中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030417

最後一張王牌

學校名稱：臺南市立關廟國民中學

作者：	指導老師：
國一　林伯軒 國一　洪梓翔	林嘉瑜

關鍵詞：蓋牌、數列規律、函數

作品名稱：最後一張王牌

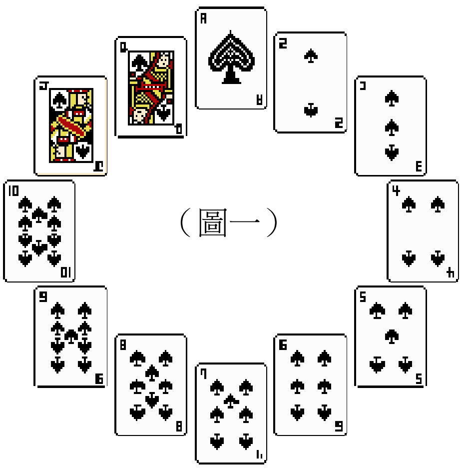
摘　要

這是一種撲克牌遊戲，關於數列規律與函數的研究，類似「約瑟芬問題」。假設手上有一些牌其正面朝上順時鐘排成圓圈，首先探討「蓋一張跳一張」的玩法，一開始將 A 號牌蓋牌，跳過 2 號牌把 3 號牌蓋牌，跳過 4 號牌把 5 號牌蓋牌，...每次都跳過一張還沒蓋牌的牌（若已蓋牌成背面的牌不予理會），最後可找到最後一張牌面朝上的牌。首先探討先蓋牌後跳牌的玩法，例如：「蓋一張跳一張」、「蓋一張跳二張」、「蓋一張跳三張」、...等，接著探討先跳牌後蓋牌的玩法，其不同張數牌之最後一張牌的規律。最後我們發現「蓋 p 張牌再跳 q 張牌」與「跳 q 張牌再蓋 p 張牌」的規則，不同張數 n 其最後一張牌為「等差跳躍函數」，分別為 $F(n)$與 $G(n)$，有著相關性為 $F(n+p)=G(n)+p$ （ $n\geq 1$ ）。

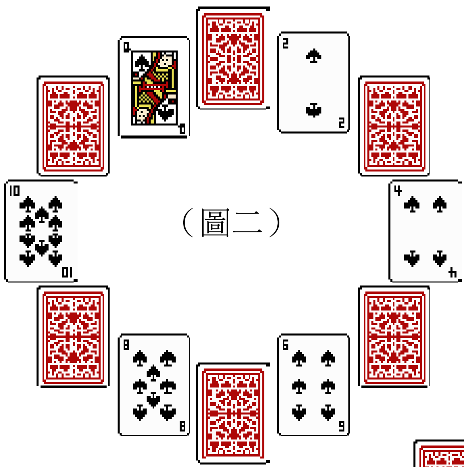
壹、研究動機

我們在一本有趣數學書裡看到了撲克牌遊戲，手上有十二張牌分別為 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J 和 Q，其正面朝上順時鐘排成圓圈（如圖一），一開始將 A 號牌蓋起來，跳過 2 號牌把 3 號牌蓋起來，跳過 4 號牌把 5 號牌蓋起來，...每次都跳過一張還沒蓋牌的牌，再跳過 10 號牌把 J 號牌蓋起來（如圖二）。

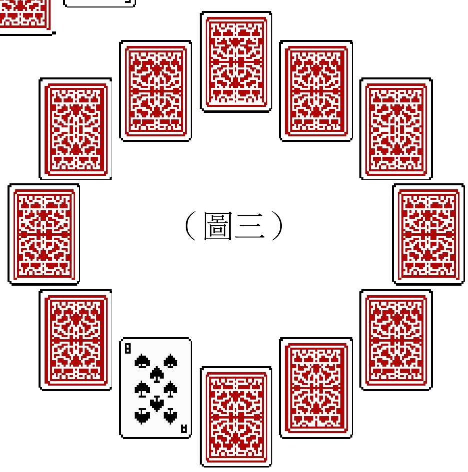
繼續跳過 Q 號牌把 2 號牌蓋起來，再跳過 4 號牌把 6 號牌蓋起來，跳過 8 號牌把 10 號牌蓋起來，跳過 8 號牌把 10 號牌蓋起來，跳過 Q 號牌把 4 號牌蓋起來，跳過 8 號牌把 Q 號牌蓋起來，最後一張牌為 8 號牌（如圖三）。圖片來源：《FLASH 網頁模版百寶箱官方論壇》。



（圖一）



（圖二）



（圖三）

首先我們先研究 1~100 張牌，蓋一張牌跳過一張牌的玩法，發現它最後一張牌有特殊的規律。我們在猜想是不是不同的玩法，例如：蓋一張牌跳過二張牌蓋牌的玩法、跳過三張牌、...、跳過十張牌的玩法等，不同張數牌的最後一張牌，看看是否有奇妙的規律？種種的疑問，引起了我們強烈的好奇心。接下來，是我們的研究之旅。

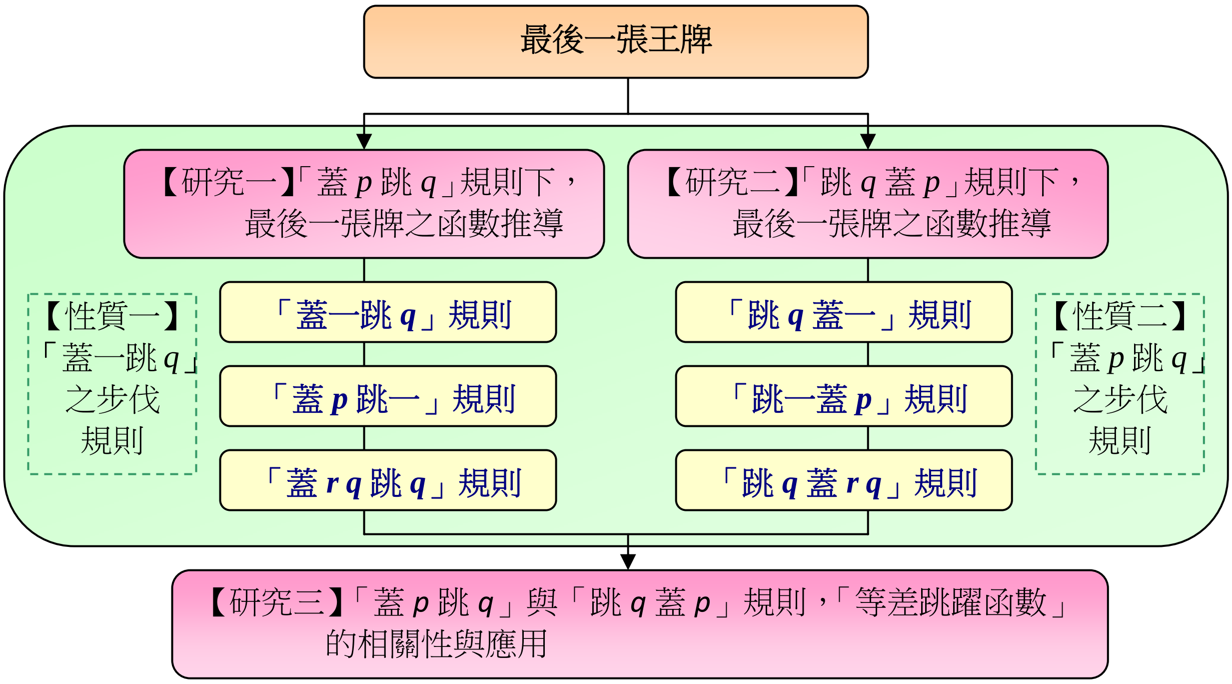
貳、研究目的

一、將數字研究至 n 張數，並推算初期規律。
二、「先蓋 p 張牌後跳 q 張牌」規則下，最後一張牌之函數推導。(簡稱「蓋 p 跳 q」)
三、「先跳 q 張牌後蓋 p 張牌」規則下，最後一張牌之函數推導。(簡稱「跳 q 蓋 p」)
四、希望能找出「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則，最後一張牌之函數間的相關性。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Excel 軟體。

肆、研究過程或方法



定義名稱：「**等差跳躍函數**」

最後一張牌 $F(n)$或 $G(n)$依據一個公差增加，增加到一個大於張數 n 的數值，因為此張數不存在，則又跳躍回一個起始數或較小的數，在此我們稱為「等差跳躍函數」。

性質一：探討「蓋一跳 q」之步伐規則

張數 n 為公差 1 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差（q+1）的「等差跳躍函數」。
此等差跳躍函數 $F(n)$依公差為 q+1 增加，若此張數不存在時，則跳躍回一個較小的數。

實例一：「蓋一跳一」之步伐規則

當有 5 張牌時，第一次蓋掉第 1,3,5 張牌時走了 5 步，第二次蓋掉第 4 張牌走了 2 步，如右所示，共走了 5+2=7 步。

第一次蓋掉 1,3,5	1	2	3	4	5
第二次蓋掉 4	2	4			

當 $n=5$ 時，每蓋一張牌，須走 2 步，蓋掉最後一張牌時，可節省 1 步，當有 5 張牌需共蓋 4 張牌，則完成最後一張牌時，需走 $2\times4-1=2\times5-3=7$（步）。同理當 $n=6$ 時，需走 $2\times5-1=2\times6-3=9$（步）。當有 n 張牌時，完成最後一張牌的步伐為 $2n-3$（步）。

「每增加一張牌，完成最後一張牌的步伐增加 2 步」。依此步伐規則，推得各張數的最後一張牌，如下：

1												
1	2											
1	2	3										
1	2	3	4									
1	2	3	4	5								
1	2	3	4	5	6							
1	2	3	4	5	6	7						
1	2	3	4	5	6	7	8					
1	2	3	4	5	6	7	8	9				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，起始值為 $F(1)=1$

$F(2)=2$，
$F(3)=2$，$F(4)=4$，
$F(5)=2$，$F(6)=4$，$F(7)=6$，$F(8)=8$，
$F(9)=2$，$F(10)=4$，$F(11)=6$，$F(12)=8$，$F(13)=10$，$F(14)=12$，$F(15)=14$，$F(16)=16$，

以蓋一跳一之規則，當 $n\geq2$ 時，當每增加一張牌，其最後一張牌的數亦會增加 2，張數 n 為公差 1 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差 2 的等差數列，若上回最後一張牌 $F(n)$ 增加 2 大於此下回張數 $n+1$（因為此張數不存在），則最後一張牌又跳躍回起始數 2(或跳躍回一個較小的數)，則在此稱 $F(n)$為公差 2 的「等差跳躍函數」。

實例二：「蓋一跳二」之步伐規則

當 $n=5$ 時，每蓋一張牌，須走 3 步，蓋掉最後一張牌時，可節省 2 步，當有 5 張牌需蓋掉 4 張牌，則完成最後一張牌時，需走 $3\times5-5=10$（步）。同理當 $n=6$ 時，需走 $3\times6-5=13$（步）。

第一次蓋掉 1,4	1	2	3	4	5
第二次蓋掉 3		2	3	5	
第三次蓋掉 5		2	5		

當有 n 張牌時，完成最後一張牌的步伐為 $3n-5$（步）。

「每增加一張牌，完成最後一張牌的步伐增加 3 步」。依此步伐規則，推得各張數的最後一張牌，如下：

1													
1	**2**												
1	2	**3**											
1	2	**3**	4										
1	**2**	3	4	5									
1	2	3	4	**5**	6								
1	**2**	3	4	5	6	7							
1	2	3	4	**5**	6	7	8						
1	2	3	4	5	6	7	**8**	9					
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10				
1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11			
1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	**14**

由此可推得，設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，起始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，

$F(3)=3$，$F(4)=3$，
$F(5)=2$，$F(6)=5$，
$F(7)=2$，$F(8)=5$，$F(9)=8$，
$F(10)=2$，$F(11)=5$，$F(12)=8$，$F(13)=11$，$F(14)=14$

以蓋一跳二之規則，當 $n\geq 2$ 時，當每增加一張牌，其最後一張牌的數亦會增加 3，張數 n 為公差 1 的等差數列，若上回最後一張牌 $F(n)$增加 3 大於此下回張數 $n+1$（因為此張數不存在），則最後一張牌又跳躍回一個較小的數，則在此稱 $F(n)$為公差為 3 的「等差跳躍函數」。

性質二：探討「蓋 p 跳 q」之步伐規則

「蓋 p」決定組數，分為 p 組探討，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差（$p+q$）的「等差跳躍函數」。

此等差跳躍函數 $F(n)$依公差為 $p+q$ 增加，若此張數不存在時，則跳躍回一個較小的數。

實例一：「蓋二跳一」之步伐規則

當張數最後剩下 3 張牌時可蓋掉 2 張，剩下 2 張牌時只能蓋掉 1 張，使得蓋二的步驟有所不同，所以當張數 n 為奇數和偶數時，最後一張牌 $F(n)$會形成二組不同的規則，即張數 n 需分為二組 $n=2i+1$ 和 $n=2i+2$ 來探討，因此張數 n 就當中組別下會成為公差 2 的等差數列；

由性質一中得知最後一張牌 $F(n)$因其步伐為 2+1=3，成為公差 3 的「等差跳躍函數」。

實例二：「蓋三跳一」之步伐規則

當張數最後剩下 4 張牌時可蓋掉 3 張，最後剩下 3 張牌時只能蓋掉 2 張，最後剩下 2 張牌時只能蓋掉 1 張，使得蓋三的步驟有所不同，最後一張牌 $F(n)$會形成三組不同的規則，即張數 n 需分為三組 $n=3i+1$、$n=3i+2$ 和 $n=3i+3$ 來探討，因此張數 n 在其組別下會成為公差 3 的等差數列；

由性質一中得知最後一張牌 $F(n)$因其步伐為 3+1=4，成為公差 4 的「等差跳躍函數」。

n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2
F(3)=	3	F(4)=	3
F(5)=	3	F(6)=	6
F(7)=	6	F(8)=	3
F(9)=	9	F(10)=	6
F(11)=	3	F(12)=	9
F(13)=	6	F(14)=	12

（表一）蓋二跳一之步伐規則

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3
F(4)=	4	F(5)=	4	F(6)=	4
F(7)=	4	F(8)=	8	F(9)=	8
F(10)=	8	F(11)=	4	F(12)=	12
F(13)=	12	F(14)=	8	F(15)=	4
F(16)=	16	F(17)=	12	F(18)=	8
F(19)=	4	F(20)=	16	F(21)=	12

（表二）「蓋三跳一」之步伐規則

根據研究目的與步伐規則，我們擬出研究主題如下：

【研究一】：「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」推導

【研究二】：「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」推導

【研究三】：「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則，最後一張牌之「等差跳躍函數」相關性

接著進入我們的研究...

【研究一】：「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」推導

在「蓋 p 跳 q」規則下，若張數為 n，首先先蓋 p 張牌後，再跳過 q 張牌，探討最後一張牌為 $F(n)$之「等差跳躍函數」。

一、「蓋一跳 q」規則下，最後一張牌之推導

(一)「蓋一跳一」之規則

由上述性質一，張數 n 為公差 1 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差 2 的「等差跳躍函數」。當 $n \geq 2$ 時，若最後一張牌增加 2 小於等於此張數 n+1，則最後一張牌為上次張數最後一張牌加 2，即 $F(n)+2 \leq n+1$，則 $F(n+1)=F(n)+2$；若上回最後一張牌增加 2 大於此張數 n（因為此張數不存在），則最後一張牌為上回最後一張牌加 2 減去上回張數，即 $F(n+1)=F(n)+2-n$，跳躍回一個最小的數。

利用此規律配合 Excel 軟體，推演出各張數的「最後一張牌」$F(n)$。（表一）

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)=1$，

$$當\ n \geq 2\ 時，\begin{cases} if \quad F(n)+2 > n+1 \quad then \quad F(n+1)=F(n)+2-n \\ if \quad F(n)+2 \leq n+1 \quad then \quad F(n+1)=F(n)+2 \end{cases}$$

在蓋一跳一的規則時，我們不難發現在第一輪時全部的奇數都蓋掉了，只剩下偶數，凡是 2 乘方的數（例如：2、4、8、16、32、64、...等），此次方數2^k即為最後一張牌。亦可減化其規律：設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，當$n \geq 2$時，

(a)若 $n > 2^k$ ，則$F(n)=2(n-2^k)$ 。

(b)若 $n = 2^k$ ，則$F(n)=2^k$ ，（此次方數2^k即為最後一張牌）。

註：此2^k為小於且最接近張數 n 的次方數。

例如：張數 $n=3$ 小於且最接近的次方數為 2，$F(3)=2(3-2)=2$；張數 $n=4$~7 小於且最接近的次方數為2^2 ，$F(7)=2(7-2^2)=6$；張數 $n=9$~ 15 小於且最接近的次方數為2^3 ，$F(15)=2(15-2^3)=14$。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(21)=	10	F(41)=	18	F(61)=	58	F(81)=	34
F(2)=	2	F(22)=	12	F(42)=	20	F(62)=	60	F(82)=	36
F(3)=	2	F(23)=	14	F(43)=	22	F(63)=	62	F(83)=	38
F(4)=	4	F(24)=	16	F(44)=	24	F(64)=	64	F(84)=	40
F(5)=	2	F(25)=	18	F(45)=	26	F(65)=	2	F(85)=	42
F(6)=	4	F(26)=	20	F(46)=	28	F(66)=	4	F(86)=	44
F(7)=	6	F(27)=	22	F(47)=	30	F(67)=	6	F(87)=	46
F(8)=	8	F(28)=	24	F(48)=	32	F(68)=	8	F(88)=	48
F(9)=	2	F(29)=	26	F(49)=	34	F(69)=	10	F(89)=	50
F(10)=	4	F(30)=	28	F(50)=	36	F(70)=	12	F(90)=	52
F(11)=	6	F(31)=	30	F(51)=	38	F(71)=	14	F(91)=	54
F(12)=	8	F(32)=	32	F(52)=	40	F(72)=	16	F(92)=	56
F(13)=	10	F(33)=	2	F(53)=	42	F(73)=	18	F(93)=	58
F(14)=	12	F(34)=	4	F(54)=	44	F(74)=	20	F(94)=	60
F(15)=	14	F(35)=	6	F(55)=	46	F(75)=	22	F(95)=	62
F(16)=	16	F(36)=	8	F(56)=	48	F(76)=	24	…	…
F(17)=	2	F(37)=	10	F(57)=	50	F(77)=	26	F(197)=	138
F(18)=	4	F(38)=	12	F(58)=	52	F(78)=	28	F(198)=	140
F(19)=	6	F(39)=	14	F(59)=	54	F(79)=	30	F(199)=	142
F(20)=	8	F(40)=	16	F(60)=	56	F(80)=	32	F(200)=	144

（表三）「蓋一跳一」之最後一張牌

(二)「蓋一跳二」之規則

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，

當$n \geq 3$ 時，當每增加一張數，其最後一張牌的數亦會增加 3，若上回最後一張牌增加 3 小於等於此張數 n，則最後一張牌為上回最後一張牌加 3，即$F(n+1)=F(n)+3$；若上回最後一張牌增加 3 大於此張數 n（因為此數不存在），則最後一張牌為上回最後一張牌加 3 減去上回張數，即$F(n+1)=F(n)+3-n$ 。

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$

當 $n \geq 3$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+3 > n+1 & then & F(n+1)=F(n)+3-n \\ if & F(n)+3 \leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+3 \end{cases}$

(三)「蓋一跳三」之規則

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=2$

當 $n \geq 4$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+4 > n+1 & then & F(n+1)=F(n)+4-n \\ if & F(n)+4 \leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+4 \end{cases}$

(四)「蓋一跳四」之規則

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=2$

當 $n \geq 5$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+5 > n+1 & then & F(n+1)=F(n)+5-n \\ if & F(n)+5 \leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+5 \end{cases}$

(五)「蓋一跳五」之規則

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=2$，$F(4)=2$，$F(5)=4$

當 $n \geq 6$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+6 > n+1 & then & F(n+1)=F(n)+6-n \\ if & F(n)+6 \leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+6 \end{cases}$

蓋一跳二		蓋一跳三		蓋一跳四		蓋一跳五	
n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(1)=	1	F(1)=	1	F(1)=	1
F(2)=	2	F(2)=	2	F(2)=	2	F(2)=	2
F(3)=	3	F(3)=	2	F(3)=	3	F(3)=	2
F(4)=	3	F(4)=	3	F(4)=	2	F(4)=	2
F(5)=	2	F(5)=	3	F(5)=	3	F(5)=	4
F(6)=	5	F(6)=	2	F(6)=	3	F(6)=	5
F(7)=	2	F(7)=	6	F(7)=	2	F(7)=	5
F(8)=	5	F(8)=	3	F(8)=	7	F(8)=	4
F(9)=	8	F(9)=	7	F(9)=	4	F(9)=	2
…	…	…	…	…	…	…	…
F(198)=	120	F(198)=	136	F(198)=	99	F(198)=	77
F(199)=	123	F(199)=	140	F(199)=	104	F(199)=	83
F(200)=	126	F(200)=	144	F(200)=	109	F(200)=	89

（表四）「蓋一跳二、三、四、五」之最後一張牌

【結論 1-1】「蓋一跳 q」規則下，最後一張牌之推導

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)$~$F(q)$

當 $n \geq q+1$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+(q+1) > n+1 & then & F(n+1)=F(n)+(q+1)-n \\ if & F(n)+(q+1) \leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+(q+1) \end{cases}$

二、「蓋 p 跳一」規則下，最後一張牌之推導

(一)「蓋一跳一」之規則：(分 1 組)，已在蓋一跳 q 之規則時，當 $q=1$ 時，已討論過。

初始值為 $F(1)=1$，當 $n\geq 2$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+2>n+1 & then & F(n+1)=F(n)+2-n \\ if & F(n)+2\leq n+1 & then & F(n+1)=F(n)+2 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=i+1$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>2^k & then & F(n)=2(n-2^k) \\ if & n=2^k & then & F(n)=2^k \end{cases}$ 當 $n=2^k$ 時：1，2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024…等。

註：此 2^k 為小於且最接近張數 n 的次方數。

(二)「蓋二跳一」之規則：(分 2 組)

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，

當 $n\geq 3$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+3>n+2 & then & F(n+2)=F(n)+3-n \\ if & F(n)+3\leq n+2 & then & F(n+2)=F(n)+3 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=2i+1$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>3^k & then & F(n)=\frac{3}{2}(n-3^k) \\ if & n=3^k & then & F(n)=3^k \end{cases}$ 當 $n=3^k$ 時：1，3，9，27，81，243，…等。
$n=2i+2$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>2\times 3^k & then & F(n)=\frac{3}{2}(n-2\times 3^k) \\ if & n=2\times 3^k & then & F(n)=2\times 3^k \end{cases}$ 當 $n=2\times 3^k$ 時：2，6，18，54，162，486，…等。

註：此 3^k、2×3^k 為小於且最接近張數 n 的次方數。

(三)「蓋三跳一」之規則：(分 3 組)

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，

當 $n\geq 4$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+4>n+3 & then & F(n+3)=F(n)+4-n \\ if & F(n)+4\leq n+3 & then & F(n+3)=F(n)+4 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=3i+1$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>4^k & then & F(n)=\frac{4}{3}(n-4^k) \\ if & n=4^k & then & F(n)=4^k \end{cases}$ 當 $n=4^k$ 時：1，4，16，64，256，1024，…等。
$n=3i+2$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>2\times 4^k & then & F(n)=\frac{4}{3}(n-2\times 4^k) \\ if & n=2\times 4^k & then & F(n)=2\times 4^k \end{cases}$ 當 $n=2\times 4^k$ 時：2，8，32，128，512，2048，…等。
$n=3i+3$ (當 $i\geq 1$ 時)	$\begin{cases} if & n>3\times 4^k & then & F(n)=\frac{4}{3}(n-3\times 4^k) \\ if & n=3\times 4^k & then & F(n)=3\times 4^k \end{cases}$ 當 $n=3\times 4^k$ 時：3，12，48，192，768，3072，…等。

註：此 4^k、2×4^k、3×4^k 為小於且最接近張數 n 的次方數。

n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2
F(3)=	3	F(4)=	3
F(5)=	3	F(6)=	6
F(7)=	6	F(8)=	3
F(9)=	9	F(10)=	6
F(11)=	3	F(12)=	9
F(13)=	6	F(14)=	12
…	…	…	…
F(195)=	171	F(196)=	51
F(197)=	174	F(198)=	54
F(199)=	177	F(200)=	57

（表五）「蓋二跳一」之最後一張牌

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3
F(4)=	4	F(5)=	4	F(6)=	4
F(7)=	4	F(8)=	8	F(9)=	8
F(10)=	8	F(11)=	4	F(12)=	12
F(13)=	12	F(14)=	8	F(15)=	4
F(16)=	16	F(17)=	12	F(18)=	8
F(19)=	4	F(20)=	16	F(21)=	12
…	…	…	…	…	…
F(193)=	172	F(194)=	88	F(195)=	4
F(196)=	176	F(197)=	92	F(198)=	8
F(199)=	180	F(200)=	96	F(201)=	12

（表六）「蓋三跳一」之最後一張牌

(四)「蓋四跳一」之規則：(分 4 組)

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，

當 $n\geq 5$ 時，$\begin{cases} if \quad F(n)+5>n+4 \quad then \quad F(n+4)=F(n)+5-n \\ if \quad F(n)+5\leq n+4 \quad then \quad F(n+4)=F(n)+5 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=4i+j$ （當 $i\geq 1$ 時） （$j=1, 2, 3, 4$）	$\begin{cases} if \quad n>j\times 5^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{5}{4}(n-j\times 5^k) \\ if \quad n=j\times 5^k \quad then \quad F(n)=j\times 5^k \end{cases}$ 當$n=5^k$時：1，5，25，125，625，3125，…等。 當$n=2\times 5^k$時：2，10，50，250，1250，6250，…等。 當$n=3\times 5^k$時：3，15，75，375，1875，9375，…等。 當$n=4\times 5^k$時：4，20，100，500，2500，12500，…等。

註：此$j\times 5^k$為小於且最接近張數n的次方數（$j=1, 2, 3, 4$）。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3	F(4)=	4
F(5)=	5	F(6)=	5	F(7)=	5	F(8)=	5
F(9)=	5	F(10)=	10	F(11)=	10	F(12)=	10
F(13)=	10	F(14)=	5	F(15)=	15	F(16)=	15
F(17)=	15	F(18)=	10	F(19)=	5	F(20)=	20
F(21)=	20	F(22)=	15	F(23)=	10	F(24)=	5
F(25)=	25	F(26)=	20	F(27)=	15	F(28)=	10
…	…	…	…	…	…	…	…
F(189)=	80	F(190)=	175	F(191)=	145	F(192)=	115
F(193)=	85	F(194)=	180	F(195)=	150	F(196)=	120
F(197)=	90	F(198)=	185	F(199)=	155	F(200)=	125

（表七）「蓋四跳一」之最後一張牌

(五)「蓋五跳一」之規則：(分 5 組)

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，$F(5)=5$，

當 $n\geq 6$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+6>n+5 & then & F(n+5)=F(n)+6-n \\ if & F(n)+6\leq n+5 & then & F(n+5)=F(n)+6 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=5i+j$ (當 $i\geq 1$ 時) ($j=1, 2, 3, 4, 5$)	$\begin{cases} if & n>j\times 6^k & then & F(n)=\frac{6}{5}(n-j\times 6^k) \\ if & n=j\times 6^k & then & F(n)=j\times 6^k \end{cases}$ 當$n=6^k$時：1，6，36，216，1296，…等。 當$n=2\times 6^k$時：2，12，72，432，2596，…等。 當$n=3\times 6^k$時：3，18，108，648，3888，…等。 當$n=4\times 6^k$時：4，24，144，864，5184，…等。 當$n=5\times 6^k$時：5，30，180，1080，6480，…等。

註：此$j\times 6^k$為小於且最接近張數n的次方數（$j=1, 2, 3, 4, 5$）。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3	F(4)=	4	F(5)=	5
F(6)=	6	F(7)=	6	F(8)=	6	F(9)=	6	F(10)=	6
F(11)=	6	F(12)=	12	F(13)=	12	F(14)=	12	F(15)=	12
F(16)=	12	F(17)=	6	F(18)=	18	F(19)=	18	F(20)=	18
F(21)=	18	F(22)=	12	F(23)=	6	F(24)=	24	F(25)=	24
F(26)=	24	F(27)=	18	F(28)=	12	F(29)=	6	F(30)=	30
F(31)=	30	F(32)=	24	F(33)=	18	F(34)=	12	F(35)=	6
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
F(186)=	180	F(187)=	138	F(188)=	96	F(189)=	54	F(190)=	12
F(191)=	186	F(192)=	144	F(193)=	102	F(194)=	60	F(195)=	18
F(196)=	192	F(197)=	150	F(198)=	108	F(199)=	66	F(200)=	24

（表八）「蓋五跳一」之最後一張牌

(六) 小結：「蓋 p 跳一」規則下，最後一張牌之推導（跳過 p 張小於張數 n）（分 p 組）

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)$~$F(p)$

當 $n\geq p+1$ 時，$\begin{cases} if & F(n)+(p+1)>n+p & then & F(n+p)=F(n)+(p+1)-n \\ if & F(n)+(p+1)\leq n+p & then & F(n+p)=F(n)+(p+1) \end{cases}$

【結論 1-2】「蓋p跳一」規則下，最後一張牌之推導（分p組）

設張數為n，最後一張牌為$F(n)$，初始值為$F(1)$~$F(p)$

$n=p\,i+j$ （當 $i\geq 1$ 時）（當$j=1, 2, 3, \ldots, p$時，會有p組情形）

最後一張牌$F(n)$為$\begin{cases} if & n>j\times(p+1)^k & then & F(n)=\frac{p+1}{p}\left[n-j\times(p+1)^k\right] \\ if & n=j\times(p+1)^k & then & F(n)=j\times(p+1)^k \end{cases}$

註：此$j\times(p+1)^k$為小於且最接近張數n的次方數。

三、當 $p=r\times q$ 時，「蓋 r q 跳 q」規則下，最後一張牌之推導

(一) 當 $r=1$ 時，當 $p=q$ 時，「蓋 q 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為$F(1)$~$F(2q-1)$，分為q組探討，張數n在其組別下為公差q的等差數列，最後一張牌$F(n)$為公差 $2q$的「等差跳躍函數」，因此當$p：q=1：1$，可推論出：$n=qi+q$時：當$n=q\times 2^k$時，則$F(n)=q\times 2^k$的特性。

實例一：「蓋二跳二」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=2i+1$	（當 $n\geq 4$ 時）$\begin{cases} if & F(n)+4>n+2 & then & F(n+2)=F(n)+4-n \\ if & F(n)+4\leq n+2 & then & F(n+2)=F(n)+4 \end{cases}$
$n=2i+2$（當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if & n>2\times 2^k & then & F(n)=\dfrac{4}{2}(n-2\times 2^k) \\ if & n=2\times 2^k & then & F(n)=2\times 2^k \end{cases}$ 例：$F(4)=4$，$F(8)=8$，$F(16)=16$，$F(32)=32$，$F(64)=64$，…等。

實例二：「蓋三跳三」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，$F(5)=4$，

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=3i+1$ 或 $n=3i+2$	（當 $n\geq 6$ 時）$\begin{cases} if & F(n)+6>n+3 & then & F(n+3)=F(n)+6-n \\ if & F(n)+6\leq n+3 & then & F(n+3)=F(n)+6 \end{cases}$
$n=3i+3$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if & n>3\times 2^k & then & F(n)=\dfrac{6}{3}(n-3\times 2^k) \\ if & n=3\times 2^k & then & F(n)=3\times 2^k \end{cases}$ 例：$F(6)=6$，$F(12)=12$，$F(24)=24$，$F(48)=48$，$F(96)=96$，…等。

n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2
F(3)=	3	F(4)=	4
F(5)=	4	F(6)=	4
F(7)=	3	F(8)=	8
F(9)=	7	F(10)=	4
F(11)=	11	F(12)=	8
F(13)=	4	F(14)=	12
…	…	…	…
F(195)=	48	F(196)=	136
F(197)=	52	F(198)=	140
F(199)=	56	F(200)=	144

（表九）「蓋二跳二」之最後一張牌

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3
F(4)=	4	F(5)=	4	F(6)=	6
F(7)=	6	F(8)=	5	F(9)=	6
F(10)=	5	F(11)=	11	F(12)=	12
F(13)=	11	F(14)=	6	F(15)=	6
F(16)=	4	F(17)=	12	F(18)=	12
F(19)=	10	F(20)=	18	F(21)=	18
…	…	…	…	…	…
F(193)=	166	F(194)=	58	F(195)=	6
F(196)=	172	F(197)=	64	F(198)=	12
F(199)=	178	F(200)=	70	F(201)=	18

（表十）「蓋三跳三」之最後一張牌

(二) 當 $r=2$ 時，當 $p=2q$ 時，「蓋 $2q$ 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為$F(1)$~$F(3q-1)$，分為 $2q$組探討，張數n在其組別下為公差 $2q$的等差數列，最後一張牌$F(n)$為公差 $3q$的「等差跳躍函數」，因此當p：$q=2$：1，可推論出：

(1) $n=2q\,i+q$時：當$n=q\times 3^k$時，則$F(n)=q\times 3^k$的特性。

(2) $n=2q\,i+2q$時：當$n=2q\times 3^k$時，則$F(n)=2q\times 3^k$的特性。

實例一：「蓋四跳二」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，$F(5)=5$，

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=4i+1$ 或 $n=4i+3$	（當 $n\geq 6$ 時） $\begin{cases} if \quad F(n)+6>n+4 \quad then \quad F(n+4)=F(n)+6-n \\ if \quad F(n)+6\leq n+4 \quad then \quad F(n+4)=F(n)+6 \end{cases}$
$n=4i+2$ （當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 3^k \quad then \quad F(n)=\frac{6}{4}(n-2\times 3^k) \\ if \quad n=2\times 3^k \quad then \quad F(n)=2\times 3^k \end{cases}$ 例：$F(2)=2$，$F(6)=6$，$F(18)=18$，$F(54)=54$，…等。
$n=4i+4$ （當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>4\times 3^k \quad then \quad F(n)=\frac{6}{4}(n-4\times 3^k) \\ if \quad n=4\times 3^k \quad then \quad F(n)=4\times 3^k \end{cases}$ 例：$F(4)=4$，$F(12)=12$，$F(36)=36$，$F(108)=108$，…等。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3	F(4)=	4
F(5)=	5	F(6)=	6	F(7)=	6	F(8)=	6
F(9)=	6	F(10)=	6	F(11)=	5	F(12)=	12
F(13)=	12	F(14)=	12	F(15)=	11	F(16)=	6
F(17)=	5	F(18)=	18	F(19)=	17	F(20)=	12
F(21)=	11	F(22)=	6	F(23)=	23	F(24)=	18
F(25)=	17	F(26)=	12	F(27)=	6	F(28)=	24
…	…	…	…	…	…	…	…
F(189)=	101	F(190)=	42	F(191)=	185	F(192)=	126
F(193)=	107	F(194)=	48	F(195)=	191	F(196)=	132
F(197)=	113	F(198)=	54	F(199)=	197	F(200)=	138

（表十一）「蓋四跳二」之最後一張牌

實例二：「蓋六跳三」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，$F(5)=5$，$F(6)=6$，$F(7)=7$，$F(8)=7$，

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=6i+1$ 或 $n=6i+2$ 或 $n=6i+4$ 或 $n=6i+5$	（當 $n\geq 9$ 時） $\begin{cases} if \quad F(n)+9>n+6 \quad then \quad F(n+6)=F(n)+9-n \\ if \quad F(n)+9\leq n+6 \quad then \quad F(n+6)=F(n)+9 \end{cases}$
$n=6i+3$ （當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>3\times 3^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{9}{6}(n-3\times 3^k) \\ if \quad n=3\times 3^k \quad then \quad F(n)=3\times 3^k \end{cases}$ 例：$F(3)=3$，$F(9)=9$，$F(27)=27$，$F(81)=81$，…等。
$n=6i+6$ （當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>6\times 3^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{9}{6}(n-6\times 3^k) \\ if \quad n=6\times 3^k \quad then \quad F(n)=6\times 3^k \end{cases}$ 例：$F(6)=6$，$F(18)=18$，$F(54)=54$，$F(162)=162$，…等。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3	F(4)=	4	F(5)=	5	F(6)=	6
F(7)=	7	F(8)=	7	F(9)=	9	F(10)=	9	F(11)=	9	F(12)=	9
F(13)=	9	F(14)=	8	F(15)=	9	F(16)=	8	F(17)=	7	F(18)=	18
F(19)=	18	F(20)=	17	F(21)=	18	F(22)=	17	F(23)=	16	F(24)=	9
F(25)=	8	F(26)=	26	F(27)=	27	F(28)=	26	F(29)=	25	F(30)=	18
F(31)=	17	F(32)=	9	F(33)=	9	F(34)=	7	F(35)=	34	F(36)=	27
F(37)=	26	F(38)=	18	F(39)=	18	F(40)=	16	F(41)=	8	F(42)=	36
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
F(187)=	27	F(188)=	169	F(189)=	162	F(190)=	153	F(191)=	126	F(192)=	45
F(193)=	36	F(194)=	178	F(195)=	171	F(196)=	162	F(197)=	135	F(198)=	54
F(199)=	45	F(200)=	187	F(201)=	180	F(202)=	171	F(203)=	144	F(204)=	63

（表十二）「蓋六跳三」之最後一張牌

(三) 當 $r=3$ 時，當 $p=3q$ 時，「蓋 $3q$ 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為$F(1)$~$F(4q-1)$，分為 $3q$組探討，張數n在其組別下為公差 $3q$的等差數列，最後一張牌$F(n)$為公差 $4q$的「等差跳躍函數」，因此當$p：q=3：1$，可推論出：

(1) $n=3q\,i+q$時會形成：當$n=q\times 4^k$時，則$F(n)=q\times 4^k$的特性。

(2) $n=3q\,i+2q$時會形成：當$n=2q\times 4^k$時，則$F(n)=2q\times 4^k$的特性。

(3) $n=3q\,i+3q$時會形成：當$n=3q\times 4^k$時，則$F(n)=3q\times 4^k$的特性。

實例：「蓋六跳二」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=3$，$F(4)=4$，$F(5)=5$，$F(6)=6$，$F(7)=7$，

張數 n	最後一張牌 $F(n)$
$n=6i+1$ 或 $n=6i+3$ 或 $n=6i+5$	（當 $n\geq 8$ 時）$\begin{cases} if \quad F(n)+8>n+6 \quad then \quad F(n+6)=F(n)+8-n \\ if \quad F(n)+8\leq n+6 \quad then \quad F(n+6)=F(n)+8 \end{cases}$
$n=6i+2$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 4^k \quad then \quad F(n)=\frac{8}{6}(n-2\times 4^k) \\ if \quad n=2\times 4^k \quad then \quad F(n)=2\times 4^k \end{cases}$ 例：$F(2)=2$，$F(8)=8$，$F(32)=32$，$F(128)=128$，…等。
$n=6i+4$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>4\times 4^k \quad then \quad F(n)=\frac{8}{6}(n-4\times 4^k) \\ if \quad n=4\times 4^k \quad then \quad F(n)=4\times 4^k \end{cases}$ 例：$F(4)=4$，$F(16)=16$，$F(64)=64$，$F(256)=256$，…等。
$n=6i+6$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>6\times 4^k \quad then \quad F(n)=\frac{8}{6}(n-6\times 4^k) \\ if \quad n=6\times 4^k \quad then \quad F(n)=6\times 4^k \end{cases}$ 例：$F(6)=6$，$F(24)=24$，$F(96)=96$，$F(384)=384$，…等。

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(1)=	1	F(2)=	2	F(3)=	3	F(4)=	4	F(5)=	5	F(6)=	6
F(7)=	7	F(8)=	8	F(9)=	8	F(10)=	8	F(11)=	8	F(12)=	8
F(13)=	8	F(14)=	8	F(15)=	7	F(16)=	16	F(17)=	16	F(18)=	16
F(19)=	16	F(20)=	16	F(21)=	15	F(22)=	8	F(23)=	7	F(24)=	24
F(25)=	24	F(26)=	24	F(27)=	23	F(28)=	16	F(29)=	15	F(30)=	8
F(31)=	7	F(32)=	32	F(33)=	31	F(34)=	24	F(35)=	23	F(36)=	16
F(37)=	15	F(38)=	8	F(39)=	39	F(40)=	32	F(41)=	31	F(42)=	24
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
F(187)=	112	F(188)=	80	F(189)=	47	F(190)=	168	F(191)=	160	F(192)=	128
F(193)=	120	F(194)=	88	F(195)=	55	F(196)=	176	F(197)=	168	F(198)=	136
F(199)=	128	F(200)=	96	F(201)=	63	F(202)=	184	F(203)=	176	F(204)=	144

（表十三）「蓋六跳二」之最後一張牌

(四) 小結：當 $p=\ r\times q$ 時，「蓋 $r\,q$ 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為 $F(1)\sim F(\,rq+q-1\,)$，（此 p、q、$r\in\mathrm{N}$）

當 $p=r\times q$ 時，即以蓋 $r\,q$ 跳 q 的規則進行，分為 $r\,q$ 組探討，張數 n 在其組別下為公差 $r\,q$ 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差 $r\,q+q$ 的「等差跳躍函數」，因此當 $p:q=r:1$，可推論出：$n=r\ q\ i+j\ q$（當 $i\geq 0$ 時）時：當 $n=j\times q\times(r+1)^k$ 時，則 $F(n)=j\times q\times(r+1)^k$ 的特性（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）。

【結論 1-3】當 $p= r\times q$ 時，「蓋 $r\,q$ 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)$~$F(rq+q-1)$，（此 p、q、$r\in\mathrm{N}$）

(1) 除了 $n=rqi+jq$ 以外（當 $n\geq rq+q$ 時）

最後一張牌 $F(n)$為 $\begin{cases} if \quad F(n)+(r+1)q>n+rq \quad then \quad F(n+rq)=F(n)+(r+1)q-n \\ if \quad F(n)+(r+1)q\leq n+rq \quad then \quad F(n+rq)=F(n)+(r+1)q \end{cases}$

(2) $n=rqi+jq$（當 $i\geq 0$ 時）（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）

最後一張牌 $F(n)$為 $\begin{cases} if \quad n>j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{r+1}{r}\left[n-j\times q\times(r+1)^k\right] \\ if \quad n=j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad F(n)=j\times q\times(r+1)^k \end{cases}$

註：此 $j\times q\times(r+1)^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數。

四、結論：「蓋 *p* 跳 *q*」規則下，最後一張牌之推導

(一) 當 $p=1$ 時，即「蓋一跳 q」規則下，已討論過。

(二) 當 $q=1$ 時，即「蓋 p 跳一」規則下，已討論過。

(三) 當 $p= r\times q$ 時，即「蓋 p 是跳 q 的整數倍數」規則下，已討論過。

(四) 除此之外，「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）

因為「蓋 p」決定分組情況，分 p 組，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差 $p+q$ 的「等差跳躍函數」，

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，

初始值為 $F(1)$ ~$F(p+q-1)$，

當 $n\geq p+q$ 時，$\begin{cases} if \quad F(n)+(p+q)>n+p \quad then \quad F(n+p)=F(n)+(p+q)-n \\ if \quad F(n)+(p+q)\leq n+p \quad then \quad F(n+p)=F(n)+(p+q) \end{cases}$

【研究二】:「跳 *q* 蓋 *p*」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」推導

在「跳 q 蓋 p」規則下，若張數為 n，首先先跳過 q 張牌，再蓋 p 張牌後，探討最後一張牌為 $G(n)$之「等差跳躍函數」。

一、「跳 *q* 蓋一」規則下，最後一張牌之推導

(一)「跳一蓋一」之規則

初始值為 $G(1)=1$，

當 $n\geq 2$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+2>n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+2-(n+1) \\ if \quad G(n)+2\leq n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+2 \end{cases}$

在跳一蓋一的規則時，我們不難發現在第一輪時全部的偶數都蓋掉了，只剩下奇數，凡是 2 乘方的數，其最後一張牌均為 1，亦可減化其規律：

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)=1$，當 $n\geq 2$ 時，

(a)若 $n > 2^k$ ，則 $G(n)=2(n-2^k)+1$ 。
(b)若 $n = 2^k$ ，則 $G(n)=n-2^k+1$ ，(即最後一張牌 $G(n)=1$)。
註：此 2^k 為小於且最接近張數 n 的次方數。
例如：張數 $n=3$ 小於且最接近的次方數為 2，$G(3)=2(3-2)+1=3$；張數 $n=4\sim7$ 小於且最接近的次方數為 2^2，$G(7)=2(7-2^2)+1=7$；張數 $n=9\sim15$ 小於且最接近的次方數為 2^3 ，$G(15)=2(15-2^3)+1=15$。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(21)=	11	G(41)=	19	G(61)=	59	G(81)=	35
G(2)=	1	G(22)=	13	G(42)=	21	G(62)=	61	G(82)=	37
G(3)=	3	G(23)=	15	G(43)=	23	G(63)=	63	G(83)=	39
G(4)=	1	G(24)=	17	G(44)=	25	G(64)=	1	G(84)=	41
G(5)=	3	G(25)=	19	G(45)=	27	G(65)=	3	G(85)=	43
G(6)=	5	G(26)=	21	G(46)=	29	G(66)=	5	G(86)=	45
G(7)=	7	G(27)=	23	G(47)=	31	G(67)=	7	G(87)=	47
G(8)=	1	G(28)=	25	G(48)=	33	G(68)=	9	G(88)=	49
G(9)=	3	G(29)=	27	G(49)=	35	G(69)=	11	G(89)=	51
G(10)=	5	G(30)=	29	G(50)=	37	G(70)=	13	G(90)=	53
G(11)=	7	G(31)=	31	G(51)=	39	G(71)=	15	G(91)=	55
G(12)=	9	G(32)=	1	G(52)=	41	G(72)=	17	G(92)=	57
G(13)=	11	G(33)=	3	G(53)=	43	G(73)=	19	G(93)=	59
G(14)=	13	G(34)=	5	G(54)=	45	G(74)=	21	G(94)=	61
G(15)=	15	G(35)=	7	G(55)=	47	G(75)=	23	G(95)=	63
G(16)=	1	G(36)=	9	G(56)=	49	G(76)=	25	…	…
G(17)=	3	G(37)=	11	G(57)=	51	G(77)=	27	G(197)=	139
G(18)=	5	G(38)=	13	G(58)=	53	G(78)=	29	G(198)=	141
G(19)=	7	G(39)=	15	G(59)=	55	G(79)=	31	G(199)=	143
G(20)=	9	G(40)=	17	G(60)=	57	G(80)=	33	G(200)=	145

（表十四）「跳一蓋一」之最後一張牌

(二)「跳二蓋一」之規則

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=2$，

當 $n\geq 3$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+3>n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+3-(n+1) \\ if \quad G(n)+3\leq n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+3 \end{cases}$

(三) 跳三蓋一之規則

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=2$，

當 $n\geq 4$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+4>n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+4-(n+1) \\ if \quad G(n)+4\leq n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+4 \end{cases}$

(四)「跳四蓋一」之規則

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=2$，$G(3)=1$，$G(4)=2$，

當 $n\geq 5$ 時，$\begin{cases} if & G(n)+5>n+1 & then & G(n+1)=G(n)+5-(n+1) \\ if & G(n)+5\leq n+1 & then & G(n+1)=G(n)+5 \end{cases}$

(五)「跳五蓋一」之規則

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=1$，$G(4)=3$，$G(5)=4$，

當 $n\geq 6$ 時，$\begin{cases} if & G(n)+6>n+1 & then & G(n+1)=G(n)+6-(n+1) \\ if & G(n)+6\leq n+1 & then & G(n+1)=G(n)+6 \end{cases}$

跳二蓋一		跳三蓋一		跳四蓋一		跳五蓋一	
n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(1)=	1	G(1)=	1	G(1)=	1
G(2)=	2	G(2)=	1	G(2)=	2	G(2)=	1
G(3)=	2	G(3)=	2	G(3)=	1	G(3)=	1
G(4)=	1	G(4)=	2	G(4)=	2	G(4)=	3
G(5)=	4	G(5)=	1	G(5)=	2	G(5)=	4
G(6)=	1	G(6)=	5	G(6)=	1	G(6)=	4
G(7)=	4	G(7)=	2	G(7)=	6	G(7)=	3
G(8)=	7	G(8)=	6	G(8)=	3	G(8)=	1
G(9)=	1	G(9)=	1	G(9)=	8	G(9)=	7
…	…	…	…	…	…	…	…
G(198)=	122	G(198)=	139	G(198)=	103	G(198)=	82
G(199)=	125	G(199)=	143	G(199)=	108	G(199)=	88
G(200)=	128	G(200)=	147	G(200)=	113	G(200)=	94

（表十五）「跳二、三、四、五蓋一」之最後一張牌

【結論 2-1】「跳 q 蓋一」規則下，最後一張牌之推導

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)\sim G(q)$

當 $n\geq q+1$ 時，$\begin{cases} if & G(n)+(q+1)>n+1 & then & G(n+1)=G(n)+(q+1)-(n+1) \\ if & G(n)+(q+1)\leq n+1 & then & G(n+1)=G(n)+(q+1) \end{cases}$

二、「跳一蓋 *p*」規則下，最後一張牌之推導

(一)「跳一蓋一」之規則：（分 1 組）已在跳 q 蓋一之規則時，當 $q=1$ 時，已討論過。

初始值為 $G(1)=1$，

當 $n\geq 2$ 時，$\begin{cases} if & G(n)+2>n+1 & then & G(n+1)=G(n)+2-(n+1) \\ if & G(n)+2\leq n+1 & then & G(n+1)=G(n)+2 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=i+1$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2^k \quad then \quad G(n)=\frac{2}{1}(n-2^k)+1 \\ if \quad n=2^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$

註：此 2^k為小於且最接近張數n的次方數。

(二)「跳一蓋二」之規則：(分 2 組）

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，

當 $n\geq 3$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+3>n+2 \quad then \quad G(n+2)=G(n)+3-(n+2) \\ if \quad G(n)+3\leq n+2 \quad then \quad G(n+2)=G(n)+3 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=2i+1$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-3^k)+1 \\ if \quad n=3^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$
$n=2i+2$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-2\times 3^k)+1 \\ if \quad n=2\times 3^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$

註：此 3^k、2×3^k為小於且最接近張數n的次方數。

(三)「跳一蓋三」之規則：(分 3 組）

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=1$，

當 $n\geq 4$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+4>n+3 \quad then \quad G(n+3)=G(n)+4-(n+3) \\ if \quad G(n)+4\leq n+3 \quad then \quad G(n+3)=G(n)+4 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=3i+1$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>4^k \quad then \quad G(n)=\frac{4}{3}(n-4^k)+1 \\ if \quad n=4^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$
$n=3i+2$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 4^k \quad then \quad G(n)=\frac{4}{3}(n-2\times 4^k)+1 \\ if \quad n=2\times 4^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$
$n=3i+3$ （當 $i\geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>3\times 4^k \quad then \quad G(n)=\frac{4}{3}(n-3\times 4^k)+1 \\ if \quad n=3\times 4^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$

註：此 4^k、2×4^k、3×4^k為小於且最接近張數n的次方數。

n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	1
G(3)=	1	G(4)=	4
G(5)=	4	G(6)=	1
G(7)=	7	G(8)=	4
G(9)=	1	G(10)=	7
G(11)=	4	G(12)=	10
G(13)=	7	G(14)=	13
…	…	…	…
G(195)=	172	G(196)=	52
G(197)=	175	G(198)=	55
G(199)=	178	G(200)=	58

（表十六）「跳一蓋二」之最後一張牌

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	1	G(3)=	1
G(4)=	1	G(5)=	5	G(6)=	5
G(7)=	5	G(8)=	1	G(9)=	9
G(10)=	9	G(11)=	5	G(12)=	1
G(13)=	13	G(14)=	9	G(15)=	5
G(16)=	1	G(17)=	13	G(18)=	9
G(19)=	5	G(20)=	17	G(21)=	13
…	…	…	…	…	…
G(193)=	173	G(194)=	89	G(195)=	5
G(196)=	177	G(197)=	93	G(198)=	9
G(199)=	181	G(200)=	97	G(201)=	13

（表十七）「跳一蓋三」之最後一張牌

(四)「跳一蓋四」之規則：(分 4 組)

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=1$，$G(4)=1$，

當 $n\geq 1$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+5>n+4 \quad then \quad G(n+4)=G(n)+5-(n+4) \\ if \quad G(n)+5\leq n+4 \quad then \quad G(n+4)=G(n)+5 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=4i+j$ （當 $i\geq 1$ 時） （$j=1, 2, 3, 4$）	（當 $j=1, 2, 3, 4$ 時，會有 4 組情形） $\begin{cases} if \quad n>j\times 5^k \quad then \quad G(n)=\frac{5}{4}(n-j\times 5^k)+1 \\ if \quad n=j\times 5^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$

註：此 $j\times 5^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數（$j=1, 2, 3, 4$）。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	1	G(3)=	1	G(4)=	1
G(5)=	1	G(6)=	6	G(7)=	6	G(8)=	6
G(9)=	6	G(10)=	1	G(11)=	11	G(12)=	11
G(13)=	11	G(14)=	6	G(15)=	1	G(16)=	16
G(17)=	16	G(18)=	11	G(19)=	6	G(20)=	1
G(21)=	21	G(22)=	16	G(23)=	11	G(24)=	6
G(25)=	1	G(26)=	21	G(27)=	16	G(28)=	11
…	…	…	…	…	…	…	…
G(189)=	81	G(190)=	176	G(191)=	146	G(192)=	116
G(193)=	86	G(194)=	181	G(195)=	151	G(196)=	121
G(197)=	91	G(198)=	186	G(199)=	156	G(200)=	126

（表十八）「跳一蓋四」之最後一張牌

(五)「跳一蓋五」之規則：(分 5 組)

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=1$，$G(4)=1$，$G(5)=1$，

當 $n\geq 1$ 時，$\begin{cases} if & G(n)+6>n+5 & then & G(n+5)=G(n)+6-(n+5) \\ if & G(n)+6\leq n+5 & then & G(n+5)=G(n)+6 \end{cases}$

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=5i+j$（當 $i\geq 1$ 時）（$j=1, 2, 3, 4, 5$）	（當 $j=1, 2, 3, 4, 5$ 時，會有 5 組情形）$\begin{cases} if & n>j\times 6^k & then & G(n)=\frac{6}{5}(n-j\times 6^k)+1 \\ if & n=j\times 6^k & then & G(n)=1 \end{cases}$

註：此 $j\times 6^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數（$j=1, 2, 3, 4, 5$）。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
F(1)=	1	F(2)=	1	F(3)=	1	F(4)=	1	F(5)=	1
F(6)=	1	F(7)=	7	F(8)=	7	F(9)=	7	F(10)=	7
F(11)=	7	F(12)=	1	F(13)=	13	F(14)=	13	F(15)=	13
F(16)=	13	F(17)=	7	F(18)=	1	F(19)=	19	F(20)=	19
F(21)=	19	F(22)=	13	F(23)=	7	F(24)=	1	F(25)=	25
F(26)=	25	F(27)=	19	F(28)=	13	F(29)=	7	F(30)=	1
F(31)=	31	F(32)=	25	F(33)=	19	F(34)=	13	F(35)=	7
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
F(186)=	181	F(187)=	139	F(188)=	97	F(189)=	55	F(190)=	13
F(191)=	187	F(192)=	145	F(193)=	103	F(194)=	61	F(195)=	19
F(196)=	193	F(197)=	151	F(198)=	109	F(199)=	67	F(200)=	25

（表十九）「跳一蓋五」之最後一張牌

(六) 小結：「跳一蓋 p」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)=1\sim G(p)=1$，當 $n\geq p+1$ 時，

$$\begin{cases} if & G(n)+(p+1)>n+p & then & G(n+p)=G(n)+(p+1)-(n+p) \\ if & G(n)+(p+1)\leq n+p & then & G(n+p)=G(n)+(p+1) \end{cases}$$

，整理後，可得 $\begin{cases} if & G(n)+(p+1)>n+p & then & G(n+p)=G(n)+(p+1)-(n+p) \\ if & G(n)+(p+1)\leq n+p & then & G(n+p)=G(n)+(p+1) \end{cases}$

【結論 2-2】「跳一蓋 p」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)=1\sim G(p)=1$

$n=p\,i+j$（當 $i\geq 1$ 時）（當 $j=1, 2, 3, \ldots, p$ 時，會有 p 組情形）

最後一張牌 $G(n)$ 為 $\begin{cases} if & n>j\times(p+1)^k & then & G(n)=\frac{p+1}{p}\left[n-j\times(p+1)^k\right]+1 \\ if & n=j\times(p+1)^k & then & G(n)=1 \end{cases}$

註：此 $j\times(p+1)^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數。

三、當 $p= r \times q$ 時，「跳 q 蓋 rq」規則下，最後一張牌之推導（$q \geq 2$）

(一) 當 $r=1$ 時，當 $p=q$ 時，「跳 q 蓋 q」規則下，最後一張牌之推導（$q \geq 2$）

初始值為$G(1)$~$G(2q-1)$，分為q組探討，張數n在其組別下為公差q的等差數列，最後一張牌$G(n)$為公差 $2q$的「等差跳躍函數」，因此當$p：q=1：1$，可推論出：
$n=q\,i+q$時：當$n=q \times 2^k$時，則$G(n)=q$的特性。

實例一：「跳二蓋二」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=2$，

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=2i+1$（當 $n \geq 4$ 時）	$\begin{cases} if \quad G(n)+4>n+2 \quad then \quad G(n+2)=G(n)+4-(n+2) \\ if \quad G(n)+4 \leq n+2 \quad then \quad G(n+2)=G(n)+4 \end{cases}$
$n=2i+2$（當 $i \geq 1$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 2^k \quad then \quad G(n)=2(n-2\times 2^k)+2 \\ if \quad n=2\times 2^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(4)=2$，$G(8)=2$，$G(16)=2$，$G(32)=2$，$G(64)=2$，….等。

實例二：「跳三蓋三」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=3$，

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=3i+1$ 或 $n=3i+2$	（當 $n \geq 4$ 時） $\begin{cases} if \quad G(n)+6>n+3 \quad then \quad G(n+3)=G(n)+6-(n+3) \\ if \quad G(n)+6 \leq n+3 \quad then \quad G(n+3)=G(n)+6 \end{cases}$
$n=3i+3$（當 $i \geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>3\times 2^k \quad then \quad G(n)=2(n-3\times 2^k)+3 \\ if \quad n=3\times 2^k \quad then \quad G(n)=3 \end{cases}$ 例：$G(6)=3$，$G(12)=3$，$G(24)=3$，$G(48)=3$，$G(96)=3$，…等。

n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	2
G(3)=	2	G(4)=	2
G(5)=	1	G(6)=	6
G(7)=	5	G(8)=	2
G(9)=	9	G(10)=	6
G(11)=	2	G(12)=	10
G(13)=	6	G(14)=	14
…	…	…	…
G(195)=	50	G(196)=	138
G(197)=	54	G(198)=	142
G(199)=	58	G(200)=	146

（表二十）「跳二蓋二」之最後一張牌

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	1	G(3)=	3
G(4)=	3	G(5)=	2	G(6)=	3
G(7)=	2	G(8)=	8	G(9)=	9
G(10)=	8	G(11)=	3	G(12)=	3
G(13)=	1	G(14)=	9	G(15)=	9
G(16)=	7	G(17)=	15	G(18)=	15
G(19)=	13	G(20)=	1	G(21)=	21
…	…	…	…	…	…
G(193)=	169	G(194)=	61	G(195)=	9
G(196)=	175	G(197)=	67	G(198)=	15
G(199)=	181	G(200)=	73	G(201)=	21

（表二十一）「跳三蓋三」之最後一張牌

(二) 當 $r=2$ 時，當 $p=2q$ 時，「跳 q 蓋 $2q$」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為$G(1)$~$G(3q-1)$，分為 $2q$組探討，張數n在其組別下為公差 $2q$的等差數列，最後一張牌$G(n)$為公差 $3q$的「等差跳躍函數」，因此當$p：q=2：1$，可推論出：

(1) $n=2q\,i+q$時：當$n=q\times 3^k$時，則$G(n)=q$。

(2) $n=2q\,i+2q$時：當$n=2q\times 3^k$時，則$G(n)=q$。

實例一：「跳二蓋四」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=2$，$G(3)=2$，$G(4)=2$，

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=4i+1$ 或 $n=4i+3$	（當 $n\geq 4$ 時） $\begin{cases} if \quad G(n)+6>n+4 \quad then \quad G(n+4)=G(n)+6-(n+4) \\ if \quad G(n)+6\leq n+4 \quad then \quad G(n+4)=G(n)+6 \end{cases}$
$n=4i+2$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-2\times 3^k)+2 \\ if \quad n=2\times 3^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(2)=2$，$G(6)=2$，$G(18)=2$，$G(54)=2$，$G(162)=2$，…等。
$n=4i+4$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>4\times 3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-4\times 3^k)+2 \\ if \quad n=4\times 3^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(4)=2$，$G(12)=2$，$G(36)=2$，$G(108)=2$，$G(324)=2$，…等。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	2	G(3)=	2	G(4)=	2
G(5)=	2	G(6)=	2	G(7)=	1	G(8)=	8
G(9)=	8	G(10)=	8	G(11)=	7	G(12)=	2
G(13)=	1	G(14)=	14	G(15)=	13	G(16)=	8
G(17)=	7	G(18)=	2	G(19)=	19	G(20)=	14
G(21)=	13	G(22)=	8	G(23)=	2	G(24)=	20
G(25)=	19	G(26)=	14	G(27)=	8	G(28)=	26
…	…	…	…	…	…	…	…
G(189)=	103	G(190)=	44	G(191)=	187	G(192)=	128
G(193)=	109	G(194)=	50	G(195)=	193	G(196)=	134
G(197)=	115	G(198)=	56	G(199)=	199	G(200)=	140

（表二十二）「跳二蓋四」規則

實例二：「跳三蓋六」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=1$，$G(3)=3$，$G(4)=3$，$G(5)=3$，$G(6)=3$，

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=6i+1$ 或 $n=6i+2$ 或 $n=6i+4$ 或 $n=6i+5$	（當 $n\geq 7$ 時） $\begin{cases} if \quad G(n)+9>n+6 \quad then \quad G(n+6)=F(n)+9-(n+6) \\ if \quad G(n)+9\leq n+6 \quad then \quad G(n+6)=F(n)+9 \end{cases}$
$n=6i+3$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>3\times 3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-3\times 3^k)+3 \\ if \quad n=3\times 3^k \quad then \quad G(n)=3 \end{cases}$ 例：$G(3)=3$，$G(9)=3$，$G(27)=3$，$G(81)=3$，$G(243)=3$，…等。
$n=6i+6$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>6\times 3^k \quad then \quad G(n)=\frac{3}{2}(n-6\times 3^k)+3 \\ if \quad n=6\times 3^k \quad then \quad G(n)=3 \end{cases}$ 例：$G(6)=3$，$G(18)=3$，$G(54)=3$，$G(162)=3$，$G(486)=3$，…等。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	1	G(3)=	3	G(4)=	3	G(5)=	3	G(6)=	3
G(7)=	3	G(8)=	2	G(9)=	3	G(10)=	2	G(11)=	1	G(12)=	12
G(13)=	12	G(14)=	11	G(15)=	12	G(16)=	11	G(17)=	10	G(18)=	3
G(19)=	2	G(20)=	20	G(21)=	21	G(22)=	20	G(23)=	19	G(24)=	12
G(25)=	11	G(26)=	3	G(27)=	3	G(28)=	1	G(29)=	28	G(30)=	21
G(31)=	20	G(32)=	12	G(33)=	12	G(34)=	10	G(35)=	2	G(36)=	30
G(37)=	29	G(38)=	21	G(39)=	21	G(40)=	19	G(41)=	11	G(42)=	39
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
G(187)=	30	G(188)=	172	G(189)=	165	G(190)=	156	G(191)=	129	G(192)=	48
G(193)=	39	G(194)=	181	G(195)=	174	G(196)=	165	G(197)=	138	G(198)=	57
G(199)=	48	G(200)=	190	G(201)=	183	G(202)=	174	G(203)=	147	G(204)=	66

（表二十三）「跳三蓋六」規則

(三) 當 $r=3$ 時，當 $p=3q$ 時，「跳 q 蓋 $3q$」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為$G(1)\sim G(4q-1)$，分為 $3q$組探討，張數n在其組別下為公差 $3q$的等差數列，最後一張牌$G(n)$為公差 $4q$的「等差跳躍函數」，因此當$p:q=3:1$，可推論出：

(1) $n=3q\,i+q$時會形成：當$n=q\times 4^k$時，則$G(n)=q$。

(2) $n=3q\,i+2q$時會形成：當$n=2q\times 4^k$時，則$G(n)=q$。

(3) $n=3q\,i+3q$時會形成：當$n=3q\times 4^k$時，則$G(n)=q$。

實例：「跳二蓋六」規則下，最後一張牌之推導

初始值為 $G(1)=1$，$G(2)=2$，$G(3)=2$，$G(4)=2$，$G(5)=2$，$G(6)=2$，$G(7)=2$，

張數 n	最後一張牌 $G(n)$
$n=6i+1$ 或 $n=6i+3$ 或 $n=6i+5$	（當 $n\geq 8$ 時）$\begin{cases} if \quad G(n)+8>n+6 \quad then \quad G(n+6)=G(n)+8-(n+6) \\ if \quad G(n)+8\leq n+6 \quad then \quad G(n+6)=G(n)+8 \end{cases}$
$n=6i+2$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>2\times 4^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{4}{3}(n-2\times 4^k)+2 \\ if \quad n=2\times 4^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(2)=2$，$G(8)=2$，$G(32)=2$，$G(128)=2$，$G(512)=2$，…等。
$n=6i+4$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>4\times 4^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{4}{3}(n-4\times 4^k)+2 \\ if \quad n=4\times 4^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(4)=2$，$G(16)=2$，$G(64)=2$，$G(256)=2$，$G(1024)=2$，…等。
$n=6i+6$（當 $i\geq 0$ 時）	$\begin{cases} if \quad n>6\times 4^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{4}{3}(n-6\times 4^k)+2 \\ if \quad n=6\times 4^k \quad then \quad G(n)=2 \end{cases}$ 例：$G(6)=2$，$G(24)=2$，$G(96)=2$，$G(384)=2$，$G(1536)=2$，…等。

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(1)=	1	G(2)=	2	G(3)=	2	G(4)=	2	G(5)=	2	G(6)=	2
G(7)=	2	G(8)=	2	G(9)=	1	G(10)=	10	G(11)=	10	G(12)=	10
G(13)=	10	G(14)=	10	G(15)=	9	G(16)=	2	G(17)=	1	G(18)=	18
G(19)=	18	G(20)=	18	G(21)=	17	G(22)=	10	G(23)=	9	G(24)=	2
G(25)=	1	G(26)=	26	G(27)=	25	G(28)=	18	G(29)=	17	G(30)=	10
G(31)=	9	G(32)=	2	G(33)=	33	G(34)=	26	G(35)=	25	G(36)=	18
G(37)=	17	G(38)=	10	G(39)=	2	G(40)=	34	G(41)=	33	G(42)=	26
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
G(187)=	114	G(188)=	82	G(189)=	49	G(190)=	170	G(191)=	162	G(192)=	130
G(193)=	122	G(194)=	90	G(195)=	57	G(196)=	178	G(197)=	170	G(198)=	138
G(199)=	130	G(200)=	98	G(201)=	65	G(202)=	186	G(203)=	178	G(204)=	146

（表二十四）「跳二蓋六」規則

(四) 小結：當 $p=r\times q$ 時，「跳 q 蓋 $r\,q$」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

初始值為 $G(1)\sim G(r\,q+q-1)$，（此 p、q、$r\in\mathrm{N}$），分為 $r\,q$ 組探討，

張數 n 在其組別下為公差 $r\;q$ 的等差數列，最後一張牌 $G(n)$為公差 $r\;q+q$ 的「等差跳躍函數」，因此當 $p:q=r:1$，可推論出：$n=r\,q\,i+j\,q$（當 $i\geq 0$ 時）時：

當 $n=j\times q\times(r+1)^k$ 時，則 $G(n)=q$ 的特性（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）。

【結論 2-3】當 $p=r\times q$ 時，「跳 q 蓋 rq」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)\sim G(rq+q-1)$，（此 p、q、$r\in$N）

(1) 除了 $n=rqi+jq$ 以外（當 $n\geq(r+1)q$ 時）

最後一張牌 $G(n)$為

$$\begin{cases} if \quad G(n)+(r+1)q>n+rq \quad then \quad G(n+rq)=G(n)+(r+1)q-(n+rq) \\ if \quad G(n)+(r+1)q\leq n+rq \quad then \quad G(n+rq)=G(n)+(r+1)q \end{cases}$$

(2) $n=rqi+jq$（當 $i\geq 0$ 時）（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）

最後一張牌 $G(n)$為 $\begin{cases} if \quad n>j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{r+1}{r}\left[n-j\times q\times(r+1)^k\right]+q \\ if \quad n=j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad G(n)=q \end{cases}$

註：此 $j\times q\times(r+1)^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數。

四、結論：「跳 *q* 蓋 *p*」規則下，最後一張牌之推導

(一) 當 $p=1$ 時，即「跳 q 蓋一」規則下，已討論過。

(二) 當 $q=1$ 時，即「跳一蓋 p」規則下，已討論過。

(三) 當 $p=r\times q$ 時，即「蓋 p 是跳 q 的整數倍數」規則下，已討論過。

(四) 除此之外，「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）

因為「蓋 p」決定分組情況，分 p 組，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列，最後一張牌 $G(n)$為公差 $p+q$ 的「等差跳躍函數」，

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)\sim G(p+q-1)$，

當 $n\geq p+q$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+(p+q)>n+p \quad then \quad G(n+p)=G(n)+(p+q)-(n+p) \\ if \quad G(n)+(p+q)\leq n+p \quad then \quad G(n+p)=G(n)+(p+q) \end{cases}$

【研究三】:「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則，「等差跳躍函數」的相關性與應用

一、最後一張牌之「等差跳躍函數」的相關性

設張數為 n，

設「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $F(n)$

設「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $G(n)$

初始值為 $F(1)\sim F(p+q-1)$和 $G(1)\sim G(p+q-1)$

因為「蓋 p 跳 q」規則下，首先蓋 p 張牌後，再跳過 q 張牌，而「跳 q 蓋 p」卻是先跳過 q 張牌後，再蓋 p 張牌，所以 $F(n)$與 $G(n)$會有 p 張牌之落差；又由性質二「蓋 p」決定組數，分為 p 組探討，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列。

規則	「等差跳躍函數」（$n \geq 1$）	
	相關性一	相關性二
「蓋一跳 q」與「跳 q 蓋一」	$F(n+1)=G(n)+1$	$F(n)+q=G(n)$（當 $F(n)<G(n)$才適用）
「蓋二跳 q」與「跳 q 蓋二」	$F(n+2)=G(n)+2$	
「蓋三跳 q」與「跳 q 蓋三」	$F(n+3)=G(n)+3$	
…	…	
「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」	$F(n+p)=G(n)+p$	

實例一：「蓋二跳三」與「跳三蓋二」

n	F(n)	n	F(n)
F(191)=	70	F(192)=	135
F(193)=	75	F(194)=	140
F(195)=	80	F(196)=	145
F(197)=	85	F(198)=	150
F(199)=	90	F(200)=	155

n	G(n)	n	G(n)
G(191)=	73	G(192)=	138
G(193)=	78	G(194)=	143
G(195)=	83	G(196)=	148
G(197)=	88	G(198)=	153
G(199)=	93	G(200)=	158

（表二十五）「蓋二跳三」與「跳三蓋二」相關性

實例二：「蓋三跳五」與「跳五蓋三」

n	F(n)	n	F(n)	n	F(n)
F(187)=	159	F(188)=	158	F(189)=	88
F(190)=	167	F(191)=	166	F(192)=	96
F(193)=	175	F(194)=	174	F(195)=	104
F(196)=	183	F(197)=	182	F(198)=	112
F(199)=	191	F(200)=	190	F(201)=	120

n	G(n)	n	G(n)	n	G(n)
G(187)=	164	G(188)=	163	G(189)=	93
G(190)=	172	G(191)=	171	G(192)=	101
G(193)=	180	G(194)=	179	G(195)=	109
G(196)=	188	G(197)=	187	G(198)=	117
G(199)=	196	G(200)=	195	G(201)=	125

（表二十六）「蓋三跳五」與「跳五蓋三」相關性

【結論 3-1】「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則，最後一張牌之「等差跳躍函數」相關性

設張數為 n，

設「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $F(n)$

設「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $G(n)$

初始值為 $F(1)\sim F(p+q-1)$和 $G(1)\sim G(p+q-1)$

(1) 相關性一：$if \quad n \geq 1 \quad then \quad F(n+p)=G(n)+p$

(2) 相關性二：$if \quad n \geq 1 \quad then \quad F(n)+q=G(n)$ （當 $F(n)<G(n)$才適用）

二、「約瑟芬(Josephus)問題」的應用

「約瑟芬問題」：假設有 n 個人圍成一圈，每人按順序有一個編號 1, 2, 3, 4, …, n，從第 s 號開始數起，順時針每數到 m 時，這個人就離開圈子，一直到最後一個人。

即為「跳($m-1$)蓋一」規則，因為從第 s 號開始數起，與「等差跳躍函數」從第 1 號開始數起，在圓圈裡產生 ($s-1$) 的位移，

(a) *if* $G(n)+(s-1)\le n$ *then* 最後一個人為 $G(n)+(s-1)$

(b) *if* $G(n)+(s-1)>n$ *then* 最後一個人為 $G(n)+(s-1)-n$

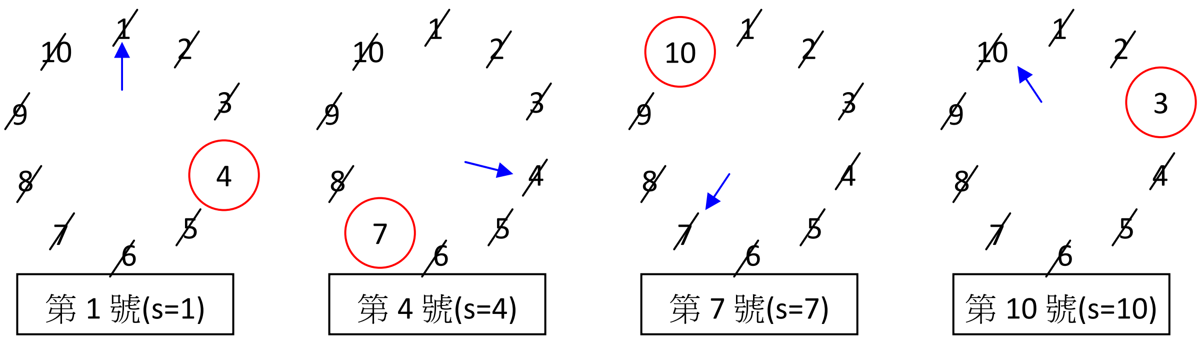
實例：假設有 10 個人圍成一圈，每人按順序有一個編號 1, 2, 3, 4, …, 10，從第 s 號開始數起，順時針每數到 3 時，這個人就離開圈子，一直到最後一個人。即為「跳二蓋一」規則，藍色箭頭為開始數，紅色圓圈為最後一個人，如下：

(1)當從第 1 號開始數起，最後一個人為第 4 號。

(2)當從第 4 號開始數起，最後一個人為第 7 號。

(3)當從第 7 號開始數起，最後一個人為第 10 號。

(4)當從第 10 號開始數起，最後一個人為第 3 號。



【結論 3-2】「約瑟芬(Josephus)問題」的應用

設張數為 n，第 s 號開始數起，在圓圈裡產生（$s-1$）的位移

最後一個人之「等差跳躍函數」為 $F(n)$，亦可用於 $G(n)$

(1) *if* $F(n)+(s-1)\le n$ *then* 最後一個人為 $F(n)+(s-1)$

(2) *if* $F(n)+(s-1)>n$ *then* 最後一個人為 $F(n)+(s-1)-n$

伍、研究結果

1. 探討「蓋一跳 q」與「跳 q 蓋一」之步伐規則

張數 n 為公差 1 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差（q+1）的「等差跳躍函數」。此等差跳躍函數 $F(n)$依公差為 q+1 增加，若此張數不存在時，則跳躍回一個較小的數。【性質一】

2. 探討「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」之步伐規則

「蓋 p」決定組數，分為 p 組探討，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$為公差（p+q）的「等差跳躍函數」。此等差跳躍函數 $F(n)$依公差為 p+q 增加，若此張數不存在時，則跳躍回一個較小的數。【性質二】

3. 「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）【研究一結論】

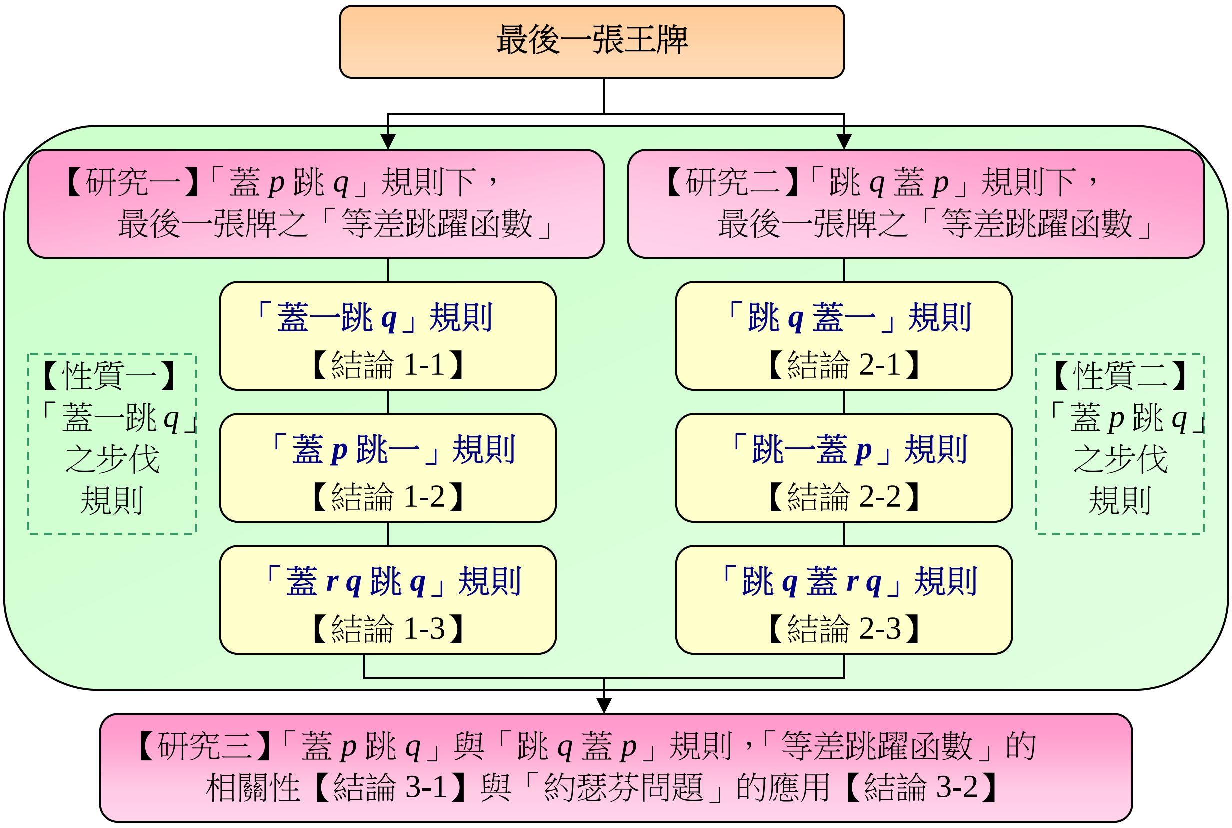
設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)\sim F(p+q-1)$，

當 $n\geq p+q$ 時，$\begin{cases} if \quad F(n)+(p+q)>n+p \quad then \quad F(n+p)=F(n)+(p+q)-n \\ if \quad F(n)+(p+q)\leq n+p \quad then \quad F(n+p)=F(n)+(p+q) \end{cases}$

4. 「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之推導（分 p 組）【研究二結論】

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)\sim G(p+q-1)$，

當 $n\geq p+q$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+(p+q)>n+p \quad then \quad G(n+p)=G(n)+(p+q)-(n+p) \\ if \quad G(n)+(p+q)\leq n+p \quad then \quad G(n+p)=G(n)+(p+q) \end{cases}$



陸、討論

我們花了一些時間去探究各「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則下，張數由 1~200 的最後一張牌，原本以為隨著張數的增加會增加困難度，但沒想到找到只要利用「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」之步伐規則【性質二】，找到「初始值」後利用 Excel 軟體，就能推演出各張數的「最後一張牌」$F(n)$，張數到 1000 張或 2000 張都沒問題。

有趣的是我們發現「蓋 p」決定組數，分為 p 組探討，張數 n 在其組別下為公差 p 的等差數列，最後一張牌 $F(n)$會以公差為（$p+q$）遞增，但是 $F(n)$增加到大於張數時（若此張數不存在時），會跳躍回一個較小的數，這種好像等差數列又會跳躍回一個較小的數，有礙於我們所知道的數學知識太少，我們稱這個最後一張牌 $F(n)$為「等差跳躍函數」。也請有興趣的讀者給予指導。

柒、結論

本作品「最後一張王牌」，是一個簡單的撲克牌遊戲，利用蓋牌規則最後可找到最後一張牌面朝上的牌，就因為蓋牌原理簡單，而且找不到任何關於它的資料，讓我們感到莫大的興趣，本作品能夠順利完成的癥結點在於：

一、此作品一開始並不如預期的順利，在不同蓋牌規則下，從不同張數 1~200 張中去找最後一張牌，土法煉鋼花了很多時間又沒效果，後來利用 Excel 軟體、【性質一】和【性質二】的步伐規則，才解決這個問題。

二、在推導函數時，一度陷入一堆數字的迷惘，“卡住”的時候多用心，關關難度關關度，才探討出不同張數 n 其最後一張牌為「等差跳躍函數」，推導出【結論 1-1】至【結論 2-3】的函數，從中發覺數學真正迷人的所在。

三、在研究「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」的過程中，利用 Excel 軟體是很方便，但只要前面一個數錯誤，後面的數全部都跟著錯，檢查錯誤與驗証函數花費多時，後來想到兩者「等差跳躍函數」$F(n)$與 $G(n)$的相關性【結論 3-1】，兩者等差跳躍函數互相驗証，才解決數列錯誤的問題。

四、截至目前為止「約瑟芬問題」，都是利用困難的程式在處理(如：Turbo C++)，大量數據而遭遇到記憶體的問題，本研究所推導出的「等差跳躍函數」簡單而且容易計算【結論 3-2】。

五、本研究無涉抄襲與未放棄著作權聲明。

【結論 1-1】「蓋一跳 q」規則下，最後一張牌之推導

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)$~$F(q)$

當 $n \ge q+1$ 時， $\begin{cases} if \quad F(n)+(q+1) > n+1 \quad then \quad F(n+1)=F(n)+(q+1)-n \\ if \quad F(n)+(q+1) \le n+1 \quad then \quad F(n+1)=F(n)+(q+1) \end{cases}$

【結論 1-2】「蓋p跳一」規則下，最後一張牌之推導（分p組）

設張數為n，最後一張牌為$F(n)$，初始值為$F(1)$~$F(p)$，$n=p\,i+j$ （當 $i \ge 1$ 時）

$$\text{最後一張牌}F(n)\text{為}\begin{cases} if \quad n > j\times(p+1)^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{p+1}{p}\left[n-j\times(p+1)^k\right] \\ if \quad n = j\times(p+1)^k \quad then \quad F(n)=j\times(p+1)^k \end{cases}$$

註：此$j\times(p+1)^k$為小於且最接近張數n的次方數。（當$j=1, 2, 3, \ldots, p$）

【結論 1-3】當 $p= r\times q$ 時，「蓋 $r\,q$ 跳 q」規則下，最後一張牌之推導（$q \ge 2$）

設張數為 n，最後一張牌為 $F(n)$，初始值為 $F(1)$~$F(rq+q-1)$，（此 p、q、$r \in$N）

(1) 除了 $n=r\,q\,i+j\,q$ 以外（當 $n \ge rq+q$ 時）

$$\text{最後一張牌 }F(n)\text{為}\begin{cases} if \quad F(n)+(r+1)q > n+rq \quad then \quad F(n+rq)=F(n)+(r+1)q-n \\ if \quad F(n)+(r+1)q \le n+rq \quad then \quad F(n+rq)=F(n)+(r+1)q \end{cases}$$

(2) $n=r\,q\,i+j\,q$（當 $i \ge 0$ 時）（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）

$$\text{最後一張牌 }F(n)\text{為}\begin{cases} if \quad n > j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad F(n)=\dfrac{r+1}{r}\left[n-j\times q\times(r+1)^k\right] \\ if \quad n = j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad F(n)=j\times q\times(r+1)^k \end{cases}$$

【結論 2-1】「跳 q 蓋一」規則下，最後一張牌之推導

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1) \sim G(q)$

當 $n \geq q+1$ 時，$\begin{cases} if \quad G(n)+(q+1)>n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+(q+1)-(n+1) \\ if \quad G(n)+(q+1)\leq n+1 \quad then \quad G(n+1)=G(n)+(q+1) \end{cases}$

【結論 2-2】「跳一蓋p」規則下，最後一張牌之推導（分p組）

設張數為n，最後一張牌為$G(n)$，初始值為$G(1)=1\sim G(p)=1$，$n=p\,i+j$（當$i\geq 1$時）

最後一張牌$G(n)$為$\begin{cases} if \quad n>j\times(p+1)^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{p+1}{p}\left[n-j\times(p+1)^k\right]+1 \\ if \quad n=j\times(p+1)^k \quad then \quad G(n)=1 \end{cases}$

註：此$j\times(p+1)^k$為小於且最接近張數n的次方數。（當$j=1, 2, 3, \ldots, p$）

【結論 2-3】當 $p=r\times q$ 時，「跳 q 蓋 $r\,q$」規則下，最後一張牌之推導（$q\geq 2$）

設張數為 n，最後一張牌為 $G(n)$，初始值為 $G(1)\sim G(r\,q+q-1)$，（此 p、q、$r\in$N）

(1) 除了 $n=r\,q\,i+j\,q$ 以外（當 $n\geq(r+1)\,q$ 時）

最後一張牌 $G(n)$為$\begin{cases} if \quad G(n)+(r+1)q>n+rq \quad then \quad G(n+rq)=G(n)+(r+1)q-(n+rq) \\ if \quad G(n)+(r+1)q\leq n+rq \quad then \quad G(n+rq)=G(n)+(r+1)q \end{cases}$

(2) $n=r\,q\,i+j\,q$（當 $i\geq 0$ 時）（當 $j=1,2,\ldots,r$ 時，會有 r 種情形）

最後一張牌 $G(n)$為$\begin{cases} if \quad n>j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad G(n)=\dfrac{r+1}{r}\left[n-j\times q\times(r+1)^k\right]+q \\ if \quad n=j\times q\times(r+1)^k \quad then \quad G(n)=q \end{cases}$

註：此 $j\times q\times(r+1)^k$ 為小於且最接近張數 n 的次方數。

【結論 3-1】「蓋 p 跳 q」與「跳 q 蓋 p」規則，最後一張牌之「等差跳躍函數」相關性

設張數為 n，設「蓋 p 跳 q」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $F(n)$

設「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張牌之「等差跳躍函數」為 $G(n)$

初始值為 $F(1)\sim F(p+q-1)$和 $G(1)\sim G(p+q-1)$

(1) 相關性一：$if \quad n\geq 1 \quad then \quad F(n+p)=G(n)+p$

(2) 相關性二：$if \quad n\geq 1 \quad then \quad F(n)+q=G(n)$ （當 $F(n)<G(n)$才適用）

【結論 3-2】「約瑟芬(Josephus)問題」的應用

設張數為 n，第 s 號開始數起，在圓圈裡產生（$s-1$）的位移

最後一個人之「等差跳躍函數」為 $F(n)$，亦可用於 $G(n)$

(1) $if \quad F(n)+(s-1)\leq n \quad then$ 最後一個人為 $F(n)+(s-1)$

(2) $if \quad F(n)+(s-1)>n \quad then$ 最後一個人為 $F(n)+(s-1)-n$

捌、參考資料及其他

一、國中數學課本，第一冊 3-1 式子的運算，翰林出版。

二、國中數學課本，第二冊 4-1 變數與函數，翰林出版。

三、國中數學課本，第四冊 1-1 數列，翰林出版。

四、謝新傳，這樣學數學才有趣，尖端出版，2010 年 5 月。

五、圖片來源：《FLASH 網頁模版百寶箱官方論壇》。

【評語】030417

本文研究「蓋 p 跳 q」及「跳 q 蓋 p」規則下，最後一張王牌之函數推導，文中提出許多漂亮的公式，只是缺少嚴謹的證明，建議針對相關文獻作進一步探討並嘗試證明文中各個結論。