 SV-4 的塗色格子數可能上界證明類似，整理得式(8)和式(9)式(10)：

$$2a+3b+4c\leq 3n^2-2(n-2)-4 \qquad (8)$$

$$a+b\leq 4(n-1) \qquad (9)$$

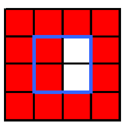
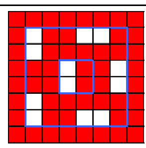
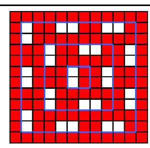
$$a\leq 4 \qquad (10)$$

將式(8)、式(9)和式(10)相加，得

$$a+b+c\leq\frac{1}{4}(3n^2+2n) \qquad (11)$$

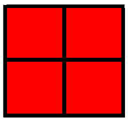
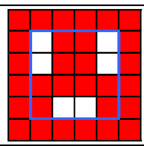
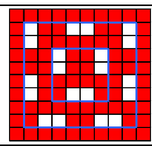
當 4|n， $n=4l, l\in\mathrm{N}$ 、或當 n≡2(mod 4)， $n=4l+2, l\in\mathrm{N}$ 時，用 $n=4l$ 及 $n=4l+2$ 代入式(11)，下取整數得： $MC_{SV-4}(n;3)\leq\frac{1}{4}(3n^2+2n)$，得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 SV-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 4|n， $n=4l, l\in\mathrm{N}$ 時：歸納得到： $MC_{SV-4}(n;3)=\frac{1}{4}(3n^2+2n)=3k^2+k$ 。

		
MC$_{SV-4}$(4; 3)=14	MC$_{SV-4}$(8; 3)=52	MC$_{SV-4}$(12; 3)=114

(二) 當 n≡2(mod 4)： $n=2$ 特例； $n=4l+2, l\in\mathrm{N}$ 時：歸納得到：

$$MC_{SV-4}(n;3)=\frac{1}{4}(3n^2+2n)=3k^2+k \text{ 。}$$

		
$MC_{SV\text{-}4}(2;3)$=4 (特例)	$MC_{SV\text{-}4}(6;3)$=30	$MC_{SV\text{-}4}(10;3)$=80

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

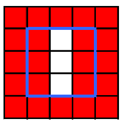
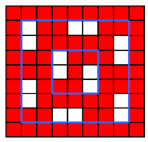
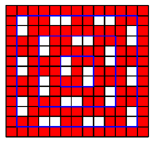
研究 3.2 **在 SC-4 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 3 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為**

$$MC_{SC-4}(n;3)=\frac{1}{4}(3n^2+2n-1)=3k^2-2k, \forall n=2k-1, n\neq 5, k\in\mathrm{N}\text{ 。}$$

證明 與研究 3.2 的證明類似，當 n≡1(mod 4)，$n=4l+1, l\in\mathrm{N}$、或當 n≡3(mod 4)，$n=4l+3, l\in\mathrm{N}$ 時，用 $n=4l+1$ 及 $n=4l+3$ 代入式(11)，下取整數得：$MC_{SC-4}(n;3)\leq\frac{1}{4}\left(3n^2+2n-1\right)$，得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 SC-4 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

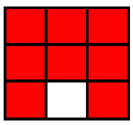
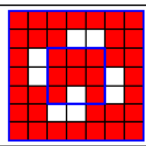
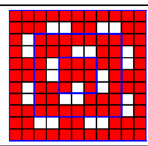
(一) 當 n≡1(mod 4)：$n=1$ 特例；$n=5$ 例外；$n=4l+1, l\geq 2, l\in\mathrm{N}$ 時：歸納得到：

$$MC_{SC-4}(n;3)=\frac{1}{4}\left(3n^2+2n-1\right)=3k^2-2k\text{ 。}$$

		
$MC_{SC\text{-}4}(5;3)$=22 (例外)	$MC_{SC\text{-}4}(9;3)$=65	$MC_{SC\text{-}4}(13;3)$=133

(二) 當 n≡3(mod 4)：$n=3$ 特例；$n=4l+3, l\in\mathrm{N}$ 時：歸納得到：

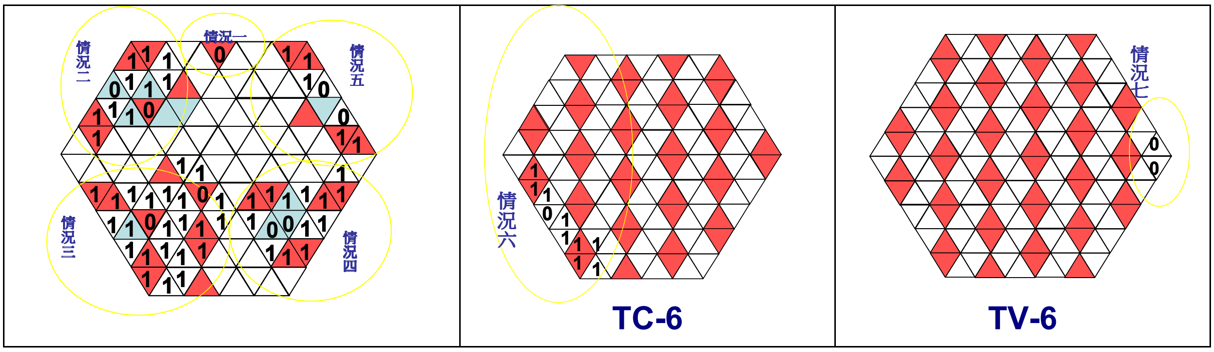
$$MC_{SC-4}(n;3)=\frac{1}{4}\left(3n^2+2n-1\right)=3k^2-2k\text{ 。}$$

		
$MC_{SC\text{-}4}(3;3)$=8 (特例)	$MC_{SC\text{-}4}(7;3)$=40	$MC_{SC\text{-}4}(11;3)$=96

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

六、研究四：探討 $MC_{TV\text{-}6}(n;1)$、$MC_{TC\text{-}6}(n;1)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

邊線塗色解析 在 TV-6、TC-6 中，邊線上格子的塗色共可區分成下列七種情況進行分析：**(藍色表示不能被塗色的格子；與一格紅色格子相鄰者賦值註記為 1；未與紅色格子相鄰其不論是否塗色賦值註記為 0)**



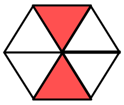
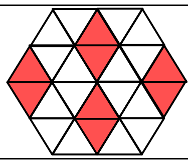
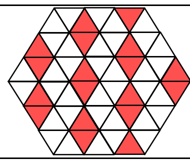
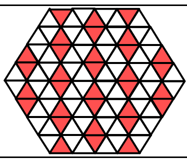
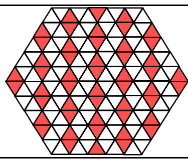
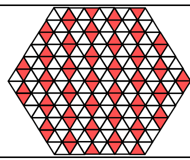
情況一：紅色格子兩格相鄰(賦值註記為 1)後至少需間隔兩格(含)以上無法被塗色，且紅色格子無法再與紅色格子相鄰者賦值註記為 0。情況二及情況三：鑲嵌邊上若連續兩格塗色間隔三格不塗色的格子，會產生兩格賦值註記為 0。情況四：於間隔兩格不塗色格子，內部至少產生兩格賦值註記為 0 的不能塗色格子。情況五：於間隔四格不塗色格子於邊線上出現兩格賦值註記為 0。情況六：TC-6 於邊線上只出現一格賦值註記為 0。情況七：TV-6 若與情況六相同則於邊線角落上出現二格賦值註記為 0。綜合以上各種情況，在不同的塗色配置組合下，經過演繹推知在 $k \ge 3$ 時：

(一) 在 TV-6 中，必出現至少與邊線上塗色格子數相同被賦值註記為 0 的格子。

(二) 在 TC-6 中，必出現至少比邊線上塗色格子數少 2 被賦值註記為 0 的格子。

研究 4.1 **在 TV-6 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(n;1) = \frac{1}{2}n^2 = 2k^2, \forall n = 2k, k \in \mathrm{N}$ 。**

證明 假設塗色的格子中有 b 個位於邊線(含角落)上、 c 個位於鑲嵌內部，則與這些格子相鄰可被賦值註記的總和共有 $2b+3c$ 個。從前述演繹分析結果得知：「必出現至少與邊線上塗色格子數相同被賦值註記為 0 的格子」。因此得到 $2b+3c \le 6k^2 - b$，故知 $b+c \le 2k^2$，即 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(n;1) \le 2k^2 = \frac{1}{2}n^2$，得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 TV-6 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解，區分成下列三組：

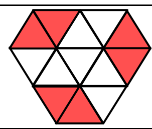
		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(2;1)$=2 (特例)	$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(4;1)$=8 (特例)	$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(6;1)$=18
		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(8;1)$=32	$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(10;1)$=50	$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(12;1)$=72

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(n;1) = 2k^2 = \frac{1}{2}n^2$，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

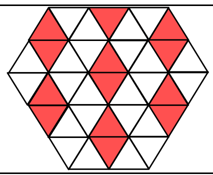
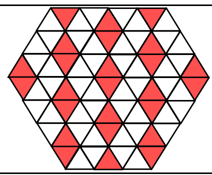
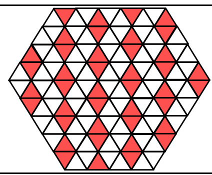
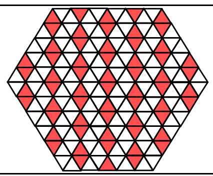
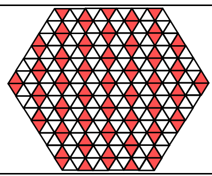
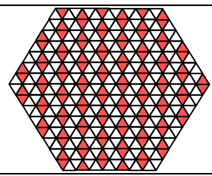
研究 4.2 在 TC-6 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TC-6}}(n;1)=\frac{1}{2}(n^2+1)=2k^2-2k+1, \forall n=2k-1, n\neq 3, k\in\mathrm{N}$ 。

證明 類似研究 4.1 的證明，從前述演繹分析結果得知：「必出現至少比邊線上塗色格子數少 2 被賦值註記為 0 的格子」。因此得到 $2b+3c\leq(6k^2-6k+1)-(b-2)$ ，故知 $b+c\leq 2k^2-2k+1$ ，即 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TC-6}}(n;1)\leq 2k^2-2k+1=\frac{1}{2}(n^2+1)$ ，得證塗色格子數的可能上界。現在，建構 TC-6 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 $k\leq 2$ 時：

	
MC$_{\mathrm{TC-6}}$(1; 1)=1 (特例)	MC$_{\mathrm{TC-6}}$(3; 1)=6 (例外)

(二) 當 $k\geq 3$ 時，區分成下列三組：

		
MC$_{\mathrm{TC-6}}$(5; 1)=13	MC$_{\mathrm{TC-6}}$(7; 1)=25	MC$_{\mathrm{TC-6}}$(9; 1)=41
		
MC$_{\mathrm{TC-6}}$(11; 1)=61	MC$_{\mathrm{TC-6}}$(13; 1)=85	MC$_{\mathrm{TC-6}}$(15; 1)=113

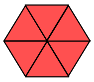
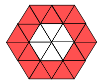
透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TC-6}}(n;1)=2k^2-2k+1=\frac{1}{2}(n^2+1)$ ，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

七、研究五：探討 MC$_{\mathrm{TV-6}}$(n; 2)、MC$_{\mathrm{TC-6}}$(n; 2)存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

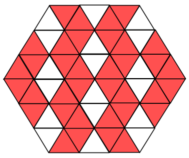
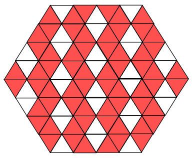
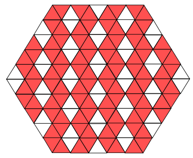
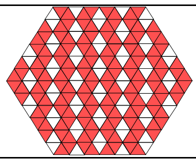
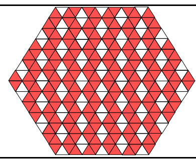
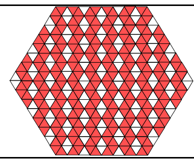
研究 5.1 在 TV-6 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 2 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV-6}}(n;2)=n^2=4k^2, \forall n=2k, n\neq 2,4, k\in\mathrm{N}$ 。

證明 雖然邊線及角落的格子均可塗色，但將導致在邊長 $n-2$ 的內層格子均不可塗色，故顯見所有格子均至少與一格未塗色格子相鄰。應用研究 4.1 的證明，易得當 $k\geq 3$ 時，其塗色格子數的可能上界為格子總數減去研究 4.1 塗色格子數，亦即： $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV-6}}(n;2)\leq 6k^2-2k^2=4k^2=n^2$ 。現在，建構 TV-6 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 $k\leq 2$ 時：

	
$MC_{TV\text{-}6}(2;\ 2)=6$ (例外)	$MC_{TV\text{-}6}(4;\ 2)=18$ (例外)

(二) 當 $k \geq 3$ 時，區分成下列三組：

		
$MC_{TV\text{-}6}(6;\ 2)=36$	$MC_{TV\text{-}6}(8;\ 2)=64$	$MC_{TV\text{-}6}(10;\ 2)=100$
		
$MC_{TV\text{-}6}(12;\ 2)=144$	$MC_{TV\text{-}6}(14;\ 2)=196$	$MC_{TV\text{-}6}(16;\ 2)=256$

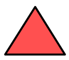
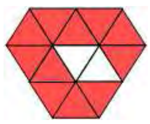
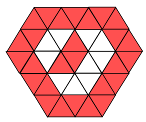
透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TV}-6}(n;2)=4k^2=n^2$ ，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

研究 5.2 **在 TC-6 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 2 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為**

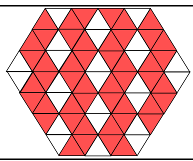
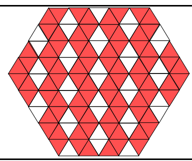
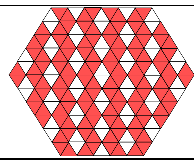
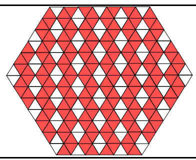
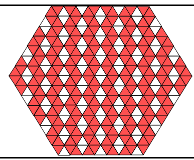
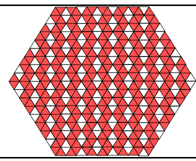
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{TC}-6}(n;2)=n^2-1=4(k^2-k),\ \forall n=2k-1,\ n\neq 1,3,5,\ k\in N$$ 。

證明 類似研究 5.1 的證明，當 $k>3$ 時其塗色格子數的可能上界為格子總數減去研究 4.2 塗色格子數，亦即：$\mathrm{MC}_{\mathrm{TC}-6}(n;2)\leq(6k^2-6k+1)-(2k^2-2k+1)=4(k^2-k)$ 。現在，建構 TC-6 最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 $k \leq 3$ 時：

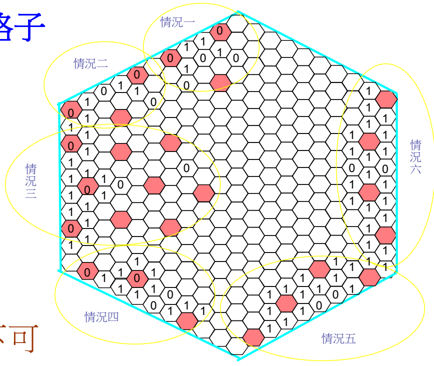
		
$MC_{TC\text{-}6}(1;\ 2)=1$ (例外)	$MC_{TC\text{-}6}(3;\ 2)=11$ (例外)	$MC_{TC\text{-}6}(5;\ 2)=27$ (例外)

(二) 當 $k>3$ 時，區分成下列三組：

		
$MC_{TC\text{-}6}(7;\ 2)=48$	$MC_{TC\text{-}6}(9;\ 2)=80$	$MC_{TC\text{-}6}(11;\ 2)=120$
		
$MC_{TC\text{-}6}(13;\ 2)=168$	$MC_{TC\text{-}6}(15;\ 2)=224$	$MC_{TC\text{-}6}(17;\ 2)=288$

透過建構塗色結果，歸納其被塗色格子總數的方程式，得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{TC-6}}(n;2)=4(k^2-k)=n^2-1$，與前述塗色格子數的可能上界相同得證。

八、研究六：探討 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(n;1)$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(n;1)$ 存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。



邊線塗色解析 在 HV-3、HC-3 中，$k\geq 7$ 時其邊線上格子的塗色情況共可區分成右列六種情況進行分析(與一格紅色格子相鄰者賦值註記為 1；未與紅色格子相鄰其不論是否塗色賦值註記為 0)：

(一) 正六邊形格子若被塗色，則與其相鄰的任何格子皆不可塗色，故該塗色格子註記為 0。

(二) 情況一至情況六分別討論邊線上兩端的格子被塗上紅色，中間夾著 2~7 個不塗色格子的賦值註記情形。圖中，可觀察到無論紅格子間夾著多少個不塗色格子，都至少會產生 2 個(含)以上註記為 0、無論是否被塗色的格子。

研究 6.1 在 HV-3 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

(一) 當 $n=2k,\ k\geq 7,\ k\in\mathrm{N}$ 時：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2)=\frac{1}{7}(3k^2),\ \forall n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+16)=\frac{1}{7}(3k^2+4),\ \forall n\equiv 2\ or\ 5\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+36)=\frac{1}{7}(3k^2+9),\ \forall n\equiv 3\ or\ 4\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+4)=\frac{1}{7}(3k^2+1),\ \forall n\equiv 1\ or\ 6\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

。

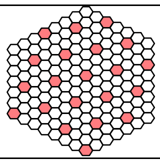
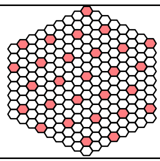
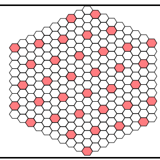
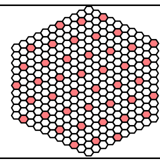
(二) 當 $n=2k,\ k<7,\ k\in\mathrm{N}$ 時：

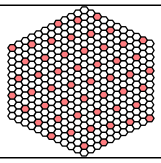
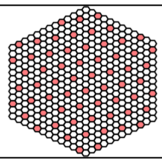
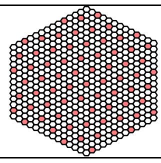
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n)=\frac{1}{3}(k^2+2k),\ \forall n\equiv 0\ or\ 2(\mathrm{mod}\ 3)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{12}(n+2)^2=\frac{1}{3}(k+1)^2,\ \forall n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$$

。

證明 $k\geq 7$ 時可以忽略邊線上(含角落)格子的不同塗色配置策略影響，採取使鑲嵌內部產生最大塗色格子數的方式，並控制塗色配置起始相對位置，分別歸納求取存在的最大塗色格子數如下表及塗色舉例(不同 k 值，出現較大塗色格子數量的塗色起始相對位置於表中以淺黃底色顯示)：

			
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(14;1)\equiv 21$; $k=7l$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(16;1)\equiv 28$; $k=7l+1$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(18;1)\equiv 36$; $k=7l+2$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(20;1)\equiv 43$; $k=7l+3$

			
MC$_{HV-3}$(22; 1)≡52; $k=7l+4$	MC$_{HV-3}$(24; 1)≡63; $k=7l+5$	MC$_{HV-3}$(26; 1)≡73; $k=7l+6$	

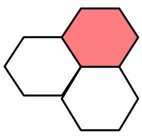
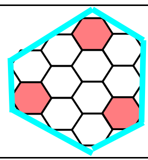
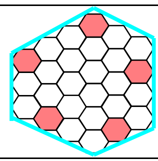
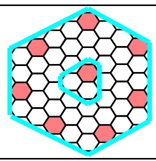
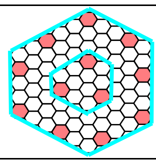
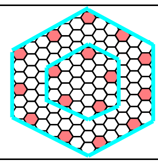
起始相對位置	$k=7l$	$k=7l+1$	$k=7l+2$	$k=7l+3$	$k=7l+4$	$k=7l+5$	$k=7l+6$
正上方	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$
右偏一	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$	$\frac{3k^2+9}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$
右偏二	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+9}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$
右偏三	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$
右偏四	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2-6}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$
右偏五	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2+4}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$
右偏六	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$	$\frac{3k^2+2}{7}$	$\frac{3k^2-6}{7}$	$\frac{3k^2+1}{7}$	$\frac{3k^2-5}{7}$	$\frac{3k^2-3}{7}$

當 $k<7$ $(n<14)$時，採取使邊線上(含角落)的格子可獲得最大塗色效益的方法，區分下列三組建構最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 $\frac{n}{2}=k=3l+1,\ l=0,1$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n)=\frac{1}{3}\left(k^2+2k\right)$。

(二) 當 $\frac{n}{2}=k=3l+2,\ l=0,1$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{12}(n+2)^2=\frac{1}{3}(k+1)^2$。

(三) 當 $\frac{n}{2}=k=3l,\ l=1,2$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n)=\frac{1}{3}\left(k^2+2k\right)$。

		
MC$_{HV-3}$(2; 1)≡1 (特例)	MC$_{HV-3}$(4; 1)≡3 (特例)	MC$_{HV-3}$(6; 1)≡5
		
MC$_{HV-3}$(8; 1)≡8	MC$_{HV-3}$(10; 1)≡12	MC$_{HV-3}$(12; 1)≡16

研究 6.2 **在 HC-3 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 1 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：**

(一) 當 $n=2k-1, k\ge 7, k\in \mathrm{N}$ 時：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+49)=\frac{1}{7}(3k^2-3k+13),\ \forall n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+9)=\frac{1}{7}(3k^2-3k+3),\ \forall n\equiv 2\ or\ 5\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+1)=\frac{1}{7}(3k^2-3k+1),\ \forall n\equiv 3\ or\ 4\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{28}(3n^2+25)=\frac{1}{7}(3k^2-3k+7),\ \forall n\equiv 1\ or\ 6\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

。

(二) 當 $n=2k-1, k<7, k\in \mathrm{N}$ 時：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n+7)=\frac{1}{3}(k^2+k+1),\ \forall n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$$

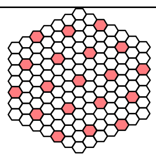
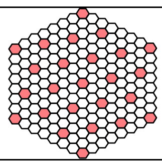
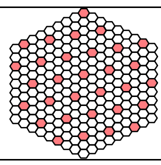
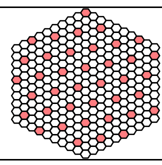
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n+3)=\frac{1}{3}(k^2+k),\ \forall n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$$

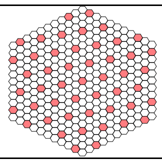
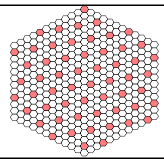
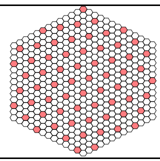
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;1)=\frac{1}{12}(n^2+4n-9)=\frac{1}{3}(k^2+k-3),\ \forall n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$$

。

證明 類似研究 6.1 的證明，$k\ge 7$ 時歸納求取存在的最大塗色格子數舉例如下表：

起始相對位置	$k=7l$	$k=7l+1$	$k=7l+2$	$k=7l+3$	$k=7l+4$	$k=7l+5$	$k=7l+6$
正上方	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+7}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏一	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+13}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏二	$\frac{3k^2-3k+7}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏三	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k-11}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏四	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏五	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$
右偏六	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k-1}{7}$	$\frac{3k^2-3k+3}{7}$	$\frac{3k^2-3k+1}{7}$

			
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}\text{-}3}(13;1)\equiv 19$; $k=7l$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}\text{-}3}(15;1)\equiv 25$; $k=7l+1$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}\text{-}3}(17;1)\equiv 31$; $k=7l+2$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}\text{-}3}(19;1)\equiv 39$; $k=7l+3$

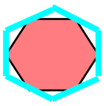
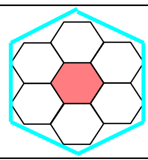
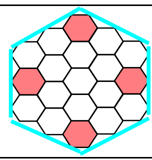
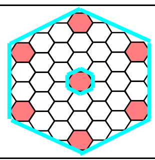
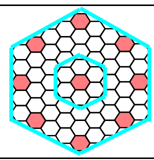
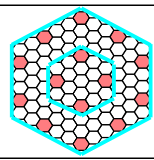
			
$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(21;\ 1)\equiv 49;$ $k=7l+4$	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(23;\ 1)\equiv 57;$ $k=7l+5$	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(25;\ 1)\equiv 67;$ $k=7l+6$	

當 $k<7$ （$n<13$）時，採取使邊線上(含角落)的格子可獲得最大塗色效益的方法，區分下列三組建構最大塗色格子數解存在的塗色方式求解：

(一) 當 $k=\dfrac{n+1}{2}=3l+1,\ l=0,1$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;1)=\dfrac{1}{12}(n^2+4n+7)=\dfrac{1}{3}\left(k^2+k+1\right)$。

(二) 當 $k=\dfrac{n+1}{2}=3l+2,\ l=0,1$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;1)=\dfrac{1}{12}(n^2+4n-9)=\dfrac{1}{3}\left(k^2+k-3\right)$。

(三) 當 $k=\dfrac{n+1}{2}=3l,\ l=1,2$ 時：歸納得到 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;1)=\dfrac{1}{12}(n^2+4n+3)=\dfrac{1}{3}\left(k^2+k\right)$。

		
$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(1;\ 1)\equiv 1$ (特例)	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(3;\ 1)\equiv 1$ (特例)	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(5;\ 1)\equiv 4$
		
$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(7;\ 1)\equiv 7$	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(9;\ 1)\equiv 9$	$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(11;\ 1)\equiv 14$

九、研究七：探討 $\mathrm{MC_{HV\text{-}3}}(n;\ 2)$、$\mathrm{MC_{HC\text{-}3}}(n;\ 2)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

研究 7.1 **在 HV-3 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 2 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：**

(一) 當 $n=2k,\ k\geq 4,\ k\in\mathrm{N}$ 時(例外：$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(12;2)=39$)：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;2)=\frac{1}{12}(3n^2+2n)=\frac{1}{3}(3k^2+k),\ \forall n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n\neq 12$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;2)=\frac{1}{12}(3n^2+4n-4)=\frac{1}{3}(3k^2+2k-1),\ \forall n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)\ 。$$

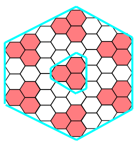
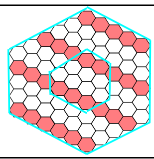
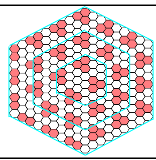
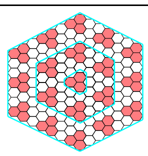
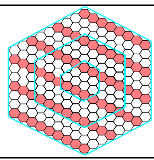
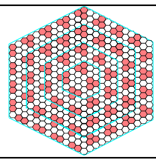
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;2)=\frac{1}{4}(n^2+2n+4)=k^2+k+1,\ \forall n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$$

(二) 當 $n=2k,\ k<4,\ k\in\mathrm{N}$ 時：$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(2;2)=3$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(4;2)=6$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(6;2)=12$。

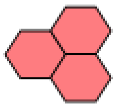
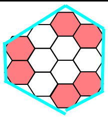
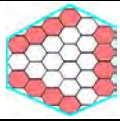
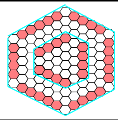
證明 令與 2 格紅色格子相鄰者賦值註記為 2；與 1 格紅色格子相鄰者賦值註記為 1；未與紅色格子相鄰其不論是否塗色賦值註記為 0，且邊線上(不含角落)的每個格子可影響相鄰 4 格的賦值註記、角落的格子可影響相鄰 3 格的賦值註記。假設在 HV-3 中內部格子採取最有效率的方式塗色(亦即內部沒有賦值註記為 0 的情況，惟塗色方法非唯一，實際的塗色鑲嵌內部可能有賦值註記為 0，但最外層的塗色格子數因此上升)，則當 $k\geq 4$：

項次	格子總數	賦值上界	個別塗色格數上界
當 $\frac{n}{2}=k=3l+1, l\in \mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-1)$	總和： $2\times3\times(2k-1)$ 扣除角落塗色： 3×6	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{1}{4}(12k-24)+6=3k$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2$	$2\times3(k-1)^2$	$(k-1)^2$
塗色格數上界	此種情形，每格均賦值為 2		k^2+k+1
當 $\frac{n}{2}=k=3l+2, l\in \mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-1)$	總和： $2\times3\times(2k-1)$ 扣除邊線賦值至少減少： $(4k-4l)$ 扣除角落塗色： 3×4 內部不塗、優先邊上塗色： $6\times(2l+1)$	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{1}{4}((6\times(2k-1))-12-(4k-4l)+6\times(2l+1))+4$ $=2k+4l+1$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2$	$2\times3(k-1)^2$	扣除內部不塗格子： $(2l+1)$ $(k-1)^2-(2l+1)$
塗色格數上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2+2k-1)$
當 $\frac{n}{2}=k=3l, l\in \mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-1)$	總和： $2\times3\times(2k-1)$ 扣除邊線賦值至少減少： $(3k+l)$ 扣除角落塗色： 3×2 內部不塗、優先邊上塗色 $6\times l$	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{1}{4}((6\times(2k-1))-6-(3k+l)+6l))+2$ $=(8l-3)+2=8l-1$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2$	$2\times3(k-1)^2$	扣除內部不塗格子： l $(k-1)^2-l$
塗色格數上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2+k)$

其中，當 $n=12$ 時因受外框邊線效應影響，其上界為例外。建構塗色結果舉例如下，並歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證：

		
$MC_{HV\text{-}3}(8;2)=21$	$MC_{HV\text{-}3}(10;2)=28$	$MC_{HV\text{-}3}(18;2)=84$
		
$MC_{HV\text{-}3}(14;2)=57$	$MC_{HV\text{-}3}(16;2)=69$	$MC_{HV\text{-}3}(24;2)=148$

當 $k<4$ 及 $n=12$：

			
$MC_{HV\text{-}3}(2;2)\equiv 3$ (特例)	$MC_{HV\text{-}3}(4;2)\equiv 6$ (特例)	$MC_{HV\text{-}3}(6;2)\equiv 12$ (特例)	$MC_{HV\text{-}3}(12;2)\equiv 39$ (例外)

研究 7.2 在 **HC-3** 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 **2** 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

(一) 當 $n=2k-1,\ k\geq 4,\ k\in\mathrm{N}$ 時(例外：$MC_{HC-3}(11;2)=33$)：

$$MC_{HC-3}(n;2)=\frac{1}{12}(3n^2+2n+15)=\frac{1}{3}(3k^2-2k+4),\ \forall n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$MC_{HC-3}(n;2)=\frac{1}{12}(3n^2+4n+5)=\frac{1}{3}(3k^2-k+1),\ \forall n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$$ 。

$$MC_{HC-3}(n;2)=\frac{1}{12}(3n^2+2n-1)=\frac{1}{3}(3k^2-2k),\ \forall n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n\neq 11$$

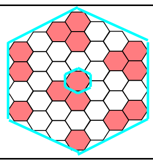
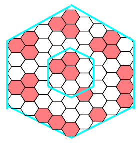
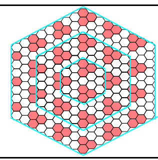
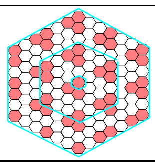
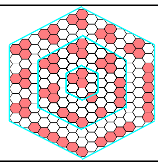
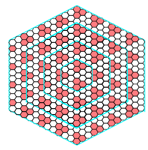
(二) 當 $n=2k-1,\ k<4,\ k\in\mathrm{N}$ 時：$MC_{HC-3}(1;2)=1$、$MC_{HC-3}(3;2)=3$、$MC_{HC-3}(5;2)=9$。

證明 令賦值註記規則同研究 7.1 證明，假設在 HC-3 中內部格子採取最有效率的方式塗色，則當 $k\geq 4$：

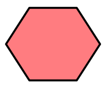
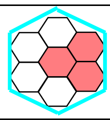
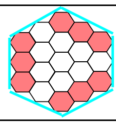
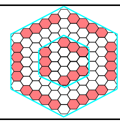
項次	格子總數	賦值上界	個別塗色格數上界
當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+1,\ l\in\mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-2)$	總和：$2\times 3\times(2k-2)$ 扣除邊線賦值至少減少：$2k+2l$ 扣除角落塗色：3×6 內部不塗、優先邊上塗色：$6\times(2l-1)$	(邊線+角落)塗色格子(含補回內部賦值剩餘塗色格子=2)： $\frac{[6(2k\text{-}2)-2(k+l)\text{-}18+2+6(2l\text{-}1)]}{4}+6$ 下取整數：$10l$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2-3(k-1)+1$	$6k^2-18k+14$ 內部賦值剩餘：2	扣除內部不塗格子：$(2l-1)$ $\frac{1}{6}(6k^2-18k+12)-(2l-1)$
塗色格數上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2-k+1)$
當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+2,\ l\in\mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-2)$	總和：$2\times 3\times(2k-2)$ 扣除邊線賦值減少：$(3k-l-4)$ 扣除角落塗色：3×4	(邊線+角落)塗色格子(含補回內部賦值剩餘塗色格子=2)： $\frac{[6(2k\text{-}2)-(3k-l-4)\text{-}12+2]}{4}+2$ 下取整數：$7l+4$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2-3(k-1)+1$	$6k^2-18k+14$ 內部賦值剩餘：2	$\frac{1}{6}(6k^2-18k+12)$
塗色格數上界	優先邊上塗色，產生內部賦值總和減少		$\frac{1}{3}(3k^2-2k+4)$

項次	格子總數	賦值上界	個別塗色格數上界
當 $k=\dfrac{n+1}{2}=3l, l\in \mathrm{N}$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3\times(2k-2)$	總和： $2\times3\times(2k-2)$ 扣除邊線賦值減少： $(3k-l)$ 扣除角落塗色： 3×2	(邊線+角落)塗色格子(含補回內部賦值剩餘塗色格子=2)： $[6(2k-2)-(3k-l)-6+2]\div4+2$ $=7l-2$
$k-1$ 層鑲嵌內部	$3(k-1)^2-3(k-1)+1$	$6k^2-18k+14$ 內部賦值剩餘：2	$\dfrac{1}{6}(6k^2-18k+12)$
塗色格數上界	優先邊上塗色，產生內部賦值總和減少		$\dfrac{1}{3}(3k^2-2k)$

其中，當 $n=11$ 時因受外框邊線效應影響，其上界為例外。建構塗色結果舉例如下，並歸納其被塗色格子總數的方程式，與前述塗色格子數的可能上界相同得證：

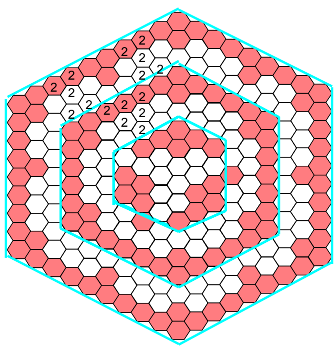
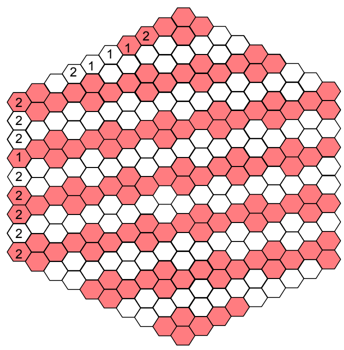
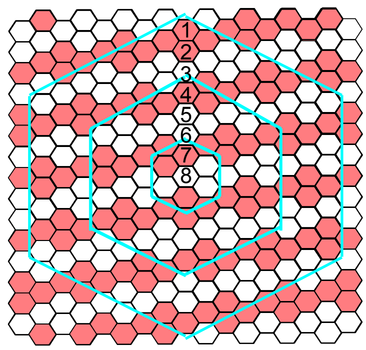
		
$MC_{HC\text{-}3}(7;2)\equiv15$	$MC_{HC\text{-}3}(9;2)\equiv23$	$MC_{HC\text{-}3}(17;2)\equiv75$
		
$MC_{HC\text{-}3}(13;2)\equiv47$	$MC_{HC\text{-}3}(15;2)\equiv60$	$MC_{HC\text{-}3}(23;2)\equiv136$

當 $k<4$ 及 $n=11$：

			
$MC_{HC\text{-}3}(1;2)\equiv1$ (特例)	$MC_{HC\text{-}3}(3;2)\equiv3$ (特例)	$MC_{HC\text{-}3}(5;2)\equiv9$ (特例)	$MC_{HC\text{-}3}(11;2)\equiv33$ (例外)

十、研究八：探討 $MC_{HV\text{-}3}(n;3)$、$MC_{HC\text{-}3}(n;3)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

邊線塗色解析 $k\geq9$ 時：由下方左邊二圖得知，當 $n\to\infty$ 時可忽略外框邊線塗色效應，故採取使鑲嵌內部不產生賦值註記為 0，建構如下圖塗色起始位置代碼 1 至代碼 8 等八個為週期的塗色循環規律，歸納各個情況的塗色數量加以比較，即可找出最大值。

研究 8.1 在 **HV-3** 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 **3** 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

(一) 當 $n = 2k, k \ge 9, k \in \mathrm{N}$ 時：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;3) = \frac{1}{8}(3n^2+12) = \frac{1}{2}(3k^2+3),\ \forall k \equiv 1\ or\ 3\ or\ 5\ or\ 7\ (\mathrm{mod}\ 8)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;3) = \frac{1}{8}(3n^2+8) = \frac{1}{2}(3k^2+2),\ \forall k \equiv 2\ or\ 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;3) = \frac{1}{8}(3n^2+16) = \frac{1}{2}(3k^2+4),\ \forall k \equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$$

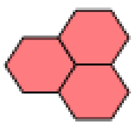
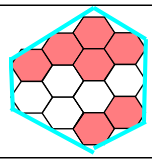
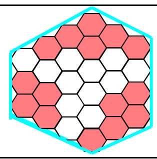
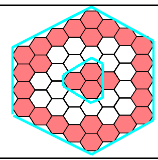
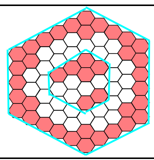
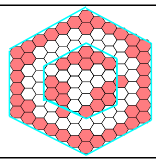
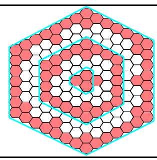
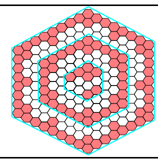
$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;3) = \frac{1}{8}(3n^2) = \frac{1}{2}(3k^2),\ \forall k \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8)$$

(二) 當 $n = 2k, k < 9, k \in \mathrm{N}$ 時：$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(2;3) = 3$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(4;3) = 7$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(6;3) = 15$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(8;3) = 28$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(10;3) = 40$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(12;3) = 56$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(14;3) = 76$ 、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(16;3) = 97$ 。

證明 當 $k \ge 9$ 時運用前述上方右圖的塗色配置策略，分析塗色起始位置代碼 1 至代碼 8，八個為一週期循環的所有塗色情況進行比較，歸納如下表，塗色格子數較多的結果以淺黃底色顯示。

起始相對位置	$k=8l$	$k=8l+1$	$k=8l+2$	$k=8l+3$	$k=8l+4$	$k=8l+5$	$k=8l+6$	$k=8l+7$
代碼 1	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+3)$	$\frac{1}{2}(3k^2+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+3)$	$\frac{1}{2}(3k^2+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$
代碼 2	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2-4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$
代碼 3	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+3)$	$\frac{1}{2}(3k^2+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+3)$
代碼 4	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$
代碼 5	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3)$	$\frac{1}{2}(3k^2-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3)$	$\frac{1}{2}(3k^2-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$
代碼 6	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$
代碼 7	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3)$	$\frac{1}{2}(3k^2-4)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3)$
代碼 8	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-1)$	$\frac{1}{2}(3k^2-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2+1)$

當 $k < 9$ 時：

			
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(2;3)=3$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(4;3)=7$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(6;3)=15$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(8;3)=28$
			
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(10;3)=40$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(12;3)=56$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(14;3)=76$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(16;3)=97$

研究 8.2 在 **HC-3** 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 **3** 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

(一) 當 $n=2k-1, k\geq 9, k\in \mathrm{N}$ 時：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;3)=\frac{1}{8}(3n^2+5)=\frac{1}{2}(3k^2-3k+2), \forall k\neq 3 \text{ or } 6 \pmod 8$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;3)=\frac{1}{8}(3n^2+13)=\frac{1}{2}(3k^2-3k+4), \forall k\equiv 3 \text{ or } 6 \pmod 8$$

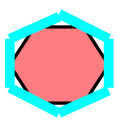
。

(二) 當 $n=2k-1, k<9, k\in \mathrm{N}$ 時：$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(1;3)=1$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(3;3)=4$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(5;3)=12$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(7;3)=21$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(9;3)=34$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(11;3)=48$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(13;3)=65$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(15;3)=88$。

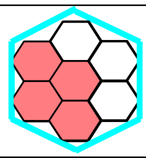
證明 類似研究 8.1 的證明，歸納如下表，塗色格子數較多的結果以淺黃底色顯示。

起始相對位置	$k=8l$	$k=8l+1$	$k=8l+2$	$k=8l+3$	$k=8l+4$	$k=8l+5$	$k=8l+6$	$k=8l+7$
代碼 1	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$
代碼 2	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$
代碼 3	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$
代碼 4	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$
代碼 5	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$
代碼 6	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$
代碼 7	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k-2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$
代碼 8	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+2)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k+4)$	$\frac{1}{2}(3k^2-3k)$

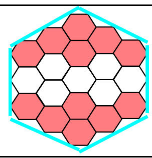
當 $k<9$ 時：



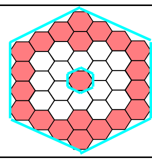
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(1;3)=1$



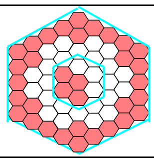
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(3;3)=4$



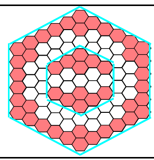
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(5;3)=12$



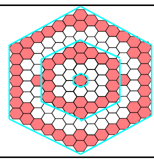
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(7;3)=21$



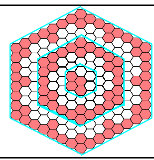
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(9;3)=34$



$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(11;3)=48$



$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(13;3)=65$



$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(15;3)=88$

十一、 研究九：探討 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}(n;4)$、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}(n;4)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

研究 9.1 在 **HV-3** 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 **4** 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;4)=\frac{1}{2}(n^2+n)=2k^2+k, \forall n=2k, k\equiv 0 \text{ or } 1 \pmod 3, k\in \mathrm{N}$$ 。

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;4)=\frac{1}{2}(n^2+n-2)=2k^2+k-1,\ \forall n=2k,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}$$

證明 $k\geq 4$時以每三層一個區塊，因最外面一層的格子皆可塗色，鑲嵌內部與六個角落塗色格子每格要相鄰至少 2 個不塗色格子。經分析每三層一個區塊、每區塊的第二層每個角落需特別增加不塗色格子，即每個角落賦值多 3，最內一個區塊格數較小需略作調整。設鑲嵌內部共存在c格不塗色格子，則：

(一) 當$\frac{n}{2}=k=3l+1, l\in\mathrm{N}$ ($k=1$特例)時：$6c\geq 2\times 3(k-1)^2+\left(\frac{k-1}{3}\right)\times 6\times 3$，得$c\geq k^2-k$。

故知塗色上界$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;4)\leq 3k^2-(k^2-k)=2k^2+k$。

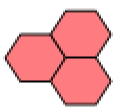
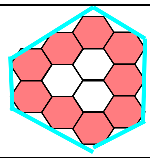
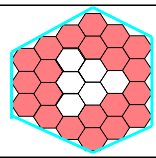
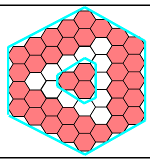
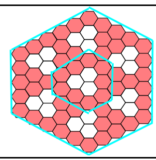
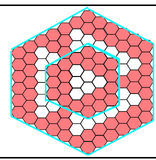
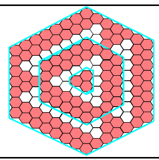
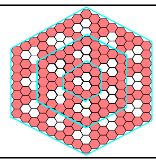
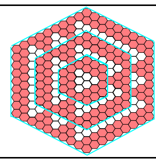
(二) 當$\frac{n}{2}=k=3l+2, l\in\mathrm{N}$ ($k=2$特例)時：$6c\geq 2\times 3(k-1)^2+\left(\frac{k-2}{3}+1\right)\times 6\times 3$，得

$c\geq k^2-k+1$。故知塗色上界$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;4)\leq 3k^2-(k^2-k+1)=2k^2+k-1$。

(三) 當$\frac{n}{2}=k=3l, l\geq 2, l\in\mathrm{N}$ ($k=3$特例)時：在最內一組的二層六個角落所多出的註記總和有 9，需減 9，故 $6c\geq 2\times 3(k-1)^2+\frac{k}{3}\times 6\times 3-9$，上取整數得

$c\geq\left\lceil k^2-k-\frac{1}{2}\right\rceil=k^2-k$。故知塗色上界$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(n;4)\leq 3k^2-(k^2-k)=2k^2+k$。

得證塗色格子的可能上界。現在建構塗色結果舉例如下：歸納分析塗色格子數方程式，與前述可能上界相同得證。

		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(2;4)=3$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(4;4)=9$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(6;4)=21$
		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(8;4)=36$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(10;4)=54$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(12;4)=78$
		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(14;4)=105$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(16;4)=135$	$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV-3}}(18;4)=171$

研究 9.2 在 HC-3 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 4 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;4)=\frac{1}{2}(n^2+n)=2k^2-k,\ \forall n=2k-1,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}$$

$$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC-3}}(n;4)=\frac{1}{2}(n^2+n-2)=2k^2-k-1,\ \forall n=2k-1,\ k\equiv 0\ or\ 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}$$

。

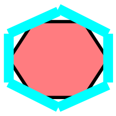
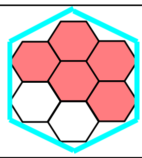
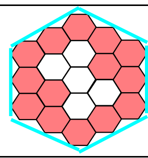
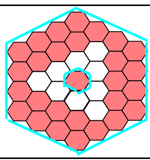
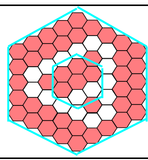
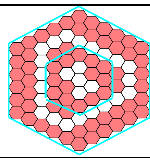
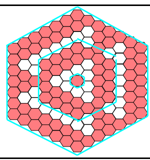
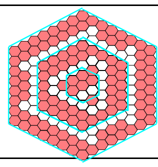
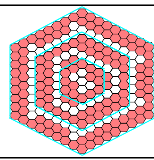
證明 證明類似研究 9.1，設鑲嵌內部共存在c格不塗色格子，則：

(一) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+1, l\in \mathrm{N}$ ($k=1$特例)時：在最內一區塊三層六個角落所多出的註記總和有 12，但需減 6，故 $6c\ge 2\times\left(3(k-1)^2-3(k-1)+1\right)+\left(\frac{k-1}{3}\right)\times 6\times 3-6$，上取整數得 $c\ge\left\lceil k^2-2k+\frac{1}{3}\right\rceil=k^2-2k+1$。故知塗色上界 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;4)\le(3k^2-3k+1)-(k^2-2k+1)=2k^2-k$。

(二) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+2, l\in \mathrm{N}$ ($k=2$ 特例) 時：$6c\ge 2\times\left(3(k-1)^2-3(k-1)+1\right)+\left(\frac{k-2}{3}\right)\times 6\times 3$，上取整數得 $c\ge\left\lceil k^2-2k+\frac{1}{3}\right\rceil=k^2-2k+1$。故知塗色上界 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;4)\le(3k^2-3k+1)-(k^2-2k+1)=2k^2-k$。然而，觀察實際塗色結果如 $MC_{HC-3}(3;\ 4)\equiv5$，明顯矛盾，鑲嵌內部不塗色格子至少需增加 1 格，因此 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;4)\le 2k^2-k-1$。

(三) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l, l\in \mathrm{N}$ ($k=3$特例)時：在最內一組的三層六個角落所多出的註記總和有 6，需減 6，故 $6c\ge 2\times\left(3(k-1)^2-3(k-1)+1\right)+\left(\frac{k}{3}\right)\times 6\times 3-6$，上取整數得 $c\ge\left\lceil k^2-2k+\frac{4}{3}\right\rceil=k^2-2k+2$。故知塗色上界 $\mathrm{MC}_{\mathrm{HC}-3}(n;4)\le(3k^2-3k+1)-(k^2-2k+2)=2k^2-k-1$。

得證塗色格子的可能上界。現在建構塗色結果舉例如下：歸納分析塗色格子數方程式，與前述可能上界相同得證。

		
$MC_{HC-3}(1;\ 4)\equiv1$	$MC_{HC-3}(3;\ 4)\equiv5$	$MC_{HC-3}(5;\ 4)\equiv14$
		
$MC_{HC-3}(7;\ 4)\equiv28$	$MC_{HC-3}(9;\ 4)\equiv44$	$MC_{HC-3}(11;\ 4)\equiv65$
		
$MC_{HC-3}(13;\ 4)\equiv91$	$MC_{HC-3}(15;\ 4)\equiv119$	$MC_{HC-3}(17;\ 4)\equiv152$

十二、 研究十：探討 $MC_{HV-3}(n;\ 5)$、$MC_{HC-3}(n;\ 5)$存在最多塗色格子的數量及其塗色方式。

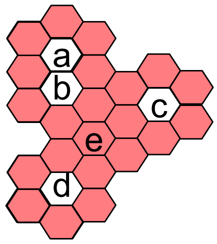
研究 10.1 在 HV-3 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 5 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

$$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+8n-8)=\frac{1}{3}(7k^2+4k-2),\ \forall n=2k,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in \mathrm{N}$$

$$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+6n-16)=\frac{1}{3}(7k^2+3k-4),\ \forall n=2k,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in \mathrm{N}$$ 。

$$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+6n)=\frac{1}{3}(7k^2+3k),\ \forall n=2k,\ k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in \mathrm{N}$$

證明 $k\ge 4$ 時設任意格子 a 與一不塗色格子 b 相鄰，但 b 又與另一不塗色格子相鄰，不妨設此格子即為 a 。令 a 與 b 及其周圍一層塗色格子為一組單位元素。其外部任一個不塗色格子至多與 a 或 b 間隔 2 層格子，例如 c 或 d 的位置；若任兩格不塗色格子間隔 2 層格子以上，例如 e 的位置，則將導致其與 6 個塗色格子相鄰，不滿足條件。



經過分析，採用 a 與 b 相鄰的塗色策略，其賦值註記結果相對 c 和 d 不相鄰的情況，每一組的賦值註記將多 3。依此原則，以每三層一個區塊，設鑲嵌內部共存在 c 格不塗色格子，並於每區塊由外往內的第三層中若兩格不塗、一格塗色，即可能會產生該區塊第二層角落的格子無法與不塗色格子相鄰，故需調整不塗色格子數，討論如下：

(一) 當 $\frac{n}{2}=k=3l+1, l\in \mathrm{N}$ ($k=1$ 特例)時：$6c\ge 3(k-1)^2+\frac{c}{2}\times 3$ ，得 $c\ge \frac{2}{3}(k^2-2k+1)$ 。故知塗色上界

$$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)\le 3k^2-\frac{2}{3}(k^2-2k+1)=\frac{1}{3}(7k^2+4k-2)$$ 。

(二) 當 $\frac{n}{2}=k=3l+2, l\in \mathrm{N}$ ($k=2$ 特例)時：需調整不塗色格子三格

$6c\ge 3(k-1)^2+\frac{3}{2}\times\left(c+\frac{k-2}{3}\times 3\right)$ ，上取整數得 $c\ge\left\lceil\frac{1}{3}(2k^2-3k)\right\rceil=\frac{1}{3}(2k^2-3k+3)$ 。

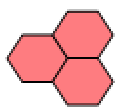
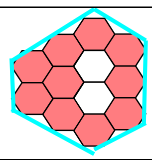
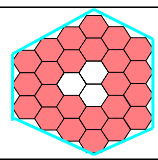
故知塗色上界 $\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)\le\left\lfloor 3k^2-\frac{1}{3}(2k^2-3k+3)\right\rfloor=\frac{1}{3}(7k^2+3k-4)$ 。

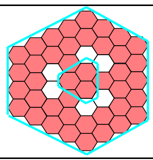
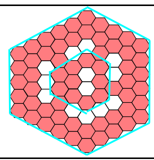
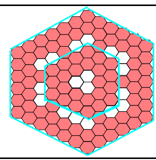
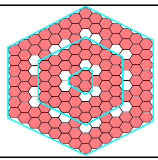
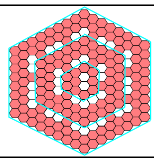
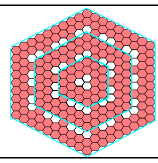
(三) 當 $\frac{n}{2}=k=3l, l\ge 2, l\in \mathrm{N}$ ($k=3$ 特例)時：需調整不塗色格子三格

$6c\ge 3(k-1)^2+\frac{3}{2}\times\left(c+\frac{k-2}{3}\times 3\right)$ ，得 $c\ge\frac{1}{3}(2k^2-3k)$ 。故知塗色上界

$$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(n;5)\le 3k^2-\frac{1}{3}(2k^2-3k)=\frac{1}{3}(7k^2+3k)$$ 。

得證塗色格子的可能上界。現在建構塗色結果舉例如下：歸納分析塗色格子數方程式，與前述可能上界相同得證。

		
$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(2;5)\equiv 3$	$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(4;5)\equiv 10$	$\mathrm{MC}_{\text{HV-3}}(6;5)\equiv 24$

		
$MC_{HV\text{-}3}(8;5)\equiv 42$	$MC_{HV\text{-}3}(10;5)\equiv 62$	$MC_{HV\text{-}3}(12;5)\equiv 90$
		
$MC_{HV\text{-}3}(14;5)\equiv 123$	$MC_{HV\text{-}3}(16;5)\equiv 156$	$MC_{HV\text{-}3}(18;5)\equiv 198$

研究 10.2 在 **HC-3** 中，若限制共用邊的鑲嵌格子，至多有 **5** 個格子被塗色，其所存在塗色方式的最多塗色格子數量為：

$$MC_{HC-3}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+4n+1)=\frac{1}{3}(7k^2-5k+1),\ \forall n=2k-1,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}$$

$$MC_{HC-3}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+6n-9)=\frac{1}{3}(7k^2-4k-2),\ \forall n=2k-1,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}\text{。}$$

$$MC_{HC-3}(n;5)=\frac{1}{12}(7n^2+8n-11)=\frac{1}{3}(7k^2-3k-3),\ \forall n=2k-1,\ k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\mathrm{N}$$

證明 證明類似研究 10.1，則：

(一) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+1,\ l\in\mathrm{N}$ （$k=1$ 特例）時：需調整不塗色格子六格 $6c\ge 3(k-1)^2-3(k-1)+1+\frac{3}{2}\times\left(c+\frac{k-2}{3}\times 6\right)$，上取整數得 $c\ge\left\lceil\frac{2}{9}(3k^2-6k+1)\right\rceil=\frac{2}{3}(k^2-2k+1)$。故知塗色上界

$$MC_{HC-3}(n;5)\le(3k^2-3k+1)-\frac{2}{3}(k^2-2k+1)=\frac{1}{3}(7k^2-5k+1)\text{。}$$

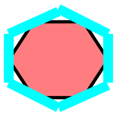
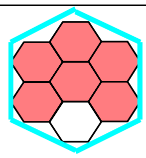
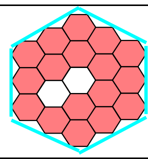
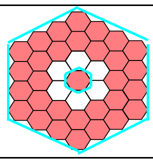
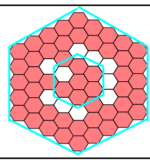
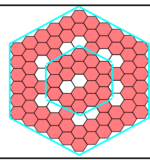
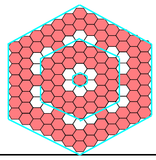
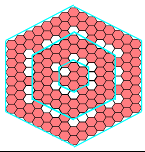
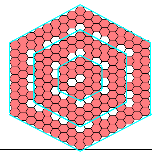
(二) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l+2,\ l\in\mathrm{N}$ （$k=2$ 特例）時：需調整不塗色格子三格 $6c\ge 3(k-1)^2-3(k-1)+1+\frac{3}{2}\times\left(c+\frac{k-2}{3}\times 3\right)$，上取整數得 $c\ge\left\lceil\frac{1}{9}(6k^2-15k+8)\right\rceil=\frac{1}{3}(2k^2-5k+5)$。故知塗色上界

$$MC_{HC-3}(n;5)\le(3k^2-3k+1)-\frac{1}{3}(2k^2-5k+5)=\frac{1}{3}(7k^2-4k-2)\text{。}$$

(三) 當 $k=\frac{n+1}{2}=3l,\ l\in\mathrm{N}$ （$k=3$ 特例)時：$6c\ge 3(k-1)^2-3(k-1)+1+\frac{3}{2}\times c$，上取整數得 $c\ge\left\lceil\frac{1}{9}(6k^2-18k+14)\right\rceil=\frac{1}{3}(2k^2-6k+6)$。故知塗色上界

$$MC_{HC-3}(n;5)\le(3k^2-3k+1)-\frac{1}{3}(2k^2-6k+6)=\frac{1}{3}(7k^2-3k-3)\text{。}$$

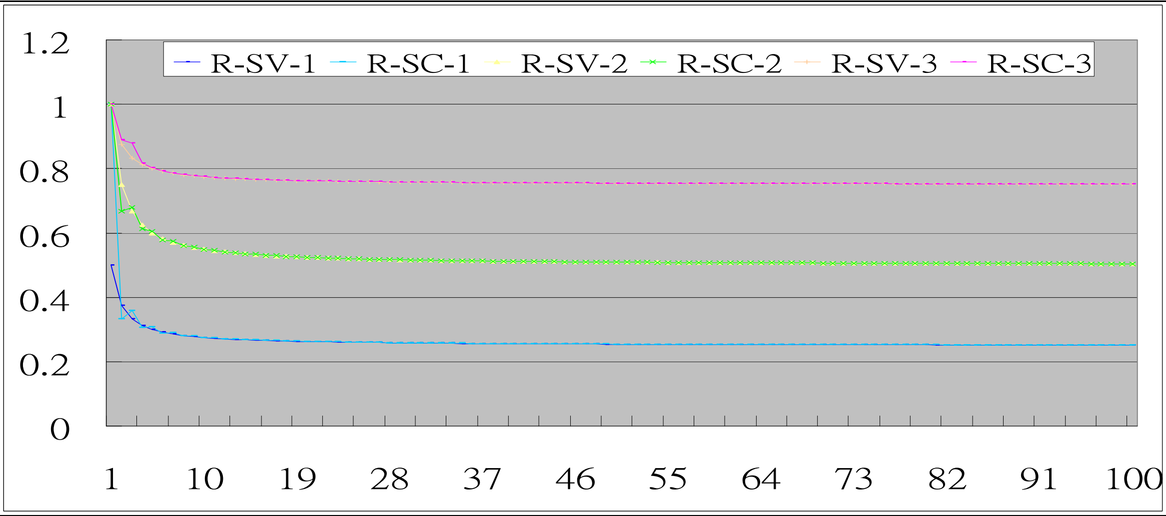
得證塗色格子的可能上界。現在建構塗色結果舉例如下：歸納分析塗色格子數方程式，與前述可能上界相同得證。

		
$MC_{HC\text{-}3}(1; 5)\equiv 1$	$MC_{HC\text{-}3}(3; 5)\equiv 6$	$MC_{HC\text{-}3}(5; 5)\equiv 17$
		
$MC_{HC\text{-}3}(7; 5)\equiv 31$	$MC_{HC\text{-}3}(9; 5)\equiv 51$	$MC_{HC\text{-}3}(11; 5)\equiv 77$
		
$MC_{HC\text{-}3}(13; 5)\equiv 103$	$MC_{HC\text{-}3}(15; 5)\equiv 138$	$MC_{HC\text{-}3}(17; 5)\equiv 179$

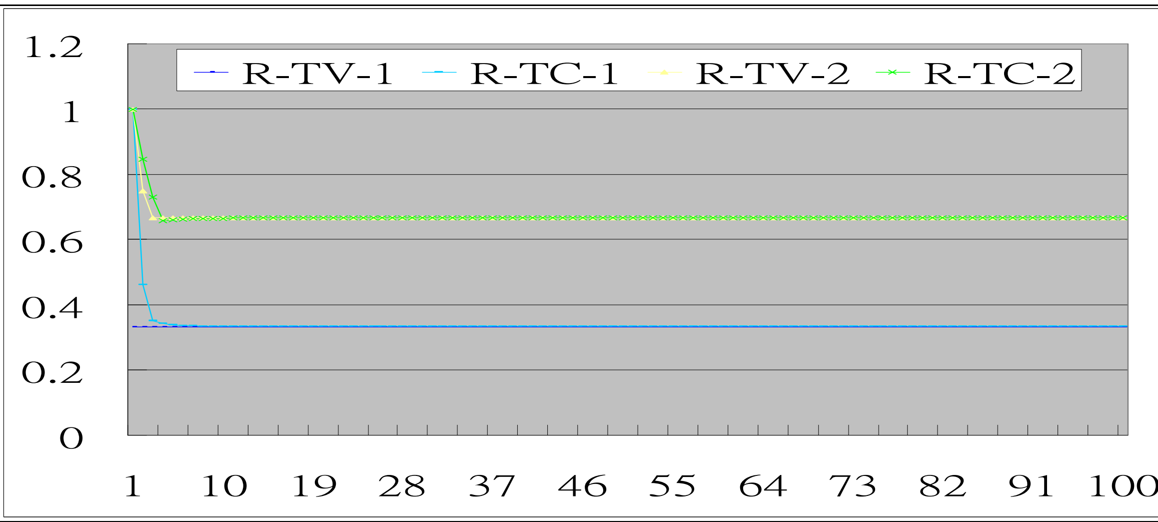
十三、 研究十一：探討 $MC_{TP}(n; x)$ 其所存在塗色方式的最多塗色格子面積比率之極值。

推論 11.1 $MC_{TP}(n; x)$其所存在塗色方式的最多塗色格子面積比率之極值如下圖(表)：

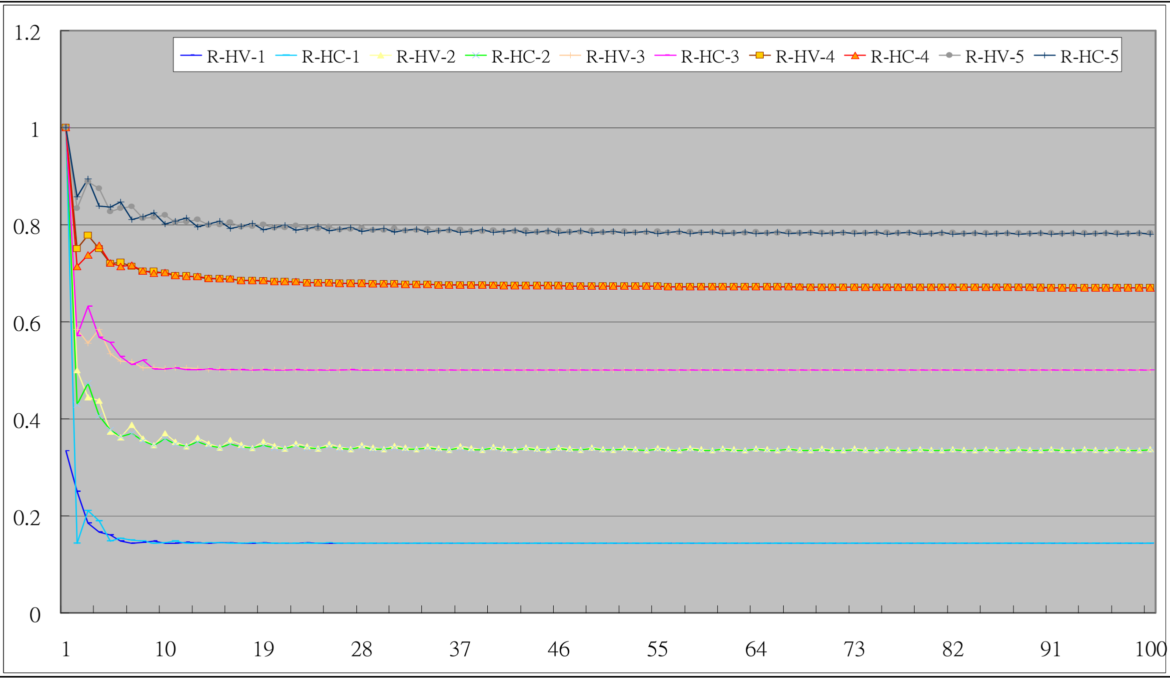
SV-4、SC-4 鑲嵌塗色格子的面積比率(x 軸為 k)



TV-6、TC-6 鑲嵌塗色格子的面積比率(x 軸為 k)



HV-3、HC-3 鑲嵌塗色格子的面積比率(x 軸為 k)



類型	x 值	頂點為中心	多邊形為中心
正方形	1	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SV-4}(n;1)}{C_V(n;p=4)}=\frac{1}{4}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SC-4}(n;1)}{C_C(n;p=4)}=\frac{1}{4}$
	2	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SV-4}(n;2)}{C_V(n;p=4)}=\frac{1}{2}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SC-4}(n;2)}{C_C(n;p=4)}=\frac{1}{2}$
	3	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SV-4}(n;3)}{C_V(n;p=4)}=\frac{3}{4}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{SC-4}(n;3)}{C_C(n;p=4)}=\frac{3}{4}$
正三角形	1	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{TV-6}(n;1)}{C_V(n;p=6)}=\frac{1}{3}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{TC-6}(n;1)}{C_C(n;p=6)}=\frac{1}{3}$
	2	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{TV-6}(n;2)}{C_V(n;p=6)}=\frac{2}{3}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{TC-6}(n;2)}{C_C(n;p=6)}=\frac{2}{3}$
正六邊形	1	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HV-3}(n;1)}{C_V(n;p=3)}=\frac{1}{7}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HC-3}(n;1)}{C_C(n;p=3)}=\frac{1}{7}$
	2	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HV-3}(n;2)}{C_V(n;p=3)}=\frac{1}{3}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HC-3}(n;2)}{C_C(n;p=3)}=\frac{1}{3}$
	3	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HV-3}(n;3)}{C_V(n;p=3)}=\frac{1}{2}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HC-3}(n;3)}{C_C(n;p=3)}=\frac{1}{2}$
	4	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HV-3}(n;4)}{C_V(n;p=3)}=\frac{2}{3}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HC-3}(n;4)}{C_C(n;p=3)}=\frac{2}{3}$
	5	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HV-3}(n;5)}{C_V(n;p=3)}=\frac{7}{9}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{HC-3}(n;5)}{C_C(n;p=3)}=\frac{7}{9}$

伍、研究結果

一、$MC_{SV\text{-}4}(n;x)$、$MC_{SC\text{-}4}(n;x)$、x=1~3 存在最多塗色格子數、例外情況及極限比值：

類型	塗色數量	條件($n,k\in\mathrm{N}$)	例外情況	$\lim_{n\to\infty}\frac{MC_{TP}(n;x)}{C_V(n;p)}$
$MC_{SV\text{-}4}(n;1)$	$\frac{1}{4}n(n+2)$	$n=2k$		$\frac{1}{4}$
$MC_{SC\text{-}4}(n;1)$	$\frac{1}{4}(n+1)^2$	$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1$		$\frac{1}{4}$

類型	塗色數量	條件($n,k\in \mathrm{N}$)	例外情況	$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{MC}_{\mathrm{TP}}(n;x)}{\mathrm{C}_{\mathrm{V}}(n;p)}$
	$\frac{1}{4}(n-1)(n+3)$	$n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1$		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{SV\text{-}4}}$(n; 2)	$\frac{1}{2}n(n+2)$	$n=2k$		$\frac{1}{2}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{SC\text{-}4}}$(n; 2)	$\frac{1}{2}(n+1)^2-1$	$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}(n+1)^2-2$	$n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\ n=2k-1$		
$\mathrm{MC}_{\mathrm{SV\text{-}4}}$(n; 3)	$\frac{1}{4}(3n^2+2n)$	$n=2k$		$\frac{3}{4}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{SC\text{-}4}}$(n; 3)	$\frac{1}{4}(3n^2+2n-1)$	$n=2k-1$	$n=5$	$\frac{3}{4}$

二、$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV\text{-}6}}$(n; x)、$\mathrm{MC}_{\mathrm{TC\text{-}6}}$(n; x)、x=1~2 存在最多塗色格子數、例外情況及極限比值：

類型	塗色數量	條件($n,k\in \mathrm{N}$)	例外情況	$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{MC}_{\mathrm{TP}}(n;x)}{\mathrm{C}_{\mathrm{V}}(n;p)}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV\text{-}6}}$(n; 1)	$\frac{1}{2}n^2$	$n=2k$		$\frac{1}{3}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TC\text{-}6}}$(n; 1)	$\frac{1}{2}(n^2+1)$	$n=2k-1$	$n=3$	$\frac{1}{3}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TV\text{-}6}}$(n; 2)	n^2	$n=2k$	$n=2,4$	$\frac{2}{3}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{TC\text{-}6}}$(n; 2)	n^2-1	$n=2k-1$	$n=1,3,5$	$\frac{2}{3}$

三、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}$(n; x)、$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}$(n; x)、x=1~5 存在最多塗色格子數、例外情況及極限比值：

類型	塗色數量	條件($n,k\in \mathrm{N}$)	例外情況	$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{MC}_{\mathrm{TP}}(n;x)}{\mathrm{C}_{\mathrm{V}}(n;p)}$
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}$(n; 1)	$\frac{1}{28}(3n^2)$	$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k$、$n\geq 14$	$n<14$	$\frac{1}{7}$
	$\frac{1}{28}(3n^2+16)$	$n\equiv 2{,}5\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k$、$n\geq 14$	$n<14$	
	$\frac{1}{28}(3n^2+36)$	$n\equiv 3{,}4\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k$、$n\geq 14$	$n<14$	
	$\frac{1}{28}(3n^2+4)$	$n\equiv 1{,}6\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k$、$n\geq 14$	$n<14$	
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}$(n; 1)	$\frac{1}{28}(3n^2+49)$	$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k-1$、$n\geq 13$	$n<13$	$\frac{1}{7}$
	$\frac{1}{28}(3n^2+9)$	$n\equiv 2{,}5\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k-1$、$n\geq 13$	$n<13$	
	$\frac{1}{28}(3n^2+1)$	$n\equiv 3{,}4\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k-1$、$n\geq 13$	$n<13$	
	$\frac{1}{28}(3n^2+25)$	$n\equiv 1{,}6\ (\mathrm{mod}\ 7),\ n=2k-1$、$n\geq 13$	$n<13$	
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HV\text{-}3}}$(n; 2)	$\frac{1}{12}(3n^2+2n)$	$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k$、$n\geq 8$	$n<8$、$n\neq 12$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}(3n^2+4n-4)$	$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k$、$n\geq 8$	$n<8$	
	$\frac{1}{4}(n^2+2n+4)$	$n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k$、$n\geq 8$	$n<8$	
$\mathrm{MC}_{\mathrm{HC\text{-}3}}$(n; 2)	$\frac{1}{12}(3n^2+2n+15)$	$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k-1$、$n\geq 7$	$n<7$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}(3n^2+4n+5)$	$n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k-1$、$n\geq 7$	$n<7$	

類型	塗色數量	條件($n,k\in\mathrm{N}$)	例外情況	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{MC}_{\mathrm{TP}}(n;\,x)}{\mathrm{C}_{\mathrm{V}}(n;\,p)}$
	$\frac{1}{12}(3n^2+2n-1)$	$n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ n=2k-1$、$n\ge 7$	$n<7$、$n\ne 11$	
MC$_{HV\text{-}3}$(n; 3)	$\frac{1}{8}(3n^2+12)$	$n=2k,\ k\equiv 1,3,5,7\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 18$	$n<18$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}(3n^2+8)$	$n=2k,\ k\equiv 2,6\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 18$	$n<18$	
	$\frac{1}{8}(3n^2+16)$	$n=2k,\ k\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 18$	$n<18$	
	$\frac{1}{8}(3n^2)$	$n=2k,\ k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 18$	$n<18$	
MC$_{HC\text{-}3}$(n; 3)	$\frac{1}{8}(3n^2+5)$	$n=2k-1,\ k\ne 3,6\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 17$	$n<17$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}(3n^2+13)$	$n=2k-1,\ k\equiv 3,6\ (\mathrm{mod}\ 8)$、$n\ge 17$	$n<17$	
MC$_{HV\text{-}3}$(n; 4)	$\frac{1}{2}(n^2+n)$	$n=2k,\ k\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3)$		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{2}(n^2+n-2)$	$n=2k,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$		
MC$_{HC\text{-}3}$(n; 4)	$\frac{1}{2}(n^2+n)$	$n=2k-1,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{2}(n^2+n-2)$	$n=2k-1,\ k\equiv 0,2\ (\mathrm{mod}\ 3)$		
MC$_{HV\text{-}3}$(n; 5)	$\frac{1}{12}(7n^2+8n-8)$	$n=2k,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$		$\frac{7}{9}$
	$\frac{1}{12}(7n^2+6n-16)$	$n=2k,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$		
	$\frac{1}{12}(7n^2+6n)$	$n=2k,\ k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$		
MC$_{HC\text{-}3}$(n; 5)	$\frac{1}{12}(7n^2+4n+1)$	$n=2k-1,\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$		$\frac{7}{9}$
	$\frac{1}{12}(7n^2+6n-9)$	$n=2k-1,\ k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$		
	$\frac{1}{12}(7n^2+8n-11)$	$n=2k-1,\ k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$		

陸、討論與結論

一、針對不同的 MC$_{TP}$(n; x)，當 n 值(或 k 值)較小時，受鑲嵌的外框邊線效應影響，少部分無法獲得統一的規律方程式表示該值。從實際的塗色探討中發現，假若存在 MC$_{TP}$(n; x) 時的塗色方式，可以使鑲嵌內部不產生賦值註記為 0 或較低塗色賦值結果，則該鑲嵌的外框邊線效應即不存在。

二、當鑲嵌的外框邊線效應不存在時，從鑲嵌內部向外延展規律性的塗色方式，可得到較多塗色格子數。當外框邊線效應存在時，從鑲嵌的外框邊線向內延展規律性的塗色方式，一般可以獲得比較多塗色格子數的結果。

三、有趣的現象，在 MC$_{HV\text{-}3}$(n; 1)中，當 n>14 時，若取連續每 7 個值的和形成一個數列，則此數列： $f(0)=379,\ f(1)=988,\ f(2)=1891,\ f(3)=3088,\ f(4)=4579,\cdots$ ；同理，在 MC$_{HC\text{-}3}$(n; 1)，n>13， $f(0)=347,\ f(1)=935,\ f(2)=1817,\ f(3)=2993,\ f(4)=4463,\cdots$ ；兩者皆可寫成 $g(l)=f(l)-f(l-1),\ h(l+1)=g(l+1)-g(l)\equiv 294,\ l\in\mathrm{N}$ 。類似的現象，整理如下表：

類型	k 的條件	計算週期	$f(0)=C_1$	$f(1)=C_2$	$h(l)=C_3$
$MC_{SV\text{-}4}(n;1)$	≧1	4	40	200	128
$MC_{SC\text{-}4}(n;1)$	≧1	4	28	172	128
$MC_{SV\text{-}4}(n;2)$	≧1	4	80	400	256
$MC_{SC\text{-}4}(n;2)$	≧1	4	54	342	256
$MC_{SV\text{-}4}(n;3)$	>4	4	548	1380	384
$MC_{SC\text{-}4}(n;3)$	>4	4	470	1254	384
$MC_{TV\text{-}6}(n;1)$	>3	3	154	388	108
$MC_{TC\text{-}6}(n;1)$	>3	3	127	343	108
$MC_{TV\text{-}6}(n;2)$	>3	3	308	776	216
$MC_{TC\text{-}6}(n;2)$	>3	3	248	680	216
$MC_{HV\text{-}3}(n;1)$	>7	7	379	988	294
$MC_{HC\text{-}3}(n;1)$	>7	7	347	935	294
$MC_{HV\text{-}3}(n;2)$	>6	3	210	387	54
$MC_{HC\text{-}3}(n;2)$	>6	3	182	348	54
$MC_{HV\text{-}3}(n;3)$	>8	8	1948	5116	1536
$MC_{HC\text{-}3}(n;3)$	>8	8	1798	4870	1536
$MC_{HV\text{-}3}(n;4)$	≧1	3	33	168	108
$MC_{HC\text{-}3}(n;4)$	≧1	3	20	137	108
$MC_{HV\text{-}3}(n;5)$	≧1	3	37	194	126
$MC_{HC\text{-}3}(n;5)$	≧1	3	24	159	126

值得注意：當鑲嵌的外框邊線效應消失時，表中的數學規律即形成；且，如果計算的週期相同，在同一類型的鑲嵌中，不同的 x，h 呈現等差的變化。

四、在不同的 $MC_{TP}(n;x)$中，我們發現可以取得最大 MC 數值的塗色方式並非唯一，且是否存在該值的塗色方式，研究中依賴歸納實現最多塗色格子數上界分析的方式，間接證明該值可能是實際存在的最大值。

五、在 HV-3,HC-3, x=1,3 的鑲嵌塗色分析中，因塗色的重複性規律受限幾何形狀影響，並不是以想像中的每 3 層為一的週期出現，而是分別以 7 和 8 出現。

六、平面中，由正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、和正十二邊形組合的全等形狀可以符合正則多邊形鑲嵌者共有 14 種組合，後續可進一步探討。

柒、參考資料及其他

1. 國際數學奧林匹亞競賽(1999 年)。試題 A3。
2. 馮躍峰(2005 年)。數學奧林匹克小叢書—高中卷(第 16 冊)。華東師範大學出版社。取自：組合極值．論證與構造，第七章、例 7、第 40~41 頁。
3. 澳洲數學競賽(2011 年)。九章數學教育基金會。取自：中學中級卷、高級卷第 30 題，試題及解答中文版。
4. 國中數學教科書(2012 年)。翰林出版社。取自：國中數學第四冊一元一次不等式、第四冊數列與級數、第六冊二次函數。

【評語】030418

1. 文獻探討很完整，且使用數學工具完整。

2. 研究推導詳實且具深度。

3. 數值圖形處理良好。

4. 作者解說流暢，表示內容清楚。