中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030413

翻翻相連

—翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析

學校名稱：新竹縣立博愛國民中學

作者：	指導老師：
國一　林妍樺 國一　徐詠涵	劉文育

關鍵詞：奇偶性、數學歸納法、漢米爾頓路徑

摘　　　要

此作品研究「**若有 m 個杯子，其中 t_1 個杯子朝上，每次翻轉 n 個杯子，討論 m、n 在何條件下，可將 m 個杯子翻成 t_2 個杯子朝上，且最少翻轉次數為何？其翻轉過程又為何？是否有漢米爾頓路徑及迴路？**」我們用數學歸納法和奇、偶數的特性來解決此問題，當翻轉杯數為奇數時，不管原有杯數為何，每個狀態均可翻到且互通；但翻轉杯數為偶數時，其情形則分兩類：杯子朝上的個數為奇數者屬一類，偶數者為另一類，同類可互通，不同類即不互通。而探討最少次數的作法則有別於其他研究，我們把問題轉換成狀態圖，來尋找最短路徑及翻轉流程，且探討此圖是否有 Hamiltonian Cycle 或 Hamiltonian path。此外，我們亦用矩陣討論當翻轉次數固定時，可看出某狀態至某狀態可互通，並可計算其方法數。

壹、研究動機

我們上數學專題課時，老師曾問過我們一個題目：「若有 7 個朝上的杯子，每次翻轉 4 個杯子，亦即朝上翻為朝下，朝下翻成朝上，試問是否可將 7 個杯子翻成全部朝下？」這個問題引起我們高度的興趣，並上網搜尋，發現 2012 年桃園縣科展第三名的作品「翻滾吧！杯子」所研究的是：把 n 個杯子朝上，每次翻 m 個杯子，討論 n、m 在何種條件下，可將 n 個杯子全部翻成朝下。另外，我們也查到：第三十六屆全國數學科展第一名「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」、第四十三屆全國數學科展第二名「最佳全翻位的探討」、第四十五屆全國數學科展第三名「翻出一片天」及第四十六屆全國數學科展佳作「再翻出一片天」的研究，其所探討的皆為杯子全部向上，能否翻成全部向下及其最少次數的探討。我們覺得這樣的結果仍不夠廣義，因此想將其做更為深入且一般性的探究：「若有 m 個杯子，其中 t_1 個杯子朝上（當然 $m-t_1$ 個杯子朝下），每次翻轉 n 個杯子，討論 m、n、t_1、t_2 在何種條件下，可將 m 個杯子翻成 t_2 個杯子朝上，$m-t_2$ 個杯子朝下，且最少翻轉次數為何？其翻轉的過程又為何？」而且我們把問題變成狀態圖來討論圖的重要性質 Hamiltonian Cycle（漢米爾頓迴路：所有狀態恰經過一次且形成一個迴路）或 Hamiltonian path（漢米爾頓路徑：所有狀態可全部經過，且恰經過一次），故我們以此為主題做以下一系列的探討及研究。

貳、研究目的

一、當有 7 個杯子全部朝上，每次翻轉 4 個杯子時，探討是否可將全部杯子翻成朝下?又哪些狀態可與 7 個杯子朝上互通，哪些狀態不互通？

二、當有 4 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，探討與 4 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

三、當有 4 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，探討與 4 個杯子朝上互通的狀態及

不互通的狀態分別為何？

四、當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，探討與 5 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

五、當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，探討與 5 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

六、當有 2n 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n－1 個杯子時，探討與 2n 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

七、當有 m 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n－1 個杯子時，其中 m>2n－1，探討與 m 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

八、當有 m 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n 個杯子時，其中 m>2n，探討與 m 個杯子朝上互通的狀態及不互通的狀態分別為何？

九、若有 m 個杯子，其中 t_1 個杯子朝上，m－t_1 個杯子朝下，每次翻轉 n 個杯子時，探討 m、n 在何種條件下，可將 m 個杯子翻成 t_2 個杯子朝上，m－t_2 個杯子朝下。

十、（a）把問題變成一個有無連通之狀態圖，並探討其最少翻轉次數及翻轉流程。

（b）探討其問題所變成的狀態圖有無 Hamiltonian Cycle（漢米爾頓迴路：所有狀態恰經過一次且形成一個迴路）或 Hamiltonian path（漢米爾頓路徑：所有狀態可全部經過，且恰經過一次）。

十一、當翻轉次數固定時，探討哪些狀態可互通或不互通及一個狀態翻轉到另一個狀態共有幾種不同的方法數。

參、研究設備及器材

一、免洗杯

二、紙、筆(記錄用)

三、電腦

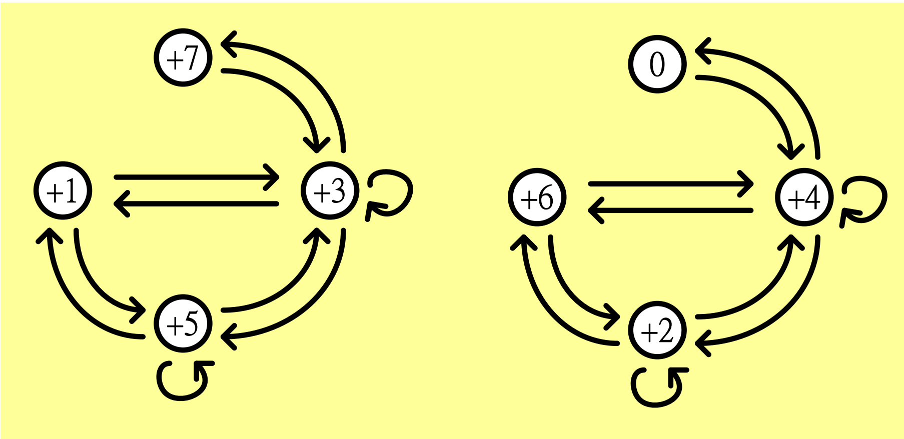
肆、研究過程及方法

首先，我們先規定杯子朝上以「＋」表示，杯子朝下以「－」，例如：＋7 表示 7 個杯子朝上之狀態，並從老師所給我們的問題「若有 7 個朝上的杯子，每次翻轉 4 個杯子，亦即朝上翻為朝下，朝下翻成朝上，試問是否可將 7 個杯子翻成全部朝下？」開始探討，接下來再針對原有杯子數及每次翻轉杯子數的奇偶關係以更簡單的實例做一測試與記錄，並觀察其結果，而後再試著將問題一般化，並找尋其規則加以解決。

一、當有 7 個杯子全部朝上，每次翻轉 4 個杯子時，
以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	+7	0
步驟 1	+3	–4
步驟 2	+5	–2
步驟 3	+1	–6
起始	0	–7
步驟 1	+4	–3
步驟 2	+2	–5
步驟 3	+6	–1

以狀態圖呈現其狀態互通之情形：



觀察結果：

（一）當有 7 個杯子全部朝上，每次翻轉 4 個杯子時，無法翻出所有狀態。

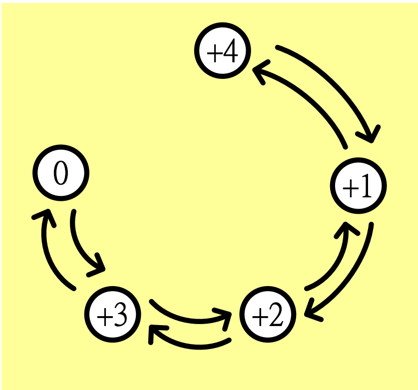
（二）若將起始狀態改為 7 個杯子均朝下，每次翻轉 4 個杯子時，亦無法翻出所有狀態。

（三）由狀態圖可明顯看出杯子朝上的個數是奇數者其狀態可互通，杯子朝上的個數是偶數者其狀態亦可互通，但此二者的狀態不互通。

二、當 4 個杯子朝上，每次翻轉 3 個杯子時，
以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	＋4	0
步驟 1	＋1	–3
步驟 2	＋2	–2
步驟 3	＋3	–1
步驟 4	0	–4

以狀態圖呈現其狀態互通之情形：



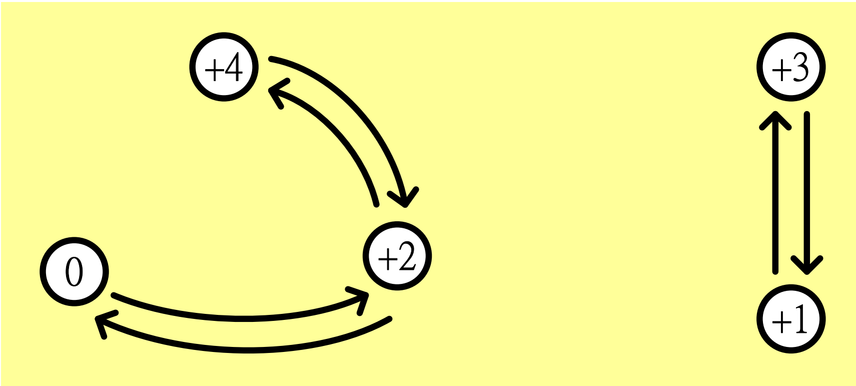
觀察結果：
當有 4 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，可翻出所有狀態。

三、當有 4 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，
以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	＋4	0
步驟 1	＋2	–2

步驟2	**0**	–**4**
起始	＋**3**	–**7**
步驟1	＋**1**	–**3**

以狀態圖呈現其狀態互通之情形：



觀察結果：

（一）當有 4 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，可將 4 個杯子翻成均朝下的狀態，但無法翻出所有狀態。

（二）若將起始狀態改為 3 個杯子朝上，1 個杯子朝下，每次翻轉 2 個杯子時，亦無法翻出所有狀態。

（三）由狀態圖可明顯看出**杯子朝上的個數是偶數者 其狀態可互通，杯子朝上的個數是奇數者其狀態亦可互通，但此二者的狀態不互通。**

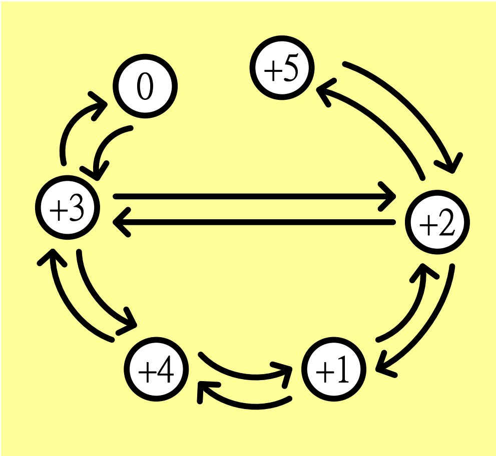
四、當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，

以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	＋**5**	**0**
步驟1	＋**2**	–**3**
步驟2	＋**1**	–**4**

步驟 3	＋4	–1
步驟 4	＋3	–2
步驟 5	0	–5

以狀態圖呈現其狀態互通之情形：



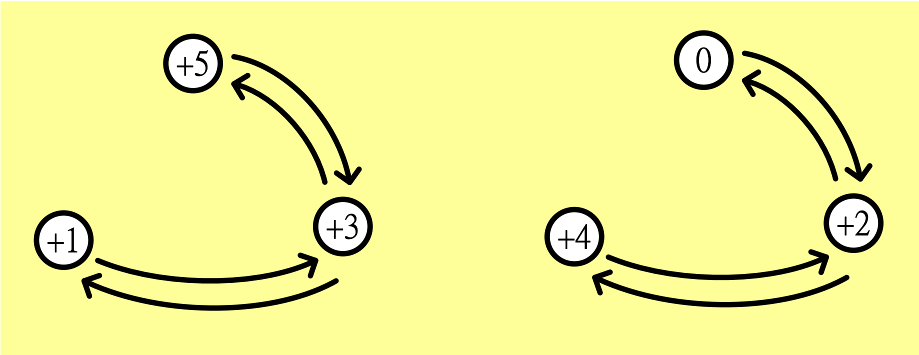
觀察結果：

當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，可翻出所有狀態。

五、當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，
以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	＋5	0
步驟 1	＋3	–2
步驟 2	＋1	–4
起始	0	–5
步驟 1	＋2	–3
步驟 2	＋4	–1

以狀態圖呈現其狀態互通之情形：



觀察結果：

（一）當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 2 個杯子時，無法翻出所有狀態。

（二）若將起始狀態改為 5 個杯子均朝下，每次翻轉 2 個杯子時，亦無法翻出所有狀態。

（三）由狀態圖可明顯看出**杯子朝上的個數是奇數者其狀態可互通，杯子朝上的個數是偶數者其狀態亦可互通，但此二者的狀態不互通。**

因為若狀態 i 可翻到狀態 j，則狀態 j 一定可翻到狀態 i，因此底下一些探討，不失一般性都可設全部杯子朝上或朝下來研究。

六、當有 2n 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n－1 個杯子時，

以表格呈現其翻轉的狀態：

	朝上	朝下
起始	＋(2n)	0
步驟 1	＋1	– (2n–1)
步驟 2	＋(2n－2)	－2
步驟 3	＋3	－(2n–3)
步驟 4	＋(2n－4)	－4
步驟 5	＋5	－ (2n–5)
⋮	⋮	⋮

步驟 n	**0**	**$-(2n)$**
步驟 n+1	**$+(2n-1)$**	**-1**

觀察結果：

當有 2n 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n−1 個杯子時，可以翻出所有狀態。

七、**當有 m 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n−1 個杯子時，其中 m＞2n−1，則可翻出所有狀態。**

證明：

（1）∵m＞2n−1

∴m 至少為 2n

當 m=2n，每次翻轉 2n−1 個杯子時，

由研究過程六的方法可翻出所有狀態。

（2）設 m=2n＋k 時，每次翻轉 2n−1 個杯子可翻出所有狀態成立

（3）則當 m=2n＋k＋1，每次翻轉 2n−1 個杯子時，

先對 2n＋k 個杯子做翻轉，由（2）的假設知道可翻出所有的狀態，因此

（a）先翻到 1 個杯子向下，2n＋k−1 個杯子向上，連同原先未動過的 1 個杯子杯口朝上，我們可得到狀態：2n＋k 個杯子朝上，1 個杯子朝下。

由（2）的假設，針對 2n＋k 個朝上的杯子做翻轉，可翻出所有狀態。（至於 1 個朝下的杯子則保持不動）

（b）先留 1 個杯子朝上，其餘 2n＋k 個杯子亦朝上，由（2）的假設，針對 2n＋k 個朝上的杯子做翻轉，可翻出所有狀態。

綜合（a）、（b），我們可得知當 2n＋k＋1 個杯子朝上，每次翻轉 2n−1 個杯子時，可翻出所有狀態。

（4）根據數學歸納法可得：當 m 個杯子朝上，每次翻轉 2n−1 個杯子時，其中 m＞2n−1，可翻出所有狀態。

八、**當有 m 個杯子全部朝上，每次翻轉 2n 個杯子時，(其中 m>2n)，其狀態互通的情形為何？**

【想法】根據研究過程一、三、五的觀察結果，當翻轉的杯子數為偶數時，無法翻出所有的狀態，故我們得出以下的命題。

【命題一】

（一）若有奇數個杯子朝上，當每次翻轉偶數個杯子時，則所得杯子朝上的個數仍為奇數。

（二）若有偶數個杯子朝上，當每次翻轉偶數個杯子時，則所得杯子朝上的個數仍為偶數。

證明：

設有 m 個杯子，其中 k 個杯子朝上，每次翻轉 2n 個杯子

若將 $\begin{cases} s\text{個杯子由向上翻轉成向下} \\ 2n-s\text{個杯子由向下翻轉成向上} \end{cases}$

則所得杯子朝上的個數為 k－s＋2n－s＝k＋2(n－s)

（一）若 k 為奇數，則 k＋2(n－s)也為奇數

（二）若 k 為偶數，則 k＋2(n－s)也為偶數

我們有以下的結果：

> 若有 m 個杯子，且每次翻轉 2n 個杯子時，m>2n，則：
> （a）所有奇數杯朝上的狀態都可互通
> （b）所有偶數杯朝上的狀態都可互通
> （c）朝上杯數為奇數時無法翻到朝上杯數為偶數；反之亦然

證明：

情形一：m 為奇數

當 m＝2n＋1 時

1、n＝2k（不失一般性可設 4k+1 個杯子朝上，每次翻轉 4k 個杯子）

	朝上	朝下
起始	＋(4k＋1)	0
	＋1	－4k
	＋(4k－1)	－2
	+3	－(4k－2)
	⋮	⋮
	＋(2k－1)	－(2k＋2)
	＋(2k＋1)	－(2k)

將 4k 個杯子翻向下

將 4k－1 個杯子翻向上，1 個杯子翻向下

將 2 個杯子翻向上，4k－2 個杯子翻向下

將 2k＋1 個杯子翻向上，2k－1 個杯子翻向下

	朝下	朝上
起始	$-(4k+1)$	0
	-1	$+4k$
	$-(4k-1)$	$+2$
	-3	$+(4k-2)$
	⋮	⋮
	$-(2k-1)$	$+(2k+2)$
	$-(2k+1)$	$+(2k)$

2、n＝2k＋1（不失一般性可設 4k＋3 個杯子朝上，每次翻轉 4k＋2 個杯子）

	朝上	朝下
起始	$+(4k+3)$	0
	$+1$	$-(4k+2)$
	$+(4k+1)$	-2
	$+3$	$-4k$
	⋮	⋮
	$+(2k+3)$	$-2k$
	$+(2k+1)$	$-(2k+2)$

	朝下	朝上
起始	$-(4k+3)$	0
	-1	$+(4k+2)$
	$-(4k+1)$	$+2$
	-3	$+4k$
	⋮	⋮
	$-(2k+3)$	$+2k$
	$-(2k+1)$	$+(2k+2)$

由表格可知（a）、（b）成立且由命題（一）知（c）成立，
因此**當 $m=2n+1$ 時，每次翻轉 $2n$ 個杯子，其結論成立。**

設 $m=2p+1$ 時，每次翻轉 $2n$ 個杯子，其結論成立，（$p>n$）
則 $m=2p+3$ 時，

（1）若起始狀態為所有杯子朝上，先保留 2 個杯子朝上不動，則剩下 $2p+1$ 個朝上的杯子依上述 $2p+1$ 時的假設，可翻到任何奇數個杯子朝上的狀態，且加上兩個杯子朝上，因此杯子朝上的個數為 $2p+3$，$2p+1$，…，3 皆可翻到。
因為 $2p+3>2n+1\geqq 3$，所以 $2n+1$ 個杯子朝上亦可翻到，
因此我們也可翻到 1 個杯子朝上，故所有奇數個杯子朝上的狀態皆可互通，所以（a）成立。

（2）若起始狀態為所有杯子朝下（亦即朝上杯子數為 0），做法與（1）相同，故所有偶數個杯子朝上的狀態亦可互通，所以（b）成立。

（3）由命題一可知（c）成立。

因此由數學歸納法可證出**當有奇數個杯子時，杯子朝上的個數是奇數者其狀態可互通，杯子朝上的個數是偶數者其狀態亦可互通，但此二者不互通。**

情形二：m 為偶數

當 m＝2n＋2

1、n＝2k（不失一般性可設 4k＋2 個杯子朝上，每次翻轉 4k 個杯子）

	朝上	朝下
起始	＋(4k＋2)	0
	＋2	－(4k)
	＋(4k)	－2
	＋4	－(4k－2)
	⋮	⋮
	＋(2k)	－(2k＋2)
	＋(2k+2)	－(2k)
	0	－(4k＋2)

4k 個翻向下

4k－1 個翻向上，1 個翻向下

4k－2 個翻向下，2 個翻向上

2k－1 個翻向下，2k＋1 個翻向上

說明：可由此步驟直接翻成全部朝下！

	朝上	朝下
起始	＋(4k＋1)	－1
	＋1	－(4k＋1)
	＋(4k－1)	－3
	＋3	－(4k－1)
	⋮	⋮
	＋(2k-1)	－(2k＋3)
	＋(2k+1)	－(2k＋1)

4k 個翻向下

4k－1 個翻向上，1 個翻向下

4k－2 個翻向下，2 個翻向上

2k－1 個翻向下，2k＋1 個翻向上

2、n＝2k＋1（不失一般性可設 4k＋4 個杯子朝上，每次翻轉 4k＋2 個杯子）

	朝上	朝下
起始	＋(4k+4)	0
	＋2	－(4k＋2)
	＋(4k＋2)	－2
	＋4	－(4k)
	⋮	⋮
	＋(2k＋4)	－(2k)
	＋(2k＋2)	－(2k＋2)
	0	－(4k＋4)

4k＋2 個翻向下

4k＋1 個翻向上，1 個翻向下

4k 個翻向下，2 個翻向上

2k＋2 個翻向下，2k 個翻向上

說明：可由此步驟直接翻成全部朝下！

	朝上	朝下
起始	＋(4k＋3)	－1
	＋1	－(4k＋3)
	＋(4k＋1)	－3
	＋3	－(4k＋1)
	⋮	⋮
	＋(2k＋3)	－(2k＋1)
	＋(2k＋1)	－(2k＋3)

4k＋2 個翻向下

4k＋1 個翻向上，1 個翻向下

4k 個翻向下，2 個翻向上

2k＋2 個翻向下，2k 個翻向上

由上列四個表格可看出（a）、（b）成立，而（c）由命題（一）即可得出。

因此當 $m=2n+2$ 時，每次翻轉 $2n$ 個杯子，其結論成立。

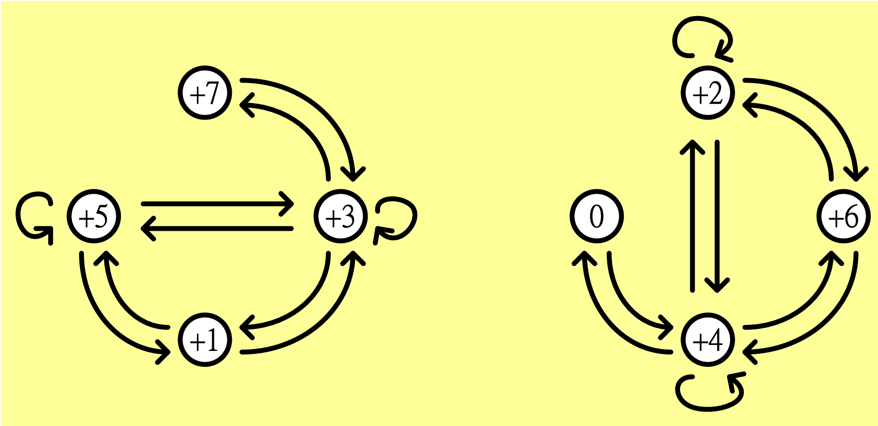
設 $m=2p+2$ 時，每次翻轉 $2n$ 個杯子，其結論成立，（$p>n$）
則 $m=2p+4$ 時，
（1）若起始狀態為所有杯子朝上，先保留 2 個杯子朝上不動，則剩下 $2p+2$ 個朝上的杯子依上述 $2p+2$ 時的假設，可翻到任何偶數個杯子朝上的狀態，且加上 2 個杯子朝上，因此杯子朝上的個數為 $2p+4$，$2p+2$，…，2 皆可翻到。
因為 $2p+4>2n\geqq 2$，所以 $2n$ 個杯子朝上亦可翻到，
因此我們也可翻到 0 個杯子朝上，故所有偶數個杯子朝上的狀態皆可互通，所以（a）成立。
（2）若起始狀態為朝上杯子數是 $2p+3$（亦即朝下杯子數為 1），
先固定 1 個朝上的杯子和 1 個朝下的杯子不動，則其餘 $2p+2$ 個朝上的杯子依上述 $2p+2$ 時的假設，可翻到任意偶數個杯子朝上，再加上先前所保留的 1 個朝上的杯子，因此杯子朝上的個數為 $2p+3$，$2p+1$，…，1 皆可翻到，故所有奇數個杯子朝上的狀態皆可互通，所以（a）、（b）成立。
（3）由命題一可知（c）成立。
因此由數學歸納法可證出當有偶數個杯子時，杯子朝上的個數是奇數者其狀態可互通，杯子朝上的個數是偶數者其狀態亦可互通，但此二者不互通。

九、若有 m 個杯子，其中 t_1 個杯子朝上，$m-t_1$ 個杯子朝下，每次翻轉 n 個杯子時，探討 m、n、t_1、t_2 在何種條件下，可將 m 個杯子翻成 t_2 個杯子朝上，$m-t_2$ 個杯子朝下。
（一）由研究過程六、七之結果可知：
當 n 為奇數時，任何狀態都可翻成任何狀態。
（二）由研究過程八所得之結果可知：
當 n 為偶數時，
1. 若 $|t_1-t_2|$ 是偶數，則 t_1 個杯子朝上可翻成 t_2 個杯子朝上。
2. 若 $|t_1-t_2|$ 是奇數，則 t_1 個杯子朝上不能翻成 t_2 個杯子朝上。
3. 其互通情形：
（1）所有杯子朝上的個數是奇數者為同一類，其狀態皆可互通。
（2）所有杯子朝上的個數是偶數者為同一類，其狀態亦可互通。
（3）杯子朝上的個數是奇數的狀態無法翻成杯子朝上的個數是偶數的狀態；反之亦然。

十、（一）把問題變成一個有無連通之狀態圖，並探討其任意狀態到任意狀態之最少翻轉次數及翻轉流程。
（二）探討其問題所變成的狀態圖有無 Hamiltonian Cycle（漢米爾頓迴路：所有狀態

恰經過一次且形成一個迴路）或 Hamiltonian path（漢米爾頓路徑：所有狀態可全部經過，且恰經過一次）。

例 1：當有 7 個杯子全部向上，每次翻轉 4 個杯子時，
其狀態圖如下：



【狀態圖之使用方式舉例】

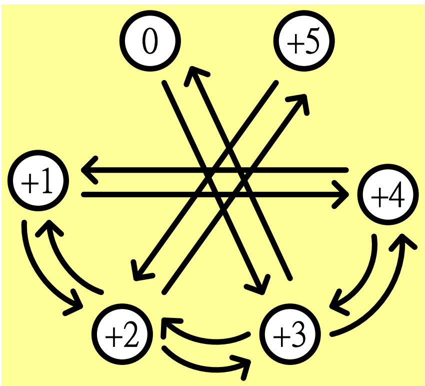
若欲將 7 個朝上的杯子，每次翻轉 4 個，最後翻成 5 個杯子朝上，2 個杯子朝下，問該如何翻？最少翻幾次？

解析：

（1）依題意，即如狀態圖的＋7 翻到＋5 的狀態，
由圖可知最短路徑為：＋7 $\longrightarrow$ ＋3 $\longrightarrow$ ＋5，
最少次數為 2 次。

（2）由此圖可看出無漢米爾頓迴路及漢米爾頓路徑。

例 2：當有 5 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，
其狀態圖如下：



【狀態圖解析】

（1）由狀態＋5 到狀態 0，
其最短路徑為：＋5 $\longrightarrow$ ＋2 $\longrightarrow$ ＋3 $\longrightarrow$ 0
最少翻轉次數為 3 次。

（2）所有狀態可全部經過，且恰經過一次（漢米爾頓路徑）

其路徑為：

$+5 \longrightarrow +2 \longrightarrow +1 \longrightarrow +4 \longrightarrow +3 \longrightarrow 0$

（3）由此圖可看出有漢米爾頓路徑但無漢米爾頓迴路。

在探討漢米爾頓迴路及路徑時，我們得到了一些性質如下：

【命題二】

（一）有漢米爾頓迴路，一定有漢米爾頓路徑；反之，不一定成立。
（二）當每次翻轉杯子數為偶數時，無漢米爾頓路徑。
（三）當每次翻轉杯子數為奇數時，且起始狀態為奇數個杯子朝上，則經翻轉一次後，一定變成有偶數個杯子朝上的狀態。
（四）當每次翻轉杯子數為奇數時，且起始狀態為偶數個杯子朝上，則經翻轉一次後，一定變成有奇數個杯子朝上的狀態。
（五）若有漢米爾頓路徑，則起始和結尾一定發生在杯子全部朝上和杯子全部朝下兩個狀態。

證明：

（一）由定義可知。

（二）由研究過程八可知，當每次翻轉杯子數為偶數時，互通狀態分為兩類，所以無漢米爾頓路徑。

（三）及（四）

設共有 m 個杯子，其中 t 個杯子朝上，每次翻轉 2n+1 個杯子，
若將 k 個杯子由朝下翻成朝上（當然 2n+1－k 個杯子由朝上翻成朝下）
則經過翻轉後會有 t+k－（2n+1－k）＝t+2k－2n－1 個杯子朝上
所以當 t 為奇數時，t+2k－2n－1 會是偶數
當 t 為偶數時，t+2k－2n－1 會是奇數

（五）因為杯子全部朝上和杯子全部朝下時，都只和一個狀態互通，因此若有漢米爾頓路徑，則起始和結尾一定發生在杯子全部朝上和杯子全部朝下兩個狀態。

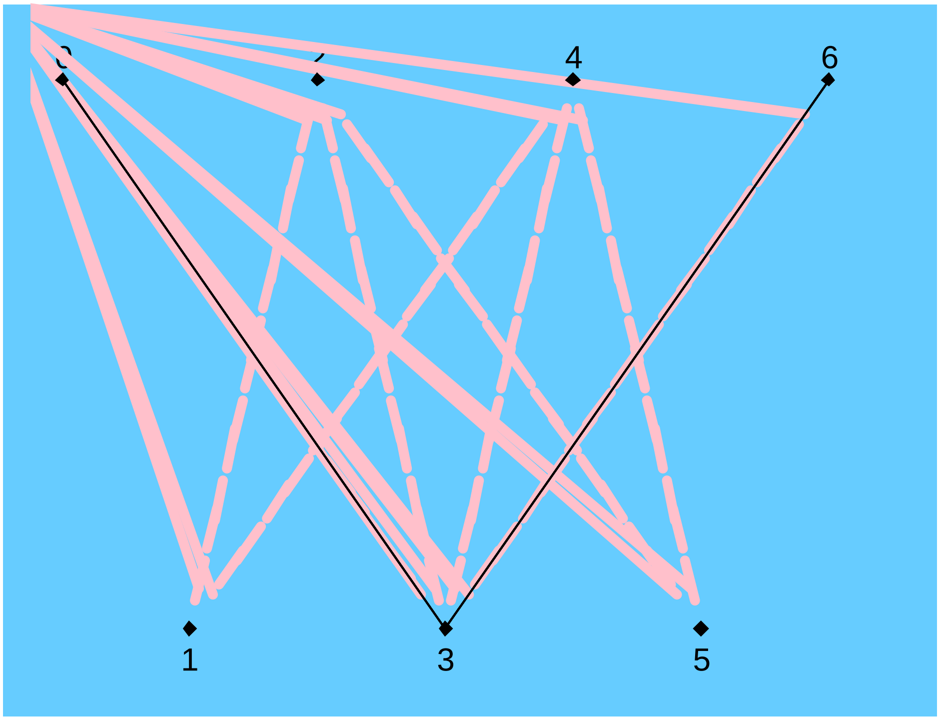
根據命題二之（三）、（四）及（五），我們得到一個尋找漢米爾路徑的方法，**其步驟如下：**

1、**把奇數杯朝上的狀態寫一邊，把偶數杯朝上的狀態寫在另一邊**
2、**全部杯子朝上和全部杯子朝下把它當成一個狀態**
3、**由漢米爾頓路徑可知，除了起始和結尾的狀態可以只和其他一個狀態互通，其餘均須和兩個狀態互通，所以我們只要畫得出每個狀態可和兩個狀態互通（起始和結尾我們把他看成一個狀態），則一定會有漢米爾頓路徑。**

我們用以下幾個例子來說明。

例 3：當有 6 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，

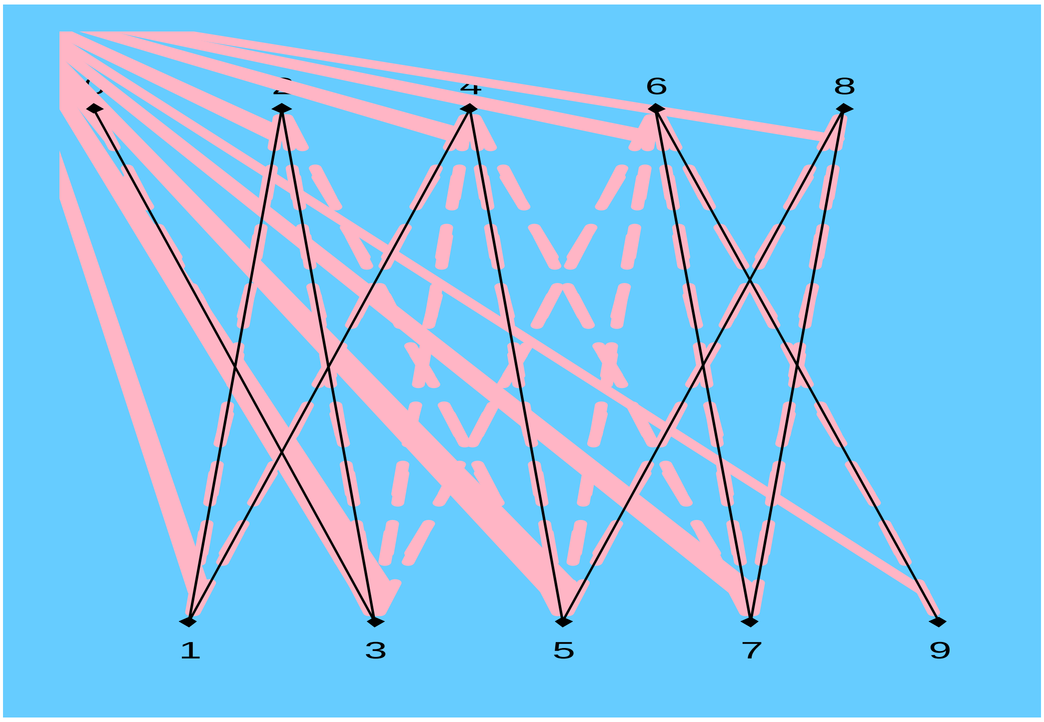
其狀態圖（粉紅色虛線）如下：



因為狀態 0 和狀態 6 只能和狀態 3 互通，所以**沒有漢米爾頓路徑**。

例 4：當有 9 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，

其狀態圖（粉紅色虛線）和可變成每個狀態都有兩個狀態互通（黑色線）如下：

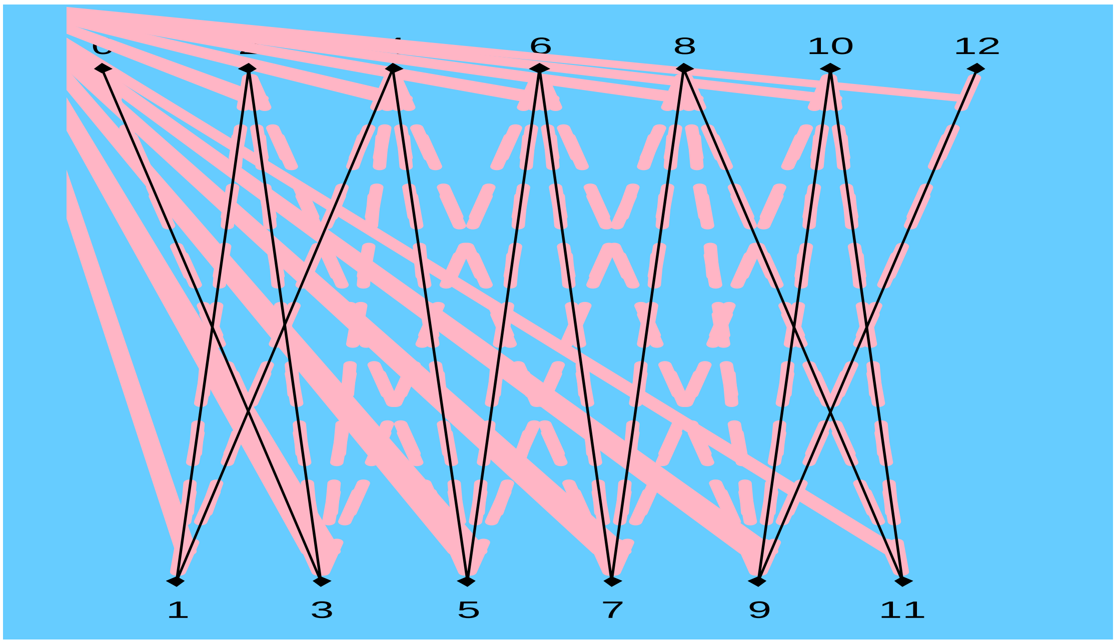


因此它**有漢米爾頓路徑：**

+9 ➔ +6 ➔ +7 ➔ +8 ➔ +5 ➔ +4 ➔ +1 ➔ +2 ➔ +3 ➔ +0

例 5：當有 12 個杯子全部朝上，每次翻轉 3 個杯子時，

其狀態圖（粉紅色虛線）和可變成每個狀態都有兩個狀態互通（黑色線）如下：

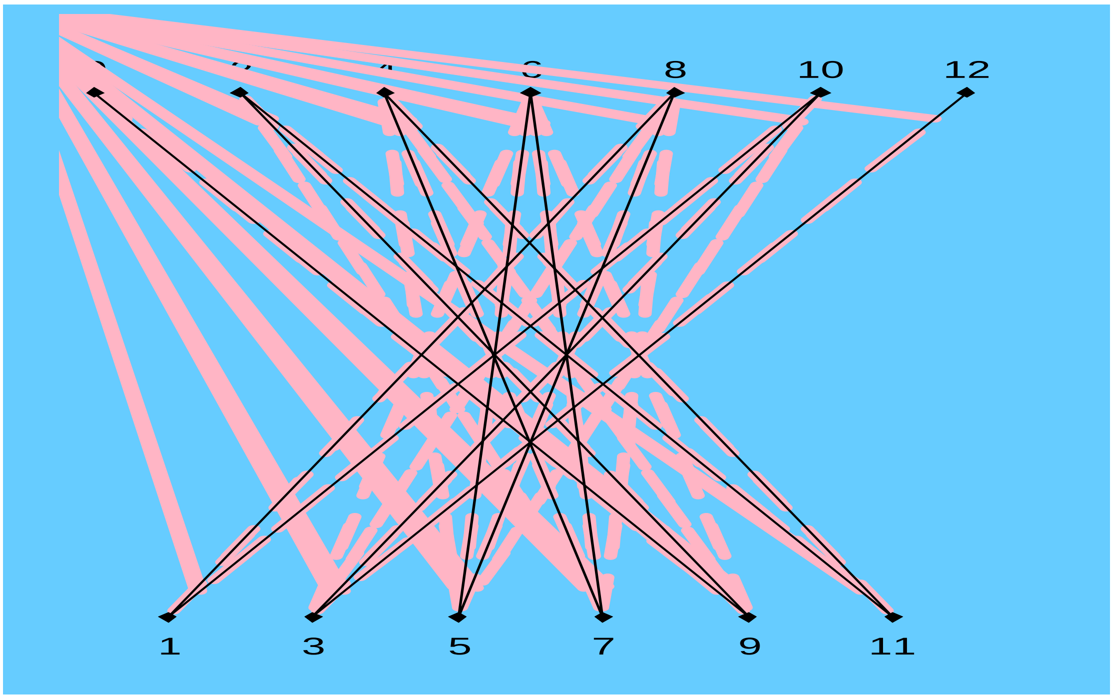


因此它有漢米爾頓路徑：

+0 ➔ +3 ➔ +6 ➔ +7 ➔ +4 ➔ +1 ➔ +2 ➔ +5 ➔ +8 ➔ +11 ➔ +10 ➔ +9 ➔ +12

例 6：當有 12 個杯子全部朝上，每次翻轉 9 個杯子時，

其狀態圖（粉紅色虛線）和可變成每個狀態都有兩個狀態互通（黑色線）如下：

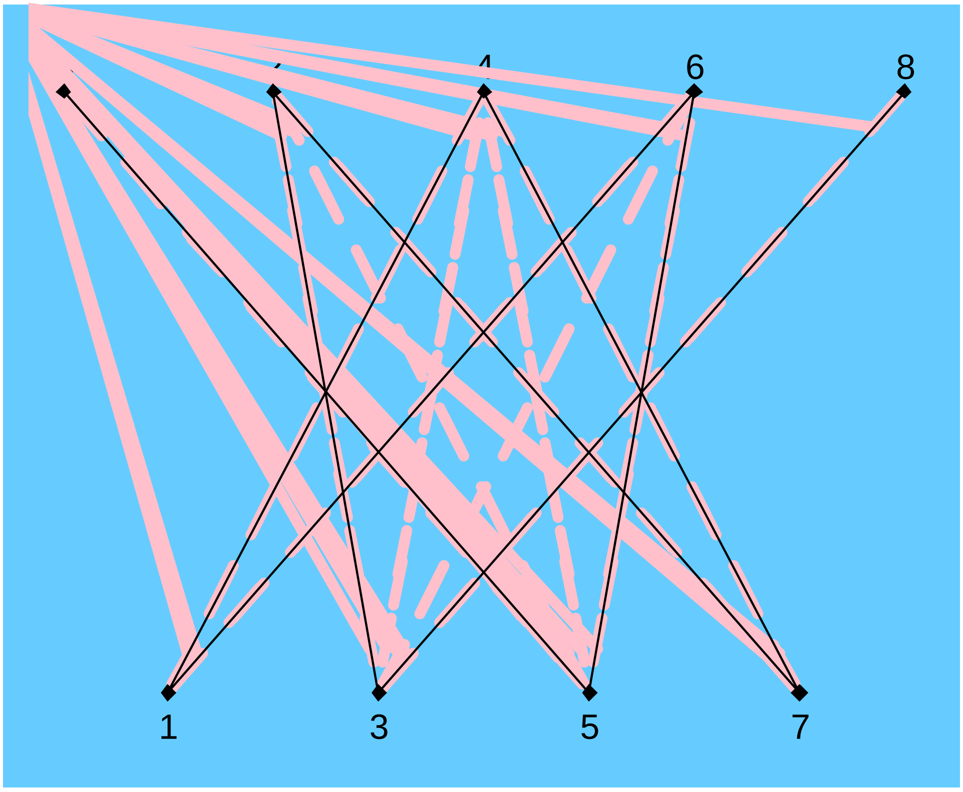


因此它有漢米爾頓路徑：

+12 ➔ +3 ➔ +10 ➔ +1 ➔ +8 ➔ +5 ➔ +6 ➔ +7 ➔ +4 ➔ +11 ➔ +2 ➔ +9 ➔ +0

例 7：當有 8 個杯子全部朝上，每次翻轉 5 個杯子時，

其狀態圖（粉紅色虛線）和可變成每個狀態都有兩個狀態互通（黑色線）如下：



因此它有漢米爾頓路徑：

+8 ➔ +3 ➔ +2 ➔ +7 ➔ +4 ➔ +1 ➔ +6 ➔ +5 ➔ +0

因此我們有以下結論和探討：

（一）【最短路徑和翻轉過程的結論】

當我們把問題變成狀態圖，就可尋找出最短路徑和翻轉過程，但當狀態圖很大（即杯子很多時），我們可找到其演算法，參見 ALAN TUCKER (2007) 之 Dijkstra 演算法 —— shortes path 演算法，可解決此問題，雖然這已超出我們所學的知識，而且我們無法寫程式完成此結果，但至少我們提供了一個解決的方法。

（二）**【漢米爾頓迴路和漢米爾頓路徑】**

1、因為全部杯子朝上和全部杯子朝下都只能和一個狀態互通，所以只有杯子個數為 1，翻轉杯數也為 1 時才有漢米爾頓迴路，但這不在我們的討論範圍中，因此沒有漢米爾頓迴路。

2、若有漢米爾頓路徑，由上述第 1、2 點可知：其起始和結尾必為全部杯子朝上和全部杯子朝下，且翻轉的杯數為奇數。

3、若 m 為全部的杯子，n 為翻轉的杯數，

（1）當 n＝1 時，有漢米爾頓路徑。

（2）當 m＝2n 且 n≠1 時，由上述第 1 點可知無漢米爾頓路徑。

（3）當 n＝2k 時，因其互通狀態分為兩類，所以沒有漢米爾頓路徑。

（4）當 m＝2k，n＝2k－1 時，由研究目的六可知有漢米爾頓路徑。

4、雖然未證出 m、n 在什麼條件下會有漢米爾頓路徑，但我們提供了一種尋找一個漢米爾頓路徑的方法及許多例子，因此大概可猜出 m、n 在什麼條件下會有漢米爾頓路徑（可見討論一）。

十一、當翻轉次數固定時，探討哪些狀態可互通或不互通及一個狀態翻轉到另一個狀態共有幾種不同的方法數。

【定義】(a) 由一狀態經過翻轉一次到另一狀態，則此二狀態經翻轉一次可互通，定義為 1

(b) 由一狀態經過翻轉一次不能到另一狀態，則此二狀態經翻轉一次不互通，定義為 0

因此我們可將狀態圖變成一個矩陣表示，並以下述例子說明。

由研究目的十之例 1，若有 7 個杯子，每次翻轉 4 個杯子時，其每個狀態經過翻轉一次時，我們可將其狀態圖變成矩陣表示如下：

杯子狀態

杯子狀態

$$A=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} +7 & +3 & +5 & +1 & 0 & +2 & +4 & +6 \end{array} \\
\begin{array}{c} +7 \\ +3 \\ +5 \\ +1 \\ 0 \\ +2 \\ +4 \\ +6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

由研究目的十之例 2，若有 5 個杯子，每次翻轉 3 個杯子時，其每個狀態經過翻轉一次時，我們可將其狀態圖變成矩陣表示如下：

$$
A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ +1 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \\ +5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

（二）當翻轉次數固定時，透過矩陣可知某個狀態到另一個狀態是否可以翻到，並可計算其有幾種不同的翻轉方法。

承研究過程九(一)例 2，

翻轉一次的矩陣：

$$
A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ +1 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \\ +5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

翻轉兩次的矩陣：

$$A^2=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\+1\\+2\\+3\\+4\\+5\end{array} & \begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&2&0&2&0&1\\1&0&3&0&2&0\\0&2&0&3&0&1\\1&0&2&0&2&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

【矩陣解析】

（1）由狀態＋2 經過翻轉兩次到狀態＋2 共有 3 種不同的翻轉方法。

（2）由狀態＋2 經過翻轉兩次到狀態＋3 共有 0 種不同的翻轉方法，亦即是無法翻到的。

（3）A^2 表示任何狀態翻轉兩次到任何狀態的所有結果，而 A^n 表示任何狀態翻轉 n 次到任何狀態的所有結果。

伍、研究結果

一、每次翻轉 2n－1 個杯子時（總杯數＞2n－1），則任意狀態可翻到任意狀態。

二、每次翻轉 2n 個杯子時（總杯數＞2n），則杯子朝上的個數為奇數者屬一類，偶數者為另一類，同類可互通，不同類即不互通。

三、若有 m 個杯子，其中 t_1 個杯子朝上，$m-t_1$ 個杯子朝下，每次翻轉 n 個杯子時，

（一）當 n 為奇數時，任何狀態都可翻成任何狀態。

（二）當 n 為偶數時，

1. 若 $|t_1-t_2|$ 是偶數，則 t_1 個杯子朝上可翻成 t_2 個杯子朝上。
2. 若 $|t_1-t_2|$ 是奇數，則 t_1 個杯子朝上不能翻成 t_2 個杯子朝上。

四、最短路徑及翻轉流程：

（一）可利用狀態圖來呈現研究目的九的最少翻轉次數及其翻轉流程，但當狀態圖很大時，我們找尋最短路徑及翻轉過程（可參見 ALAN TUCKER (2007) 之 Dijkstra 演算法 —— shortes path 演算法，而網路都可蒐尋到此種演算法，雖然我們無法寫出程式，但至少提供了一種解決的方法）。

（二）當其翻轉次數固定時，亦可由研究過程十一的結果，利用轉移矩陣的計算來看出某狀態到某狀態有無互通，並可算出方法數。

五、漢米爾頓迴路及漢米爾頓路徑：

（一）無漢米爾頓迴路。

（二）關於漢米爾頓路徑，

1、當翻杯數為偶數時，無漢米爾頓路徑。

2、若有 2n 個杯子，每次翻杯數為 2n－1 時，一定有漢米爾頓路徑。

3、除了原有杯子數為 2，每次翻杯數為 1 時，會有漢米爾頓路徑外；其餘當原有杯子數為每次翻杯數的兩倍時，均無漢米爾頓路徑。

陸、討論

雖然我們解決了大部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、關於漢米爾頓路徑，我們猜當翻轉杯數為奇數且全部杯子數不是翻轉杯數的兩倍時，有漢米爾頓路徑，雖然尚未證出，但我們有些想法待驗證。

二、關於最短路徑：一個狀態翻到另一個狀態的最少次數，雖然有其演算法，但我們認為是否可找到此狀態圖對於任意二個狀態可互通的最小翻轉次數中的最大值，會較有意義，這可作為未來研究方向之一。

三、對於翻轉杯數為連續翻、因數翻、倍數翻時（可見參考資料一），此問題又將有何種不同的結果？這可作為我們未來繼續研究的方向。

四、關於此問題的研究方法，是否可應用到其他問題的狀態圖，值得我們進一步探討。

柒、結論

關於翻杯子的問題，由第三十六屆全國數學科展第一名「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」、第四十三屆全國數學科展第二名「最佳全翻位的探討」、第四十五屆全國數學科展第三名「翻出一片天」及第四十六屆全國數學科展佳作「再翻出一片天」的研究中可發現，其所探討的皆為杯子全部向上，能否翻成全部向下及其最少次數，我們認為這樣的研究不夠深入及廣義，故我們探討了由任何狀態翻至任何狀態的情形。

我們用了許多角度來研究它，首先使用數學歸納法解決了主要的問題，即是否可翻到所有的狀態以及某狀態到某狀態有無互通，當無法翻到所有狀態時，我們又利用奇偶數的性質來證明。然而關於某狀態到某狀態的最短路徑及其翻轉過程我們無法用數學歸納法找出，因此使用了狀態圖來解決最短路徑的問題，但當狀態圖很複雜時，我們找到演算法來解決此問題，不過在路徑問題的討論上，除了最短路徑外，我們發現可探討漢米爾頓迴路及漢米爾頓路徑的新問題。經由這些問題的研究，讓我們發現了數學的可愛之處，在尋求其解決問題的過程中，又引發出新的問題，相當有趣而奇妙；另外，我們也發現了歸納法的妙用及其限制，當遇到瓶頸無法突破時，我們試著找尋相關知識，使問題的研究得以繼續進行，這些都是我們未來做研究的寶貴經驗。

捌、參考資料

一、戴湞琮，第三十六屆全國科展國小組數學科第一名「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」

二、林昱誼、黃中道，第四十三屆全國科展國小組數學科第二名「最佳全翻位的探討」

三、蘇百毅、楊久霆、林宜靚、葉書豪、洪綉茹，第四十五屆全國科展國小組數學科第三名「翻出一片天」

四、張桓瑞，第四十六屆全國科展國中組數學科佳作「再翻出一片天」

五、李玉鳳、鄧蒔舟、楊孟臻，第五十二屆桃園縣科展國中組數學科第三名「翻滾吧！杯子」

六、馬榮喜、陳大魁、陳世易，國中數學第一冊，初版，新北市，康軒文教事業股份有限公司，2012

七、李虎雄、陳昭地、黃登源、李正貴、林礽堂、儲啟政，高中數學第一冊，台中市，大同資訊企業股份有限公司，2001

八、ALAN TUCKER (2007) applied combinatorics 5th 歐亞書局

【評語】030413

本作品從翻杯問題轉化成是否存在漢米爾頓路徑的問題，非常不錯，而且其所謂的狀態矩陣就是圖論裡的隣接矩陣，因此這個題目不像表面那麼容易，有相當的困難度，以國中的程度不容易掌握。