中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030414

當矩形愛上鋪滿數

學校名稱：臺北市立北投國民中學

作者：	指導老師：
國三　丁于庭 國一　丁詠倢	黃國斌

關鍵詞：鋪滿數、矩形、遞迴關係

摘要

本科展首先研究：3×n 矩形用 3×1(1×3)矩形鋪滿，4×n 矩形用 4×1(1×4)矩形鋪滿，和 a×n 矩形用 a×1(1×a) 矩形鋪滿，運用是否跨斷線找法推出鋪滿數公式。

再來運用特殊形找法，分虧格和 L 型來鋪滿 3×n 矩形；4×1 矩形、T 型、2×2 方形、Z 型，個別及兩兩組合鋪滿 4×n 矩形。在本研究中除了有用到 Z 型做排列時，鋪滿數為 0 種外，其他狀況皆推出了公式。因每一圖形的鋪滿數和前一圖形有關係，故除了虧格外，其他以遞迴關係式來表示。

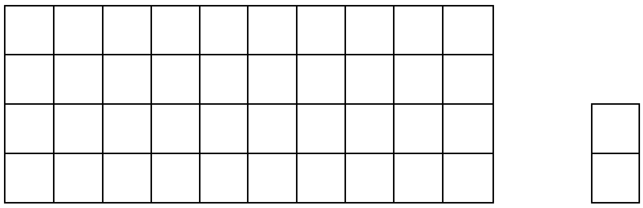
而後分析各圖形鋪滿數，得到 a×1 矩形數據在表格的呈現上為傾斜的巴斯卡三角形，且隨著 a×1 中 a 值的不同，垂直間隔 (a－1) 格；L 型和 T 型，也有不同的巴斯卡三角形形式，並證明、推廣。

最後研究方形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數，當$\begin{cases} k \le m, n \\ k | m, n \end{cases}$時，鋪滿數為 1，反之為 0。

壹、研究動機

我們從建國中學數學通訊解題的第五十六期中，發現了下列的問題：

如圖，用 40 個同樣大小的小正方形排成一個 4×10 的長方形。用 20 個 1×2 的矩形鋪滿，可以直排也可以橫排，試問共有幾種排法？



4×10 矩形　　2×1 矩形

因為覺得很有趣，故決定以此當作我們的科展題目，並且將用來鋪滿的圖形和被鋪滿的圖形做延伸，進一步找出是否有數學上的規律。

貳、研究目的

一、利用不同方法鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數：

（一）探討僅用 3×1 矩形鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

（二）探討僅用虧格鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

（三）探討用 3×1 矩形或虧格鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

（四）探討僅用 L 型鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

二、利用各種不同型態的填入法，鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數：

（一）探討僅用 4×1 矩形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

（二）探討僅用 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

（三）探討僅用 T 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

（四）探討僅用 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

（五）探討用 4×1 矩形和 T 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

（六）探討用 4×1 矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數
（七）探討用 4×1 矩形和 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數
（八）探討用 Z 型矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數
（九）探討用 T 型矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

三、鋪滿 3×n 矩形的個數：
（一）探討用 3×1(1×3)矩形鋪滿 3×n 矩形所需使用到的個數
（二）探討用 4×1(1×4)矩形鋪滿 4×n 矩形所需使用到的個數
（三）探討用 a×1(1×a)矩形鋪滿 a×n 矩形所需使用到的個數
（四）分析用 L 型鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數
（五）分析用 T 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

四、探討用 k×k 方形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數

參、文獻收集與探討

屆數/組別/名次	作品名稱/學校	內容簡介
中華民國第 30 屆中小學科學展覽會 /高中組 /第二名	奇妙的骨牌世界 /台中第一高級中學	推導出以下幾種的公式 1. 2×1 矩形鋪滿 2×n 矩形的排法數 2. 3×1 矩形鋪滿 3×n 矩形的排法數 3. a×1 矩形鋪滿 a×n 矩形的排法數 4. m×1 矩形鋪滿（m＋1）×n 矩形的排法數 5. 2×1 矩形鋪滿 4×n 矩形的排法數 6. 2×1×1 磚塊鋪出 2×2×n 長方體的排法數
中華民國第 48 屆中小學科學展覽會 /國小組 /第三名	費先生與巴先生聯手出擊～數列間的關係及延伸 /台中市北屯區東光國民小學	1. 找出m × n 的小長方形能拼完一個T × S 的大長方形的特性 2. 找出拼滿2 × N「方格盤」總數的特性 3. 找出拼滿2 × N「方格盤」個別數的特性 4. 找出拼滿3 × N「方格盤」總數的特性 5. 找出拼滿 3 × N「方格盤」個別數的特性

肆、研究設備與器材

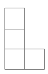
紙、筆、電腦、GSP4.03 幾何圖軟體

伍、研究過程

※名詞說明及定義：

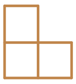
（一）$S^{x}_{m\times n}$ ：指使用圖形 x 鋪滿 m×n $(m, n \in N)$ 矩形的鋪滿數。
如$S^{m\times 1}_{m\times n}$ 表示將 x 當作 m×1 矩形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數。
$[S^{x}_{m\times n}, nx]$表示用n 個 x 形鋪滿$m \times n$矩形。

（二）L 型： 如圖(一)



圖(一) 鋪滿數用 $S^{L}_{m\times n}$表示

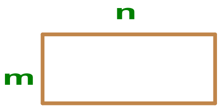
（三）虧格： 如圖(二)



圖(二) 鋪滿數用 $S^{Q}_{m\times n}$表示。

（四）斷線：在 mxn 的矩形中，若將矩形左下角的頂點視為(0,0)，則點 A(h,0)及 B(h,m) 所連成的$\overline{AB}$，我們稱之為該矩形的斷線

（五）被鋪滿圖形定義：長為 n，寬為 m。如圖(三)為 mxn 矩形 ：

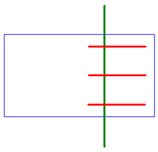


圖(三)

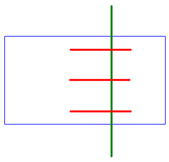
（六） $\boldsymbol{P_{m\times i}}$：指某特定圖形若被破壞分割後，則 mxn 矩形無法完成鋪滿的圖形，我們稱該不能被破壞的圖形為特殊形。排出特殊形的鋪滿數以符號 $\boldsymbol{P_{m\times i}}$ 表示。

（七） $(S^{m\times1}_{m\times h}\times S^{m\times1}_{m\times(n-h)})_{(b,m-b)}$ 則表示在跨線的 $(m\times1)$ 矩形中，在斷線的左邊有 h 格(column)，斷線的右邊有 n-h 格(column)， 而 b 則代表用$(m\times1)$ 矩形在跨越斷線時，左邊的格(column)數；反之，右邊的格(column)數則為(m-b)。

例如：$(S^{3\times1}_{m\times h}\times S^{3\times1}_{m\times(n-h)})_{(1,2)}$ 表示跨斷線的(3×1)矩形中，斷線左邊為 1 格(column)；右邊則為 2 格(column)，如圖(四)。$(S^{3\times1}_{m\times h}\times S^{3\times1}_{m\times(n-h)})_{(2,1)}$ 表示跨斷線的(3×1)矩形中，斷線左邊為 2 格(column)；右邊則為 1 格(column)，如圖(五)；另外，若當 n＝0 時，則令 $S^{x}_{m\times0}=1$。

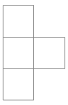


圖(四)



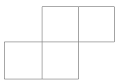
圖(五)

（八）T 型：指圖(六)



圖(六) 鋪滿數用 $S^{T}_{m\times n}$表示。

（九）Z 型：指圖(七)



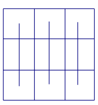
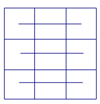
圖(七) 鋪滿數用 $S^{Z}_{m\times n}$表示。

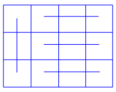
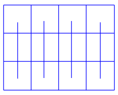
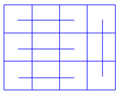
一、鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數：

（一）探討用 3x1 (1x3) 矩形鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數 ($n\in N$)：

首先，當 $n=1,2$，兩者都只有一種鋪滿數。所以，接下來的討論均放在 n≧3。

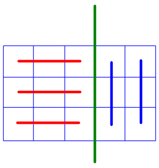
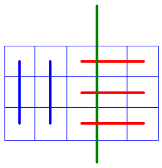
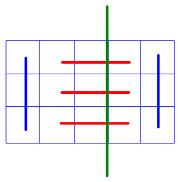
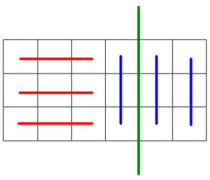
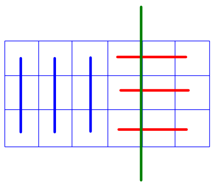
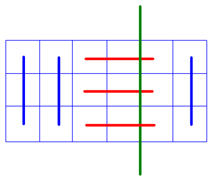
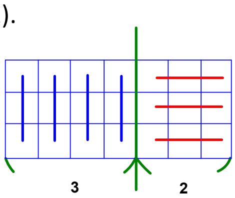
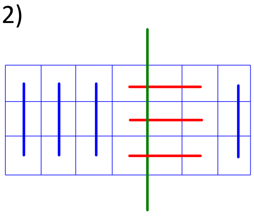
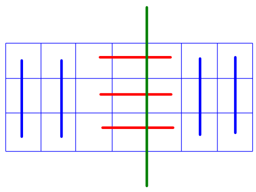
圖形與鋪滿數如表格(一)

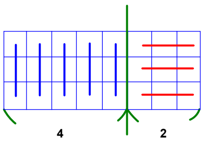
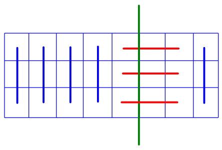
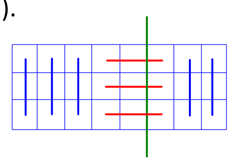
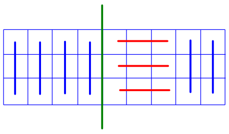
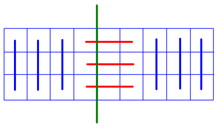
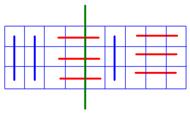
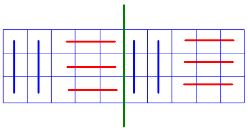
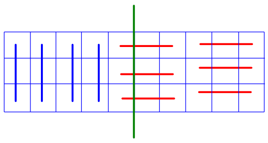
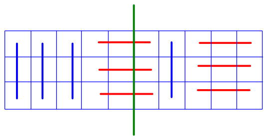
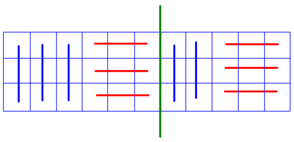
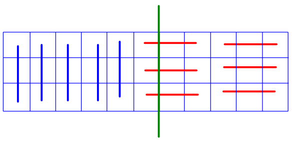
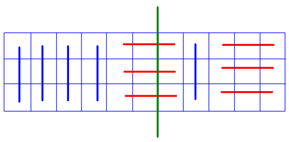
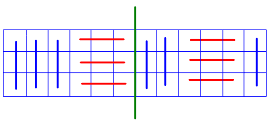
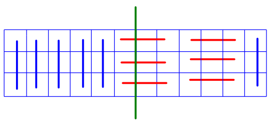
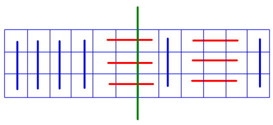
	圖形	鋪滿數
3x3 矩形	 	$S^{3\times1}_{3\times3}=\mathbf{2}$

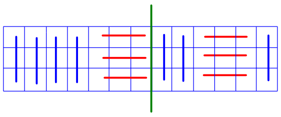
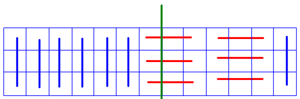
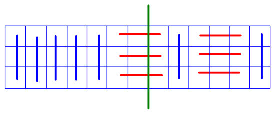
3×4 矩形	  	$S^{3\times1}_{3\times4}=\mathbf{3}$

表格(一)

當 n≧5, 圖形與鋪滿數如表格(二)：

3×n	case1	case2	case3	
	1). 鋪滿數 2). 圖形:無跨斷線型	1).鋪滿數 2).圖形:跨斷線(1,2)型	1). 鋪滿數 2).圖形:跨斷線(2,1)型	總鋪滿數
3×5	1). $S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times2}$ $=2\times1\ =2$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times0})_{(1,2)}$ $=1$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times1}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(2,1)}$ $=1$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times2}+$ $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times0})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times1}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(2,1)}$ $=2+1+1\ =4$
3×6	1). $S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times2}$ $=3\times1\ =3$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times0})_{(1,2)}$ $=2\times1\ =2$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(2,1)}$ $=1\times1\ =1$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times2}+$ $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times0})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(2,1)}$ $=3\times1+2\times1+1$ $=6$
3×7	1). $S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times3}=3\times2$ $=6$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(1,2)}$ $=2\times1\ =2$ 2) 	1). $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times2})_{(2,1)}$ $=1\times1\ =1$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times3}+$ $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times2})_{(2,1)}$ $=3\times2+2\times1+1$ $=9$

3×8	1). $S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times3}$ $=4\times2\ \ =8$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(1,2)}$ $=3\times1\ \ =3$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times2})_{(2,1)}$ $=2\times1\ \ =2$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times3}+$ $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times1})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times2})_{(2,1)}$ $=4\times2+3\times1+2\times1$ $=13$
3×9	1). $S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times5}$ $=3\times4\ \ =12$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}$ $=2\times2\ \ =4$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=1\times3\ \ =3$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times5}+$ $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times2}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=3\times4+2\times2+1\times3\ \ =19$
3×10	1). $S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times5}$ $=4\times4\ \ =16$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}$ $=3\times2\ \ =6$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=2\times3\ \ =6$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times5}+$ $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times3}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=4\times4+3\times2+2\times3$ $=28$
3×11	1). $S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times5}$ $=6\times4\ \ =24$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}$ $=4\times2\ \ =8$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=3\times3\ \ =9$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times5}+$ $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times3})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(2,1)}$ $=6\times4+3\times3+2\times4$ $=41$
3×12	1). $S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times6}$ $=6\times6\ \ =36$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(1,2)}$ $=4\times3\ \ =12$ 2). 	1). $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times5})_{(2,1)}$ $=3\times4\ \ =12$ 2). 	$S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times6}+$ $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times4}\times S^{3\times1}_{3\times5})_{(2,1)}$ $=6\times6+3\times4+4\times3$ $=60$
3×13	1). $S^{3\times1}_{3\times7}\times S^{3\times1}_{3\times6}$ $=9\times6\ \ =54$	1). $(S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(1,2)}$ $=3\times6\ \ =18$	1). $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times5})_{(2,1)}$ $=4\times4\ \ =16$	$S^{3\times1}_{3\times7}\times S^{3\times1}_{3\times6}+$ $(S^{3\times1}_{3\times6}\times S^{3\times1}_{3\times4})_{(1,2)}\ +$ $(S^{3\times1}_{3\times5}\times S^{3\times1}_{3\times5})_{(2,1)}$ $=4\times4+3\times6+9\times6$ $=88$

	2). 	2). 	2). 	

表格(二)

因此，我們推出一個公式，當 $0 < h < n$, 其中 $h,n \in N$ 時:

總鋪滿數：

$$S^{3\times1}_{3\times h}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-1)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-2)})_{(1,2)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-2)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-1)})_{(2,1)}$$

($0 < h < n$, 其中 $h,n \in N$ **)**

證明如下：

假設斷線為$\overline{AB}$，其中 A（h,0）,B（h,m），將圖形分成三個情況來討論：

case1: 為在斷線左右兩側矩形各自鋪滿數的乘積。

case2: 被 3×1矩形三個所形成的 3×3方陣以(1,2)型的方式形成左側為 $3\times(h-1)$ 及右側 $3\times(n-h-2)$的矩形, 再以各自鋪滿數作乘積。

case3: 被 3×1矩形三個所形成的 3×3方陣以(2,1)型的方式形成左側為 $3\times(h-2)$ 及右側 $3\times(n-h-1)$的矩形，再以各自鋪滿數作乘積.

鋪滿數如下:

(a)case1 鋪滿數： $S^{3\times1}_{3\times h}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h)}$

(b)case2 鋪滿數: $(S^{3\times1}_{3\times(h-1)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-2)})_{(1,2)}$

(c)case3 鋪滿數: $(S^{3\times1}_{3\times(h-2)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-1)})_{(2,1)}$

因此, $S^{3\times1}_{3\times n}=$

$S^{3\times1}_{3\times h}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-1)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-2)})_{(1,2)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-2)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-1)})_{(2,1)}$

故得證。

結論：用 3×1 矩形填滿 3×n 矩形的鋪滿數的公式為

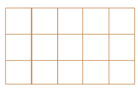
$$S^{3\times1}_{3\times n}=S^{3\times1}_{3\times h}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-1)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-2)})_{(1,2)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-2)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-1)})_{(2,1)}\cdots(*)$$

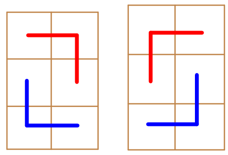
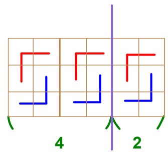
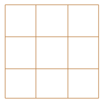
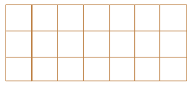
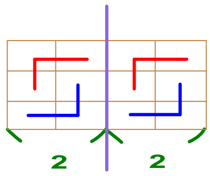
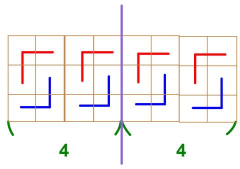
$0 < h < n$, 其中 $h,n \in N$

(若 h＝1, 則出現較簡短的遞迴關係：$S^{3\times1}_{3\times(n-1)}+S^{3\times1}_{3\times(n-3)}$，此為($*$)式的特殊情況)

（二）探討用虧格鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數：

同樣地，一開始我們先找規律，如表格(三)：

3xn	圖形	鋪滿數	3xn	圖形	鋪滿數
3x1		$S^{Q}_{3\times1}=0$	3x5		$S^{Q}_{3\times5}=0$

3×2		$S^{Q}_{3\times 2}=\mathbf{2}$	3×6		2×4＝8（跨線鋪滿數為 0） $S^{Q}_{3\times 6}=\mathbf{8}$
3×3		$S^{Q}_{3\times 3}=\mathbf{0}$	3×7		$S^{Q}_{3\times 7}=\mathbf{0}$
3×4		2×2＝4（跨線鋪滿數為 0） $S^{Q}_{3\times 4}=\mathbf{4}$	3×8		4×4＝16(跨線鋪滿數為 0） $S^{Q}_{3\times 8}=\mathbf{16}$

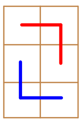
表格(三)

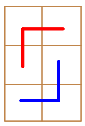
此時我們得到一個數列：0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16，此數列的規律為「若 n 為偶數，則 $a_n=2^{n/2}$；若 n 為奇數，則鋪滿數恆為 0」，

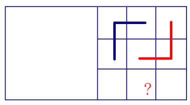
上述結論是較為顯而易見的，所以，證明如下:

證明: (1) (2|n)時:

由於用虧格鋪滿 3×n 矩形時，紅虧格與藍虧格必如圖(八)和圖(九)般交叉，不會有圖(十)的情形：


圖(八)


圖(九)

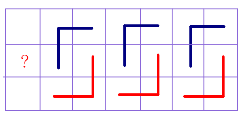


圖(十)

所以，當(2|n)時，每一個 3×2 矩形均有 2 種鋪滿法。 因此，3×n 矩形的鋪滿數即為$2^{n/2}$。

(2) 2∤n 時:

則無法排出矩形，因為在兩兩成對的鋪滿下，必定留下一個 3×1 矩形不能為虧格所填入，如圖（十一）



圖（十一）

結論：用虧格鋪滿 3×n 矩形時，若(2|n)，則 $S^{Q}_{3\times n}=2^{n/2}$；若 2∤n，則鋪滿數恆為 0 (n ∈ N)

（三）探討用 3×1 矩形和虧格鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數：

經由畫圖的方式，我們發現用 3×1 矩形和虧格鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數的情形很複雜，找不到什麼規律。因此，我們嘗試著尋找其他方法，解決此種狀況。在跟老師和已畢業的學長討論過後，我們發明了一種「特殊形找法」的方法：

【特殊形找法】:

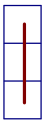
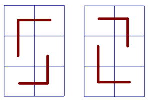
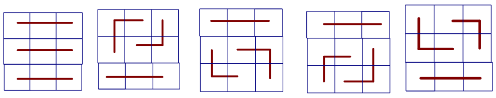
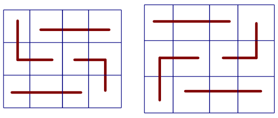
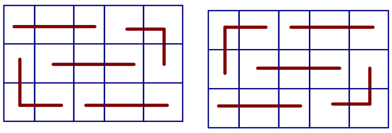
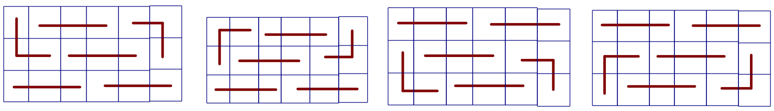
由 一(一)用 3×1 矩形鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數的研究結果，不管用什麼圖形去鋪滿

只要該被鋪滿圖形的最右邊能夠一直排出特殊形，便能寫出一長串的遞迴式作為公式，此公式如下：

$$\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times n}} = \sum_{i=1}^{n} P_{m\times i} S^{x}_{m\times (n-i)}$$

$$= P_{m\times 1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times(n-1)}} + P_{m\times 2}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times(n-2)}} + P_{m\times 3}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times(n-3)}} + P_{m\times 4}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times(n-4)}} + \ldots\ldots + P_{m\times(n-2)}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times 2}} + P_{m\times(n-1)}\mathbf{S}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{m\times 1}} + P_{m\times n} \quad (n \in N)$$

我們開始尋找用 3×1 矩形和虧格鋪滿 3×n 矩形的特殊形鋪滿數，舉例如表格(四)：

3×n	圖形	特殊形鋪滿數
3×1		$P_{3\times 1}=1$
3×2		$P_{3\times 2}=2$
3×3		$P_{3\times 3}=5$
3×4		$P_{3\times 4}=2$
3×5		$P_{3\times 5}=2$
3×6		$P_{3\times 6}=4$

表格(四)

所以我們得到用虧格及 3×1 矩形所形成的特殊形鋪滿數，分別為 1, 2, 5, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4……的式子，從第四項開始，不斷重複 2, 2, 4。

我們先證 $P_{3\times 3n} = 4, (n\geq 2)$, $P_{3\times(3n+1)} = 2, (n\geq 1)$, $P_{3\times(3n+2)} = 2, (n\geq 1)$ 如下：

- 證明： $P_{3\times 3n} = 4, (n\geq 2)$

首先，由於 3×6 的圖形較小，因此我們用畫圖的方法，

Step1: 當 n＝2, $P_{3\times 6} = 4$ 成立，如圖 (十二)：

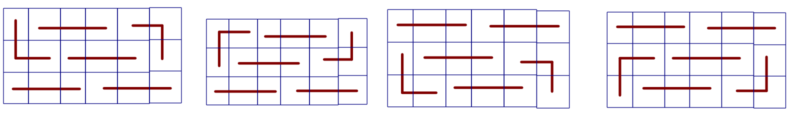


圖 (十二)

Step2: 假設當 n＝k 時，$P_{3\times 3k} = 4$ 亦成立，如圖 (十三)：

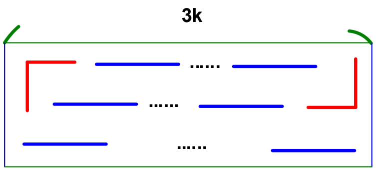
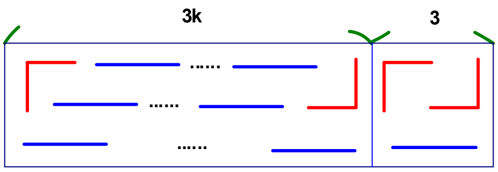


圖 (十三) (和此圖的翻轉及鏡射)

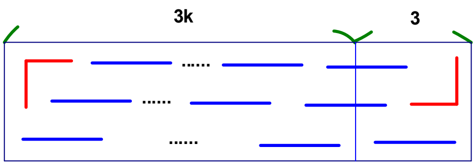
Step3:

則 n＝k+1 時，$P_{3\times3(k+1)}=4$的圖形中會增加 3×3 的圖形，但不為特殊形，如圖(十四) ：



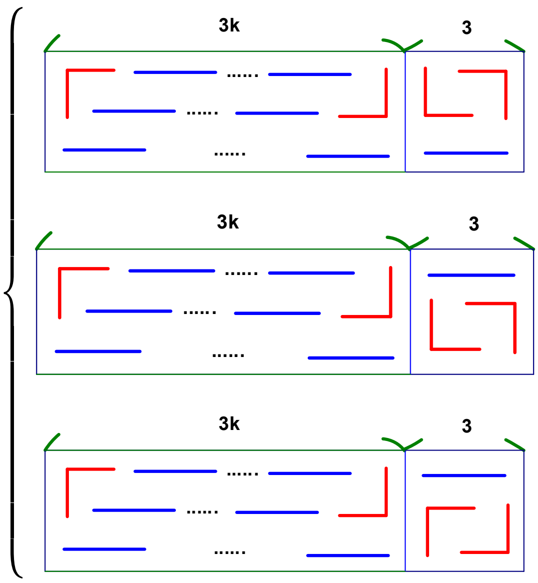
圖(十四)

此時便可將其化為特殊形，如圖(十五)所示：



(和此圖的翻轉及鏡射) 圖(十五)

而另外的三種情況如圖(十六)：



(此三種皆無法化為特殊形)

圖(十六)

即可得知 $P_{3\times(3k+3)}=4$ ， 故此式 $P_{3\times3n}=4$ 得證。

- 同理可證 $P_{3\times(3n+1)}=2,\ P_{3\times(3n+2)}=2$ **,(n≥ 1)**

故各特殊形如以上般各自重複。

因此，我們寫成式子：

$S_{3\times n}^{Q\&3\times1}=$

$1S_{3\times(n-1)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-2)}^{Q\&3\times1}+5S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-4)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-5)}^{Q\&3\times1}+4S_{3\times(n-6)}^{Q\&3\times1}+\ldots\ldots+xS_{3\times2}^{Q\&3\times1}+yS_{3\times1}^{Q\&3\times1}+\boldsymbol{P_{3\times n}}$----①

$S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}=$

$1S_{3\times(n-4)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-5)}^{Q\&3\times1}+5S_{3\times(n-6)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-7)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-8)}^{Q\&3\times1}+4S_{3\times(n-9)}^{Q\&3\times1}+\ldots+xS_{3\times2}^{Q\&3\times1}+yS_{3\times1}^{Q\&3\times1}+\boldsymbol{P_{3\times(n-3)}}$----②

（由於唯一能確定的只有①和②最後幾個數的特殊形數目相同，故以 x、y、$P_{3\times n}$、$\boldsymbol{P_{3\times(n-3)}}$代表， 其中$\{x,y\}=\{2,4\}$），所以當 ①-② 得

$S_{3\times n}^{Q\&3\times1}-S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}=1S_{3\times(n-1)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-2)}^{Q\&3\times1}+5S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}+S_{3\times(n-4)}^{Q\&3\times1}-S_{3\times(n-6)}^{Q\&3\times1}$

$S_{3\times n}^{Q\&3\times1}=1S_{3\times(n-1)}^{Q\&3\times1}+2S_{3\times(n-2)}^{Q\&3\times1}+6S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}+S_{3\times(n-4)}^{Q\&3\times1}-S_{3\times(n-6)}^{Q\&3\times1}$

結論：用 3×1 矩形或虧格鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數公式：

$S_{3\times n}^{Q\&3\times1}=\mathbf{S}S_{3\times(n-1)}^{Q\&3\times1}\mathbf{+2}S_{3\times(n-2)}^{Q\&3\times1}\mathbf{+6}S_{3\times(n-3)}^{Q\&3\times1}\mathbf{+}S_{3\times(n-4)}^{Q\&3\times1}\mathbf{-}S_{3\times(n-6)}^{Q\&3\times1}$

($S_{3\times5}^{Q\&3\times1}=62$, $S_{3\times4}^{Q\&3\times1}=23$， $S_{3\times3}^{Q\&3\times1}=10$, $S_{3\times2}^{Q\&3\times1}=3$, $S_{3\times1}^{Q\&3\times1}=1$, $S_{3\times0}^{Q\&3\times1}=0$ (n ∈ N))

（四）探討僅用 L 型鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數

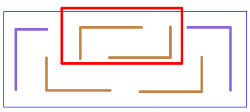
m × n	特殊形鋪滿數	m × n	特殊形鋪滿數
3x1~3x7	0	**3x8**	2x2＝4
3x9~3x15	0	**3x16**	2x2x2＝8
3x17~3x23	0	**3x24**	2x2x2x2＝16
3x25~3x31	0	**3x32**	2x2x2x2x2＝32

表格(五)

- 證明：$P_{3\times8n}=2^{n+1}$, (n≥ 1)

Step1:

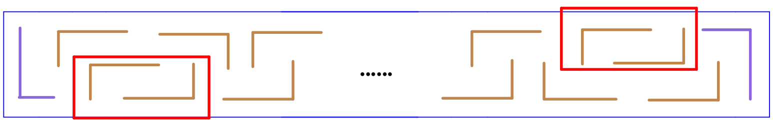
當 n＝1 時，$P_{3\times8}=4$，如圖(十七)所示：



3x8 圖(十七) （此圖的鏡射加上紅框裡的兩種變化的乘積）

Step2:

而後，我們假設當 n＝k 時，令$P_{3\times8k}=2^{k+1}$，如下圖(十八)所示：

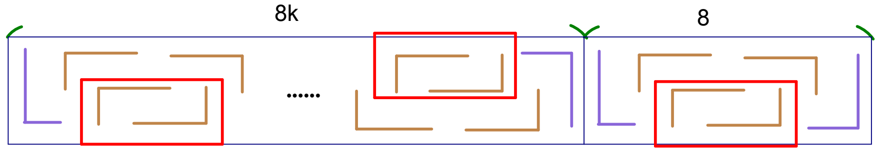


3x8k 圖(十八)

（此圖的鏡射加上 k 個紅框裡的兩種變化的乘積）

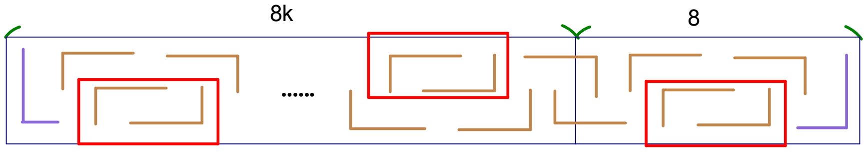
Step3:

$P_{3\times8(k+1)}$的圖形中會增加 3x8 的圖形，但整個矩形不是特殊形，如圖(十九)：



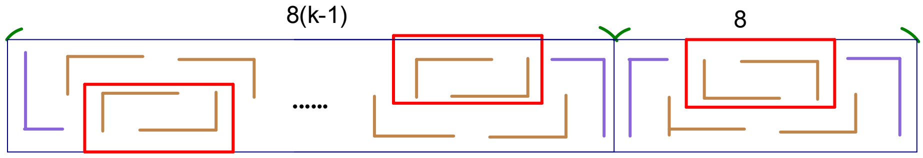
圖(十九)

此時便可將其化為特殊形，如圖(二十)所示：



圖(二十) (和此圖的鏡射)

且圖(二十一)無法化為特殊形：



圖(二十一)

也就是 $P_{3\times8(k+1)}=2^{(k+1)+1}$，故此式 $P_{3\times8n}=2^{n+1}$, **(n≥ 1)**得證。

只有當 8|n 時，才能夠鋪完矩形。因此，n 必定要是 8 的倍數且不為 0

故寫成下列的遞迴關係式：

$$S^L_{3\times n}=P_8\times S^L_{3\times(n-8)}+P_{16}\times S^L_{3\times(n-16)}+\ldots+P_{(n-16)}\times S^L_{3\times16}+P_{(n-8)}\times S^L_{3\times8}+P_n\times S^L_{3\times0}\ldots\ldots\text{①}$$

$$S^L_{3\times(n-8)}=P_8\times S^L_{3\times(n-16)}+P_{16}\times S^L_{3\times(n-24)}+\ldots+P_{n-24}\times S^L_{3\times16}+P_{n-16}\times S^L_{3\times8}+P_{n-8}\times S^L_{3\times0}\ldots\ldots\text{②}$$

①-②

$$S^L_{3\times n}-S^L_{3\times(n-8)}=2^2\times S^L_{3\times(n-8)}+2^2\times S^L_{3\times(n-16)}+\ldots+(P_{(n-8)}-P_{n-16})\times S^L_{3\times8}+P_{n-8}$$

$$S^L_{3\times n}=(2^2+1)\times S^L_{3\times(n-8)}+2^2\times S^L_{3\times(n-16)}+\ldots+P_{n-16}\times S^L_{3\times8}+P_{n-8}\ldots\ldots\text{③}$$

③- ②

$$S^L_{3\times n}-S^L_{3\times(n-8)}=(2^2+1)\times S^L_{3\times(n-8)}$$

$$S^L_{3\times n}=(2^2+2)\times S^L_{3\times(n-8)}=6\times S^L_{3\times(n-8)}$$

結論：僅用 L 型鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數的公式：$6\times s^L_{3\times(n-8)}$，$s^L_{3\times8}=4$，$n>1$，$n\in\mathbb{N}$，$n|8$

二、鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數：

（一）探討用 4x1 矩形鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數：

同理，4x1 矩形鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數

結論：用 4x1 的矩形鋪滿 4xn 的鋪滿數通用公式為

$$S_{4\times h}\times S_{4\times(n-h)}+\sum_{i=1}^{4-1}\left\{S_{4\times[n-4-(4-i)]}^{4\times1}\times S_{4\times(4-i)}^{4\times1}\right\}_{(4-i,i)}(n\in N)\ldots\ldots\ (*)$$

(若 h＝1,則出現較簡短的遞迴關係：$S_{4\times(n-1)}^{4\times1}+S_{4\times(n-4)}^{4\times1}$，此為(*)式的特殊情況)

同樣地，我們可以證明用 a×1 矩形鋪滿 a×n 矩形的鋪滿數公式：

※ **【證用 a×1 矩形鋪滿 a×n 矩形的鋪滿數公式】:**

無跨斷線的情形和前者皆相同：

(a) case1：

$$S_{a\times h}^{a\times1}\times S_{a\times(n-h)}^{a\times1}$$

(b)case2、case3、case4……、case(a-1)：

$$\sum_{i=1}^{a-1}\left\{S_{a\times[n-a-(a-i)]}^{a\times1}\times S_{a\times(a-i)}^{a\times1}\right\}_{(a-i,i)}$$

$$S_{a\times h}^{a\times1}\times S_{a\times(n-h)}^{a\times1}+\sum_{i=1}^{a-1}\left\{S_{a\times[n-a-(a-i)]}^{a\times1}\times S_{a\times(a-i)}^{a\times1}\right\}_{(a-i,i)}$$

結論：用 ax1 的矩形鋪滿 axn 的鋪滿數通用公式為

$$S_{a\times h}\times S_{a\times(n-h)}+\sum_{i=1}^{a-1}\left\{S_{a\times[n-a-(a-i)]}^{a\times1}\times S_{a\times(a-i)}^{a\times1}\right\}_{(a-i,i)}(n\in N)\ \ldots\ldots\ (*)$$

(若 h＝1, 則出現較簡短的遞迴關係：$S_{a\times(n-1)}^{a\times1}+S_{a\times(n-a)}^{a\times1}$，此為(*)式的特殊情況)

（二）探討僅用 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

由於方形是一個很固定的圖形，因此我們經由實際操作，得到以下的規律:

$\begin{cases}\text{當 n 是奇數：0 種}\\ \text{當 n 是偶數：1 種}\end{cases}$，而詳細的方形鋪滿矩形過程，我們將在第四大點深入探討。

結論：用 2×2 方形鋪滿 4×n(n ∈ N)的鋪滿數公式為 $\begin{cases}\textbf{當n是奇數：0種}\\ \textbf{當n是偶數：1種}\end{cases}$

（三）探討僅用 T 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

特殊形找法尋找規律：

m × n	特殊形鋪滿數	m × n	特殊形鋪滿數
4×1~4×3	0	4×4	$P_{4\times4}=2$
4×5~4×7	0	4×8	$P_{4\times8}=2$
4×9~4×11	0	4×12	$P_{4\times12}=2$

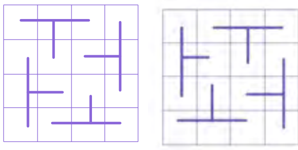
表格(六)

因此，我們可以證明 $P_{4\times n}=2$, 其中 4|n，n ∈ N：

- 證 $P_{4\times n}=2$, 其中 4|n，n ∈ N：

Step1:

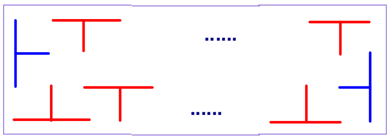
我們用畫圖的方法，知道 n＝4, $\mathbf{P_4=2}$，如圖(二十二)：



圖(二十二)

Step2:

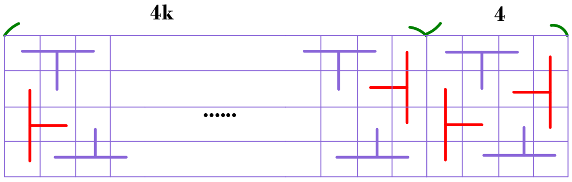
而後，我們假設 $P_{4\times 4k}=2$，**畫出**圖(二十三)：



（和此圖的鏡射）圖(二十三)

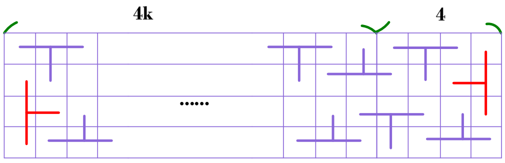
Step3:

證明 $\mathbf{P_{4\times 4(k+1)}=2}$，也就是 $\mathbf{P_{4\times (4k+4)}=2}$，**如**圖(二十四)



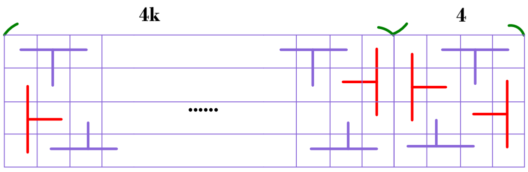
圖(二十四)

此時便可將其化為特殊形，如圖(二十五)所示：



圖(二十五) (和此圖的鏡射)

但圖(二十六)無法化為特殊形：



圖(二十六)

故此式得證。

故

$S^T_{4\times n}=P_{4\times n}+2\times S^T_{4\times(n-4)}+2\times S^T_{4\times(n-8)}+\ldots\ldots+2\times S^T_{4\times 8}+2\times S^T_{4\times 4}\ldots\ldots$①

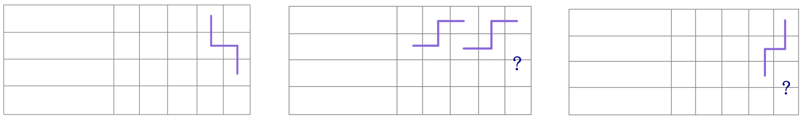
$S^T_{4\times(n-4)}=P_{4\times(n-4)}+2\times S^T_{4\times(n-8)}+2\times S^T_{4\times(n-12)}+2\times S^T_{4\times(n-16)}+\ldots\ldots+2\times S^T_{4\times 8}+2\times S^T_{4\times 4}\ldots\ldots$②

①-② 得

$S^T_{4\times n}-S^T_{4\times(n-4)}=2\times S^T_{4\times(n-4)}$ 得 $S^T_{4\times n}=3\times S^T_{4\times(n-4)}$，$S^T_{4\times 4}=2$

結論：用 T 型鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數的公式為$S^T_{4\times n}=3\times S^T_{4\times(n-4)}$，$S^T_{4\times 4}=2(n\in N)$

（四）探討僅用 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數：$S_{4\times1}^{Z}=S_{4\times2}^{Z}=S_{4\times3}^{Z}=S_{4\times4}^{Z}=0$



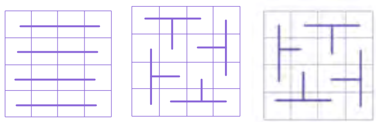
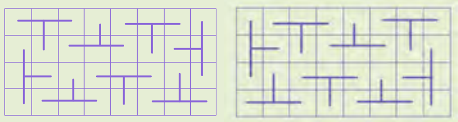
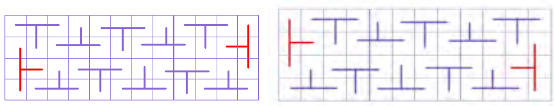
圖(二十七)

由於我們發現用 Z 型排時，必會有某些格數因此被擋住，無法繼續排下去〈如圖(二十七)〉，故我們證明用 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數恆為 0 種。

結論：用 Z 型鋪滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數的公式為$S_{4\times n}^{Z}=0$

（五）探討用 4×1 矩形和 T 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

用 4×1 矩形和 T 型鋪滿 4×n 矩形時，我們利用特殊形找法來找鋪滿數，如表格(七)：

m × n	特殊形鋪滿數	m × n	特殊形鋪滿數
4x1	 $P_{4\times1}=1$	4x2~4x3	0
4x4	 $P_{4\times4}=3$	4x5~4x7	0
4x8	 $P_{4\times8}=2$	4x9~4x11	0
4x12	 $P_{4\times12}=2$	4x13~4x15	0

表格(七)

故 $P_{4\times n}$ 如以上圖形重複，且 $P_{4\times n}=2,\ 4|n$ ，$n\in N$ (證明如二、(三))

寫成下列式子

$$S_{4\times n}^{T\&4\times1}=1\times S_{4\times(n-1)}^{T\&4\times1}+3\times S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times(n-12)}^{T\&4\times1}+\dots+2\times S_{4\times4}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times0}^{T\&4\times1}\ \cdots\cdots\ ①$$

$$S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}=1\times S_{4\times(n-5)}^{T\&4\times1}+3\times S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times(n-12)}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times(n-16)}^{T\&4\times1}+\dots+2\times S_{4\times4}^{T\&4\times1}+2\times S_{4\times0}^{T\&4\times1}\ \dots ②$$

①-② 得

$$S_{4\times n}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}=1\times S_{4\times(n-1)}^{T\&4\times1}+3\times S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-5)}^{T\&4\times1}$$

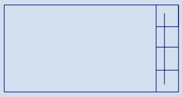
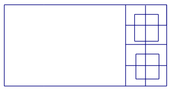
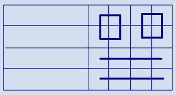
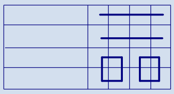
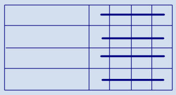
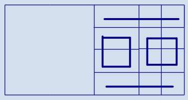
$$S_{4\times n}^{T\&4\times1}=S_{4\times(n-1)}^{T\&4\times1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-5)}^{T\&4\times1}$$

結論：用 4×1 矩形和 T 型鋪滿 4×n 矩形(n ∈ N)的鋪滿數公式為

$$S_{4\times(n-1)}^{T\&4\times1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times1}-S_{4\times(n-5)}^{T\&4\times1}$$

（六）探討用 4×1 矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

利用畫圖，我們找出用 4×1 矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的特殊形鋪滿數，如表格(八)：

	特殊形的三種情形
4x1	
4x2	
4x4	   

表格(八)

故其鋪滿數可簡要寫成下列式子：

$$S_{4\times n}^{2\times2\&4\times1}=1\times S_{4\times(n-1)}^{2\times2\&4\times1}+1\times S_{4\times(n-2)}^{2\times2\&4\times1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{2\times2\&4\times1}=S_{4\times(n-1)}^{2\times2\&4\times1}+S_{4\times(n-2)}^{2\times2\&4\times1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{2\times2\&4\times1}$$

且$S_{4\times1}^{2\times2\&4\times1}=1,\ S_{4\times2}^{2\times2\&4\times1}=2,\ S_{4\times3}^{2\times2\&4\times1}=3,\ S_{4\times4}^{2\times2\&4\times1}=9$

結論：用 4×1 矩形和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形(n ∈ N)的鋪滿數公式為

$S_{4\times(n-1)}^{2\times2\&4\times1}+S_{4\times(n-2)}^{2\times2\&4\times1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{2\times2\&4\times1}$， 其中

$S_{4\times1}^{2\times2\&4\times1}=1,\ S_{4\times2}^{2\times2\&4\times1}=2,\ S_{4\times3}^{2\times2\&4\times1}=3,\ S_{4\times4}^{2\times2\&4\times1}=9$

（七）探討用 4×1 矩形和 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

由於用 Z 型去鋪滿時，必會碰到圖(二十七)的問題，(有格子會被擋住)

故用 4×1 矩形和 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種

結論：用 4×1 矩形和 Z 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種

（八）探討用 Z 型和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

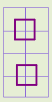
情況如以上探討用 Z 型鋪滿矩形的情況一樣，見圖(二十七)，(有格子會被擋住)

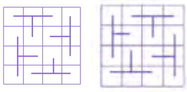
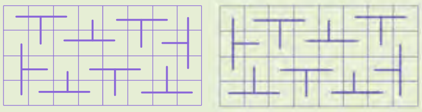
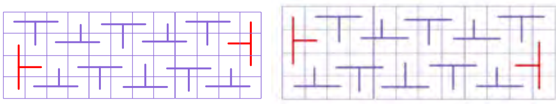
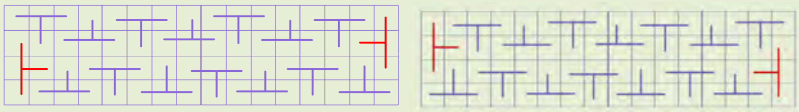
故用 Z 型和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種

結論：用 Z 型和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種

（九）探討用 T 型和 2×2 方形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數

我們利用特殊形找法來找鋪滿數，如表格(九)：

m × n	特殊形鋪滿數
4x2	 $P_{4\times2}=1$

4x4	 $P_{4\times4}=2$
4x8	 $P_{4\times8}=2$
4x12	 $P_{4\times12}=2$
4x16	 $P_{4\times16}=2$

表格(九)

故 $P_{4\times n}$ 如以上圖形重複，且 $P_{4\times n}=2, 4|n$ ，$n\in N$ (證明如二、(三))

寫成式子如下：

$S_{4\times n}^{T\&2\times2}=$

$1\times S_{4\times(n-2)}^{T\&2\times2}+2\times S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}+2\times S_{4\times(n-8)}^{T\&2\times2}+\ldots+2\times S_{4\times8}^{T\&2\times2}+x\times S_{4\times4}^{T\&2\times2}+y\times S_{4\times0}^{T\&2\times2}$ ………… ……①

$S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}=$

$1\times S_{4\times(n-6)}^{T\&2\times2}+2\times S_{4\times(n-8)}^{T\&2\times2}+2\times S_{4\times(n-12)}^{T\&2\times2}+\ldots+2\times S_{4\times8}^{T\&2\times2}+x\times S_{4\times4}^{T\&2\times2}+y\times S_{4\times0}^{T\&2\times2}$ ……………②

（由於唯一能確定的只有 ① 和 ② 最後幾個數的特殊形鋪滿數相同，故以 x、y 代表，其中$\{x,y\}=\{2,0\}$）

①-② 得

$S_{4\times n}^{T\&2\times2}-S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}=S_{4\times(n-2)}^{T\&2\times2}+2\times S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}-S_{4\times(n-6)}^{T\&2\times2}$ 得

$S_{4\times n}^{T\&2\times2}=S_{4\times(n-2)}^{T\&2\times2}+3\times S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}-S_{4\times(n-6)}^{T\&2\times2}$

結論：用 T 型和 2x2 方形鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數＝ $S_{4\times(n-2)}^{T\&2\times2}+3\times S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}-S_{4\times(n-6)}^{T\&2\times2}$

三、分析鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數：

※在文獻：「費先生與巴先生聯手出擊～數列間的關係及延伸」中，他們探討了用 2x1 矩形鋪滿 2xn 矩形的個別數和用 2x1 矩形鋪滿 3xn 矩形的個別數，也就是既然已經知道該矩形被另一矩形鋪滿的鋪滿數，便可以分析在這些鋪滿數中，用來排的矩形橫著放或直著放的個別數。因此我們想繼續研究看看「個別數」這塊，看能不能找到規律。

（一）分析用 3x1 (1x3)矩形鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數：

nx 表示在用 3x1 (1x3)矩形鋪滿 3xn 矩形的鋪滿數中使用了 n 個 3x1 矩形，

而 my 表示使用了 m 個 3x3(由三個 1x3 矩形構成) 的正方形：

nx	0x	1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	總鋪

my	$\frac{n}{3}y$	$\frac{n-1}{3}y$	$\frac{n-2}{3}y$	$\frac{n-3}{3}y$	$\frac{n-4}{3}y$	$\frac{n-5}{3}y$	$\frac{n-6}{3}y$	$\frac{n-7}{3}y$	$\frac{n-8}{3}y$	$\frac{n-9}{3}y$	滿數
3×1		**1**	$\mathbf{C_1^1=1}$								**1**
3×2			**1**	$\mathbf{C_2^2=1}$							**1**
3×3	**1**			**1**	$\mathbf{C_0^1+C_3^3=2}$						**2**
3×4		**2**			**1**	$\mathbf{C_1^2+C_4^4=3}$					**3**
3×5			**3**			**1**	$\mathbf{C_2^3+C_5^5=4}$				**4**
3×6	**1**			**4**			**1**	$\mathbf{C_0^2+C_3^4+C_6^6=6}$			**6**
3×7		**3**			**5**			**1**	$\mathbf{C_1^3+C_4^5+C_7^7=9}$		**9**
3×8			**6**			**6**			**1**	$\mathbf{C_2^4+C_5^6+C_8^8=13}$	**13**

表格(十) 類 巴斯卡三角形

上述數據均由 n 個相異物取 r 個的組合數

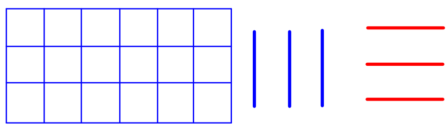
＝其中[某個一定取的組合數]+[某個一定不取的組合數]=≫ $\mathbf{C_r^n=C_{r-1}^{n-1}+C_r^{n-1}}$

的想法作處理。

例如：

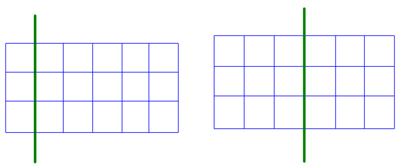
我們以 3x6 矩形用 3x 鋪滿做例子，可將其寫成下列式子：

$[S_{3\times6}^{3\times1},3x]=[S_{3\times5}^{3\times1},2x]+[S_{3\times3}^{3\times1},3x]$ ，如圖(二十八)：



圖(二十八)

由於一定會形成 3x3(由三個 1x3 矩形構成) 的正方形，其可以看成由四個物件(3 個 3x1 矩形、1 個 3x3 正方形)做排列組合，因此可以寫成 C_3^4；而 3x6 矩形有五個位置可以放斷線，但要讓矩形左邊形成特殊形，斷線只有兩種放法如下圖：



圖(二十九)

如圖(二十九)，左邊代表[用 2x 鋪排的 3x5 矩形和 3x1 矩形]，右邊代表 [用 3x 鋪排的 3x3 矩形和 3x3 矩形]，前者可以寫成 $\mathbf{C_2^3}$**x1**，後者可以寫成C_3^3x1，對照這三個排列組合的式子，其有巴斯卡三角形的關係：$C_3^4=C_2^3+C_3^3$，同理可證表格(十)的其他數據，故得證。

（二）分析用 4x1(1x4)矩形鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數：

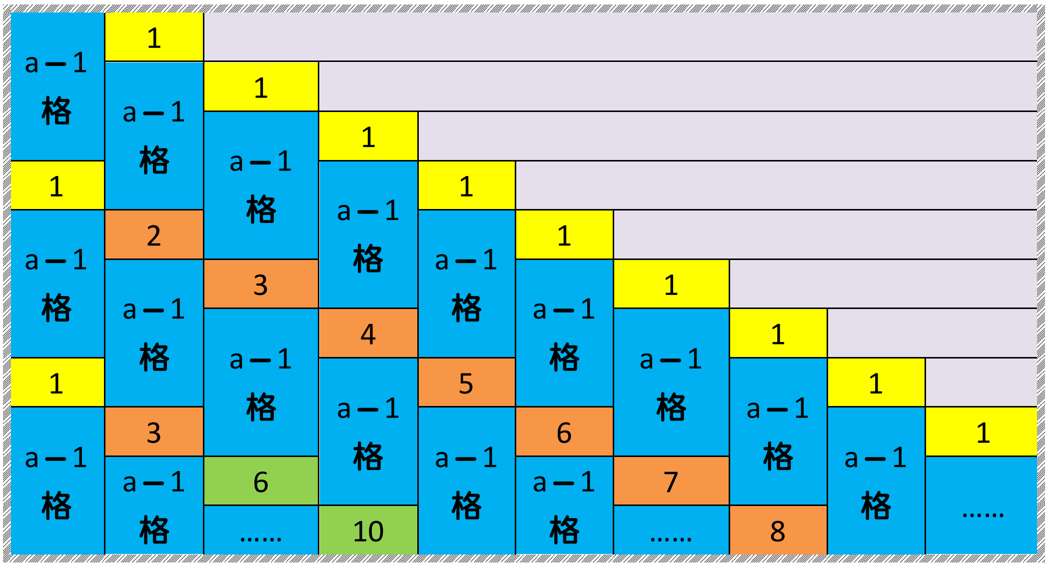
設用了 4x1 矩形 x 個：

nx	0x	1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	總鋪滿數
4×1		**1**									**1**
4×2			**1**								**1**
4×3				**1**							**1**
4×4	**1**				**1**						**2**
4×5		**2**				**1**					**3**
4×6			**3**				**1**				**4**
4×7				**4**				**1**			**5**
4×8	**1**				**5**				**1**		**7**
4×9		**3**				**6**				**1**	**10**

表格(十一)　類 巴斯卡三角形

證明如三、(一)，同理可證。

（三）分析用 a×1(1×a)矩形鋪滿 a×n 矩形的鋪滿數

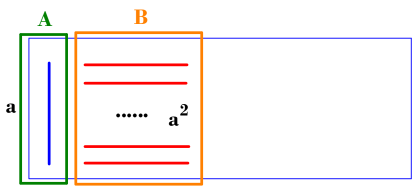


表格（十二）

我們發現，圖形將會是一個傾斜的巴斯卡三角形且隨著 **a×1** 的 **a** 不同，而彼此垂直間隔 **a－1** 格。並且可以證明如下：

- *證圖形隨著 ax1 的 a 不同，而彼此垂直間隔 a－1 格*

首先，由於 ax1 矩形不是橫排便是直排，且橫著排的時候，一定是一區塊一區塊，所以我們畫出圖(三十)，並設 ax1 矩形有 A 個(格數＝a 格)，1xa 矩形有 B 群(格數＝a^2 格)：



圖(三十)

故一個矩形的總格數便能寫成 $Aa+Ba^2=a\times n$，消掉 a，得到 $A+Ba=n$

Step1:

1. A＝0 (0x)，$Ba=n$

$$\begin{cases} B=1, a=n \\ B=2, 2a=n \\ \dots\dots \\ B=h, ha=n \dots\dots\dots\dots \boxed{1}(\text{代表 } a\times ha \text{ 矩形}) \\ B=h+1, (h+1)a=n \dots\dots\dots \boxed{2}(\text{代表 } a\times(h+1)a \text{ 矩形}) \end{cases}$$

觀察 1 式和 2 式，我們發現此兩個矩形在圖形上，相差 a-1 格。

2. A＝1 (1x)，$A+Ba=n$

$$\begin{cases} B=0, a=n \\ B=1, a+1=n \\ B=2, 2a+1=n \\ \dots\dots \\ B=h, ha+1=n \dots\dots\dots\dots \boxed{1}(\text{代表 } a\times(ha+1)\text{矩形}) \\ B=h+1, ((h+1)a+1)=n \dots\dots\dots \boxed{2}(\text{代表 } a\times((h+1)a+1)\text{矩形}) \end{cases}$$

觀察 $\boxed{1}$ 和 $\boxed{2}$，我們發現此兩個矩形在圖形上，相差 a-1 格。

Step2:

因此，我們假設 A＝k (kx)，k+Ba＝n 成立，寫成以下式子：

A＝k (kx)，k+Ba＝n

$$\begin{cases} B=0, k=n \\ B=1, k+a=n \\ B=2, k+2a=n \\ \dots\dots \\ B=h, (k+ha)=n \dots\dots\dots\dots \boxed{1}(\text{代表 } a\times(k+ha)\text{矩形}) \\ B=h+1, (k+(h+1)a)=n \dots\dots\dots \boxed{2}(\text{代表 } a\times(k+(h+1)a)\text{矩形}) \end{cases}$$

一樣觀察 $\boxed{1}$ 和 $\boxed{2}$，我們發現此兩個矩形在圖形上，相差 a-1 格。

運用歸納法，我們只要證明 A＝k +1((k+1)x)，(k+1)+Ba＝n 成立，A＝k (kx)，k+Ba＝n 便成立了。

Step3:

寫成以下式子：

A＝k +1 $[(k+1)x]$，(k+1)+Ba＝n

$$\begin{cases} B=0, k+1=n \\ B=1, k+1+a=n \\ B=2, k+1+2a=n \\ \dots\dots \\ B=h, (k+ha+1)=n \dots\dots\dots\dots \boxed{1}(\text{代表 } a\times(k+ha+1)\text{矩形}) \\ B=h+1, (k+(h+1)a+1)=n \dots\dots\dots \boxed{2}(\text{代表 } a\times(k+(h+1)a+1)\text{矩形}) \end{cases}$$

由於在 A＝k (kx)，ka+Ba＝n 時，

$a\times(k+ha)$矩形和 $a\times(k+(h+1)a)$矩形已經相差 a-1 格了，觀察 A＝k +1 的

$\boxed{1}$ 和 $\boxed{2}$，我們發現其與 A＝k 比起來，只是 n 再多 1，故若 $a\times(k+ha)$矩形和 $a\times(k+(h+1)a)$矩形被用 k 個 ax1 排時相差 a-1 格，則A＝k +1 的 $\boxed{1}$ 和 $\boxed{2}$ 也會相差 a-1 格。

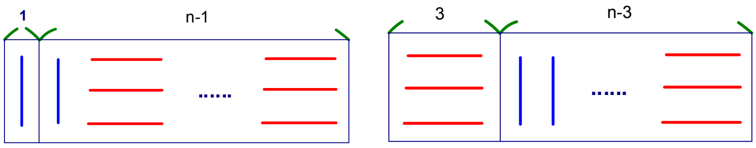
因此我們證明**圖形隨著 a×1 的 a 不同，而彼此垂直間隔 a－1 格。**

◈ 欲證：$[S^{a\times1}_{a\times n}, bx]=[S^{a\times1}_{a\times(n-1)},(b-1)x]+[S^{a\times1}_{a\times(n-a)}, bx]$ (if $a|n,(0\le b\le n)$)

$[S^{a\times1}_{a\times n}, bx]=[S^{a\times1}_{a\times(n-1)},(b-1)x]+[S^{a\times1}_{a\times(n-a)}, bx]$ (if $a\nmid n,(1\le b\le n)$)

證明：當 a× n 矩形用 a×1 矩形鋪滿時，若使用 b 個 a×1 矩形時，則其鋪滿數為$[S^{a\times1}_{a\times n}, bx]=[S^{a\times1}_{a\times(n-1)},(b-1)x]+[S^{a\times1}_{a\times(n-a)}, bx]$，其中 $a|n,(0\le b\le n)$ 。但當 $a\nmid n$ 時, $(1\le b\le n)$，此式子所代表的意義為 [表格內的任一格]，其鋪滿數皆等於[該格往上數 a-1 格的鋪滿數]+[該格往左一格，再往上數一格的鋪滿數]。

我們開始來看 $[S^{a\times1}_{a\times n}, bx]=[S^{a\times1}_{a\times(n-1)},(b-1)x]+[S^{a\times1}_{a\times(n-a)}, bx]$ 這個式子，由於是 a xn 矩形鋪入 b 個 ax1 矩形，所以等號左邊的式子可以寫成 $[S^{a\times1}_{a\times n}, bx]$，而此排法可以看做是圖(三十一)：



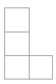
圖(三十一)

此 axn 矩形鋪入 b 個 ax1 矩形，可以分成 [ax (n-1)矩形鋪入 b-1 個 ax1 矩形+一個 ax1 的特殊形] 和 [b 個 ax1 矩形鋪入 ax (n-3)矩形 + 一個 ax3 的特殊形]以上兩個式子都是用 b 個 x 型去鋪排，故此式得證。

而後我們發現，如果 $a|n$，則在 0x 時會有鋪滿數為 1，$(0\le b\le n)$; 反之，鋪滿數為 0， $(1\le b\le n)$。

另證：見附件 1

（四）分析用 L 型鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

設  為 x 型：

	2x	4x	6x	8x	10x	12x	總鋪滿數
3×1~3×7							0
3×8	2^2						4
3×9~3×15							0
3×16	2^3	2^4					24
3×17~3×23							0
3×24	2^4	2^5x2	2^6				144
3x25~3x31							0
3x32	2^5	2^6x3	2^7x3	2^8			864
3x33~3x39							0

3x40	2^6	2^7x4	2^8x6	2^9x4	2^{10}		5184
3x41~3x47							0
3x48	2^7	2^8x5	2^9x10	2^{10}x10	2^{11}x5	2^{12}	31104

表格（十三）

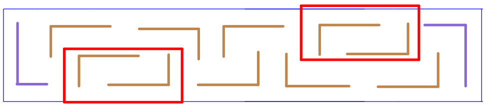
經由計算分析，我們繪出了表格（十三）。我們把其分為兩部分來探討，2^n和其所乘上的數，也就是黑字和白字，並且加以證明

- **2^n：每一格為該列的前一格的兩倍**

我們利用歸納法，證明 3x8n 矩形會有這樣的情形：

Step1:

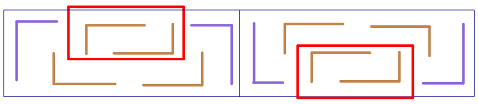
當 n＝2 時，$\mathbf{P_{3\times16}=2^3\times1}$，如圖(三十二)所示：



圖(三十二)

（此圖的鏡射加上紅框裡的兩種變化的乘積）

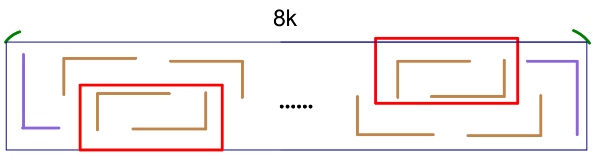
可將其變換成兩個特殊形，如圖(三十三)：



圖(三十三)

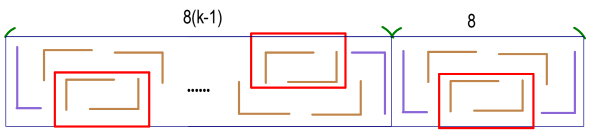
Step2:

當 n＝k 時，$\mathbf{P_{3\times8k}=2^{k+1}\times1}$，如圖(三十四)所示：



圖(三十四)

每切割一次，就讓圖形多了一個翻轉的機會，如圖(三十五)：



圖(三十五)

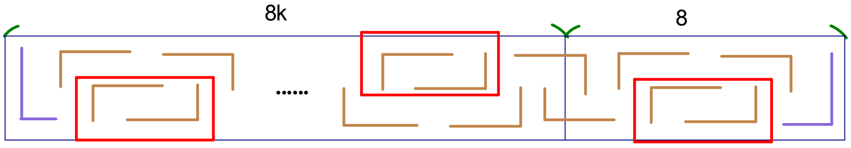
切兩次，多兩個翻轉機會......以此類推，繪出表格(十四)：

矩形	2x	4x	6x	8x	10x		2(k-1)x	2kx
3x8k 的鋪滿數	2^{k+1}	2^{k+1}x2 ＝2^{k+2}	2^{k+2}x2 ＝2^{k+3}	2^{k+3}x2 ＝2^{k+4}	2^{k+4}x2 ＝2^{k+5}	......	2^{k-2}x2 ＝2^{k-1}	2^{k-1}x2 ＝2^k
(以上鋪滿數不包括其所乘上的數字)								

表格(十四)

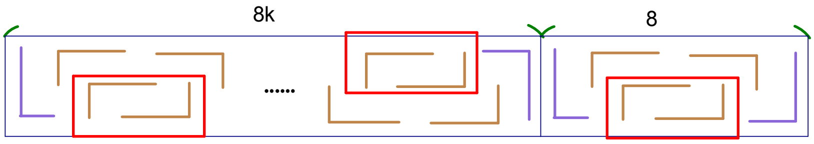
Step3:

而 3x8(k+1) 矩形可以看做是 3x8k 矩形再加上一個 3x8 矩形，故最開始的 2x 會較 3x8k 矩形多兩倍，如圖(三十六)：



圖(三十六)

而後再將此圖依照 3x8k 矩形的方式做切割，如圖(三十七)：



圖(三十七)

最後我們繪出表格(十五)：

矩形	2x	4x	6x	8x	10x		2(k-1)x	2kx
3x8(k+1) 的鋪滿數	2^{k+1+1}	$2^{k+2}\times2$ $=2^{k+3}$	$2^{k+3}\times2$ $=2^{k+4}$	$2^{k+4}\times2$ $=2^{k+5}$	$2^{k+5}\times2$ $=2^{k+7}$	......	$2^{k-1}\times2$ $=2^{k}$	$2^{k}\times2$ $=2^{k+1}$
(以上鋪滿數不包括其所乘上的數字)								

表格(十五)

故此式得證。

- **所乘上的乘數在表格中的放置方式為一巴斯卡三角形**

首先觀察表格(十五)，我們發現其巴斯卡三角形的形成方式：每一列(矩形)所形成的數字是巴斯卡三角形的一列。因此，利用歸納法，我們先證明:

n＝8 (3x8 矩形)成立。

Step1:

我們很容易地可以看出，3x8 矩形要用 L 型去鋪滿時，鋪滿數是

$2^2\times1$ 種，如圖(十七)。

Step2:

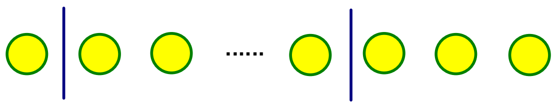
再來，我們假設 n＝8k (3x8k 矩形)的該列符合巴斯卡三角形的某一列，我們可以將其畫成表格(十六)：

L 型個數	算式	乘數
2x	$8(x+1)=8k$ x=k-1	$\frac{(k-1)!}{(k-1)!}=1$
4x	$8(x+1)+8(y+1)=8k$ x+y=k-2	$\frac{(k-1)!}{(k-2)!}$
6x	$8(x+1)+8(y+1)+8(z+1)=8k$ x+y+z=k-3	$\frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!}$
8x	$8(x+1)+8(y+1)+8(z+1)+8(w+1)=8k$ x+y+z+w=k-4	$\frac{(k-1)!}{3!\,(k-4)!}$
......		
2(k-3)x	$\overbrace{8(x+1)+8(y+1)+\cdots+8(z+1)+8(w+1)}^{k-3\text{ 個}}=8k$ $\overbrace{x+y+\ldots\ldots+z+w}^{k-3\text{ 個}}=k-(k-3)=3$	$\frac{(k-1)!}{3!\,(k-4)!}$

2(k-2)x	$\overbrace{8(x+1)+8(y+1)+\ldots+8(z+1)+8(w+1)}^{k-2\text{ 個}}=8k$ $\overbrace{x+y+\ldots\ldots+z+w}^{k-2\text{ 個}}=k-(k-2)=2$	$\frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!}$
2(k-1)x	$\overbrace{8(x+1)+8(y+1)+\ldots+8(z+1)+8(w+1)}^{k-1\text{ 個}}=8k$ $\overbrace{x+y+\ldots\ldots+z+w}^{k-1\text{ 個}}=k-(k-1)=1$	$\frac{(k-1)!}{(k-2)!}$
2kx	$\overbrace{8(x+1)+8(y+1)+\cdots+8(z+1)+8(w+1)}^{k\text{ 個}}=8k$ $\overbrace{x+y+\ldots\ldots+z+w}^{k\text{ 個}}=k-k=0$	$\frac{(k-1)!}{(k-1)!}=1$

表格(十六)

我們把它想成是三(三)證明過程的延伸，由於要把該矩形分為 k 個特殊形，也就是把 8k 分為幾個 8 的倍數相加，因此我們把它想像成下圖：



圖(三十八)

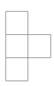
如圖(三十八)，圓圈代表著數字(如 8 個圓圈代表 8，16 個圓圈代表 16......以此類推)，線段代表著隔板，也就是加號，把每個圓圈和加號都當作一個物件，因此這些物件的鋪滿數就會是$\frac{(\text{圓圈數}+\text{隔板數})!}{(\text{重複的圓圈})!(\text{重複的隔板})!}$，故首先我們先將算式寫出，先分析該矩形用這麼多 x 去排時，應分為幾個特殊形，這些特殊形又可以如何鋪滿，由於這些 3xn 特殊形(8|n) (證明如一、(四))，故原始式子中係數為 8；而分類上其至少要 1 個，故算式中的未知數皆先行加上 1。

化簡這些算式後，我們利用圓圈與隔板的觀念，將其鋪滿數寫出，並繪製成表格(十六)，作為假設。

Step3:

最後，我們只要證明 n＝8(k+1)時成立，如同 n＝8k 的方法，見附件 2。我們將兩個表格相減比對，將[3x8(k+1)矩形,4x]所乘上的數字減[3x8k 矩形,4x]所乘上的數字，結果為 1，也就是 3x8k 矩形的 2x所乘上的數字，以此類推其他乘上的數字，也都有這樣的結果，此結果正好符合巴斯卡三角形(每一數字等於上一列的兩個數字相加)，故運用歸納法，我們**證明所乘上的數字圖形將會是一個巴斯卡三角形**。

（五）分析用 T 型鋪滿 4xn 矩形的鋪滿數

設  為x：

	2x	4x	6x	8x	10x	12x	總鋪

							滿數
4×1~4×3							0
4×4	2						2
4×5~4×7							0
4×8	2	2^2					6
4×9~4×11							0
4×12	2	2^2x2	2^3				18
4×13~4×15							0
4×16	2	2^2x3	2^3x3	2^4			54
4×17~4×19							0
4×20	2	2^2x4	2^3x6	2^4x4	2^5		162
4×21~4×23							0
4×24	2	2^2x5	2^3x10	2^4x10	2^5x5	2^6	486

表格(十七)

經由計算分析，我們繪出了表格(十七)。其可以分兩方面解釋證明：2^n 和其所乘上的數。

- **2^n 每一行固定，且 2nx 所對應到的便是 2^n**

同一行，顧名思義為相同數目的 x，由於[用 T 型填滿 4×n 矩形]時，一個特殊形一定是兩個 x，且因 $P_{4\times n}=2$,其中$4|n$，$n\in N$，所以分成 n 個特殊形就是 2^n，故此式得證。整理如表格(十八)：

所用 x 數目	2x	4x	6x	……	2kx
形成的特殊形數目	一個特殊形	兩個特殊形	三個特殊形		k 個特殊形
2 的次方數	1	2	3		k

表格(十八)

- **乘上的乘數在表格中的放置方式為一巴斯卡三角形**

我們發現，[用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數]和[用 L 型填滿 3×n 矩形的鋪滿數]的每個特殊形皆存在兩個x，也就是說，探討一矩形用多少個x來排時的鋪滿數，便是尋找此矩形分割成多少個特殊形做相乘。再加上[用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數] 所乘上數字是將某數($4|n$)分割成幾個 4 的倍數相加，和[用 L 型填滿 3×n 矩形的鋪滿數]的將某數($8|n$)分割成幾個 8 的倍數相加的原始算式雖然不一樣，但最終算式和鋪滿數是相同的，故同理可證用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數，我們**證明乘數在表格(十七)中的放置方式為一巴斯卡三角形**。

經由以上兩個切割的過程，我們發現，若將 n 設為 cxt **($t\in N$)**，並討論 n 在 t 值的變化情形所產生的方法數，並將之繪成表格(十九)

	1	2	3	4	……	t-1	t
c×1	$0!/0!=C_0^0$						
c×2	$1!/0!=C_0^1$	$1!/1!=C_1^1$					

c×3	$2!/2!=C_0^2$	$2!/1!=C_1^2$	$2!/2!=C_2^2$				
c×4	$3!/3!=C_0^3$	$3!/(2!\,1!)=C_1^3$	$3!/(1!\,2!)=C_2^3$	$3!/3!=C_3^3$			
......							
c×(t-1)	$\frac{(t-2)!}{(t-2)!}=C_0^{(t-2)}$	$\frac{(t-2)!}{(t-3)!\,1!}=C_1^{(t-2)}$	$\frac{(t-2)!}{(t-4)!\,2!}=C_2^{(t-2)}$	$\frac{(t-2)!}{(t-5)!\,3!}=C_3^{(t-2)}$	......	$\frac{(t-2)!}{(t-2)!}=C_{(t-2)}^{(t-2)}$	
c×t	$\frac{(t-1)!}{(t-1)!}=C_0^{(t-1)}$	$\frac{(t-1)!}{(t-2)!\,1!}=C_1^{(t-1)}$	$\frac{(t-1)!}{(t-3)!\,2!}=C_2^{(t-1)}$	$\frac{(t-1)!}{(t-4)!\,3!}=C_3^{(t-1)}$		$\frac{(t-1)!}{1!\,(t-2)!}=C_{(t-2)}^{(t-1)}$	$\frac{(t-1)!}{(t-1)!}=C_{(t-1)}^{(t-1)}$

表格(二十)

我們發現可將此結果運用，將來，如果有人尋找鋪滿數時，發現有 m×n 矩形的 n 為 ct，並且需要用 c 的 t 倍去拆解做計算，此巴斯卡三角形便可以派上用場，尤其特殊形和被排列的矩形常有這樣的關聯，故此結果可派上用場。

四、探討用 k×k 方形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數

（一）用 2×2 方形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數，如下表格(二十一)

圖形	鋪滿數
用 **2×2** 方形填入 **2×n** 矩形	$\begin{cases} n \text{ 是奇數：0 種} \\ n \text{ 是偶數：1 種} \end{cases}$
用 **2×2** 方形填入 **3×n** 矩形	0 種
用 **2×2** 方形填入 **4×n** 矩形	$\begin{cases} n \text{ 是奇數：0 種} \\ n \text{ 是偶數：1 種} \end{cases}$
......	......
用 **2×2** 方形填入 **m×n** 矩形	$\begin{cases} \text{若 } m\,\&\,n \text{ 都是偶數：1 種} \\ \text{若 } m\,\&\,n \text{ 其一不為偶數：0 種} \end{cases}$

表格(二十一)

結論：用 2×2 方形鋪滿 m×n ($m, n \in N$)矩形的鋪滿數的公式 $\begin{cases} \text{若} m\,\&\,n \text{都是偶數：1種} \\ \text{若} m\,\&\,n \text{其一不為偶數：0種} \end{cases}$

（二）用 k×k 方形鋪滿 m×n 矩形的鋪滿數

我們發現，m×n 矩形填入 k×k 方形時，若符合下列條件：$\begin{cases} k \le m, n \\ k \mid m, n \end{cases}$

則鋪滿數為 1 反之，則此圖形無法被 k×k 方形鋪滿。

陸、討論

一、鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數：

一開始我們純粹用畫圖尋找規律，但當數目很大時，規律便不是那麼好找，有別於文獻「奇妙的骨牌世界」中用的方式，我們推出一種可以代任何數字 h 進去的公式，可以視個人找到的鋪滿數而決定。

（一）用 3×1 矩形鋪滿 3×n (n ∈ N)矩形的鋪滿數：

我們利用是否跨斷線的方法來尋找規律，因為其可分為跨斷線的兩種情形和無跨斷線的一種情形，發現可以寫成三項式的遞迴式，所以用 3×1 矩形鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數的公式為

$$S^{3\times1}_{3\times h}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-1)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-2)})_{(1,2)}+(S^{3\times1}_{3\times(h-2)}\times S^{3\times1}_{3\times(n-h-1)})_{(2,1)}$$

$$(0<h<n,\ 其中\ h,n\in N)$$

（二）用虧格鋪滿 3×n (n ∈ N)矩形的鋪滿數：

在鋪滿時我們發現，被鋪滿虧格的矩形若 n>2，則一定無法排出特殊形，且鋪滿數的規律為： 0,2,0,4,0,8,0,16,0,32……。故鋪滿數的公式為若(2|n)，則 $S^{Q}_{3\times n}=2^{n/2}$；若 2∤n，則鋪滿數恆為 0 (n ∈ N)，做虧格時，也給了我們一個點子：或許可以利用俄羅斯方塊裡的圖形來做鋪滿，看能不能找到特殊的規律。

（三）用 3×1 矩形和虧格鋪滿 3×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數：

接下來，我們將虧格和 3×1 矩形組合起來做鋪滿，由於情況較為複雜，無法用是否跨斷線方法或畫圖找規律，因此經過討論，我們發明了一個「**特殊形找法**」：

由一、（一）用 3×1 矩形鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數的研究結果，我們猜想，不管用什麼圖形去鋪滿，只要該被鋪滿圖形的最右邊能夠一直排出特殊形，便能寫出一長串的遞迴式作為公式，此公式如下：

$$\mathbf{S^{x}_{m\times n}}=\sum_{i=1}^{n}P_{m\times i}S^{x}_{m\times(n-i)}=P_{m\times1}S^{x}_{m\times(n-1)}+P_{m\times2}S^{x}_{m\times(n-2)}+P_{m\times3}S^{x}_{m\times(n-3)}+\dots+P_{m\times(n-2)}S^{x}_{m\times2}+P_{m\times(n-1)}S^{x}_{m\times1}+P_{m\times n}\ (n\in N)$$

而由於用 3×1 矩形和虧格鋪滿 3×n 矩形的特殊形鋪滿數(也就是 P)有規律，

因此我們推出下列公式：$S^{Q\&3\times1}_{n}=S^{Q\&3\times1}_{n-1}+2S^{Q\&3\times1}_{n-2}+6S^{Q\&3\times1}_{n-3}+S^{Q\&3\times1}_{n-4}-S^{Q\&3\times1}_{n-6}$

$(S^{Q\&3\times1}_{5}=62,\ S^{Q\&3\times1}_{4}=23,\ S^{Q\&3\times1}_{3}=10,\ S^{Q\&3\times1}_{2}=3,\ S^{Q\&3\times1}_{1}=1,\ S^{Q\&3\times1}_{0}=0\quad (n\in N))$

（四）探討僅用 L 型鋪滿 3×n 矩形的鋪滿數

其實，我們是先做用 L 型鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數，當初的動機很單純，因為認為一個 L 型所佔的格數是 4 格，因此直覺地嘗試去排滿 4×n 矩形，但是不管我們用是否跨斷線還是特殊形的方法，就是尋找不到適當的規律，正當灰心喪氣之時，我們百般無聊的嘗試用 L 型去鋪滿 3×n 矩形，沒想到竟然推出 **$6\times S^{L}_{3\times(n-8)}$**，**$S^{L}_{3\times8}=4$，$n>1$，$n\in\mathbb{N}$，$n|8$**個簡要的公式，不僅是個振奮人心的消息，也讓我們覺得：實在是柳暗花明又一村啊！

因此，在作品中，除了本項目外，其他用來鋪滿的圖形所佔的格數，和 m×n 矩形的 m 皆相等。

二、鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數：

（一）探討用 4×1 矩形鋪滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數：

沿用用 3×1 矩形鋪滿 3×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數的尋找方式，我們試著推導出用 4×1 矩形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數的公式，雖然數字變大了，但一樣可以簡單區分成跨斷線和無跨斷線，因此我們利用累加的符號，推導出一個不管斷線在哪都適用的公式：

1. 用 4×1 矩形鋪滿 4×n 矩形的鋪滿數的通用公式

$$S_{4\times n}^{4\times 1}=S_{4\times h}^{4\times 1}\times S_{4\times(n-h)}^{4\times 1}+\sum_{i=1}^{3}\left\{S_{4\times(h-i)}^{4\times 1}\times S_{4\times[n-h-(4-i)]}^{4\times 1}\right\}_{(i,4-i)}\quad (n\in N)$$

利用**用 4×1 的矩形鋪滿 4×n 的鋪滿數的第二種公式**，我們發現因為跨斷線情形的項數會隨著 a 的增加而增加(a×n 矩形無跨斷線的情況的項數＝a-1 項)，我們進而將 4 推廣到 a，並且利用連續累加的方式推出跨斷線情形的公式：

2. 用 a×1 的矩形鋪滿 a×n 的鋪滿數通用公式

$$S_{a\times h}^{a\times 1}\times S_{a\times(n-h)}^{a\times 1}+\sum_{i=1}^{a-1}\left\{S_{a\times[n-a-(a-i)]}^{a\times 1}\times S_{a\times(a-i)}^{a\times 1}\right\}_{(a-i,i)}$$

$$(n\in N)$$

(若 h＝1,則出現較簡短的遞迴關係：$S_{a\times(n-a)}^{a\times 1}+S_{a\times(n-a)}^{a\times 1}$)

（二）探討僅用 2×2 方形填滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數

用 2×2 方形填滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數的過程很單純，因為方形是一個固定的圖形，所以狀況只簡單區分為當 n 是奇數和當 n 是偶數來作討論，故用 2×2 方形鋪滿 4×n 的鋪滿數公式為：$\begin{cases}\text{當 } n \text{ 是奇數：0 種}\\ \text{當 } n \text{ 是偶數：1 種}\end{cases}$

（三）探討僅用 T 型填滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數

用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數公式為$s_{4\times n}^{T}=3\times s_{4\times(n-4)}^{T}$, $s_{4\times 4}^{T}=2$

（四）探討僅用 Z 型填滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數

因為 Z 型不管排哪裡都會因此阻擋到其他格子，如圖(二十七)，所以用 Z 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數公式為$s_{4\times n}^{Z}=\mathbf{0}$

（五）探討用 4×1 矩形和 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數

我們利用特殊形找法來找鋪滿數，經過一連串的推倒與記算，我們發現用 4×1 矩形和 T 型填滿 4×n 矩形(n ∈ N)的鋪滿數的公式為

$$S_{\mathbf{4\times n}}^{T\&4\times 1}=S_{4\times(n-1)}^{T\&4\times 1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{T\&4\times 1}-S_{4\times(n-8)}^{T\&4\times 1}-S_{4\times(n-5)}^{T\&4\times 1}$$

（六）探討用 4×1 矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形的排法

經過先前多次的計算，現在我們使用特殊形找法計算鋪滿數已是駕輕就熟，而且我們發現，當其特殊形鋪滿數有規律時，各項數對消後，最後的結果並不會很繁瑣。故我們推出用 4×1 矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形(n ∈ N)的鋪滿數的公式為

$$S_{4\times(n-1)}^{2\times 2\&4\times 1}+S_{\mathbf{4}\times(n-2)}^{2\times 2\&4\times 1}+4\times S_{4\times(n-4)}^{2\times 2\&4\times 1},\ S_{\mathbf{4\times 1}}^{2\times 2\&4\times 1}=1,\ S_{\mathbf{4\times 2}}^{2\times 2\&4\times 1}=2,\ S_{\mathbf{4\times 3}}^{2\times 2\&4\times 1}=3,\ S_{\mathbf{4\times 4}}^{2\times 2\&4\times 1}=9$$

（七）探討用 4×1 矩形和 Z 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數

由於用 Z 型去鋪滿時，必會碰到以下問題，見圖(二十七)(有格子會被擋住)，故用 4×1 矩形和 Z 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種

（八）探討用 Z 型矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形的鋪滿數

情況如以上探討用 Z 型填滿矩形的情況一樣，見圖(二十七)(有格子會被擋住)，故用 Z 型矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形的鋪滿數＝0 種。

（九）探討用 T 型矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形的鋪滿數

利用特殊形找法，我們推出用 T 型矩形和 2×2 方形填滿 4×n 矩形的鋪滿數公式為

$$S_{4\times n}^{T\&2\times2}=S_{4\times(n-2)}^{T\&2\times2}+3\times S_{4\times(n-4)}^{T\&2\times2}-S_{4\times(n-6)}^{T\&2\times2}$$

三、填滿 3×n 矩形的個別數：

※在文獻：「費先生與巴先生聯手出擊～數列間的關係及延伸」中，他們探討了用 2×1 矩形填滿 2×n 矩形的個別數和用 2×1 矩形填滿 3×n 矩形的個別數，也就是既然已經知道該矩形被另一矩形排滿的鋪滿數，便可以分析在這些鋪滿數中，用來排的矩形橫著放或直著放的個別數。因此我們想繼續研究看看「個別數」這塊，看能不能找到規律。

（一）探討用 3×1 矩形填滿 3×n(n ∈ N)矩形的個別數

如表格(十)， 一開始做出此圖時，我們十分訝異：跟文獻中他人的結果竟然有異曲同工之妙！皆是巴斯卡三角形，只是空的格數不同，於是我們再接再厲，接著做 4×1(1×4)矩形。

（二）探討用 4×1(1×4)矩形填滿 4×n(n ∈ N)矩形所需使用到的個數:

如表格(十一) ，為一間隔 3 格的傾斜巴斯卡三角形。

（三）探討用 a×1(1×a)矩形填滿 a×n(n ∈ N)矩形所需使用到的個數

如表格(十二)，**圖形將會是一個傾斜的巴斯卡三角形，且隨著 a×1 的 a 不同，而彼此垂直間隔 a－1 格。**我們發現，其實巴斯卡三角形和遞迴關係有許多相似之處，巴斯卡三角形如果一行一行來拆解，本身就充滿極為有趣的數列，而鋪滿數竟意外跟他們有連結，真是太奇妙了！

（四）分析用 L 型填滿 3×n 矩形的鋪滿數

如表格(十五)， 2^n 每一格為該列的前一格的兩倍，且所乘上的數字圖形為一巴斯卡三角形。

（五）分析用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數

如表格(二十)，2^n 每一行固定，且所乘上的數字圖形為一巴斯卡三角形。

如表格(二十三)，我們發現可將此結果運用，將來，如果有人尋找鋪滿數時，發現有 n 為 ct，並且需要用 c 的倍數去拆解做計算，此巴斯卡三角形便可以派上用場，尤其特殊形和可被排列的矩形常有關聯，故此結果可派上用場。

四、探討用 k×k 方形填滿 m×n 矩形的鋪滿數

接續用 2×2 方形填滿 4×n(n ∈ N)矩形的鋪滿數的過程，我們首先將 4×n(n ∈ N)推廣為 m×n(m, n ∈ N)，並推出下列的式子：

結論 1：用 2×2 方形填滿 m×n(m, n ∈ N)矩形的鋪滿數的公式為

$$\begin{cases}\text{若 } m\&n \text{ 都是偶數：1 種}\\ \text{若 } m\&n \text{ 其一不為偶數：0 種}\end{cases}$$

接著將 2×2 方形推廣為 k×k 方形，推出下列的式子：

結論 2：k×k 方形填入 m×n(m, n ∈ N)矩形時，若符合下列條件：$\begin{cases} k\le m,n\\ k|m,n\end{cases}$

則鋪滿數為 1，反之，則此圖形無法被 k×k 方形填滿。

柒、結論

一、填滿 3×n 矩形的鋪滿數：

（一）用 **3×1** 矩形填滿 **3×n** 矩形的鋪滿數的公式

$$S_{3\times h}^{3\times1}\times S_{3\times(n-h)}^{3\times1}+(S_{3\times(h-1)}^{3\times1}\times S_{3\times(n-h-2)}^{3\times1})_{(1,2)}+(S_{3\times(h-2)}^{3\times1}\times S_{3\times(n-h-1)}^{3\times1})_{(2,1)}$$

($0 < h < n$, 其中 $h, n \in N$)

（二）用虧格填滿 **3×n** 矩形的鋪滿數：

若$(2|n)$，則 $S^{Q}_{3\times n}=2^{n/2}$；若 $2\nmid n$，則鋪滿數恆為 0 ($n \in N$)

（三）用 **3×1** 矩形和虧格填滿 **3×n** 矩形的鋪滿數的公式：

$S^{Q\&3\times1}_{n}=\mathbf{S}S^{Q\&3\times1}_{n-1}+2S^{Q\&3\times1}_{n-2}+6S^{Q\&3\times1}_{n-3}+S^{Q\&3\times1}_{n-4}-S^{Q\&3\times1}_{n-6}$

($S^{Q\&3\times1}_{5}=62$, $S^{Q\&3\times1}_{4}=23$, $S^{Q\&3\times1}_{3}=10$, $S^{Q\&3\times1}_{2}=3$,

$S^{Q\&3\times1}_{1}=1$, $S^{Q\&3\times1}_{0}=0$ ($n \in N$))

（四）探討僅用 **L** 型填滿 **3×n** 矩形的鋪滿數的公式：

$6\times s^{L}_{3\times(n-8)}$, $s^{L}_{3\times8}=4$，$n>1$，$n\in\mathbb{N}$，$n|8$

二、填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

（一）探討用 4×1 矩形填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

1.用 4×1 矩形填滿 4×n 矩形的鋪滿數的通用公式

$$S^{4\times1}_{4\times n}=S^{4\times1}_{4\times h}\times S^{4\times1}_{4\times(n-h)}+\sum_{i=1}^{3}\left\{S^{4\times1}_{4\times(h-i)}\times S^{4\times1}_{4\times[n-h-(4-i)]}\right\}_{(i,4-i)}\quad (n\in N)$$

2.用 a×1 的矩形鋪滿 a×n 的鋪滿數通用公式

$$S^{a\times1}_{a\times h}\times S^{a\times1}_{a\times n-h)}+\sum_{i=1}^{a-1}\left\{S^{a\times1}_{a\times[n-a-(a-i)]}\times S^{a\times1}_{a\times(a-i)}\right\}_{(a-i,i)}$$

（二）探討僅用 2×2 方形填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

$$\text{鋪滿數公式為}\begin{cases}\text{當 } n \text{ 是奇數：0 種}\\ \text{當 } n \text{ 是偶數：1 種}\end{cases}(n\in N)$$

（三）探討僅用 T 型填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

鋪滿數公式為$s^{T}_{4\times n}=3\times s^{T}_{4\times(n-4)}$, $s^{T}_{4\times4}=2(n\in N)$

（四）探討僅用 Z 型填滿 4xn(n ∈ N)矩形的鋪滿數：

鋪滿數公式為$s^{Z}_{4\times n}=\mathbf{0}$

（五）探討用 4×1 矩形和 T 型填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

鋪滿數公式為

$S^{T\&4\times1}_{\mathbf{4\times n}}=S^{T\&4\times1}_{4\times(n-1)}+4\times S^{T\&4\times1}_{4\times(n-4)}-S^{T\&4\times1}_{4\times(n-8)}-S^{T\&4\times1}_{4\times(n-5)}$

（六）探討用 4×1 矩形和 2×2 方形填滿 4xn 矩形的鋪滿數

鋪滿數公式為 $S^{2\times2\&4\times1}_{4\times(n-1)}+S^{2\times2\&4\times1}_{\mathbf{4\times(n-2)}}+4\times S^{2\times2\&4\times1}_{4\times(n-4)}$,

$S^{2\times2\&4\times1}_{\mathbf{4\times1}}=1$, $S^{2\times2\&4\times1}_{\mathbf{4\times2}}=2$, $S^{2\times2\&4\times1}_{\mathbf{4\times3}}=3$, $S^{2\times2\&4\times1}_{\mathbf{4\times4}}=9$

（七）探討用 4×1 矩形和 Z 型填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

鋪滿數＝0 種

（八）探討用 Z 型矩形和 2×2 方形填滿 4xn 矩形鋪滿數：

鋪滿數＝0 種

（九）探討用 T 型矩形和 2×2 方形填滿 4xn 矩形的鋪滿數：

鋪滿數公式為$S^{T\&2\times2}_{\mathbf{4\times n}}=S^{T\&2\times2}_{4\times(n-2)}+3\times S^{T\&2\times2}_{4\times(n-4)}-S^{T\&2\times2}_{4\times(n-6)}$

（一）**探討用 3×1(1×3)矩形填滿 3×n 矩形所需使用到的個數**

如表格(十)， 為一間隔 2 格的傾斜巴斯卡三角形。

（二）**探討用 4×1(1×4)矩形填滿 4×n 矩形所需使用到的個數**

如表格(十一)，為一間隔 3 格的傾斜巴斯卡三角形。

（三）**探討用 a×1(1×a)矩形填滿 a×n 矩形所需使用到的個數**

如表格(十二) 圖形將會是一個傾斜的巴斯卡三角形，且隨著 a×1 的 a 不同，而彼此垂直間隔 a－1 格。

（四）**分析用 L 型填滿 3×n 矩形的鋪滿數**

如表格(十五)，2^n 每一格為該列的前一格的兩倍，且所乘上的數字圖形為一巴斯卡三角形。

（五）**分析用 T 型填滿 4×n 矩形的鋪滿數**

如表格(二十)，2^n 每一行固定，且所乘上的數字圖形為一巴斯卡三角形。

如表格(二十三)，我們發現可將此巴斯卡三角形運用，尤其特殊形和可被排列的矩形常有關聯，故此結果可派上用場。

四、探討用 k×k 方形填滿 m×n 矩形的鋪滿數

結論 1：用 2×2 方形填滿 m×n 矩形的鋪滿數的公式為

$$\begin{cases} \text{若 } m\,\&\,n \text{ 都是偶數：1 種} \\ \text{若 } m\,\&\,n \text{ 其一不為偶數：0 種} \end{cases} (n \in N)$$

結論 2：m×n 矩形填入 k×k 方形時，若符合下列條件：

$\begin{cases} k \le m, n \\ k|m, n \end{cases} (n \in N)$，則鋪滿數為 1，反之，則此圖形無法被 k×k 方形填滿。

捌、參考資料及其他

1. 整數數列大全（http://oeis.org/?language＝chinese）
2. 中華民國第 30 屆中小學科學展覽會 高中組 奇妙的骨牌世界
3. 中華民國第 42 屆中小學科學展覽會 高中組(臺灣二ＯＯ 三年國際科學展覽會） 鋪蓋之研究與探討
4. 中華民國第 46 屆中小學科學展覽會/高中組（臺灣二ＯＯ 六年國際科學展覽會/長方體中切割正立方體之研究
5. 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會 高中組 拼出詭譎--變幻莫測的地磚
6. 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會 國中組 神奇的費氏數列
7. 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會 國小組 費先生與巴先生聯手出擊～數列間的關係及延伸
8. 中華民國第 49 屆中小學科學展覽會 國中組 瑕疵之美-矩形磚牆瑕疵線的探討
9. 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 國小組 水泥工人的困擾？
10. Tomeseu\民 96(1989)\Covering 3x2m Checkerboards \American Mathmatics Monthly\May\p.262
11. Tomeseu\民 81(1974)\Recurrence Relation\American Mathmatics Monthly\chapter6\p.522~523

【評語】030414

平面的虧格問題，相關內容已有多人研究，作者無法提出創新的證明且第 49 屆科展高中佳作，已完成到 N 維的研究並推出一般化的結果。雖然分析完整，但作者無法具體描述研究特點或延伸至多維度的虧格問題探討，且偏向文獻整理歸納，建議做更詳盡的文獻討論，方可突破性之成果。