中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030412

莫利之交－莫利定理在平面與立體的延伸探討

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 林孟釁	孫書勝
國二 蔡秉勳	楊欣叡
國二 沈運聖	

關鍵詞：莫利定理、自我相似、對偶性

摘要

在將莫利定理一般化的過程中，本研究發現在不同條件下，圖形有不同的規律。如平面圖形中除三角形外，其他多邊形的莫利圖形不一定是正多邊形，但有「自我相似」的特殊關係。另外四邊形中更有許多組「對偶關係」。本研究接著將圖形坐標化，並引入「線性變換」的概念，試圖解釋並發現新的自我相似或對偶性質。立體方面則發現許多和平面圖形相似之處，例如正多面體的莫利圖形皆為其「對偶多面體」，有很強的對偶性質。而其中正四面體對應正四面體，也是一個自我相似的例子。其他不規則圖形與其莫利圖形間，沒有明顯規律，針對此，平面部分導出了算交點坐標的公式，立體則建立判斷交點存在與位置的方法。

壹、研究動機

有一次做「尺規作圖」的報告，上網查詢資料時，發現一篇有關在非特殊角度下，無法用尺規作圖三等分的文章，這時，與三角形三等分角相關的莫利定理引起了我們的興趣，經過了討論之後，我們非常懷疑，是否只有三角形的三等分角是個特例？多邊形是否也會有類似的關係或是有其他不同的規則？延伸到多等分角時又會有什麼相同與不相同的規律？立體的圖形又有什麼特性？對於這些疑問我們感到非常好奇，希望能找出答案以解決這些疑問，於是便開始我們的研究。

貳、研究目的

一、探討當多等分角作圖時，是否有類似莫利定理的莫利定理的性質存在。

二、探討多邊形經莫利作圖後，其圖形是否有規律。

三、探討多邊形與其形成的莫利圖形的對應關係

四、了解「莫利定理」在立體中，正多面體、錐體、柱體的三等分與多等分圖形結果與性質。

五、解釋我們發現的這些現象與特殊性質。

六、導出判斷立體圖形結果與性質的簡易通用法則。

參、研究工具

紙筆	電腦	Geogebra5.0 動態幾何繪圖板
		

肆、研究過程

一、研究架構

本研究的研究過程主要分兩部分，立體與平面，而將主要目標放在立體圖形的探討。本研究先從平面圖形探討起，希望能抽絲剝繭找出其中的規則。

改變莫利定理中的兩大條件——在三角形及三等分角，由此延伸出兩個操縱變因——多邊形種類與等分角數。因此本研究著手探討多邊形三等分角、三角形多等分角，以及多邊形多等分角的結果。此部分發現許多規律，其中有些可由對稱性來討論。本研究也發現：此種作圖竟似乎有「函數」般的轉換和對應關係。而且在許多狀況，此函數是若且唯若的(if and only if)，或有「自我相似」和「對偶性質」的現象。這讓本研究想將其座標化，藉由「線性變換」的概念探討其圖形的關係並解釋這種現象。由線性變換函數，更可推導至「逆定理」的部分，或許可利用來解釋「自我相似」或「對偶性」等特殊性質。

接著，本研究將平面的經驗轉植到立體圖形的研究，進一步探討立體中的對應關係及規則。由於正多面體是多面體中最有規則性的一類，因此立體的探討由此部分開始著手。接著延伸到錐體、柱體的研究與不規則多面體的作圖結果判斷通則。和平面一樣的，本研究發現立體圖形也具有「對稱性」、「自我相似」、與「對偶性」等性質。同時也認為立體圖形存在著圖形變換的關係，只是不一定是「線性變換」，而是其他的變換函數。因此除了已知的對應關係，未來將朝向立體的「函數」作進一步的闡明。

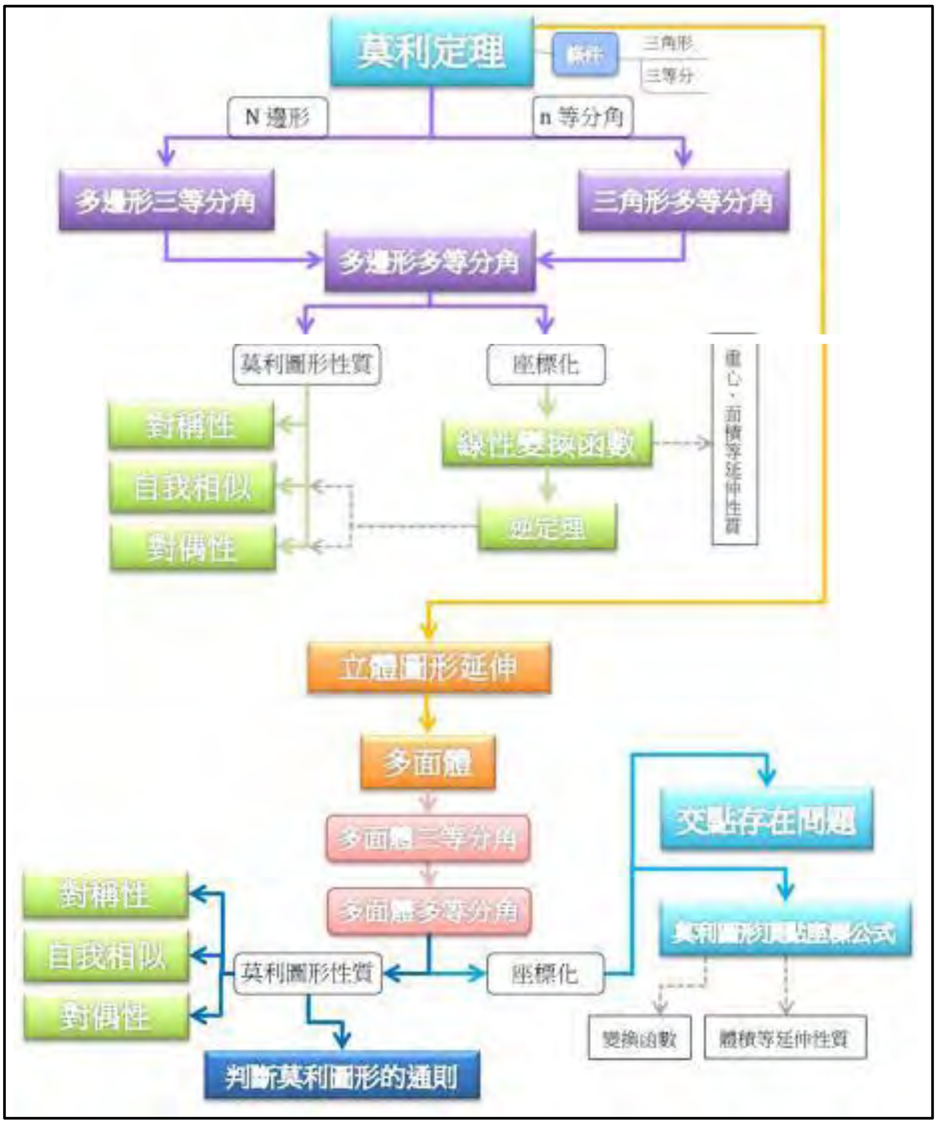


圖 1-1　研究架構圖

二、平面的多邊形與多等分角的探討

(一) 莫利定理

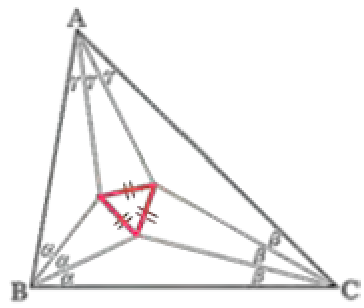


圖 2-1　莫利定理

如右[圖 2-1]，任一三角形的三個內角，各作其三等分線，靠近原三角形一邊的兩條等分線得一交點，則這樣的三個交點可以構成一個三角形，經證明，這三角形必為正三角形。莫利圖形針對三角形三等分角作探討，並沒有討論到多邊形多等分角，因此本研究往多邊形、多等分角及立體圖形作延伸探討。

(二) 定義

針對本研究的用詞先作以下的定義：

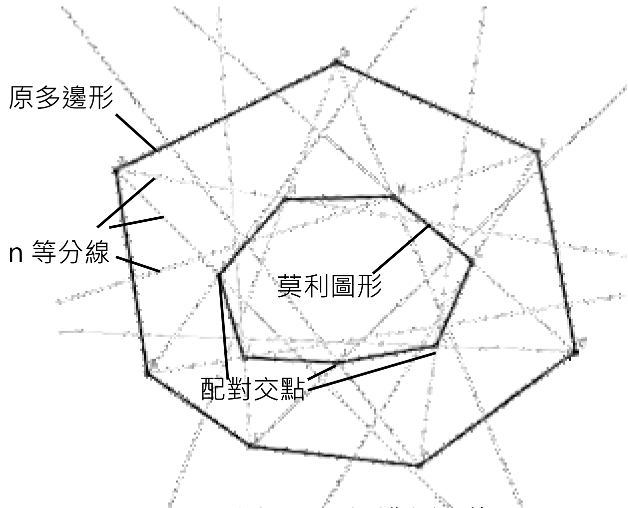


圖 2-2　平面作圖定義-1

1. 對於如右圖[圖 2-2]之情況：

   原多邊形：稱原先的多邊形為「原多邊形」。

   n 等分線：如(n−1)射線可以 n 等分夾角，則稱這些射線為此夾角的「n 等分線」。（n≥3,n∈N）

   M_n(原多邊形)：以函數 M_n(原多邊形)表以下作圖，並稱之為莫利作圖：

   (1) 作原多邊形每個內角的 n 等分線

   (2) 取兩個鄰邊與底邊的數條 n 等分線中，最靠近底邊的等分線，做一交點(稱為配對交點)

   (3) 依序連接各交點，形成多邊形。

   莫利圖形：稱原多邊形經莫利作圖後所得的多邊形為「莫利圖形」。

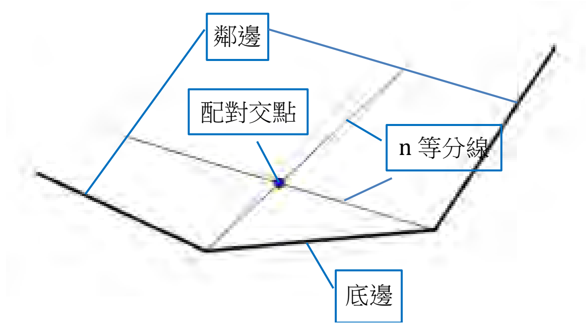


圖 2-3　平面作圖定義-2

2. 本研究將型如[圖 2-3]的情況視為一個單元。

   上圖[圖 2-2]可視為許多這種單元的集合。

   底邊：在此單元中，稱原多邊形的邊為「底邊」。

   鄰邊：與底邊相鄰的兩邊（此兩邊均為原多邊形的邊）為「鄰邊」。

   配對交點：分別從兩個鄰邊與底邊的數條 n 等分線中，取最靠近底邊的等分線，做一交點，稱此交點為底邊的「配對交點」。

   以[圖 2-4]為例說明：

   底邊為$\overline{AB}$。鄰邊為$\overline{BC}$與$\overline{AD}$　。配對交點即是點 X。

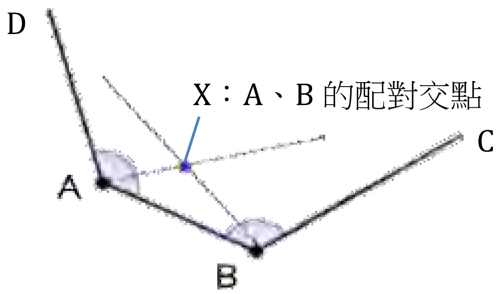


圖 2-4 平面作圖定義（例子）

3. 函數 M_n(原多邊形)的對應關係：

   →：以「→」表示原多邊形對應到莫利圖形。以 M_n(原多邊形)→莫利圖形，表示原多邊形經「n 等分角莫利作圖」後的函數結果。

如：M_n(長方形)→菱形，代表長方形經莫利作圖後，會形成菱形。

⇔：以雙箭號表對偶關係。p⇔q 代表 p 經莫利作圖形成 q，q 經莫利作圖形成 p。也就是 M_n(p)→q 且 M_n(q)→p。

4. 其他名詞：

對稱多邊形：左右對稱的多邊形（有一條對稱軸）。如 [圖 2-5]，五邊形有 1 條對稱軸(藍色虛線)，定義為「對稱五邊形」。

發現：對於本研究所發現的特定重要結果，命名為[發現一]、[發現二] ……。

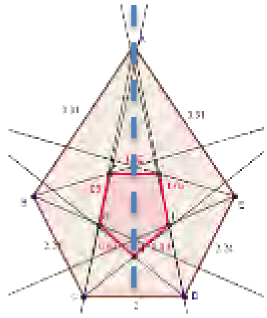


圖 2-5　對稱五邊形

(三) 三角形的 n 等分角延伸

作三角形 n 等分角的「莫利圖形」，探討 M_n(三角形)是否也是正三角形。

[發現一]：

(1) 當 n=3 時，此為原始的莫利定理，故莫利圖形皆為正三角形。

(2) 而當 n>3 時，則正三角形經莫利作圖後，會形成正三角形，而等腰三角形則會形成等腰三角形，**但不為相似形**。也就是 **M_n(正三角形)→正三角形** 與 **M_n(等腰三角形)→等**

說明：

1. 討論方式與變因：

(1) n 的值：n>3，n∈N。（n=3 時就是原莫利定理，∴不討論 n=3）

(2)三角形的性質：

可以「邊長」或「角度」討論。

依邊長可分為：
- 正三角形
- 等腰三角形
- 不規則三角形

依角度可分為：
- 正三角形
- 等腰三角形
- 直角三角形
- 不規則三角形

依兩種分類法都可分成正三角形、等腰三角形、不規則三角形等三種。只是依角度分類，還會有直角三角形這類。然而，角度分類中的「直角三角形」，當 n>3 時，並不會形成規律的結果，如[圖 2-6]。因此本研究決定以「邊長」為討論分類，分為正三角形、等腰三角形及不規則三角形。

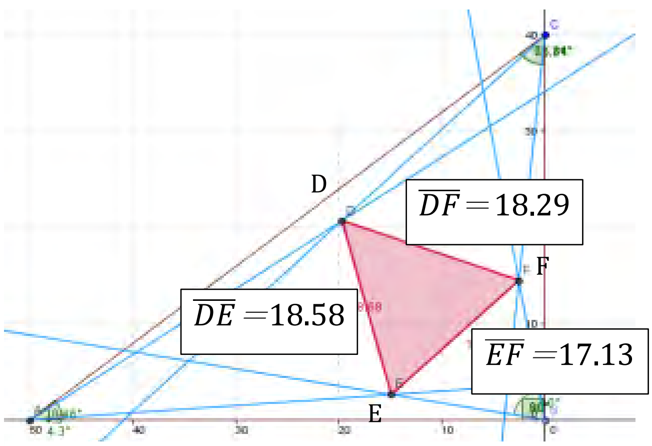
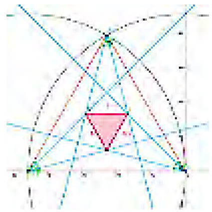
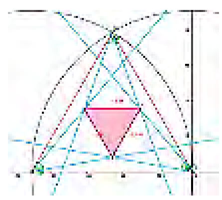
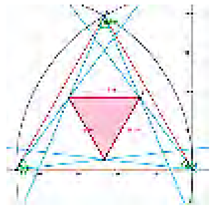


圖 2-6 M_9(直角三角形)

2. M_n(正三角形)：

圖形[表 2-1]：

表 2-1　M_n(正三角形)

n 值	4	5	6	9
圖形				
莫利圖形	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形

證明：

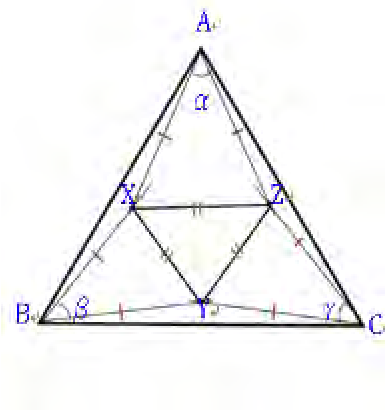


圖 2-7　M_n(正三角形)的證明

如右圖[圖 2-7]，令 X、Y、Z 分別為正三角 ABC 的三個莫利交點。$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$ 分別為$\angle$A、$\angle$B、$\angle$C 最兩側的兩條 n 等分線的夾角。△ABC 中，$\angle BAX=\angle XBA=\angle YBC=\angle YCB=\angle ZCA=\angle ZAC=(\angle A/n)$，又$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，根據 ASA 全等性質，故△ABX≅△BYC≅△CZA，且皆為等腰三角形。

$\Rightarrow\overline{AX}=\overline{BX}=\overline{BY}=\overline{CY}=\overline{CZ}=\overline{AZ}$

又$\alpha=\beta=\gamma=[\frac{(n-2)\angle A}{n}]$，根據 SAS 全等性質，可知

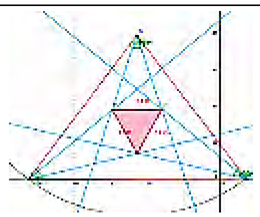
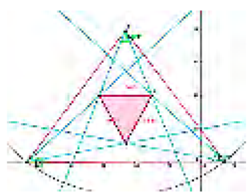
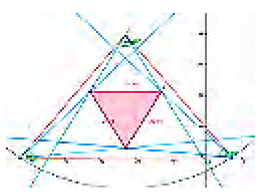
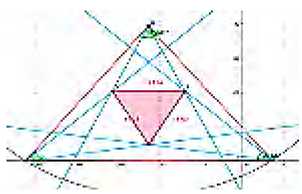
△AXZ≅△BXY≅△CYZ

故$\overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{ZX}$　　　　$\Rightarrow$△XYZ 為正三角形

3. M_n(等腰三角形)：

圖形[表 2-2]：

表 2-2　M_n(等腰三角形)

n 值	4	5	6	9
圖形				
莫利圖形	等腰三角形	等腰三角形	等腰三角形	等腰三角形

證明：

如[圖 4-2-8]，設 X、Y、Z 分別為△ABC 的三個莫利交點。$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$ 分別為∠A、∠B、∠C 最兩側的兩條 n 等分線的夾角。∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$，∠ABX=∠ACZ，又∠BAX=∠ZAC，利用 ASA 全等性質，可得知△ABX≅△AZC，所以$\overline{BX}=\overline{CZ}$。$\angle\beta=\angle\gamma$，又因△YBC 為等腰三角形，$\overline{BY}=\overline{CY}$，利用 SAS 全等性質，得△BXY≅△CZY，故$\overline{XY}=\overline{YZ}$

⇒△XYZ 為等腰三角形

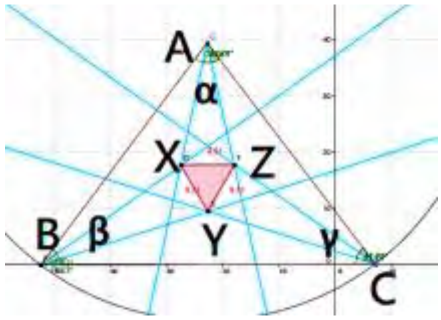


圖 2-8　M_n(等腰三角形)的證明

4. M_n(不規則三角形)：

無明顯規律

除了當 n=3 時為莫利定理外，其餘 n 等分角皆無法讓內部的「莫利圖形」成為有規則的三角形，推測是因為原三角形的邊長與角度各不同，所以內部就無法依照相似或全等特質，得到正三角形或等腰三角形。

5. 結果：

茲將以上結果與莫利定理互相比較，整理出下表[表 2-3]。以歸納法和簡單的證明，可解釋[發現一]：

表 2-3　三角形 n 等分角延伸的結論

三角形種類 / n 等分線	正三角形	等腰三角形	不規則三角形
n=3（莫利定理）	正三角形	正三角形	正三角形
n=4	正三角形	等腰三角形	不規則三角形
n=5	正三角形	等腰三角形	不規則三角形
n=6	正三角形	等腰三角形	不規則三角形
n=n	正三角形	等腰三角形	不規則三角形

(四) 四邊形三等分角與多等分角延伸

將四邊形分為常見的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、等腰梯形、箏形，以及不規則四邊形。一律先以三等分角作圖，並觀察經「莫利作圖」後，各四邊形的結果是否有規律，再將結果延伸至 n 多等分角。

[發現二]：
這些"規則四邊形"許多有對稱軸，因此推測，利用對稱軸將可推知莫利作圖的結果。根據對稱軸，n 等分角的結果和三等分角的四邊形種類相同（如三等分結果是長方形，多等分也會是長方形）。雖對應關係不變，但莫利圖形的性質（如邊長、角度）會改變。

Mn(四邊形)的圖形與結果：

[發現三]：

四邊形有四組對偶關係：「正方形⇔ 正方形」、「平行四邊形⇔ 平行四邊形」、

以下表格[表 2-4] 可說明四邊形的對應關係：

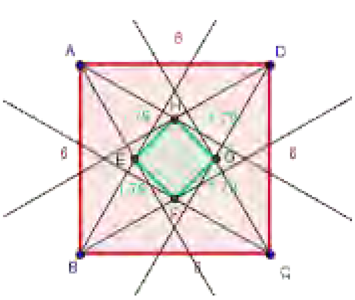
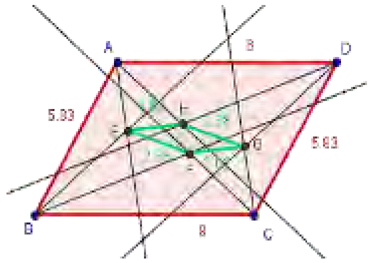
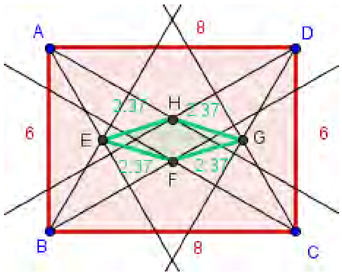
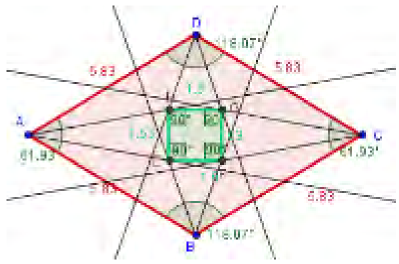
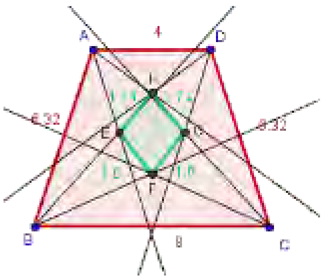
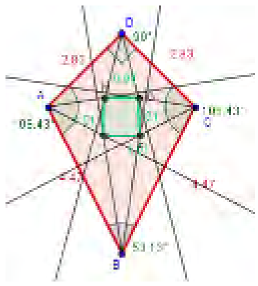
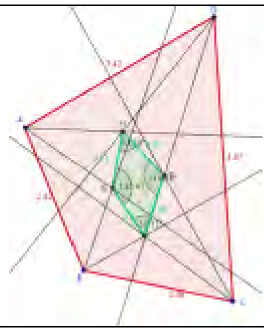
原四邊形	圖形	莫利圖形		原四邊形	圖形	莫利圖形
正方形		正方形		平行四邊形		平行四邊形
長方形		菱形		菱形		長方形
等腰梯形		箏形		箏形		等腰梯形
				不規則四邊形		不規則四邊形

表 2-4　Mn(四邊形)

說明：

有很多四邊形有互相對應的對偶關係。

可再細分為兩類：

自身對應 (其莫利圖形就是相同種類的四邊形)：

正方形⇔正方形　（兼有自身相似）

平行四邊形⇔平行四邊形（種類同但不相似）

雙雙成對：

長方形⇔菱形

茲整理出下表，歸納比較多等分角與三等分角作圖結果[表 2-5]：

表 2-5 四邊形多等分角與三等分角作圖結果比較

四邊形種類	多等分與三等分結果比較		原四邊形	多等分與三等分結果比較
正方形	角度相同，邊長比相同，互為相似形		平行四邊形	角度、邊長比不同
長方形	角度、邊長比不同		菱形	角度相同，邊長比不同
等腰梯形	角度、邊長比不同		箏形	角度、邊長比不同

M_3(正方形)→正方形：

□ABCD 經「莫利作圖」後，形成四邊形 EFGH（圖 2-9）：

△ADH 中，底角∠HAD＝∠HDA

⇒△ADH 為等腰三角形，$\overline{AH}=\overline{DH}$

同理，$\overline{AE}=\overline{BE}$、$\overline{BF}=\overline{CF}$、$\overline{CG}=\overline{DG}$

又$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$

⇒△ADH≅△ABE≅△BFC≅△CGD （ＳＳＳ全等）

因此$\overline{AH}=\overline{DH}=\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{BF}=\overline{CF}=\overline{CG}=\overline{DG}$

又∠EAH=∠EBF=∠FCG=∠GDH=30°

⇒△EAH≅△EBF≅△FCG≅△GDH （ＳＡＳ全等）

⇒ $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$…………①

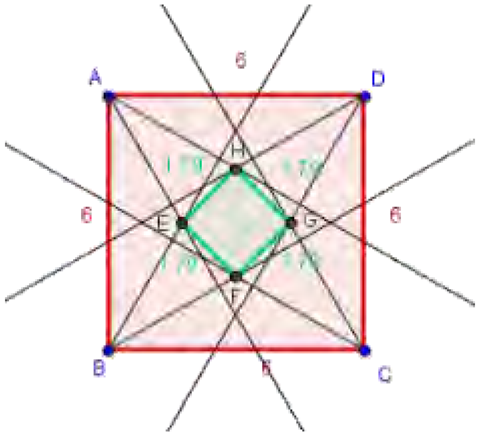


圖 2-9　M_3 (正方形)的證明

而△ABE、△BCF、△CDG、△ADH 為底角 30 度的等腰三角形。

∠AEB=∠BFC=∠CGD=∠DHA= (180° −2*30°)= 120°

∠AEH=∠AHE=∠DHG=∠DGH=∠CGF=∠CFG=∠BFE=∠BEF= (180° −30°)/2=75°

四邊形 EFGH 之各個內角為 360° −(120°+75°*2)=90°…………②

則可得四邊形 EFGH 為一正方形。

其他四邊形都可用類似的方法證明。

(五) 多邊形多等分角莫利作圖結果與共通特性：

1. **圖形與結果**[表 2-6]：

[發現四]：

(1) 原多邊形的邊數＝莫利圖形頂點數

(2) 原多邊形的對稱軸必為其莫利圖形的對稱軸，若且唯若。由此，正 **N** 邊形的莫利圖形為正 **N** 邊形，有「**自我相似**」性質；對稱 N 邊形的莫利圖形為對稱 N 邊形，但並非相似形。

可得以下通式：

M_3(正 **N** 邊形)→正 **N** 邊形

M_3(對稱 N 邊形)→對稱 N 邊形

說明：

(1) 原多邊形邊數=M_n(原多邊形)的頂點數=M_n(原多邊形)邊數

依據定義，取原多邊形相鄰兩點最靠近臨邊兩條等分線作交點，為 M_n(N)的頂點。

換句話說，原多邊形的一條邊就會產生一個頂點，故所形成之多邊形與原多邊形邊數(或頂點數)相同，即 M_n(N)→N。(N 代表原多邊形邊數)

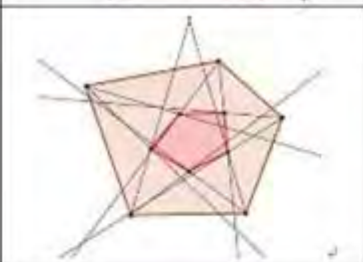
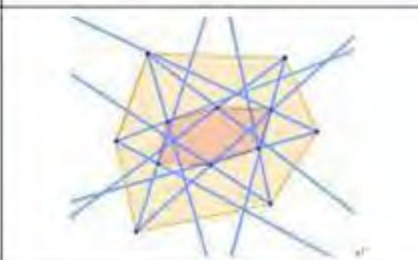
(2) 正多邊形的莫利圖形與原多邊形相似，有「自我相似」性質。

對稱多邊形與其莫利圖形有某種程度類似，但不完全相似。沒有自我相似性質。

利用歸納法可得出「M_n(正N邊形)→正N邊形」、「M_n(對稱 N 邊形)→對稱 N 邊形」。

3. 多邊形多等分角與對稱軸的關係

表 2-6　M_n(多N邊形)的圖形

M_n(多N邊形)	五邊	六邊形	N邊形
正多邊形			正N邊形
對稱多邊形			對稱N邊形
不規則			不規則 N 邊形

正多邊形多邊形多等分角的特殊對應關係與證明如下：

(1) M_n(正N邊形)→正N邊形：

證明(如[圖 2-10])：

a. 設此正N邊形的內角為 $n\alpha$ ，則每個 n 等分角為 α 。

b. 如圖中藍色框三角形，其中每個像這樣由兩 n 等分線及一條原多邊形的邊，所組成的三角形均為等腰三角形（∵兩底角均為 α）

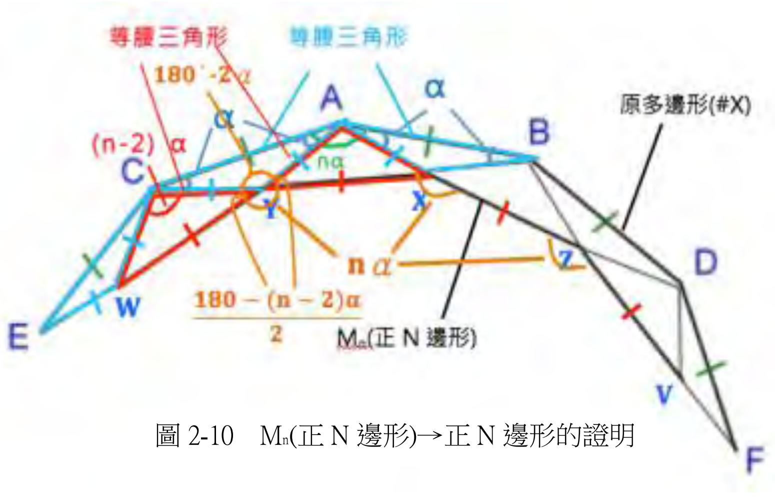


圖 2-10　M_n(正 N 邊形)→正 N 邊形的證明

c. 則可知圖中像這樣由兩條三等分線及一條 M_n(正 N 邊形)的邊組成的三角形(紅色框)均為全等等腰三角形 (∵兩腰相等，且有 SAS 全等性質)

d. △CYA 中，由底角=α ，可知頂角∠CYA =180°-2α 。

△CWY 中，由頂角=(n-2)α ，可知底角∠CYW =∠CWY=$\frac{[180^{\circ}-(n-2)\alpha]}{2}$

e. 則∠WYX=360°-(180°-2α)-2× $\frac{[180^{\circ}-(n-2)\alpha]}{2}$=nα 。

同理 M_n(正 X 邊形)所有內角均= nα 。故 M_n(正 N 邊形)為正 N 邊形。

也可以「對稱」的概念解釋：

對稱軸除了扮演著整個圖形的對稱線外，亦扮演角的平分線，因此我們可以說這角影響的那兩點就以此對稱線為對稱軸，剩下延伸出去得邊與角，也有類似的性質存在，因此可以說整個圖形是以原多邊形對稱軸為對稱軸的線對稱圖形（如右圖 2-11）。因此莫利圖形由對稱性可以得知，其必為正多邊形。

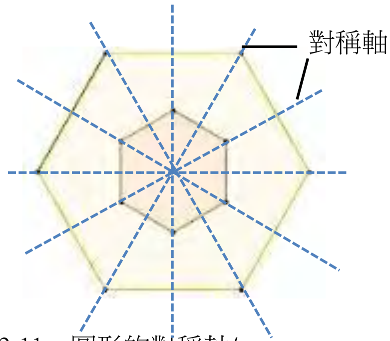


圖 2-11　圖形的對稱軸/
原多邊形的對稱軸同時也是莫利圖形（或說整個圖形）的對稱軸。

(2) M_n(對稱 N 邊形)→對稱 N 邊形：

將等腰圖形以其對稱軸加以分類：

a.對稱軸和多邊形交於多邊形兩頂點上[圖 2-12]：

令 B 點為在對稱軸上，$\overline{AB}$的配對交點 X，與$\overline{BC}$的配對交點 Y 點，互相對稱，因為這樣持續畫下去，下方的交點，也可以推出同樣的道理，得證。

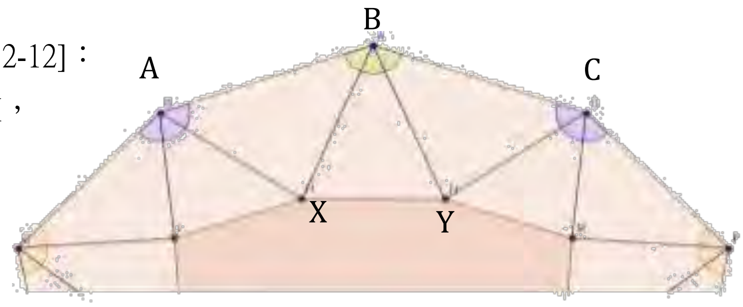


圖 2-12　對稱軸在兩點上的證明

b.對稱軸和多邊形交集於多邊形兩邊上[圖 2-13]：

令$\overline{AB}$為對稱軸上的邊，則$\overline{AC}$的配對交點 X，和$\overline{BD}$的配對交點 Z，是原多邊形的對稱軸的兩個對稱點，同理下方的那些焦點也有相似的關係，所以裡面的圖形也是邊數相同的對稱 N 多邊形。

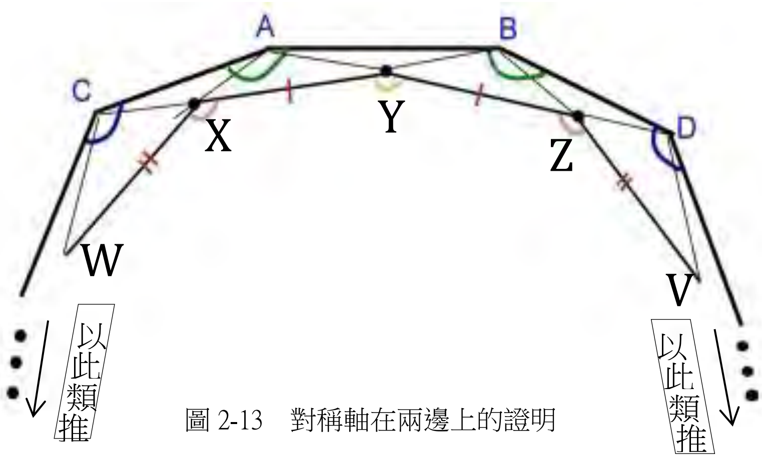


圖 2-13　對稱軸在兩邊上的證明

c.對稱軸和多邊形交集於多邊形一邊和一頂點上：

集合以上結論，可以得到其對稱關係，由此可知內部形成的圖形也有對稱關係，雖然跟外面的圖形不相似，但也是邊數相同的圖形，且具有相同的對稱軸。

（六）線性變換的函數意義與坐標化計算

[發現五] 三角形可利用「變換矩陣」作線性變換，但矩陣非常複雜，已失去原本簡潔的目標。 四邊形及其它多邊形沒有線性變換，只能依序算出配對交點的坐標，以求得莫利圖形。

經由種種結論，本研究發現：此種作圖竟有「函數」般的轉換和對應關係。而且在許多狀況，此函數是若且唯若的（if and only if）。查詢相關資料後，得知此即是所謂的「線性變換」。這也使本研究立刻聯想到「逆定理」的推廣。在幾篇參考文獻中，有提到逆定理的部分，但皆是以複雜的三角函數推導，本研究以不同的觀點切入，將作圖視為一種「函數」關係。

本研究想推導出此函數的線性變換公式，讓圖形不再只有大略的「性質」而已，而是有精確的數值，進而探討其面積、邊長等的關係，以及對應關係是否為「唯一解」。利用此函數可推廣到逆定理，最終目標是求出一條公式。利用此公式，只要代入原多邊形的頂點座標就可求出其莫利圖形；或帶入一未知原多邊形的莫利圖形頂點座標，反求原多邊形的頂點座標。

因牽扯到「線性變換」的概念，故本研究利用「矩陣」這個運算工具表示變換關係。
以下是本研究的想法。如[圖 2-14]：

三角形多等分角的線性變換：

令 $M_3(\triangle ABC) \rightarrow \triangle DEF$。

設 M 為其變換函數，且為一個 2×2 矩陣。

以$X \xrightarrow{M} Y$表點 X 經線性變換後會變成點 Y。(X、Y 為座標平面上之任意點)

點 P 為變換中心點，即 $P \xrightarrow{M} P$。

矩陣 A、B、C、D、E、F 皆為 2×1 的矩陣，

其元素為點 A、B、C、D、E、F 的座標。

令$A \xrightarrow{M} D$，$B \xrightarrow{M} E$，$C \xrightarrow{M} F$。

則 MA=D……①

MB=E……②

MC=F……③

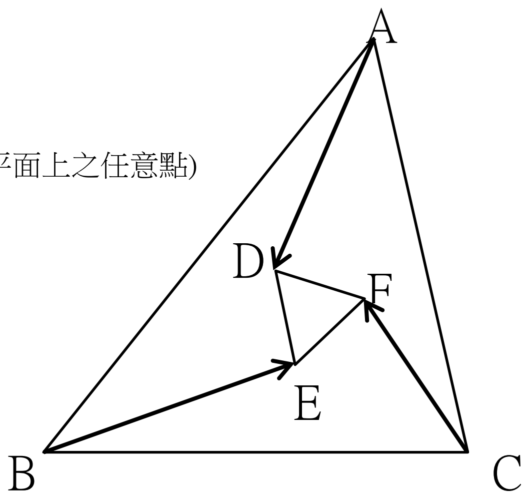


圖 2-14 線性變換

由此三式可求出函數 M。然而求出的結果非常複雜，雖已將它寫成電腦程式，達成當初的目標，並證實運算正確，但這樣複雜的函數是沒有重要意義的。在此仍然提出這個概念，是希望未來假如有將這個矩陣分解成許多小矩陣的技術，或許可以轉換成許多像是旋轉矩陣或映射矩陣等基本矩陣相乘的結果。假如能順利做到，就可以將莫利作圖解析成許多基本的變換連續而成，想必會更接近莫利圖形的真相。

四邊形及其它多邊形的圖形變換：

邊數為四以上的多邊形不是剛性結構，由圖形上看，可明顯看出其圖形關係不符合線性變換。另外，如仿照以上做法，用係數比可證明聯立方程式無解，故除三角形以外不能用線性變換解釋圖形。此部分只能依序算出各配對交點的坐標才能求出莫利圖形。

配對交點的計算：

將配對交點以原多邊形頂點和夾角表示，可以將欲計算部分旋轉平移至 X 軸上，並令一點為原點（如圖 2-15）。以下是計算方法：

計算 n 等分莫利作圖中 A、B 的配對交點 C 以 A 、 B 坐標與夾角 α 、 β 表示，

令 a=$\overline{AB}$=$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$，A=(0,0)，B=(a,0)。 C 為 A 、 B 的配對交點，C=(c_1,c_2)。

則 $\overleftrightarrow{AC}: y=\tan\frac{\alpha}{n}x$ ， $\overleftrightarrow{BC}: y=-\tan\frac{\beta}{n}c_1+a\times\tan\frac{\alpha}{n}$ 解聯立方程式求交點：

$$\begin{cases} c_2=\tan\dfrac{\alpha}{n}\times c_1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ c_2=-\tan\dfrac{\beta}{n}\times c_1+a\times\tan\dfrac{\beta}{n} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−② $(\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n})\times c_1=a\times\tan\frac{\beta}{n}$ ，得 $c_1=\dfrac{a\times\tan\frac{\beta}{n}}{\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n}}$

帶入① 得 $c_2=\dfrac{a\times\tan\frac{\beta}{n}}{\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n}}\times\tan\frac{\alpha}{n}=a\times\dfrac{\tan\frac{\beta}{n}\tan\frac{\alpha}{n}}{\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n}}=a\times\dfrac{1}{\cot\frac{\alpha}{n}+\cot\frac{\beta}{n}}=\dfrac{a}{\cot\frac{\alpha}{n}+\cot\frac{\beta}{n}}$

可得$\overrightarrow{AC}$=($\dfrac{a\times\tan\frac{\beta}{n}}{\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n}}$, $\dfrac{a}{\cot\frac{\alpha}{n}+\cot\frac{\beta}{n}}$)

將圖形旋轉並平移回去，令逆時針旋轉θ，則$\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dfrac{a\times\tan\frac{\beta}{n}}{\tan\frac{\alpha}{n}+\tan\frac{\beta}{n}}\\ \dfrac{a}{\cot\frac{\alpha}{n}+\cot\frac{\beta}{n}}\end{bmatrix}$。

則$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$。

利用此方法可套用至每個配對交點的計算。

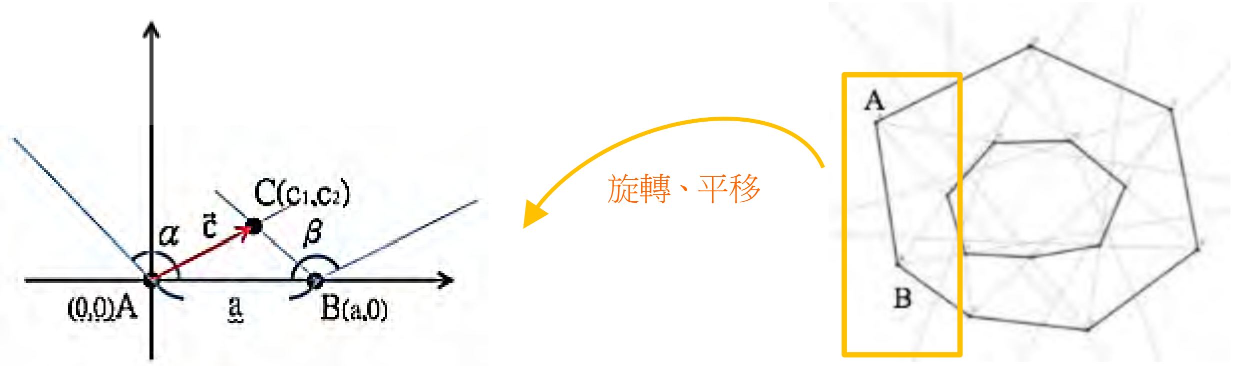


圖 2-15 配對交點坐標計算

三、立體多面體、多等分角的性質探討

(一)立體空間中的定義

1.「角」的定義

研究平面之後，本研究到將莫利定理推廣到立體空間中，且使用數學上的“二面角”作為立體中的討論對象。

名詞解釋： 如 [圖 3-1]

二面角：指兩個平面所形成的夾角，如 α 為 a、b 兩個平面所夾的二面角。

棱：這兩個平面所交的直線。如圖中的 c。

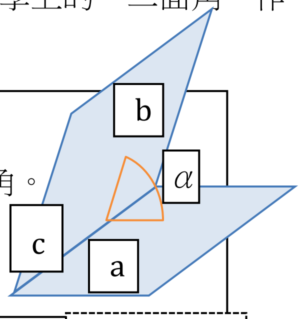


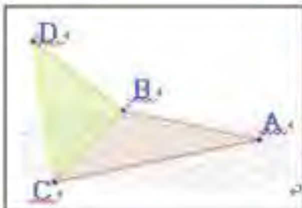
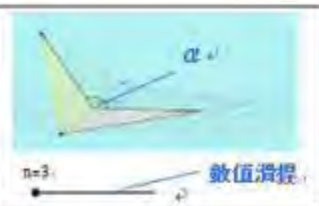
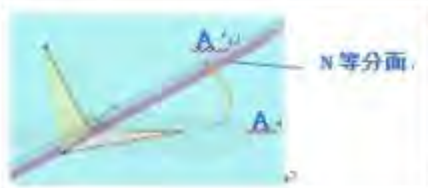
圖 3-1
二面角示意圖

2. n 等分角的作法

可將圖形坐標化，可利用代數的方法求得等分面的方程式。詳見後頁。

或作圖部分可利用 Geogebra 的 ”Rotate” 函數（如[表 3-1]）：

表 3-1　Rotate 函數

			
Step1 定義兩個面，作其交線。(二面角的棱)	Step2 作棱的垂直面。(藍色面)	Step3 令二面角為 α，設正整數 $n\geq3$，為角等分數。(用軟體的數值滑桿)	Step3 以 α/n 為旋轉角，旋轉一面。 輸入 Rotate[A, α /n, Line[B,C]]。 得點 A'，面 BCA' 為 n 等分面。

等分角結果：

如[圖 3-2]，
圖中紅色面為兩個藍色面的等分面。

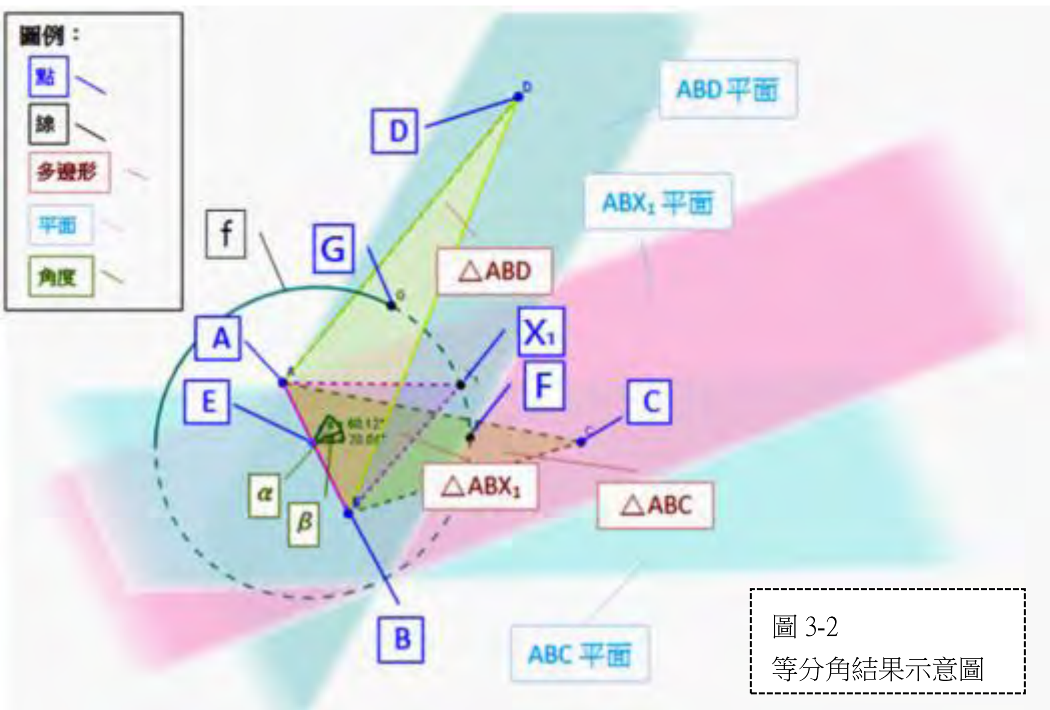


圖 3-2
等分角結果示意圖

3. 如何討論立體圖形

仿照平面的經驗，本研究做以下定義如[圖 3-3]：

(1)**原多面體**：稱原先的多面體為「**原多面體**」。

(2) **n 等分面**：

如一平面 c 為可以 n 等分 a、b 兩面的平面 ($n \in N$，a、b 為此二面角的兩個平面)，則稱此平面 c 為 a、b 兩面的「**n 等分面**」。

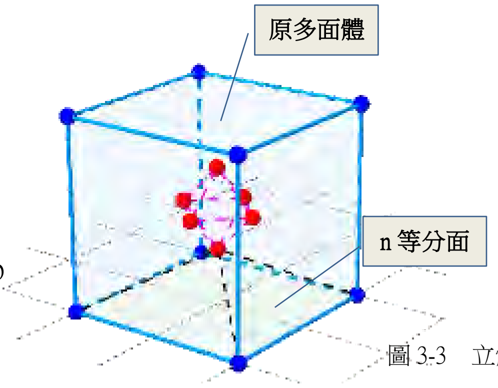


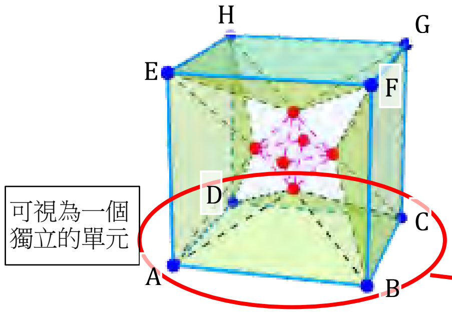
圖 3-3　立體定義

(3)**底面**：原多面體的一個面為「**底面**」。

(4)**鄰面**：與底面相鄰的面(共用一個邊：棱)。

(5)**配對交點**：每個鄰面與底面的二面角中，取鄰近底面的的數個 n 等分面，如相交形成交點，則稱此交點為底面的「**配對交點**」。(此處只針對有形成交點時作定義，判斷交點有無將在 P 作討論)

如[圖 3-5]，為正六面體圖形[圖 3-4]利用莫利作圖法的部份放大圖，此部份由正六面體其中一個面與其鄰面的三等分面組成。



[圖 3-4]　底面、鄰面與配對交點關係-1

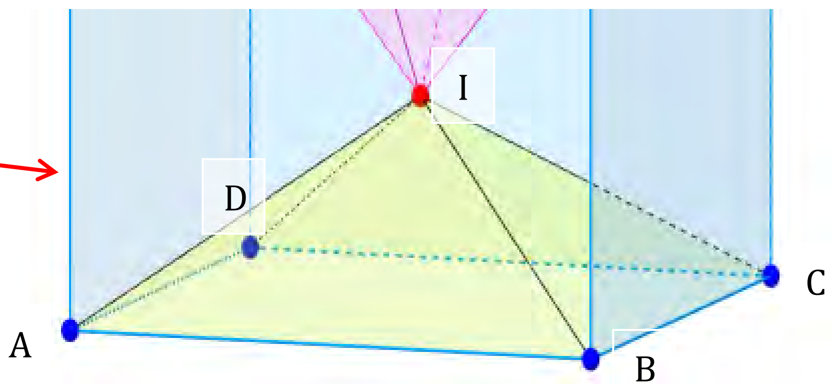


圖 3-5　底面、鄰面與配對交點關係-2

[圖 3-5]說明：

底面為平面 ABCD。

鄰面為平面 ABFE、BCGF、CDHG 與 DAEH。

配對交點是交點 I。

因此，由平面的定義修改，立體的莫利作圖 $\mathbf{M_n^3}$**(原多面體)**，定義如下：

步驟一、作各二面角的 n 等分面。
(因只取臨近原多面體面的等分面作交點，故只需畫出相鄰原多面體面的 2 個等分面即可。參見[圖 3-6]。)
步驟二、多面體面的數個等分面。
步驟三、形成交點。
步驟四、這些交點相連，形成多面體。

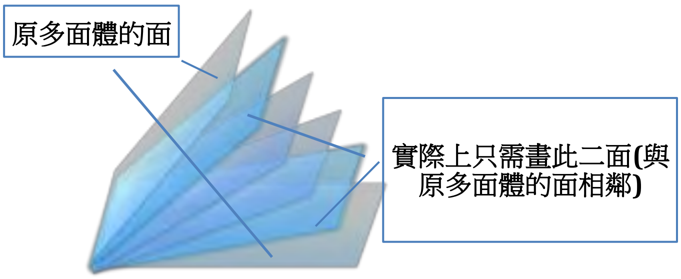


圖 3-6 作圖的技巧

原本的莫利定理中，是由三角形(2D)的相鄰兩邊(1D)夾角產生線(1D)再產生交點(0D)最後形成三角形(2D)。立體的延伸則是由多面體(3D)其中相鄰兩面(2D)的夾角產生面(2D)再產生交點(0D)最後形成多面體(3D)。等於是各項都增加了一個維度(點除外)。

莫利作圖以M_n^3(正四面體)為例：[圖 3-7]與[圖 3-8]

ABCD 為正四面體，作兩個三等分面 ABF_1、ABF_2，三等分面 ABC、ABD 的二面角，其他二面角重複此步驟。取臨近原多面體面的三個等分面，作其交點。交點形成正四面體。

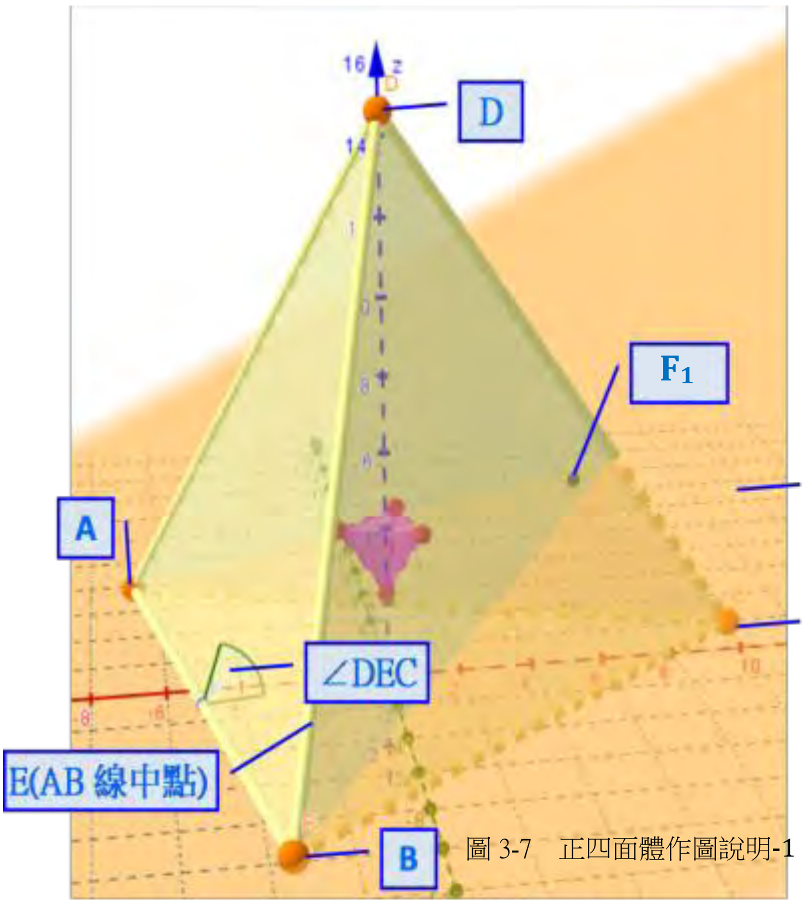


圖 3-7 正四面體作圖說明-1

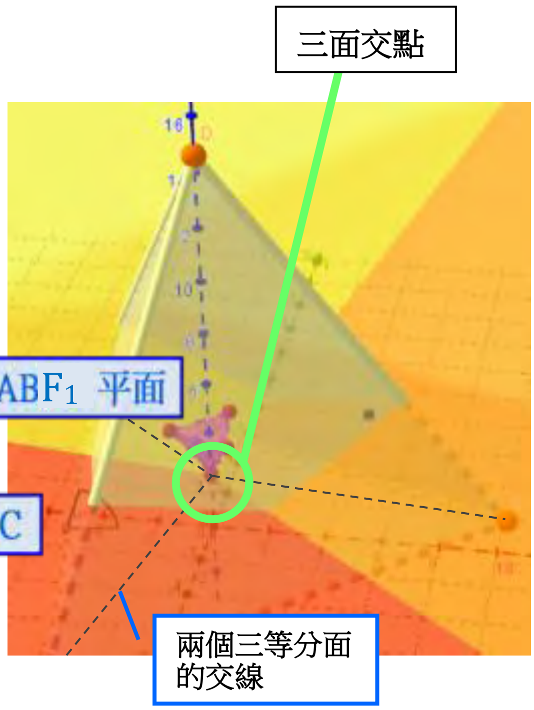


圖 3-8 正四面體作圖說明-2

(二)正多面體三等分角作圖的圖形性質與對應關係—M_3^3 (正多面體)的探討

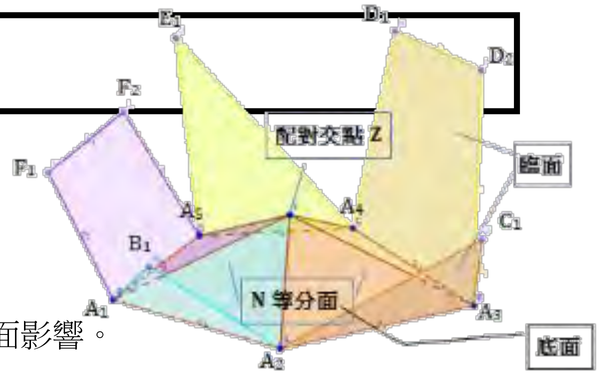
1. 判斷正多面體的對應關係

本研究認為立體圖形也會有許多與平面圖形類似的情況。因此立體圖形的探討，就從最規則的「正多面體」開始探討。

由取等分面作交點的定義：「臨近原多面體面的數個等分面」這點，很快地便找出交點的通性：假如有交點，**一個原多面體的面有一個配對交點**。

得到**[發現六]**，適用於任何會形成交點的多面體。（因為有些情況數個面不會教在同一點）

[發現六] **「原多邊形面數=M_3^3(原多面體)頂點數」**



說明： 型如[圖 3-9]的狀況，有以下性質：

(1) 原多邊形的一面只要「配對交點」存在，

則**有且只有 1 個(**∃!的關係)與其對應的**「配對交點」**

且此交點也為$M_n^3(X)$的一個頂點，並受到底面與其鄰面影響。

(2) 因為是一面配一點，故有**「原多邊形面數=M_3^3(原多面體)頂點數」**的關係。

事實上，延伸至多等分角時，此關係依然不變。

圖 3-9
發現六說明

頂點除了個數，也要判斷其位置。對於正多面體，有[發現七]的關係，適用於底面為正多邊形且與鄰面夾角皆相等的情況。

[發現七]

如[圖 3-10]已知底面為正多邊形，且與每個鄰面的夾角相等，則其相鄰的交點的垂直投影必在此面的中心。

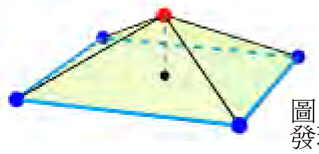


圖 3-10
發現七

說明：

對於正多面體而言，原多面體每面均為正多邊形，且每個「底面」與「鄰面」的夾角皆相等。由對稱性可知：此底面的配對交點在底面上的垂直投影必在底面的中央。如 [圖 3-10]。

[發現八] 對於整個圖形的對稱性，和平面一樣的道理，**原多面體的對稱面必為莫利圖形的對稱面**。(平面中的「對稱軸」在立體中為「對稱面」。

正多面體有很強的對稱性，且符合[發現六]。加上[發現八]的性質，推論有以下的情形。

M_3^3(正四面體) → 正四面體 (正四面體有 4 個頂點)

M_3^3(正六面體) → 正八面體 (正八面體有 6 個頂點)

M_3^3(正八面體) → 正六面體 (正六面體有 8 個頂點)

M_3^3(正十二面體) → 正二十面體 (正二十面體有 12 個頂點)

M_3^3(正二十面體) → 正十二面體 (正十二面體有 20 個頂點)

2. 作圖的結果

直接以 Geogebra 軟體作圖，得到以下結果，更加強了本研究的推論。如[表 3-2]。

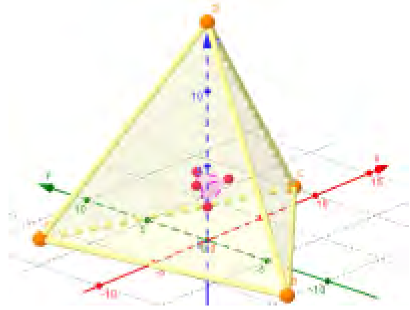
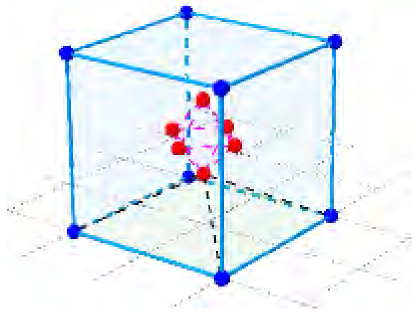
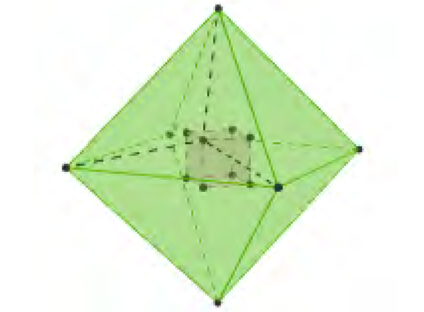
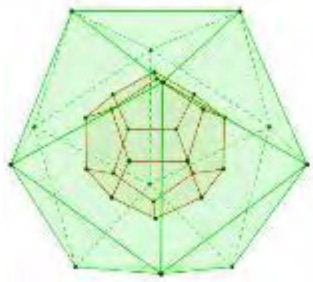
圖形			
原多面體	正四面體	正六面體	正八面體
結果	$\mathbf{M}_3^3$(正四面體) → 正四面體	$\mathbf{M}_3^3$(正六面體) → 正八面體	$\mathbf{M}_3^3$(正八面體) → 正六面體
圖形			
原多面體	正十二面體	正二十面體	
說明	$\mathbf{M}_3^3$(正12面體) → 正20面體	$\mathbf{M}_3^3$(正20面體) → 正12面體	

表 3-2　正多面體三等分作圖結果

3. 正多面體的對偶性質

正如本研究的想法，立體圖形和平面圖形一樣，有互相對應的「對偶關係」。

[發現九]

正多面體有很強的對偶性，共有三組對偶。

正四面體 ⇔ 正四面體（如[圖 3-11]）

正六面體 ⇔ 正八面體（如[圖 3-12]）

正十二面體 ⇔ 正二十面體

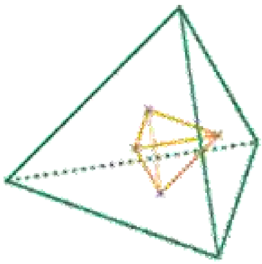


圖 3-11 **正四面體 ⇔ 正四面體**

除了對偶性，還兼有自我相似的性質。

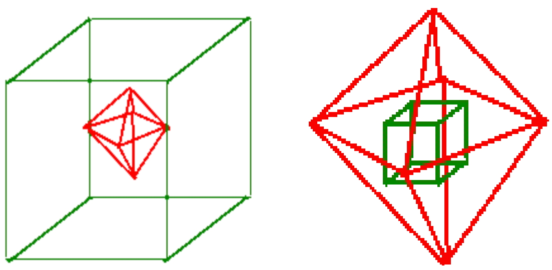


圖 3-12　　**正六面體 ⇔ 正八面體**

正多面體的面數、頂點數及邊數			
正多面體	面數	頂點數	邊數
正四面體	4	4	6
正六面體	6	8	12
正八面體	8	6	12
正十二面體	12	20	30
正二十面體	20	12	30

表 3-3　正多面體的面數、頂點數的比較/
由此表更能明顯看出對應關係

(三)正角錐、正角柱三等分角作圖的圖形性質與對應關係

1. 正角錐、正角柱三等分角圖形結果

[發現十]

M_3^3(正 N 角錐) → 正 N 角錐

正N角柱在特定比例時才有交點，其利圖形為雙N稜錐。

說明：

由[發現六]與[發現八]，搭配作圖，得到以下結果（[表 3-4]）：

表 3-4 正角錐、正角柱三等分角作圖

<table>
<tr><td rowspan="3">正角錐</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>正三角錐→正三角錐</td><td>正四角錐→正四角錐</td><td>正 n 角錐→正 n 角錐</td></tr>
<tr><td colspan="3">M_3^3(直角錐)的種類同原錐體，但性質(如長度比、角度等)不同。</td></tr>
<tr><td>正角柱</td><td colspan="2">因為等分面錯開不共點，故柱體的側面除特例之外無配對交點，
也就是說只有在角度與長度配合時才會有交點。
如右圖，設正N角柱底面邊長為 a，柱高為 h，
當 $\frac{h}{a} = \cot 30° \times \tan\frac{60°\times(N-2)}{N} = \sqrt{3}\tan\frac{60°\times(N-2)}{N}$ 時有交點，
則正 N 角柱會形成 雙 N 角錐。
(此處之證明合併到正角柱 n 等分角章節)</td><td>
M_n^3(柱體)→雙稜錐示意圖</td></tr>
</table>

證明：

M_3^3(正 N 角錐) → 正 N 角錐

以右圖[圖 3-13]的正四角錐 ABCDE 為例，

令 F、G 分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點，

由[發現八]，整個立體圖形以平面 EFG 為中心左右對稱。

另外，整個立體圖形也以平面 ACE 為中心左右對稱。

由此兩「對稱面」與「配對交點」的概念，

可知其M_3^3(正 4 角錐) → 正 4 角錐。

其他正角錐同理可證。

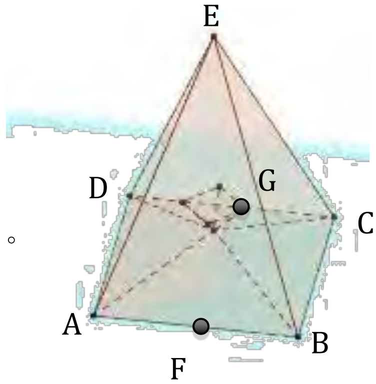


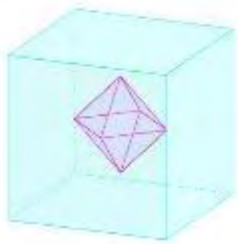
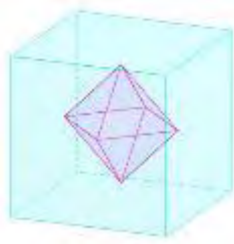
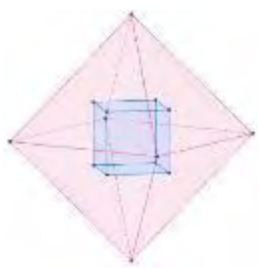
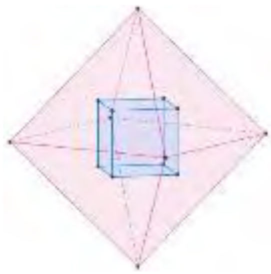
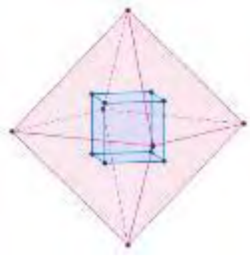
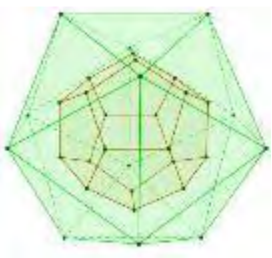
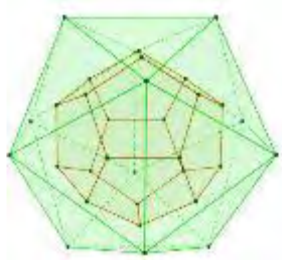
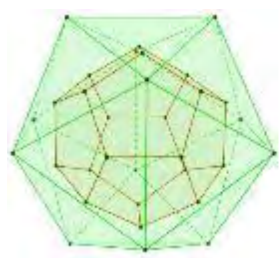
圖 3-13 M_3^3(正 4 角錐) → 正 4 角錐

(四)正多面體、錐體、柱體多等分角作圖的圖形性質與對應關係

接著本研究將問題延伸至「**多等分角**」。

1.正多面體（表 3-5）

表 3-5　正多面體 n 等分結果

	四等分	五等分	六等分	**n 等分**
正四面體				
	經莫利作圖，會形成正四面體			
正六面體				
	經莫利作圖，會形成正八面體			
正八面體				
	經莫利作圖，會形成正六面體			
正 **12** 面體				
	經莫利作圖，會形成正二十面體			
正 **20** 面體				
	經莫利作圖，會形成正十二面體			

[發現十一] 正多面體的莫利圖形為原多面體的對偶多面體的相似體。且等分數越大，體積越大。

由[發現八]，推知其多面體種類同三等分，互為相似多邊形，但體積不同。

等分數越大，因為交點會越靠近原多面體的面，所以體積會越大。

體積比例：

以M_n^3(正六面體) → 正八面體為例。 如 [圖 3-14]：

設正六面體 ABCDEFGH 稜長為 a。

正八面體 IJKLMN 為其莫利圖形。 O 為線段$\overline{AD}$中點。

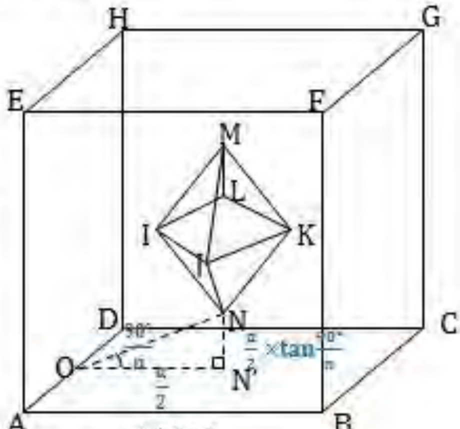


圖 3-14
正六→正八的計算

由[發現七]，點 N 在 ABCD 平面的垂直投影在正方形 ABCD 中心。

令此垂直投影點為 N'，則$\overline{ON'}=\frac{a}{2}$，$\angle NON'=\frac{90°}{n}$。

得$\overline{NN'}=\frac{a}{2}\times\tan\frac{90°}{n}$。

同理，得知 I、J、K、L、M 與其底面的距離也是$\overline{NN'}=\frac{a}{2}\times\tan\frac{90°}{n}$。

求出正八面體中的長度關係$\overline{IK}=\overline{IJ}=\overline{MN}=a-a\times\tan\frac{90°}{n}$。(參見[圖 3-15])

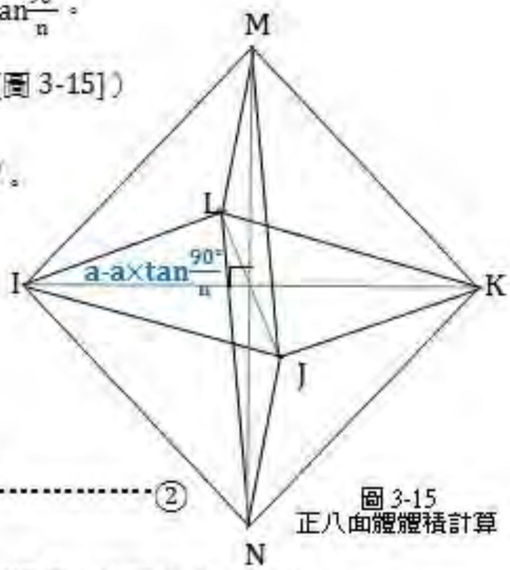


圖 3-15
正八面體體積計算

將此正八面體拆成上下兩個四角錐，∵錐體體積=$\frac{(底面積\times高)}{3}$。

可算出正八面體體積=$\dfrac{\frac{(a-a\times\tan\frac{90°}{n})^2}{2}}{3}\times\frac{(a-a\times\tan\frac{90°}{n})}{2}\times 2$

$=\frac{(a-a\times\tan\frac{90°}{n})^3}{6}=\frac{a^3(1-\tan\frac{90°}{n})^3}{6}$ ……………①

$\therefore\frac{\textbf{正八面體體積}}{\textbf{正六面體體積}}=\frac{(a-a\times\tan\frac{90°}{n})^3}{6a^3}=\frac{a^3(1-\tan\frac{90°}{n})^3}{6a^3}=\frac{(1-\tan\frac{90°}{n})^3}{6}$ ……………②

由①式，可見當 n 固定時，此正八面體體積與原正六面體邊長 a 的三次方成正比，

由②式，與正六面體的體積比為 n 的函數，n 越大，比值越大。

不論 a 為多少，當 n 固定，體積比恆為定值；如 a 固定，n 越大，則正八面體體積越大。

其他正多面體的體積比公式可由類似方法求出，結果如[表 3-6]:

表 3-6 正多面體體積比

原多面體	$\frac{莫利圖形}{原多面體}$	原多面體	$\frac{莫利圖形}{原多面體}$
正四面體	$\frac{\sqrt{3}}{243}\left[\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\tan\frac{\cos^{-1}\frac{1}{3}}{n}\right]^3$	正十二面體	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\times\tan^2 54°\times\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{5}}-\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\times\tan\frac{\cos^{-1}\frac{-\sqrt{5}}{3}}{n}\right)^3}{2}$
正八面體	$\frac{\sqrt{6}}{162}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\tan\frac{\cos^{-1}\frac{-1}{3}}{n}\right)^3$	正二十面體	$\frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}}\times\tan\frac{\cos^{-1}\frac{-\sqrt{5}}{3}}{n})^3}{6}$

2.正角錐

[發現十二]

正N角錐 n 等分莫利圖形為正N角錐，但不為相似形。

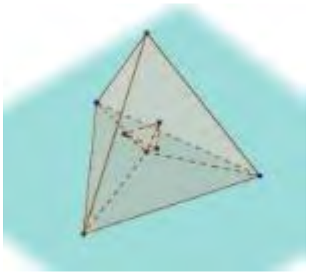
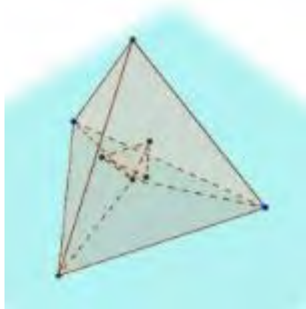
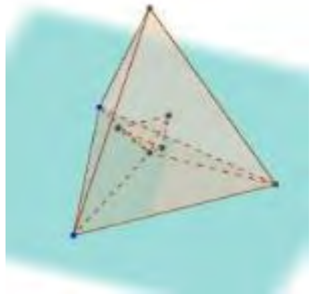
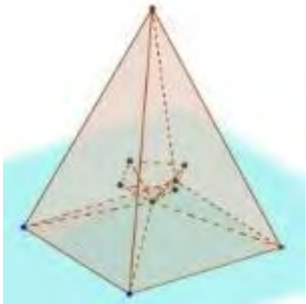
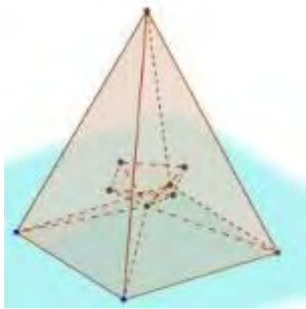
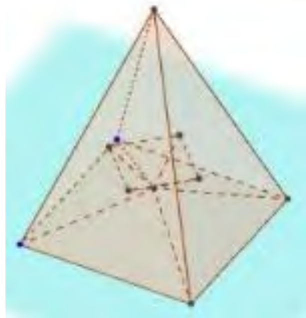
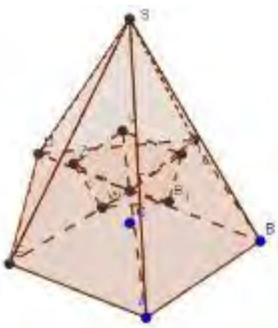
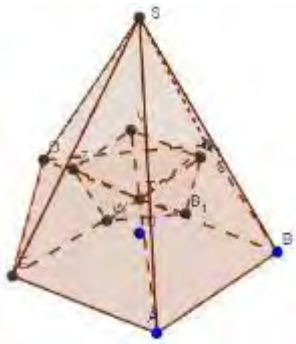
說明：

利用[發現六]與[發現八]，可推得直角錐多等分角作圖的性質：

其結果和三等分一樣，只是性質(如長度比、角度比)不同。

可用正角錐三等分[發現十]的證明方法證之。

表 3-7　直角錐 n 等分結果

等分數 錐體	四等分	五等分	六等分	n 等分
正三角錐				
	經莫利作圖後，會形成正三角錐			
正四角錐				
	經莫利作圖後，會形成正四角錐			
正五角錐				
	經莫利作圖後，會形成正五角錐			
正 N 角錐	經莫利作圖後，會形成正 N 角錐			

3.正角柱

[發現十三]

正角柱多等分角結果同三等分，特例時才會有交點。

$\frac{h}{a} = \cot\frac{90°}{n} \times \tan\frac{180°\times(N-2)}{Nn}$ 時有交點，此時 N 角柱會形成雙 N 稜錐。

正 N 角柱 n 等分角交點存在時的條件（如[圖 3-16]）：
令此正 N 角柱柱高為 h，底面邊長為 a。

$\overline{AE} = \frac{h}{2}$，$\overline{BE} = \frac{a}{2}$。

$$\angle EBO = \frac{180(N-2)°}{Nn} \quad \therefore \tan\frac{180(N-2)°}{Nn} = \frac{\overline{EO}}{\overline{BE}} = \frac{2\overline{EO}}{\square}$$

$$\angle\square\square\square = \frac{90°}{n} \quad \therefore \tan\frac{90°}{n} = \frac{\overline{EO}}{\overline{AE}} = \frac{2\overline{EO}}{h}$$

$$\overline{EO} = \tan\frac{90°}{n} \times \frac{h}{2} = \tan\frac{180°(N-2)}{Nn} \times \frac{a}{2}$$

$$\frac{h}{a} = \cot\frac{90°}{n} \times \tan\frac{180°\times(N-2)}{Nn}$$

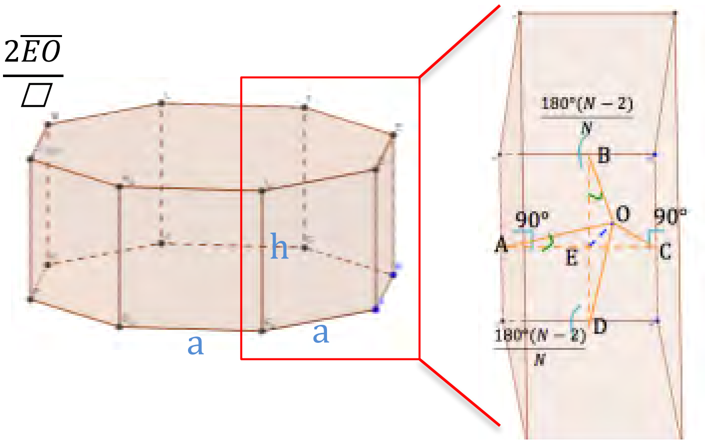


圖 3-16　正 N 角柱交點的計算

4.正多面體、正角錐、正角柱 N 等分角總整理

表 3-8　立體作圖結果整理

	N等分結果	通則		
正多面體	**對偶性** 正四面體⇔正四面體 正六面體⇔正八面體 正十二面體⇔正二十面體	原多面體面數＝莫利圖形頂點數	莫利圖形為原多面體的對偶多面體之相似體	多等分結果，種類同三等分，但性質不同
正 N 角錐	正 N 角錐→正 N 角錐 不為相似多面體		多面體種類同原角錐，但性質不同（不相似）	
正 N 角柱	特例時形成雙 N 稜錐			

特殊的多面體的結果就探討至此，以下本研究將利用以上探討的部分結果，將問題延伸至任意多面體的結果與其判斷方式。

(五)任意多面體多等分角

從研究的過程中歸納出兩大原則，並由兩大原則判斷所形成的是什麼類型的多面體。

a.交點存在原則 — 交點的存在與否

b.面與頂點原則 — 交點存在原則成立，則莫利圖形頂點數=原多面體面數；並利用面與面之間的相對位置可判斷莫利圖形。

1. 交點存在原則

在定義時，本研究即發現在許多情況下，交點並不會存在。因此判斷交點是否存在就成了一個重要的問題。 判斷交點，可以「圖形性質」或「代數證明」的觀點來看。

圖形性質的觀點：

[發現十四]　判斷交點是否存在，有下列 5 項原則：

(1)如底面為三角形，則必有配對交點。

(∵底面為三角形，可知此三個等分面任兩個不互相平行，∴此三平面必於交點)

(2)如底面為正多邊形，且與每個鄰面的夾角相等，則必有配對交點。 (符合[定理二])

(3)如底面為正多邊形，但與每個鄰面的夾角有一個以上不相等，則必無配對交點。

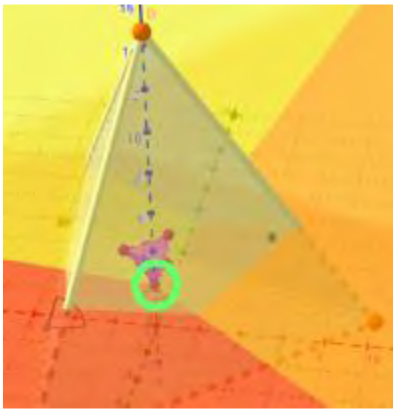
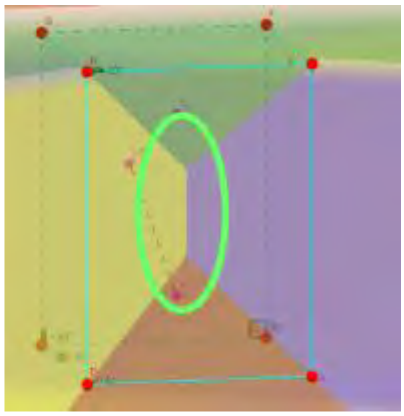
(可先設想(2)的情形，再改變其中一個三等分面與底面的夾角，易知必無共同交點)

(4)如底面不為正多邊形，雖與每個鄰面的夾角相等，但必無配對交點。

(可先設想(2)的情形，再改變底面的多邊形邊長和內角，易知必無共同交點)

(5)如底面不為正多邊形，與每個鄰面的夾角有一個以上不相等，則只有在角度與長度配合時才有配對交點，可能性極低。只能以計算或繪圖來驗證。

表 3-9　交點有無比較

圖形		
交點	有交點	無交點
說明	圖為正四面體的結果。 圖中是鄰近於底面 ABC 的交點。 由三個面相交必有交點。	圖為長方體的結果。 圖中是呈現的是四個錯開的等分面。 符合 d：底面不為正多邊形，但與每個鄰面的夾角相等，則必無配對交點。

判斷步驟可參考下流程圖（如[圖 3-17]）：

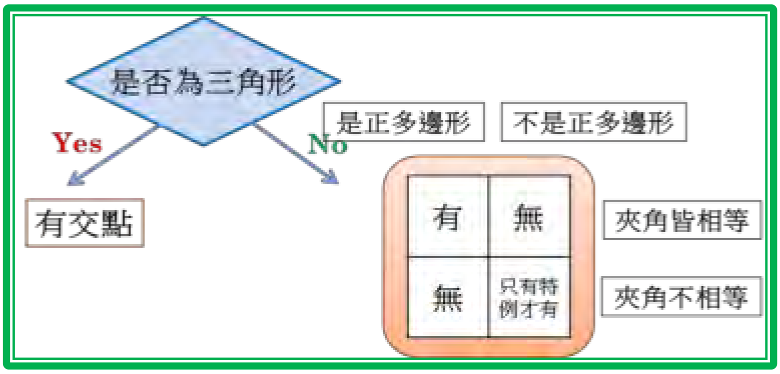


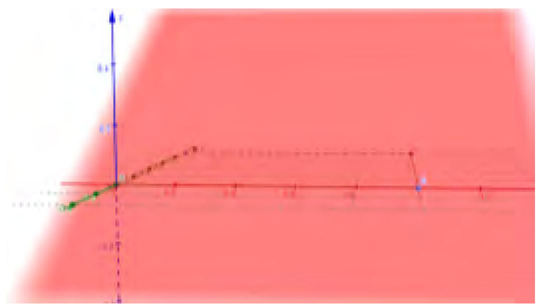
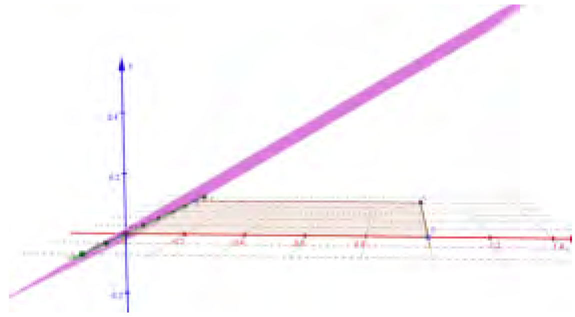
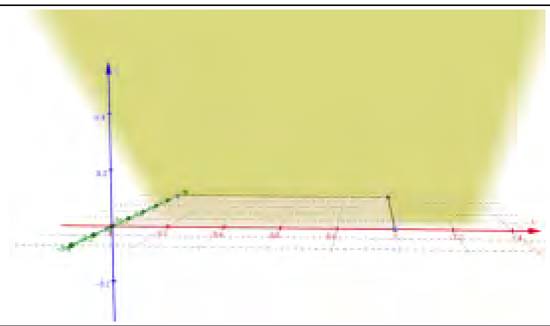
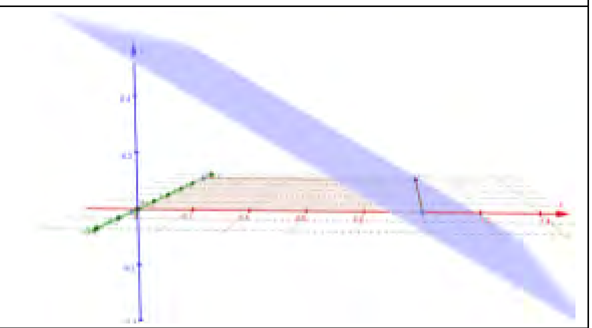
圖 3-17 判斷交點有無流程圖

代數證明的觀點：

可以建立直角 X-Y-Z 坐標系，將圖形坐標化並以方程式表示線和面。利用方程式求解以驗證其交點是否存在或甚至求出交點的坐標位置。

以正六面體(邊長為 1)為例，要準確判斷其「配對交點」是否真的存在，本研究先將其個等分交的方程式陳列出來，再驗證其是否有共同的交點。

表 3-10 方程式計算

圖示		
方程式	$y=\sqrt{3}z$	$x=\sqrt{3}z$
圖示		
方程式	$y+\sqrt{3}z=1$	$x+\sqrt{3}z=1$

三面(紅、粉紅、黃)之交點為$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6})$，代回去第四面(紫)的方程式驗證，可得知四面的共同交點。

其他狀況也是以類似的方法處理，以驗證其交點是否存在或甚至求出交點的坐標位置。

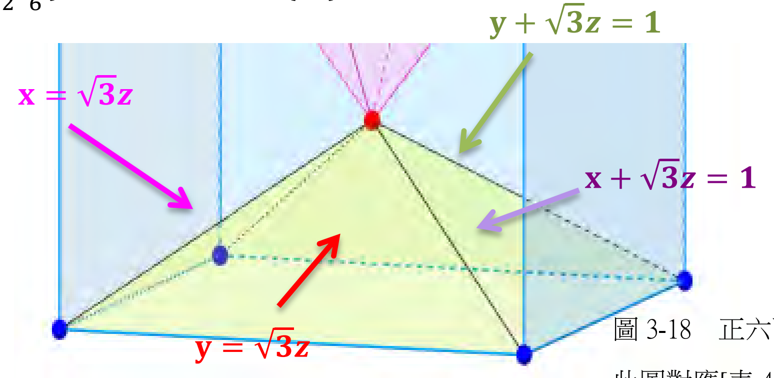


圖 3-18 正六面體放大圖/
此圖對應[表 4-10]之方程式

2.面與頂點原則

根據[發現六]，只要M_n^3(原多面體)存在，則必有「**原多邊形面數=M_n^3(原多面體)頂點數**」的關係。利用面與面之間的相對位置，可大致勾勒出M_n^3(原多面體)的骨架。

假如該多面體每個面皆符合[發現七]，更可用「對偶多面體」判斷。所形成的必為原多面體的對偶多面體的相似多面體。如正多面體的對應關係就是經典的例子。

且因對偶多面體恰有「若且唯若」的關係，可用來解釋先前找到的互相對應關係。

3.判斷步驟

透過以上兩大原則，我們討論出三道步驟來判斷M_n^3(原多面體)的結果。

步驟一、利用已知的結論：(正多面體、直角錐、直角柱…等)

步驟二、利用原則一：交點存在原則

步驟三、利用原則二：面與頂點原則

判斷步驟流程圖，如[圖 3-19]：

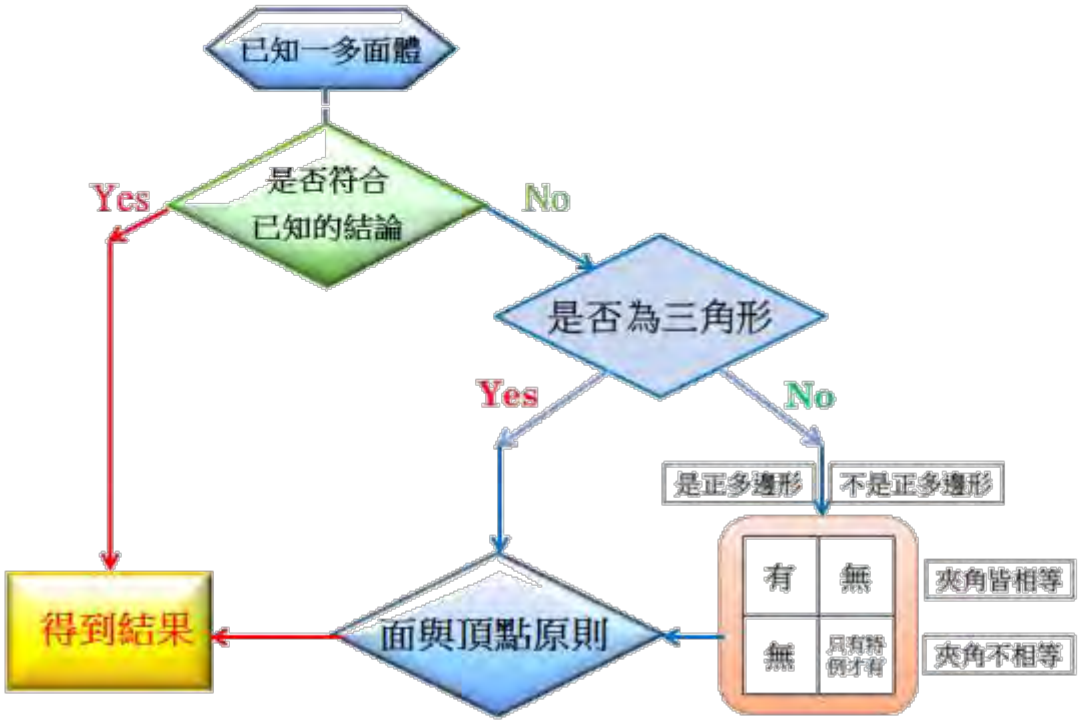


圖 3-19　立體圖形判斷通則

伍、結論

一、三角形的 n 等分角莫利作圖，當 n>3 時，正三角形經莫利作圖後，還是正三角形，而等腰三角形則會是等腰三角形，可是不規則三角形經莫利作圖後，卻是不規則三角形。可見「莫利圖形為正三角形」在多等分角情況不成立。

二、有很多四邊形有互相對應的「對偶性質」，例如「長方形⇔菱形」等等。

三、原多邊形的對稱軸必為莫利圖形的對稱軸，若且唯若。

四、M_n(正 N 邊形) →正 N 邊形，具有「自我相似」的性質。

五、M_n(對稱 N 邊形)→對稱 N 邊形，但和正 N 邊形不同的是：莫利圖形和原多邊形不相似。

六、平面圖形的規律：原多邊形邊數=其莫利圖形頂點數。

七、三角形可用「線性變換」討論其圖形關係。邊數為四以上的多邊形則不存在線性變換，只能由配對交點的公式計算。

八、已求出配對交點的公式：令 C 為點 A、B 的配對交點，$\overrightarrow{AB}$與 x 軸的夾角為 θ，a=$\overline{AB}$，則

$$\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dfrac{a\times tan\frac{\beta}{n}}{tan\frac{\alpha}{n}+tan\frac{\beta}{n}} \\ \dfrac{a}{cot\frac{\alpha}{n}+cot\frac{\beta}{n}}\end{bmatrix}$$ 。

九、立體圖形中，多面體的 n 等分莫利圖形有一個重要性質：「原多面體面數=其莫利圖形頂點數」。且和平面一樣的道理，原多面體的對稱面和莫利圖形的對稱面是相同的。

十、已知一面為正多邊形，且與每個相鄰的面的夾角相等，則其相鄰的交點的垂直投影必在此面的中心。

十一、正多面體有三組對偶關係：正四面體⇔正四面體、正六面體⇔正八面體、正十二面體⇔正二十面體。其中，正四面體更兼有自我相似的特性。結論：莫利圖形是原多面體的對偶多面體之相似多面體，且已求出與原多面體的體積比公式，得知體積比只與等分數 n 有關。

十二、正角錐的結果：M_3^3(正 N 角錐) → 正 N 角錐，雖都是正N角錐，卻不是相似形。

十三、正N角柱 n 等分角莫利圖形在$\frac{柱高}{底面邊長}=\cot\frac{90°}{n}\times\tan\frac{180°\times(N-2)}{Nn}$時有交點並為雙N稜錐。

十四、多面體的多等分與 3 等分結果，圖形種類相同，但大小、長度等性質不同。

十五、如要判斷所形成的多面體的種類與性質，有兩大原則：交點存在原則及面與頂點原則。

十六、判斷所形成的多面體有三道步驟：

(一)根據已知結果，如正多面體、錐體等

(二)交點存在原則：判斷交點存在與否

(三) 面與頂點原則：原多面體面數=其莫利圖形頂點數，並判斷交點間的關係。

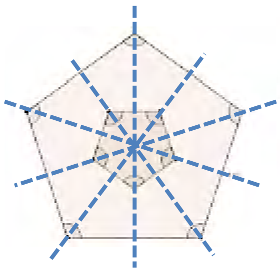
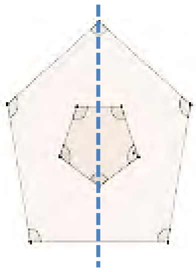
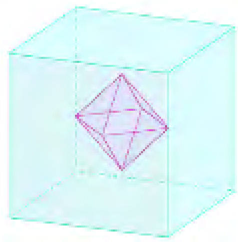
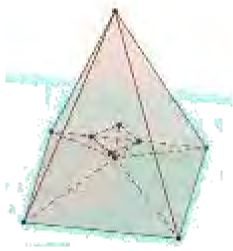
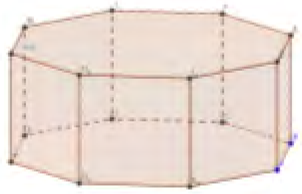
十七、平面和立體圖形可以找到下列三種特殊性質：「對稱性」、「自我相似」與「對偶性」。

陸、討論與應用

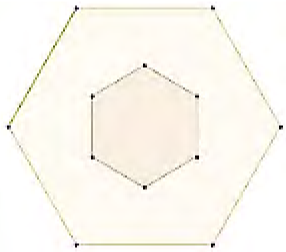
一、平面與立體的共通點

平面與立體都可找到三種性質：「對稱性」、「自我相似性」、「對偶性」。

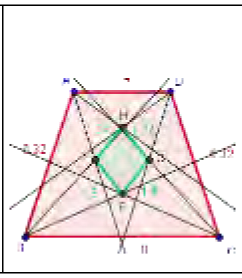
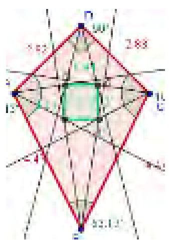
（一）「對稱性」：有對稱性質的圖形。例如：平面的正多邊形、對稱多邊形與立體的正多面體、正角錐與正角柱。

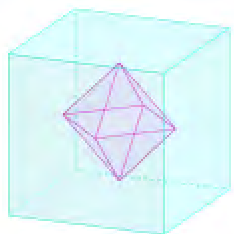
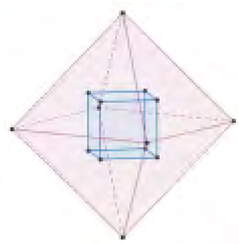






（二）「自我相似性」：原多邊形或原多面體與其莫利圖形為相似形（體）。例如：平面的正多邊形與立體的正四面體。




（三）「對偶性」——平面與立體的結果很多都有互相對應關係。例如平面中的四邊形有四組對偶關係，分別是「正方形⇔正方形」、「平行四邊形⇔平行四邊形」、「長方形⇔菱形」、「等腰梯形⇔箏形」。立體則有三組：「正四面體 ⇔ 正四面體」、「正六面體 ⇔ 正八面體」、「正十二面體⇔ 正二十面體」。以下分別舉「等腰梯形⇔箏形」與「正六面體⇔正八面體」為例。

等腰梯形 ⇔ **箏形**	 

正六面體 ⇔ **正八面體**	 

其中值得注意的是：正多邊形具有很強的「對稱性」與「自我相似性」，正多面體則有很強的「對稱性」與「對偶性」。

（四）幾何和代數結合：

在平面與立體，本研究都採取「幾何性質」與「代數演算」兩個觀點討論。幾何性質可讓人容易掌握圖形，而代數則可解釋這些現象。例如透過「線性變換」來解釋圖形的對應關係就是本研究與其他文獻中不同的新觀點。以及透過交點坐標的運算，更能精確掌握圖形。

（五）相似的性質：

不論平面與立體，只要是經莫利作圖後，此莫利圖形都會有一定的對應關係。於是根據此關係，我們可以找出其變化的規律。各種圖形的邊、面、頂點等都可以由原圖來推測所形成的莫利圖形，有邊數相等、等點數等於面數……等性質。說來真是有趣，平面和立體竟有這麼多相似之處！

二、函數與逆定理

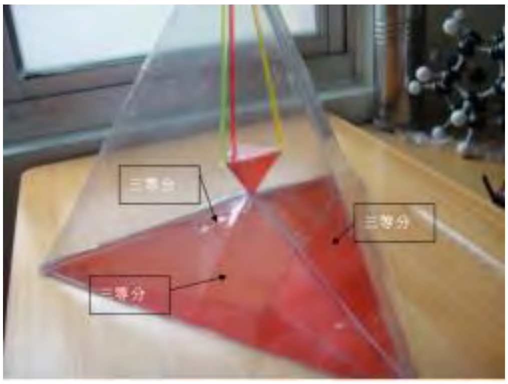
由於討論出了以上的對應關係，本研究希望能討論出其逆定理，也就是由莫利圖形回推至原圖，找出其唯一性。我們預計未來往此方向發展。本研究認為，立體圖形也有函數變換關係，因此在平面的函數之後，也會朝立體的函數邁進。

三、實體模型製作

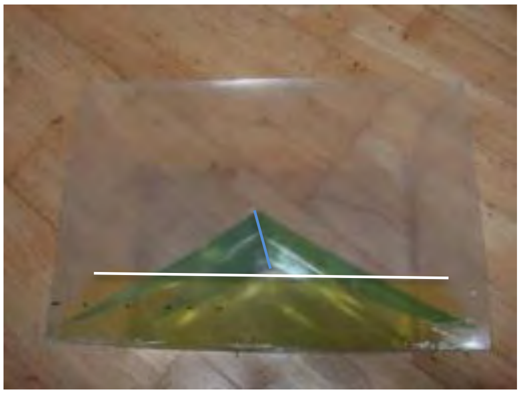
本研究為了將立體圖形方面所發現的現象表示得更加容易理解，而做了立體模型。使大家可以對我們的研究有更清楚的認識，也瞭解我們的研究到底出現了什麼結果。

在製作模型時，使用了：塑膠板(0.4mm)、螢光材質塑膠棒、保麗龍膠、和透明膠帶。

模型中彩色的部分代表了三等分面與其內部所形成的圖形，而支架則代表了等分面的交線，數條塑膠棒的交線的交點即是我們所求的頂點



紅色的面為正四面體底面的三等分面，莫利圖形正四面體會倒立在正中間，裡面的六支支架為雙面交線，分別與不同頂點相連，一面對應一點。



長方體的模型/可見兩交線錯開，內部將不會形成交點，也代表不會形成莫利圖形。

柒、參考文獻

一、線性代數。Steven J. Leon 著。2010。臺北市：台灣培生。。

二、幾何明珠。黃家禮著。2000。臺北市：九章出版社 。

三、立體幾何 34 講。覃士代著。1999。新竹市：凡異。

四、對稱。段學復著。2003。香港：智能教育。

五、First Morley Triangle。WolframMathWorld。2013 年 3 月 10 日取自：
http://mathworld.wolfram.com/FirstMorleyTriangle.html

六、對偶多面體。維基百科。2012 年 7 月 27 日取自：
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%8D%E5%81%B6%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94

【評語】030412

莫利定理之相關研究不少，本文推廣至正多面體 n 等分角經莫利作圖後之圖形變化的探討，藉助電腦作圖觀察出許多有趣的結果，簡報時佐以模型說明，效果不錯，亦可看出作者的認真與用心。