中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030411

數字圓舞曲

學校名稱：新北市私立裕德國民(中)小學

作者：	指導老師：
國一 林子欽	陳明仁 林忠正

關鍵詞：間隔排法、數字差、同餘

數字圓舞曲

摘要

探討 m 對男女舞者分別穿著 m 種不同顏色的衣服，圍成內、外兩圈跳舞。每當他們跳完一小節後，只有內圈的舞者會以順時針方向移動一個位置來交換舞伴，如果女生排在內圈(如圖 1)，那麼外圈的男生該怎麼排，才能使得排定跳舞位置及交換 d 次舞伴後，恰巧都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服。

我們以間隔排法探討 3 對、4 對、5 對、……、12 對男女舞者跳舞時，交換舞伴的情形。最後歸納得到：

(一)若(m ,n)=1，則可以排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置。

(二)若(m ,n)=1 且(m ,n-1)=d，則在排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，恰好都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服。(註：n 為間隔數)

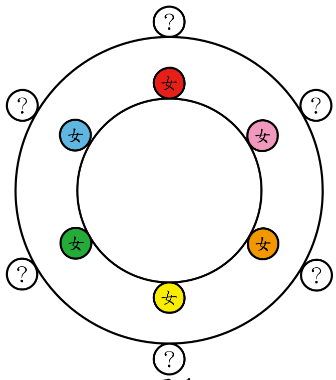


圖1

壹、研究動機：

去年參加國展時，利用間隔排法找出排定跳舞位置及交換舞伴後都只有 1 對男女舞者穿著同顏色衣服的條件是(m ,n)=1 且(m ,n-1)=1，今年再接再厲，延伸探討排定跳舞位置及交換舞伴後，恰好都有 2 對、3 對、……、d 對男女舞者穿著同顏色衣服的條件是什麼？

貳、研究目的：

一、利用間隔排法排出跳舞位置，分析 m 對男女舞者在排定跳舞位置及交換舞伴後，都有 d 對男女舞者穿著同顏色衣服的條件是什麼？

二、證明(m ,n)=1，可以排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置。

三、證明(m ,n)=1 且(m ,n-1)=1 時，在排定跳舞位置及每交換 1 次舞伴後，都只有 1 對男女舞者穿著同顏色的衣服。

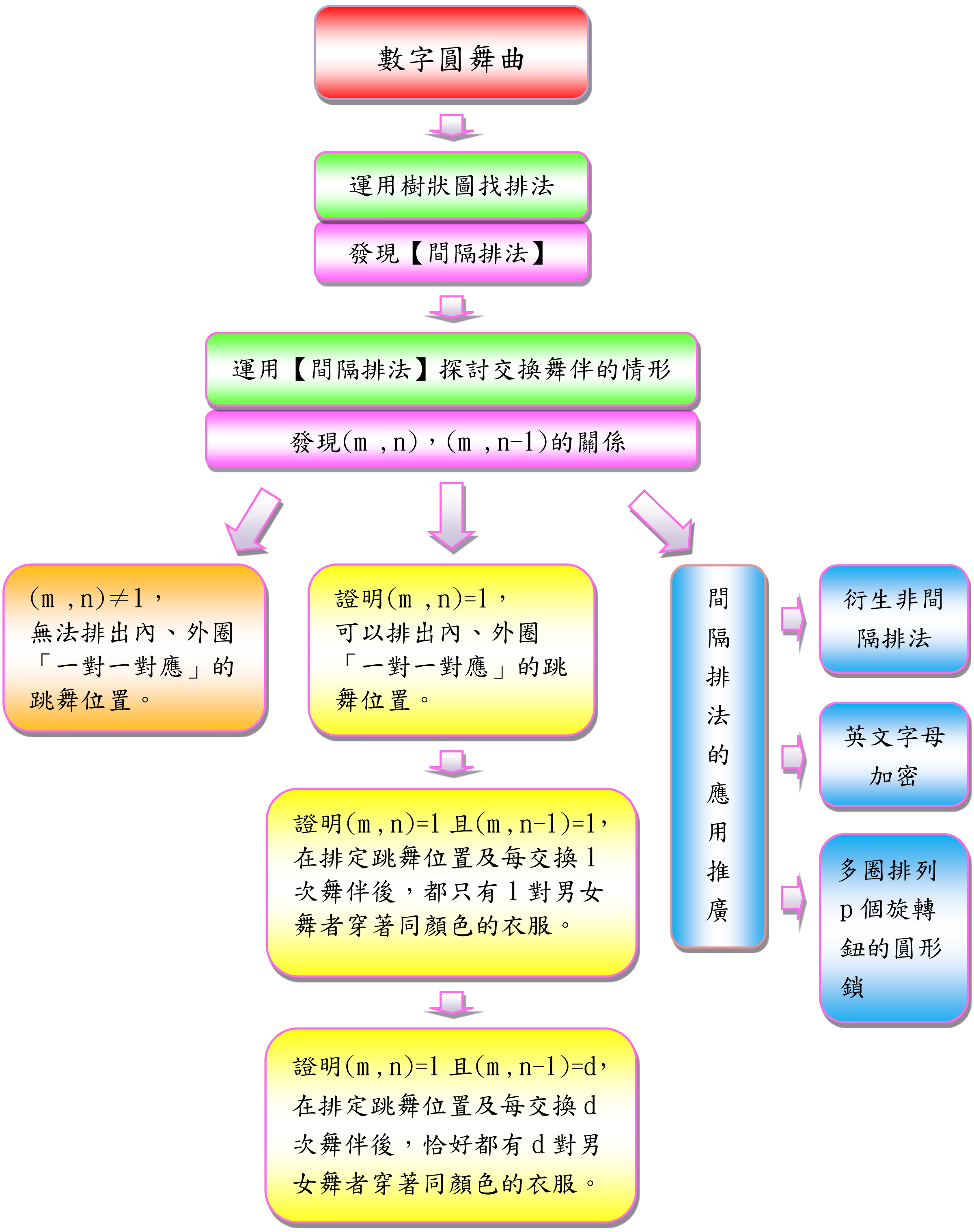
四、證明(m ,n)=1 且(m ,n-1)=d 時，在排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，恰好都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服。

五、探討間隔排法的應用—衍生非間隔排法、英文字母加密、多圈排列。

參、研究設備及器材：紙、筆、電腦、簡易跳舞模型

肆、研究過程：

一、研究架構


數字圓舞曲
運用樹狀圖找排法
發現【間隔排法】
運用【間隔排法】探討交換舞伴的情形
發現(m，n)，(m，n-1)的關係
(m，n)≠1，無法排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置。
證明(m，n)=1，可以排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置。
證明(m，n)=1 且(m，n-1)=1，在排定跳舞位置及每交換 1 次舞伴後，都只有 1 對男女舞者穿著同顏色的衣服。
證明(m，n)=1 且(m，n-1)=d，在排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，恰好都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服。
間隔排法的應用推廣
衍生非間隔排法
英文字母加密
多圈排列 p 個旋轉鈕的圓形鎖

二、定義：

(一)為了方便說明及避免過多的顏色名稱，我們就用數字 1、2、3、……、m 分別標記這 m 種顏色(如圖 1-1)，此外內圈為女生排列的位置，以紅色圓圈表示，且依序由 1 到 m 排成一圈，而外圈男生排列的位置，以藍色圓圈表示。

(二)符號

1.m：跳舞的對數，本研究中 m 要大於等於 3。

2.n：間隔數，是指外圈要排定位置的第 i 個人與前一個已排定位置的第(i-1)個人，兩者之間的間隔數量，如圖 1-1 中外圈的 1 和 2、2 和 3、3 和 4，其間隔數都是 2，本研究中 n 為 2 到 m-1。

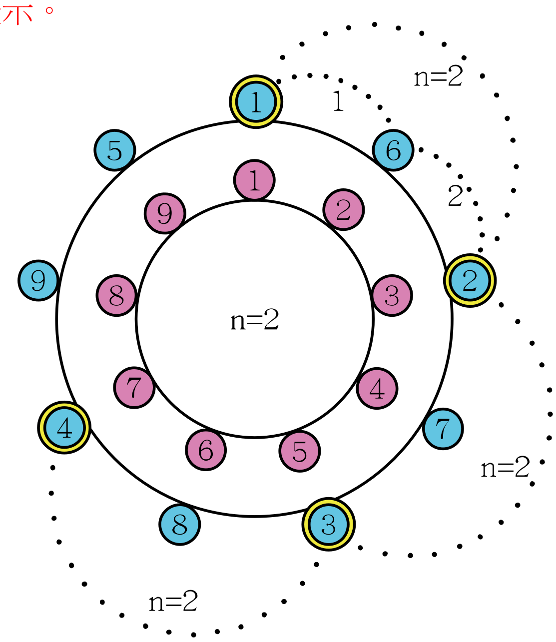


圖1-1：紅色圓圈代表女生
藍色圓圈代表男生

(三)名詞解釋

1.數字差：內圈數字 a，依順時針方向到等同外圈數字 a 的位置的間隔數，此間隔數稱為數字差，如圖 1-2 中數字 4 的數字差為 1，數字 5 的數字差為 3。

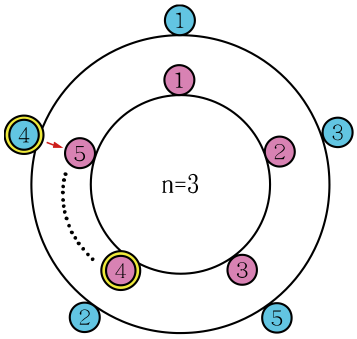


圖1-2

【說明】：(1)表一是圖 1-2 中，內、外圈數字的對應情形和數字差。

表一(m=5、n=3)

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	4	2	5	3
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	2	4	1	3

(2)當 a 的數字差為 k 時，表示**內、外**圈的 a 會在第 k 次交換舞伴後相遇，例如 5 的數字差為 3，表示內、外圈的 5 會在第 3 次交換舞伴後相遇，而數字差為 0 的數，表示排定跳舞位置時即相遇。

2.間隔排法：排外圈的跳舞位置是按照固定的間隔數去排下一個數字，這樣的排法將它稱為間隔排法。例如外圈的 2 排在 1 加上一個間隔數 n 的位置上，外圈的 3 排在 1 加上二個間隔數 n 的位置上，以此類推，第 3 頁的圖 1-1 和圖 1-2 的排法皆為間隔排法。

3.d 對同數衣:是指「在排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，都有 d 對男女舞者穿著相同的號碼衣」，亦即在排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服。

(四)排列跳舞位置的過程：舉 5 男 5 女以間隔排法說明(m=5，n=3)。

1.先排內圈女生跳舞位置，方式為依順時針方向，從數字 1、數字 2、……由小到大依序排列，如圖 1-3。

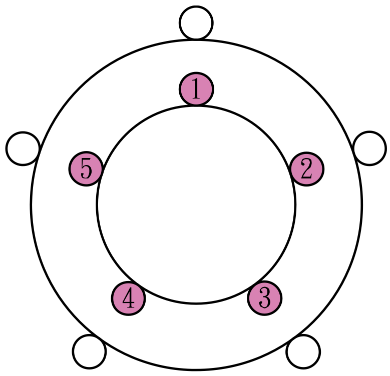


圖1-3

2.再排外圈男生跳舞位置，方式為按間隔數依序排列，本研究中都先排定數字 1，且與內圈的 1 構成 1 對，接著按間隔數 n 依序排列數字 2、3、4、5，如圖 1-4，這時間隔數 n=3。

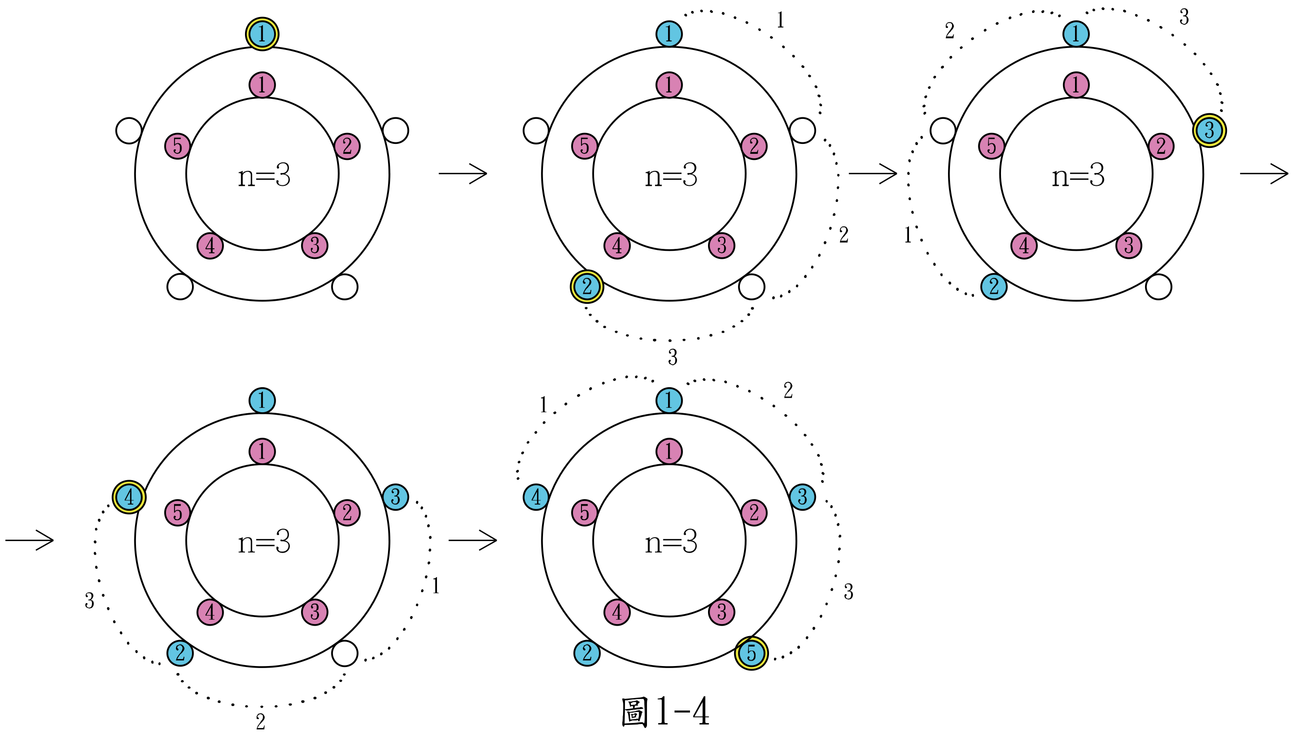


圖1-4

三、運用樹狀圖找出外圈舞者的跳舞位置

內圈舞者的跳舞位置，是依順時針方向，從數字 1、數字 2、……由小到大依序排列，而外圈舞者的跳舞位置，本研究都先排定數字 1，且與內圈的 1 構成 1 對，接著其他外圈舞者的跳舞位置，運用樹狀圖找出。

(一)3 對舞者(m=3)的樹狀圖：

- (1→1，0)
  - (2→2，0)...✕（註2）
  - (2→3，1)
    - (3→2，2) ⟶
    - (3→3，0)...✕（註3）

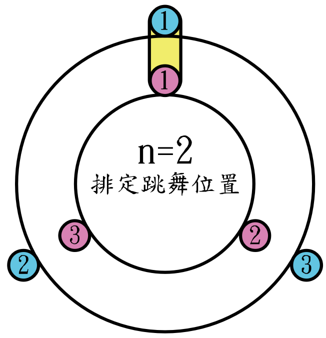


圖2-1

註 1：(a→b，c)：a 表示外圈數字，b 表示和 a 相對應的內圈數字，c 表示內、外圈的 a 的距離(數字差)。

註 2：數字 1 的數字差是 0，所以數字 2 的數字差不能再為 0。

註 3：(1)與內圈數字 3 相對應的外圈位置已排數字 2，所以不能再排數字 3。

(2)數字 1 的數字差是 0，所以數字 3 的數字差不能再為 0。

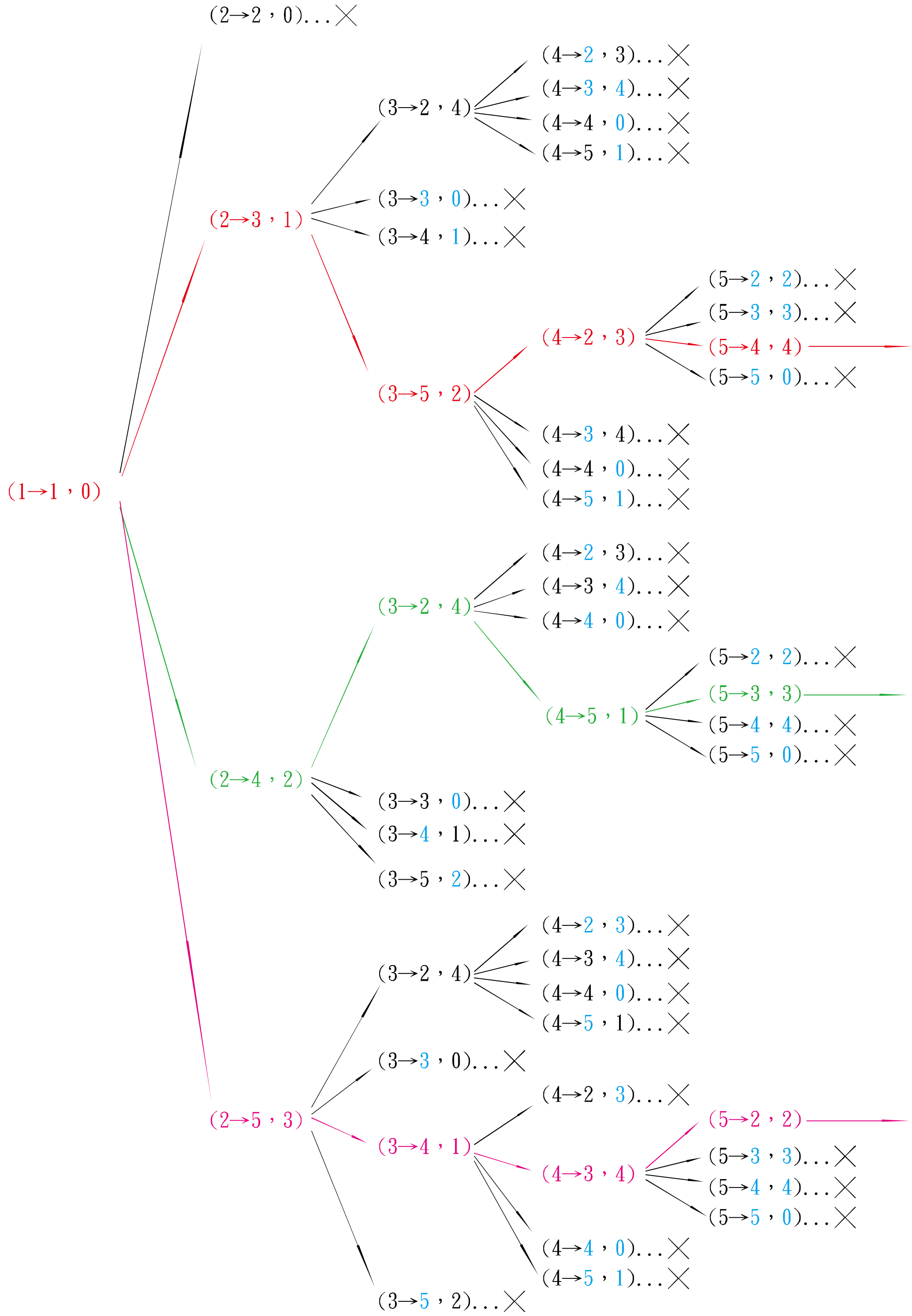
【結果】：3 對舞者，找到一種排法，將它畫成跳舞位置，如圖 2-1。

(二)4 對舞者(m=4)的樹狀圖：

- (1→1，0)
  - (2→2，0)...✕
  - (2→3，1)
    - (3→2，3)
      - (4→2，2)...✕
      - (4→3，3)...✕
      - (4→4，0)...✕
    - (3→3，0)...✕
    - (3→4，1)...✕
  - (2→4，2)
    - (3→2，3)
      - (4→2，2)...✕
      - (4→3，3)...✕
      - (4→4，0)...✕
    - (3→3，0)...✕
    - (3→4，1)...✕

【結果】：4 對舞者，找不到排法。

(三)5 對舞者(m=5)的樹狀圖：



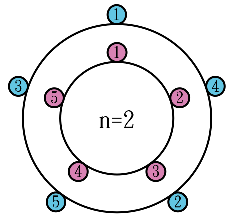


圖 2-2

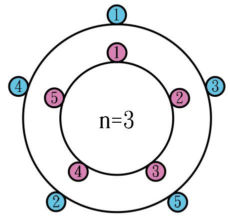


圖 2-3

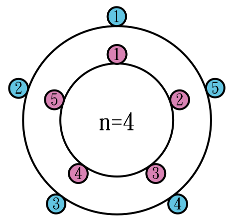


圖 2-4

【結果】：5 對舞者，找到三種排法，將它們畫成跳舞位置，如圖 2-2、圖 2-3、圖 2-4。

(四)6 對和 7 對舞者的樹狀圖詳見筆記。

(五)從樹狀圖中找到的排法畫成跳舞位置，發現外圈的 1 和內圈的 1 對應在一起，外圈的 2 和 1 加上一個間隔數 n 的位置對應在一起，外圈的 3 和 1 加上二個間隔數 n 的位置對應在一起……，以此類推，將這樣有規律的排法稱為【間隔排法】。

(六)隨著 m 值變大，樹狀圖亦趨複雜，所以捨去樹狀圖，改採間隔排法探究。

四、應用間隔排法探討 3 對、4 對、5 對、……、12 對舞者跳舞，(1)交換舞伴的情形，(2)排定跳舞位置時，內、外圈數字的對應情形和數字差。

(一)3 對舞者(m=3)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)交換舞伴的情形，如圖 3-1，其方式為內圈的舞者以順時針方向移動一個位置。

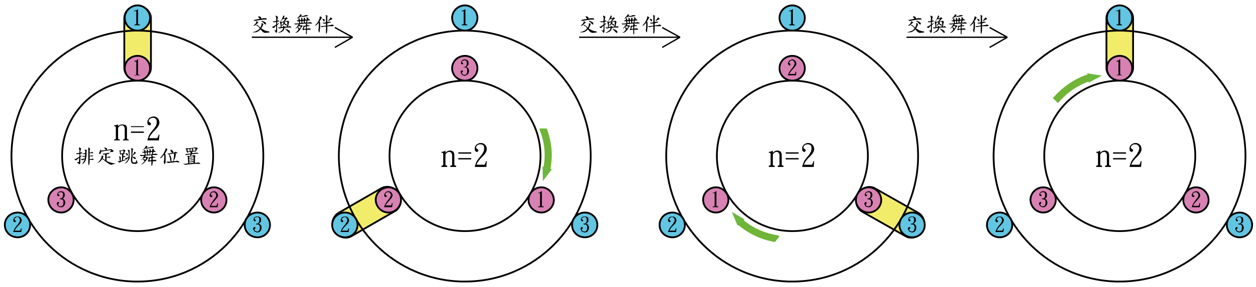


圖3-1：m=3，n=2

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字 (當數字大於 m 時要減去 m)	1	3	2
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	1	2

(3)分析 1：由圖 3-1 知 n=2 有 1 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(3 ,2)=1，(m ,n-1)=(3 ,1)=1。

2.發現一：3 對舞者時，只有間隔數 n=2 一種間隔排法符合條件，可排出 1 對同數衣。

(二)4 對舞者(m=4)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)無法排出跳舞位置，如右圖 4-1。

(2)分析 1：由右圖 4-1 知 n=3 時，和內圈 1、3 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、4 相對應的外圈位置沒人排。

分析 2：(m ,n)=(4 ,2)=2≠1。

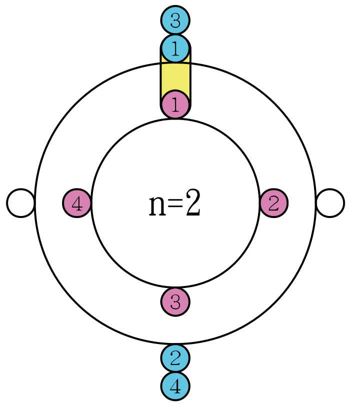


圖4-1：m=4，n=2

2.間隔數 n=3

(1)交換舞伴的情形，如下圖 4-2。

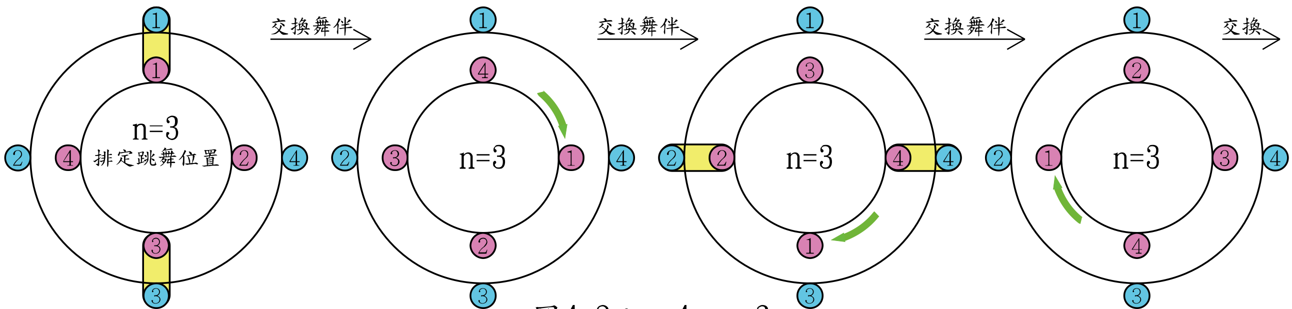


圖4-2：m=4，n=3

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	4	3	2
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	2	0	2

(3)分析 1：由圖 4-2 知 n=3 有 2 對同數衣。
分析 2：(m ,n)=(4 ,3)=1，(m ,n-1)=(4 ,2)=2。

3.發現二：4 對舞者時，只有 n=3 一種間隔排法符合條件，可排出 2 對同數衣。

(三)5 對舞者(m=5)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)交換舞伴的情形，如下圖 5-1。

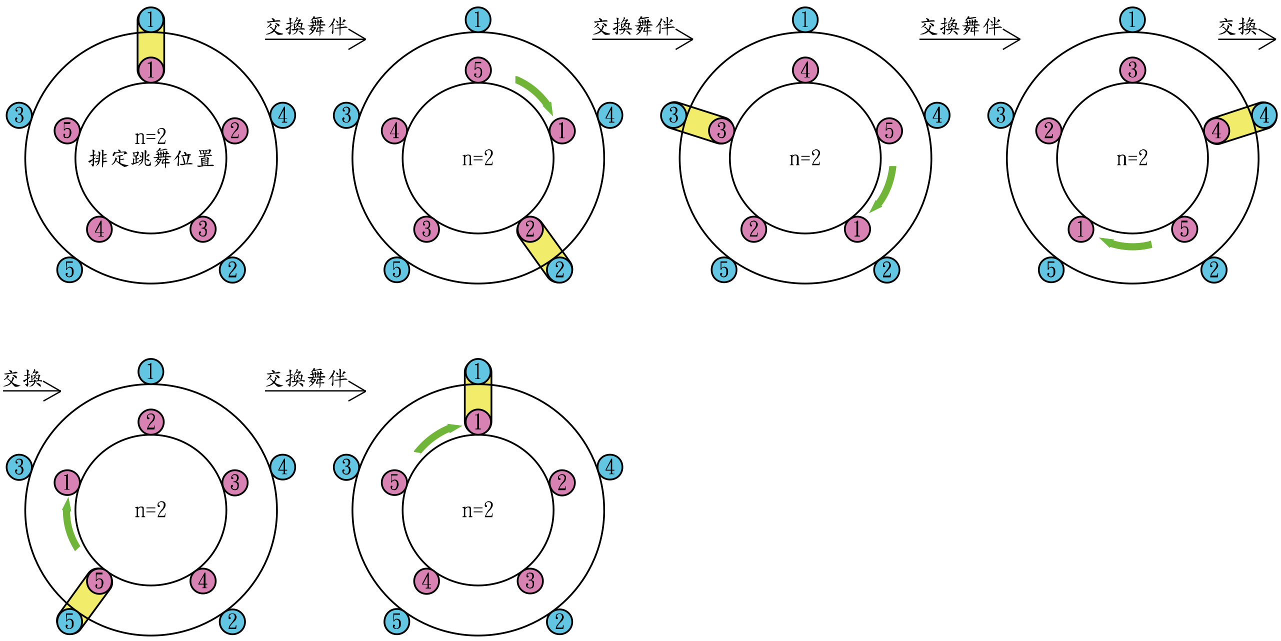


圖5-1：m=5，n=2

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	3	5	2	4
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	1	2	3	4

(3)分析 1：由圖 5-1 知 n=2 有 1 對同數衣。
分析 2：(m ,n)=(5 ,2)=1，(m ,n-1)=(5 ,1)=1。

2.間隔數 n=3

(1)交換舞伴的情形，如下圖 5-2。

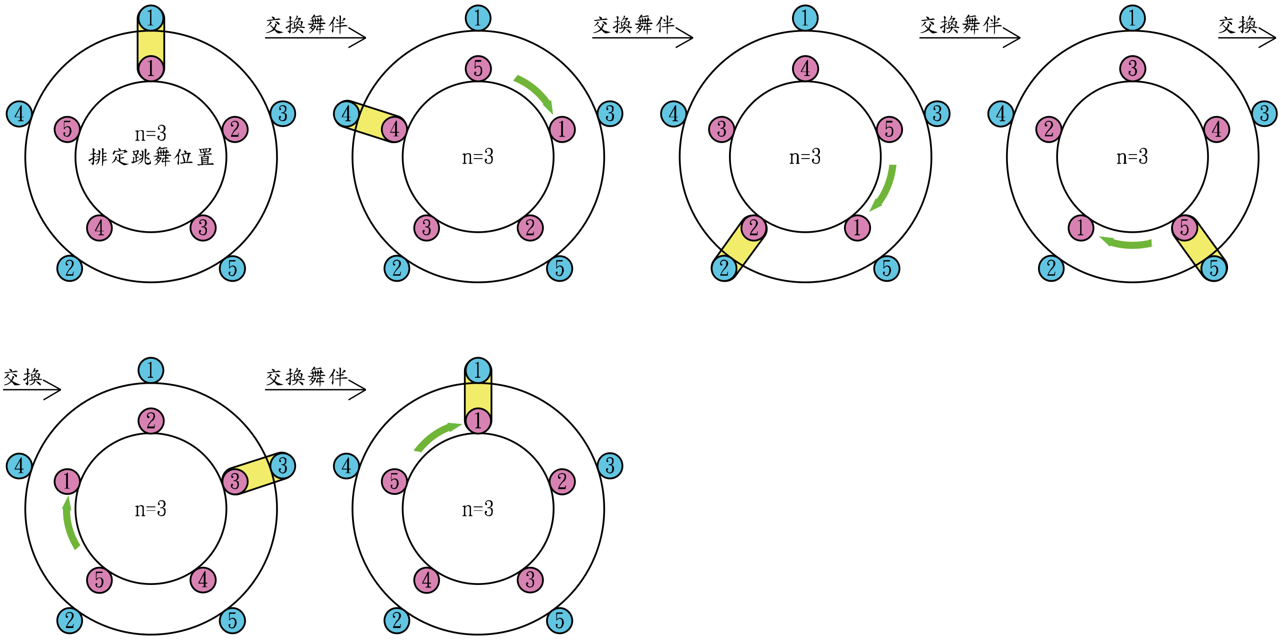


圖5-2：m=5，n=3

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	4	2	5	3
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	2	4	1	3

(3)分析 1：由圖 5-2 知 n=3 有 1 對回數衣。

分析 2：(m ,n)=(5 ,3)=1，(m ,n-1)=(5 ,2)=1。

3.間隔數 n=4

(1)交換舞伴的情形，如下圖 5-3。

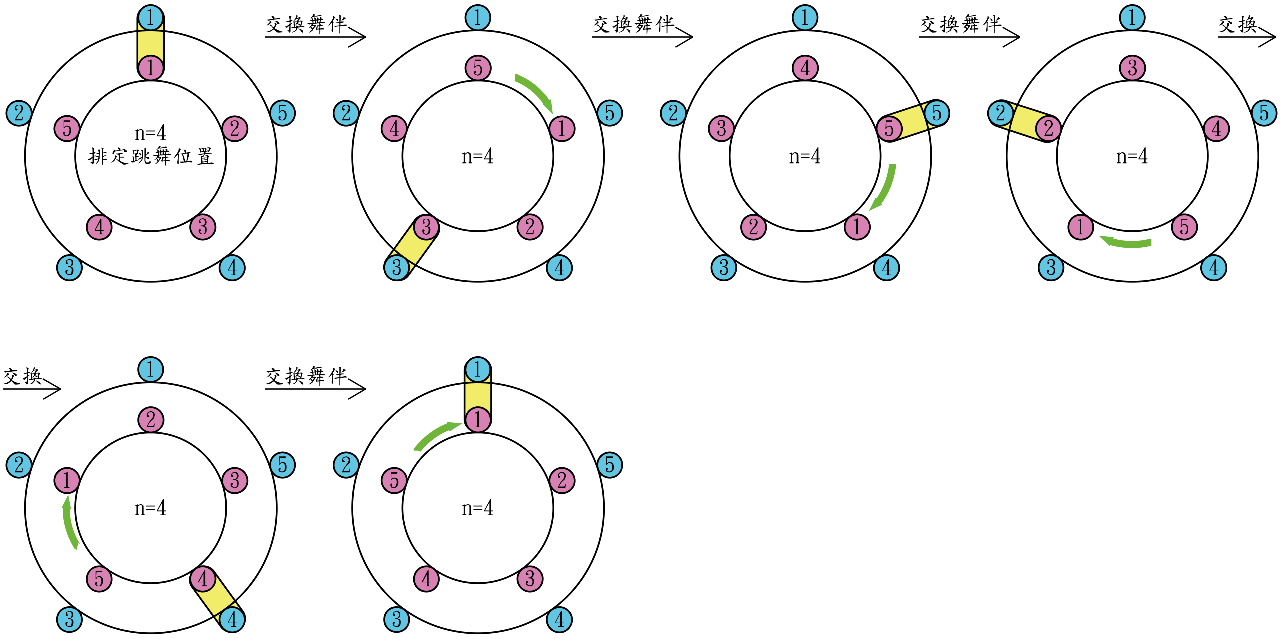


圖5-3：m=5，n=4

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	5	4	3	2
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	3	1	4	2

(3)分析 1：由圖 5-3 知 n=4 有 1 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(5 ,4)=1，(m ,n-1)=(5 ,3)=1。

4.發現三：5 對舞者時，有 n=2、3、4 三種間隔排法符合條件，可排出 1 對同數衣。

(四)6 對舞者(m=6)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)無法排出跳舞位置，如圖 6-1。

(2)分析 1：由圖 6-1 知 n=2 時，和內圈 1、3、5 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、4、6 相對應的外圈位置沒人排。

分析 2：(m ,n)=(6 ,2)=2≠1。

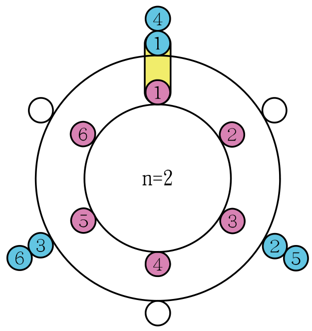


圖 6-1：m=6，n=2

2.間隔數 n=3

(1)無法排出跳舞位置，如圖 6-2。

(2)分析 1：由圖 6-2 知 n=3 時，和內圈 1、4 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、3、5、6 相對應的外圈位置沒人排。

分析 2：(m ,n)=(6 ,3)=3≠1。

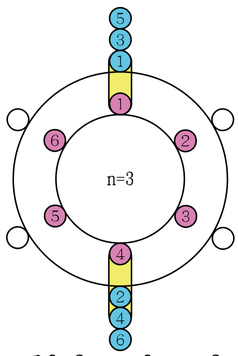


圖 6-2：m=6，n=3

3.間隔數 n=4

(1)無法排出跳舞位置，如圖 6-3。

(2)分析 1：由圖 6-3 知 n=4 時，和內圈 1、3、5 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、4、6 相對應的外圈位置沒人排。

分析 2：(m ,n)=(6 ,4)=2≠1。

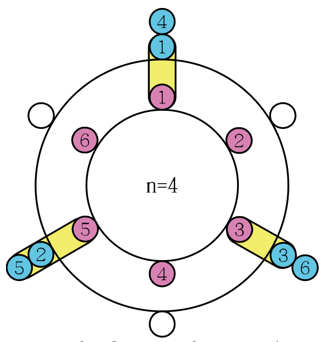


圖 6-3：m=6，n=4

4.間隔數 n=5

(1)交換舞伴的情形，如下圖 6-4。

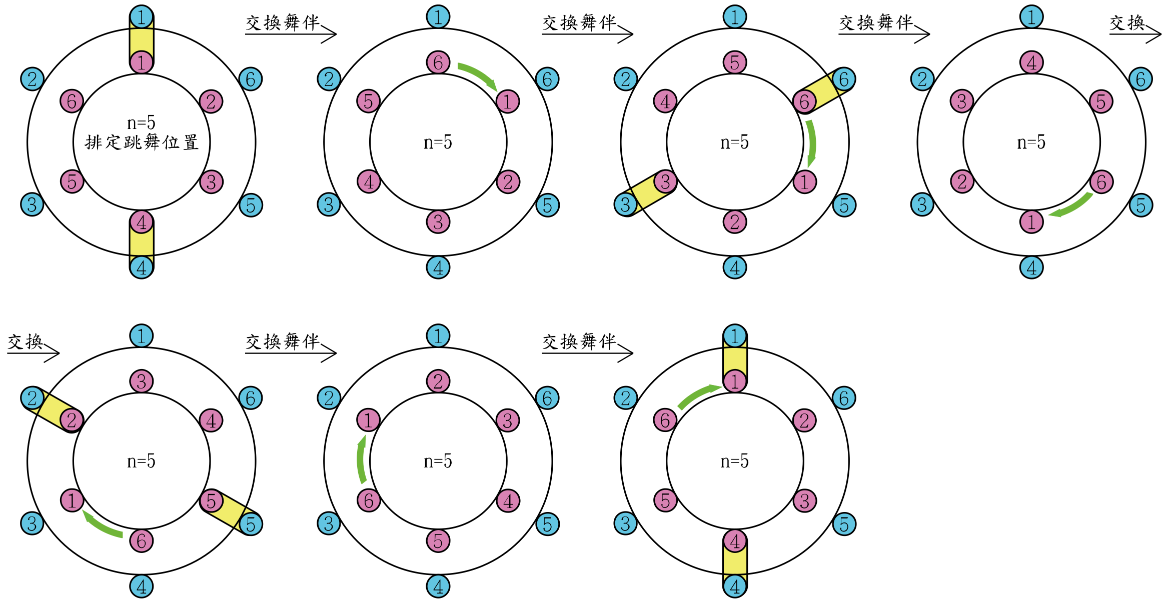


圖6-4：m=6，n=5

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	6	5	4	3	2
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	4	2	0	4	2

(3)分析 1：由圖 6-4 知 n=5 有 2 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(6 ,5)=1，(m ,n-1)=(6 ,4)=2。

5.發現四：6 對舞者時，只有 n=5 一種間隔排法符合條件，可排出 2 對同數衣。

(五)7 對舞者(m=7)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)交換舞伴的情形，如下圖 7-1。

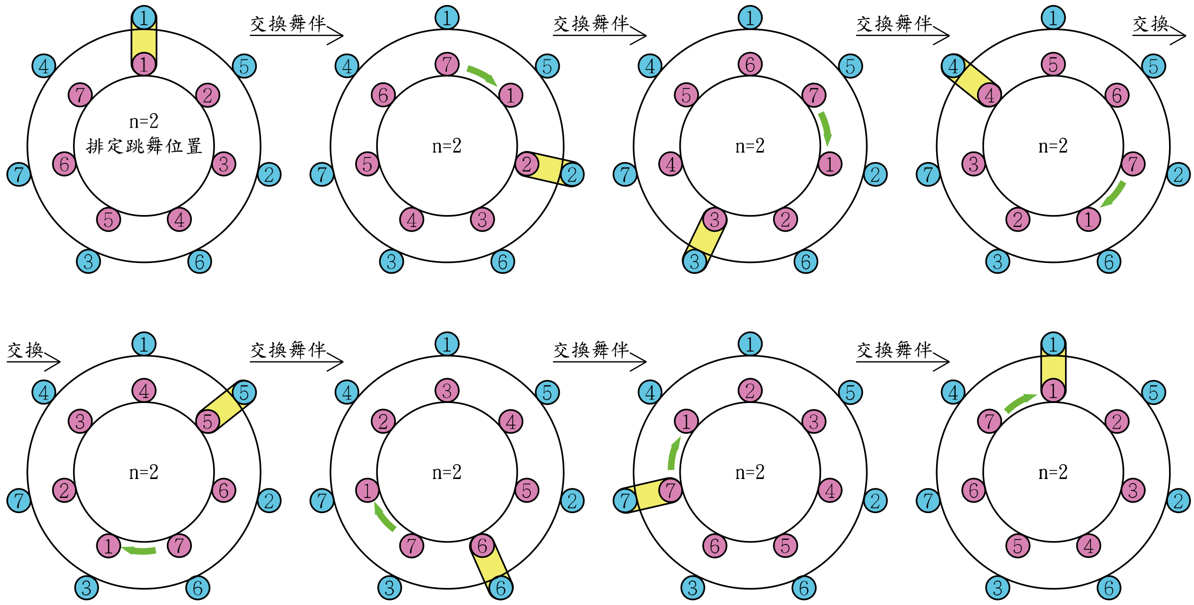


圖7-1：m=7，n=2

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	3	5	7	2	4	6
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	1	2	3	4	5	6

(3)分析 1：由圖 7-1 知 n=2 有 1 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(7 ,2)=1，(m ,n-1)=(7 ,1)=1。

2.間隔數 n=3、4、5、6 的情形同 n=2，以下只列出排定跳舞位置的情形。

(1)排定跳舞位置時的情形。

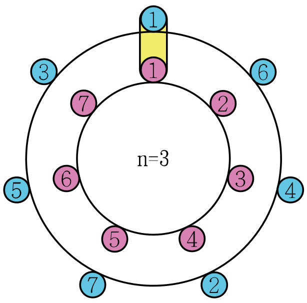


圖7-2：m=7，n=3

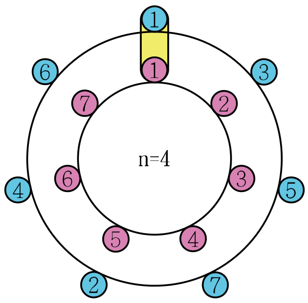


圖7-3：m=7，n=4

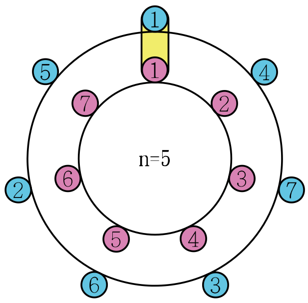


圖7-4：m=7，n=5

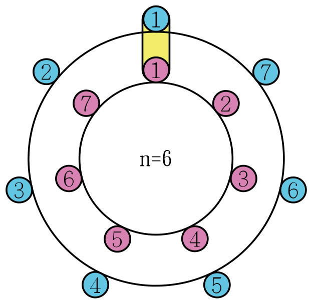


圖7-5：m=7，n=6

(2)分析 1：由(1)的四個圖知 n=3、4、5、6，都有 1 對同數衣。

分析 2：n=3，(m ,n)=(7 ,3)=1，(m ,n-1)=(7 ,2)=1

n=4，(m ,n)=(7 ,4)=1，(m ,n-1)=(7 ,3)=1

n=5，(m ,n)=(7 ,5)=1，(m ,n-1)=(7 ,4)=1

n=6，(m ,n)=(7 ,6)=1，(m ,n-1)=(7 ,5)=1

3.發現五：7 對舞者時，有 n=2、3、4、5、6 五種間隔排法符合條件，可排出 1 對同數衣。

(六)8 對舞者(m=8)的間隔排法：

1.間隔數 n=2、4、6

(1)無法排出跳舞位置，如右圖 8-1、圖 8-2、圖 8-3。

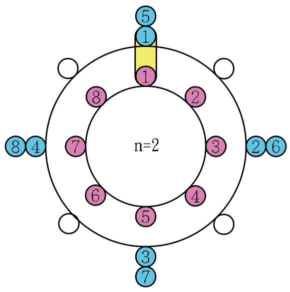


圖8-1：m=8，n=2

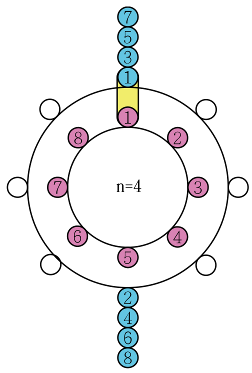


圖8-2：m=8，n=4

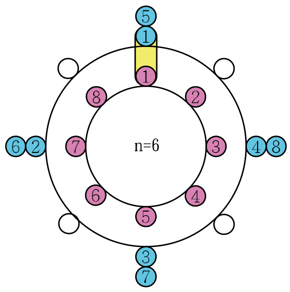


圖8-3：m=8，n=6

(2)分析 1：①由圖 8-1 和圖 8-3 知 n=2、6 時，和內圈 1、3、5、7 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、4、6、8 相對應的外圈位置沒人排。

②由圖 8-2 知 n=4 時，和內圈 1、5 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、3、4、6、7、8 相對應的外圈位置沒人排。

分析 2：n=2，(m ,n)=(8 ,2)=2≠1。

n=4，(m ,n)=(8 ,4)=4≠1。

n=6，(m ,n)=(8 ,6)=2≠1。

2.間隔數 n=3

(1)交換舞伴的情形，如下圖 8-4。

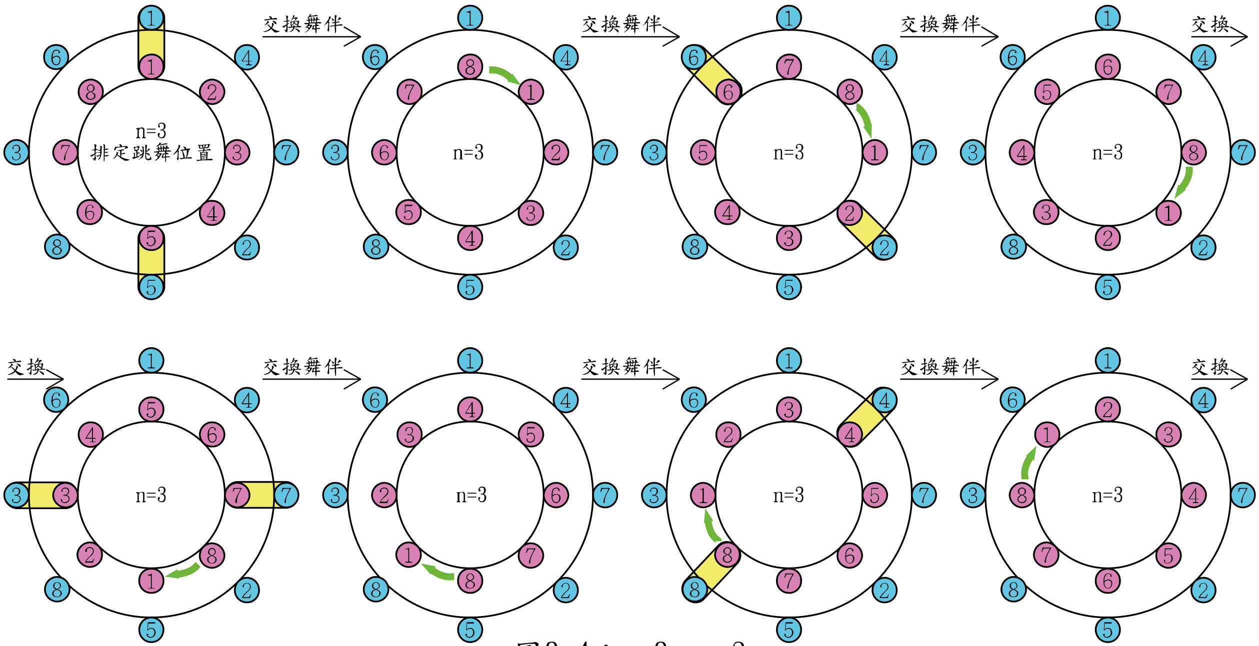


圖8-4：m=8，n=3

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	4	7	2	5	8	3	6
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	2	4	6	0	2	4	6

(3)分析 1：由圖 8-4 知 n=3 有 2 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(8 ,3)=1，(m ,n-1)=(8 ,2)=2

3.間隔數 n=5

(1)交換舞伴的情形，如下圖 8-5。

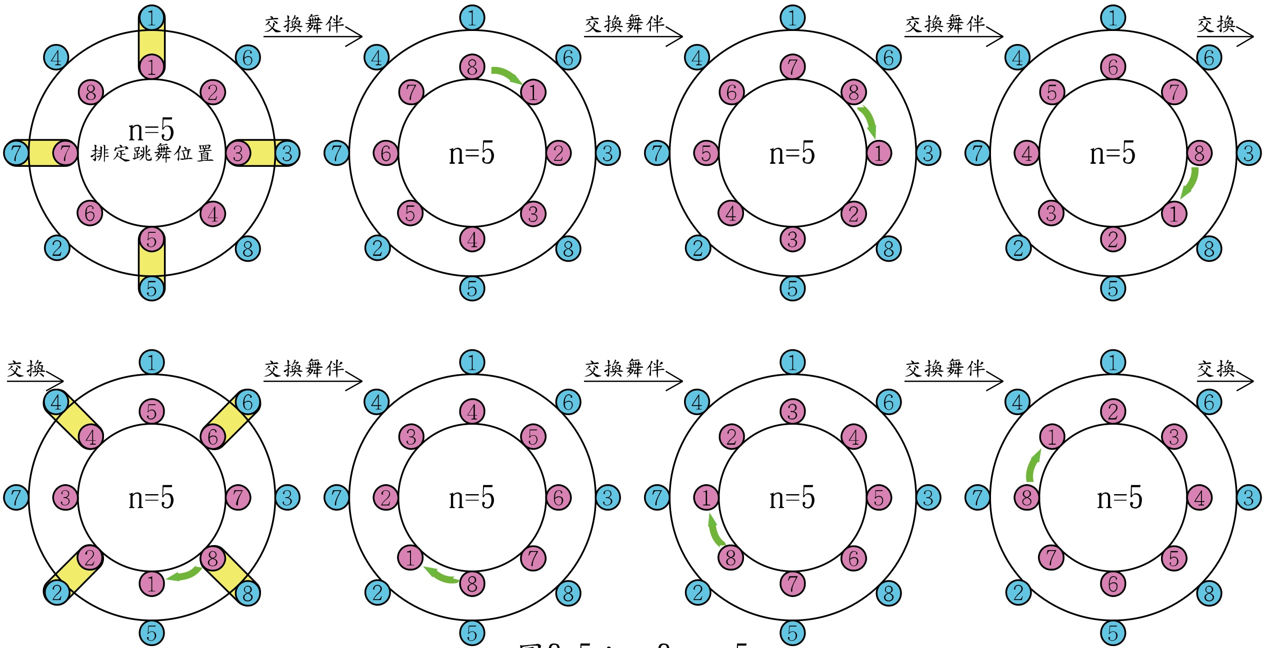


圖8-5：m=8，n=5

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	6	3	8	5	2	7	4
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	4	0	4	0	4	0	4

(3)分析 1：由圖 8-5 知 n=5 有 4 對回數衣。

分析 2：(m ,n)=(8 ,5)=1，(m ,n-1)=(8 ,4)=4

4.間隔數 n=7

(1)交換舞伴的情形，如下圖 8-6。

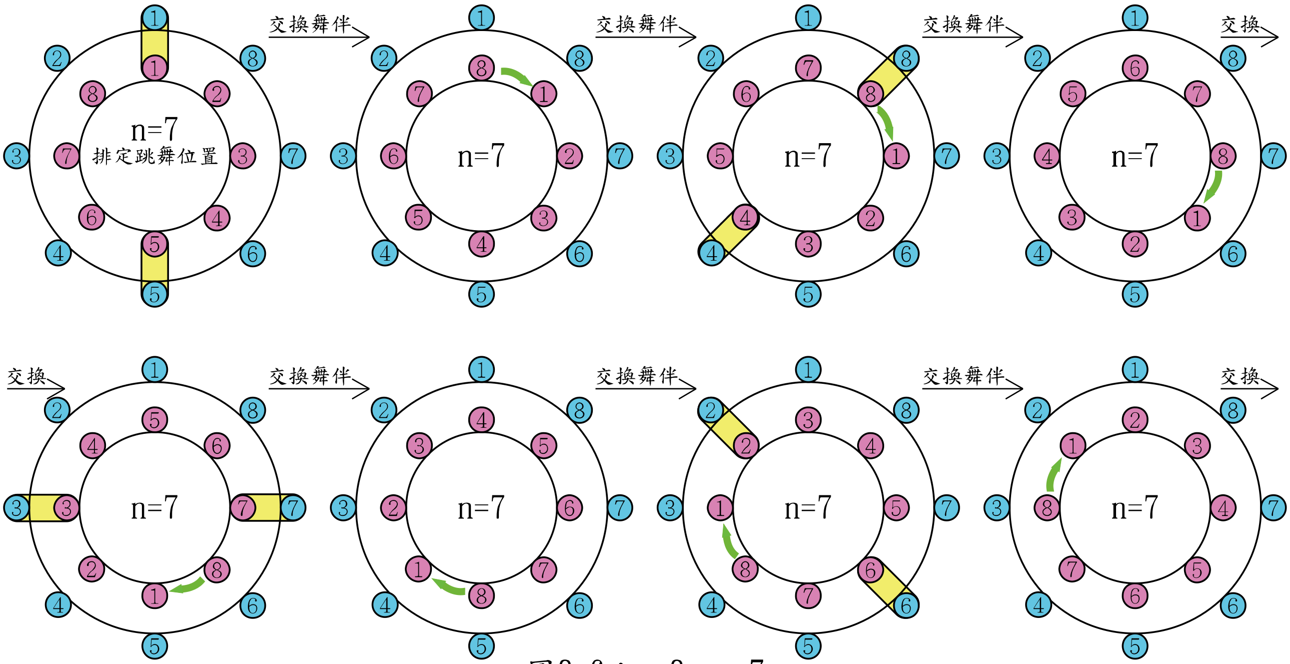


圖8-6：m=8，n=7

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	8	7	6	5	4	3	2
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	6	4	2	0	6	4	2

(3)分析 1：由圖 8-6 知 n=7 有 2 對回數衣。

分析 2：(m ,n)=(8 ,7)=1，(m ,n-1)=(8 ,6)=2

5.發現六：8 對舞者時，有 n=3、5、7 三種間隔排法符合條件，當 n=3、7 可排出 2 對回數衣，當 n=5 可排出 4 對回數衣。

(七)9 對舞者(m=9)的間隔排法：

1.間隔數 n=2

(1)交換舞伴的情形，如圖 9-1。

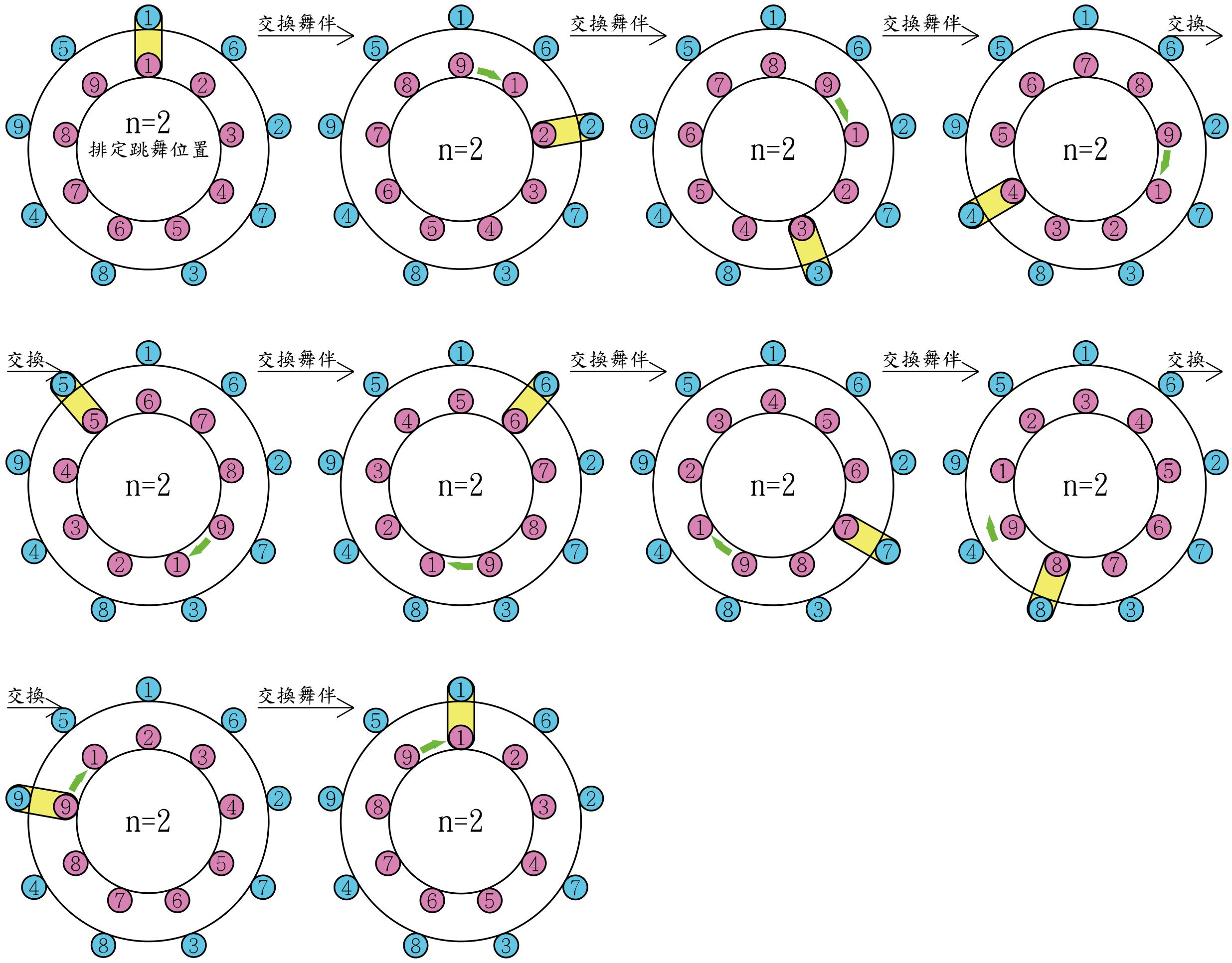


圖9-1：m=9，n=2

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n	1+8n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	3	5	7	9	2	4	6	8
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7	8n-8
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

(3)分析 1：由圖 9-1 知 n=2 有 1 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(9 ,2)=1，(m ,n-1)=(9 ,1)=1

2.間隔數 n=5、8 的情形同 n=2，以下只列出排定跳舞位置的情形。

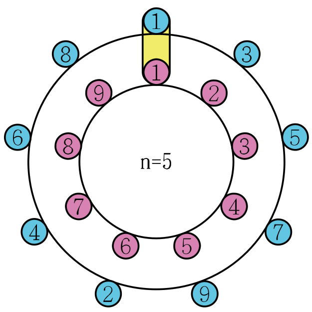


圖9-2：m=9，n=5

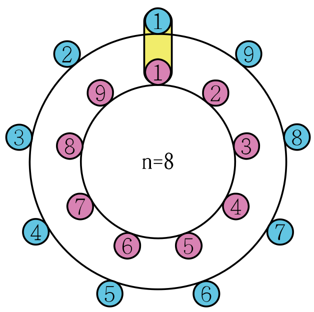


圖9-3：m=9，n=8

(1)分析 1:由圖 9-2 和圖 9-3 知 $n=5$、8 有 1 對同數衣。

　分析 2：$n=5$，$(m,n)=(9,5)=1$，$(m,n-1)=(9,4)=1$

　　　　$n=8$，$(m,n)=(9,8)=1$，$(m,n-1)=(9,7)=1$

3.間隔數 $n=3$、6

(1)無法排出跳舞位置，如下圖 9-4 和圖 9-5。

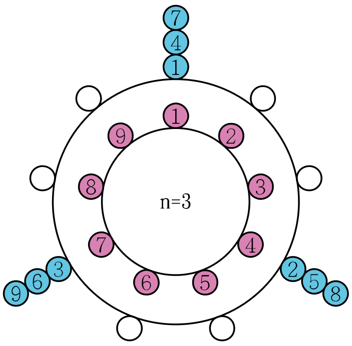


圖9-4：m=9，n=3

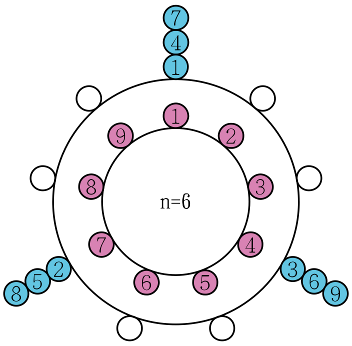


圖9-5：m=9，n=6

(2)分析 1：由圖 9-4 和圖 9-5 知 $n=3$、6 時，和內圈 1、4、7 相對應的外圈位置重覆排，而和內圈 2、3、5、6、8、9 相對應的外圈位置沒人排。

　分析 2：$n=3$，$(m,n)=(9,3)=3\neq 1$。

　　　　$n=6$，$(m,n)=(9,6)=3\neq 1$。

4.間隔數 $n=4$

(1)交換舞伴的情形如下圖 9-6。

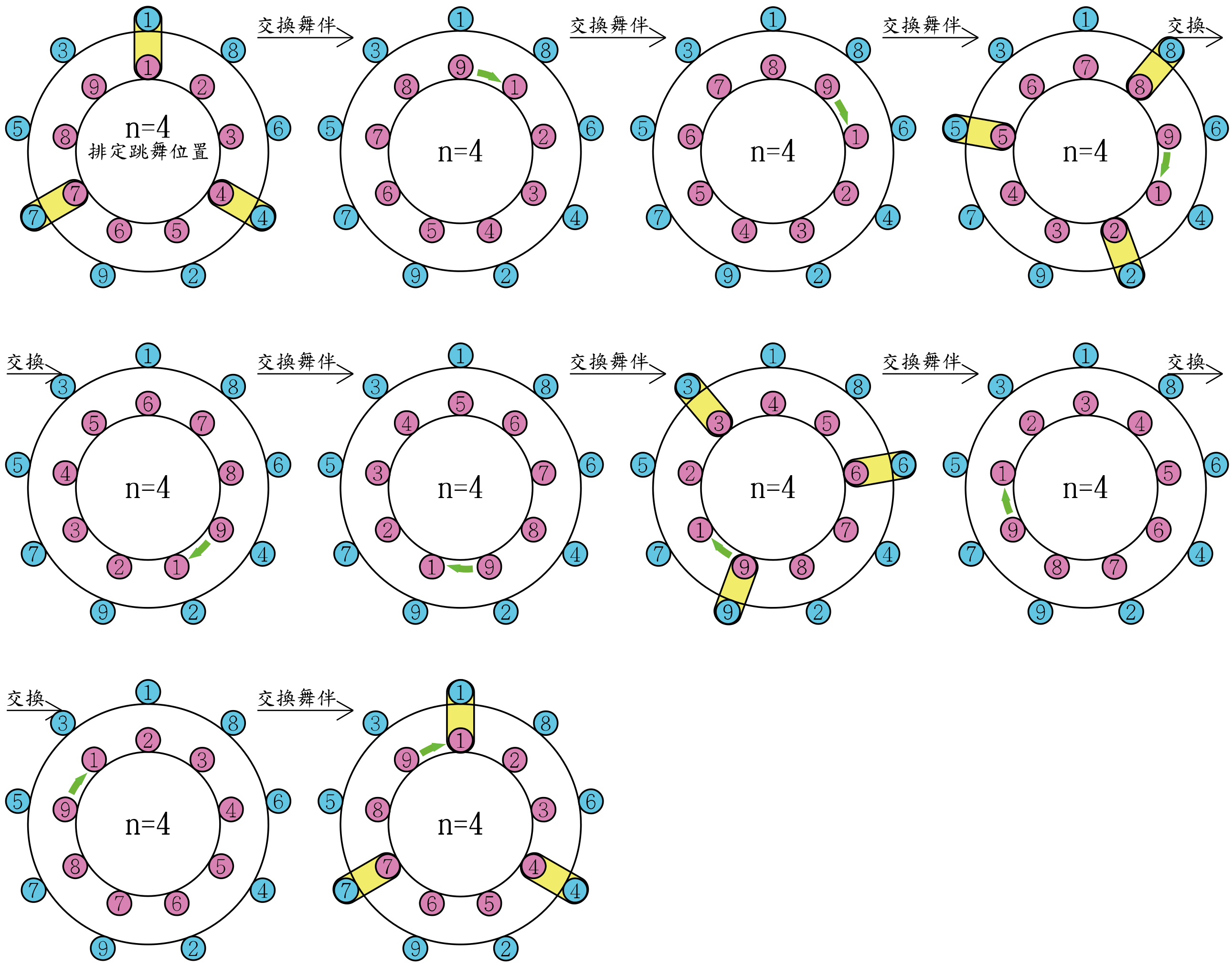


圖9-6：m=9，n=4

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n	1+8n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	5	9	4	8	3	7	2	6
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7	8n-8
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	3	6	0	3	6	0	3	6

(3)分析 1：由圖 9-6 知 n=4 有 3 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(9 ,4)=1，(m ,n-1)=(9 ,3)=3

5.間隔數 n=7 的情形同 n=4，以下只列出排定跳舞位置的情形，如下圖 9-7。

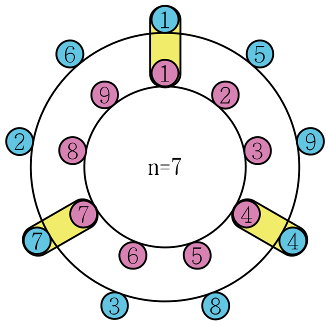


圖 9-7：m=9，n=7

(1)分析 1：由圖 9-7 知 n=7 有 3 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(9 ,7)=1，(m ,n-1)=(9 ,6)=3

6.發現七：9 對舞者時，有 n=2、4、5、7、8 五種間隔排法符合條件，n=2、5、8 可排出 1 對同數衣，n=4、7 可排出 3 對同數衣。

(八)10 對舞者(m=10)的間隔排法：

1.間隔數 n=2、4、5、6、8 無法排出跳舞位置，詳見筆記。

2.間隔數 n=3、7、9 可排出跳舞位置，詳見筆記。

3.發現八：10 對舞者時，有 n=3、7、9 三種間隔排法符合條件，可排出 2 對同數衣。

(九)11 對舞者(m=11)的間隔排法：

1.11 對舞者交換舞伴的情形同 3 對、5 對、7 對舞者，詳見筆記。

2.發現九：11 對舞者時，有 n=2、3、4、5、6、7、8、9、10 九種間隔排法符合條件，可排出 1 對同數衣。

(十)12 對舞者(m=12)的間隔排法：

1.間隔數 n=2、3、4、6、8、9、10 無法排出跳舞位置，詳見筆記。

2.間隔數 n=11 可排出跳舞位置，詳見筆記。

3.間隔數 n=5

(1)交換舞伴的情形如下圖 12-1。

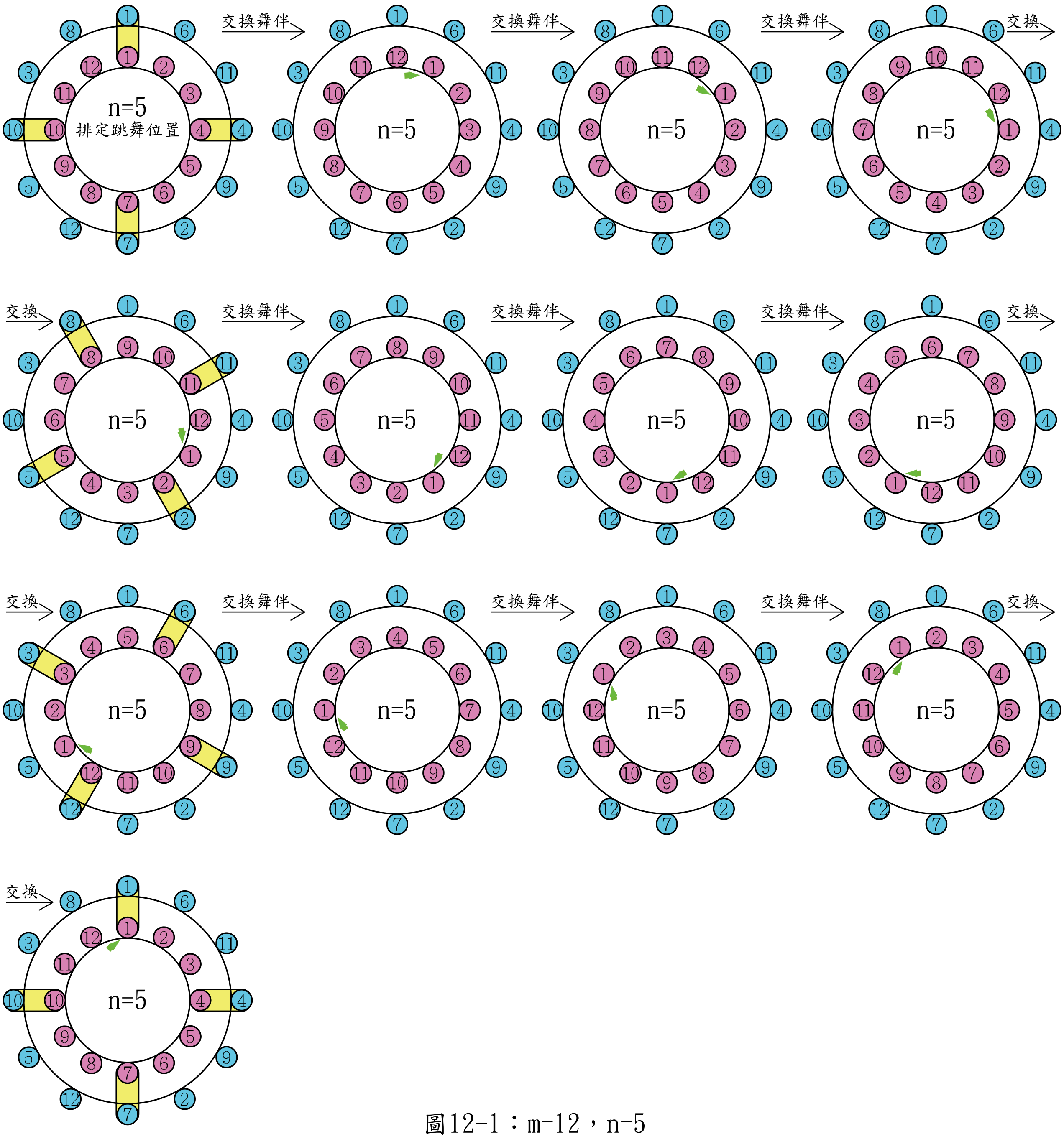


圖12-1：m=12，n=5

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n	1+8n	1+9n	1+10n	1+11n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	6	11	4	9	2	7	12	5	10	3	8
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7	8n-8	9n-9	10n-10	11n-11
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8

(3)分析 1：由圖 12-1 知 n=5 有 4 對回數衣。

分析 2：(m ,n)=(12 ,5)=1，(m ,n-1)=(12 ,4)=4

4.間隔數 n=7

(1)交換舞伴的情形如下圖 12-2。

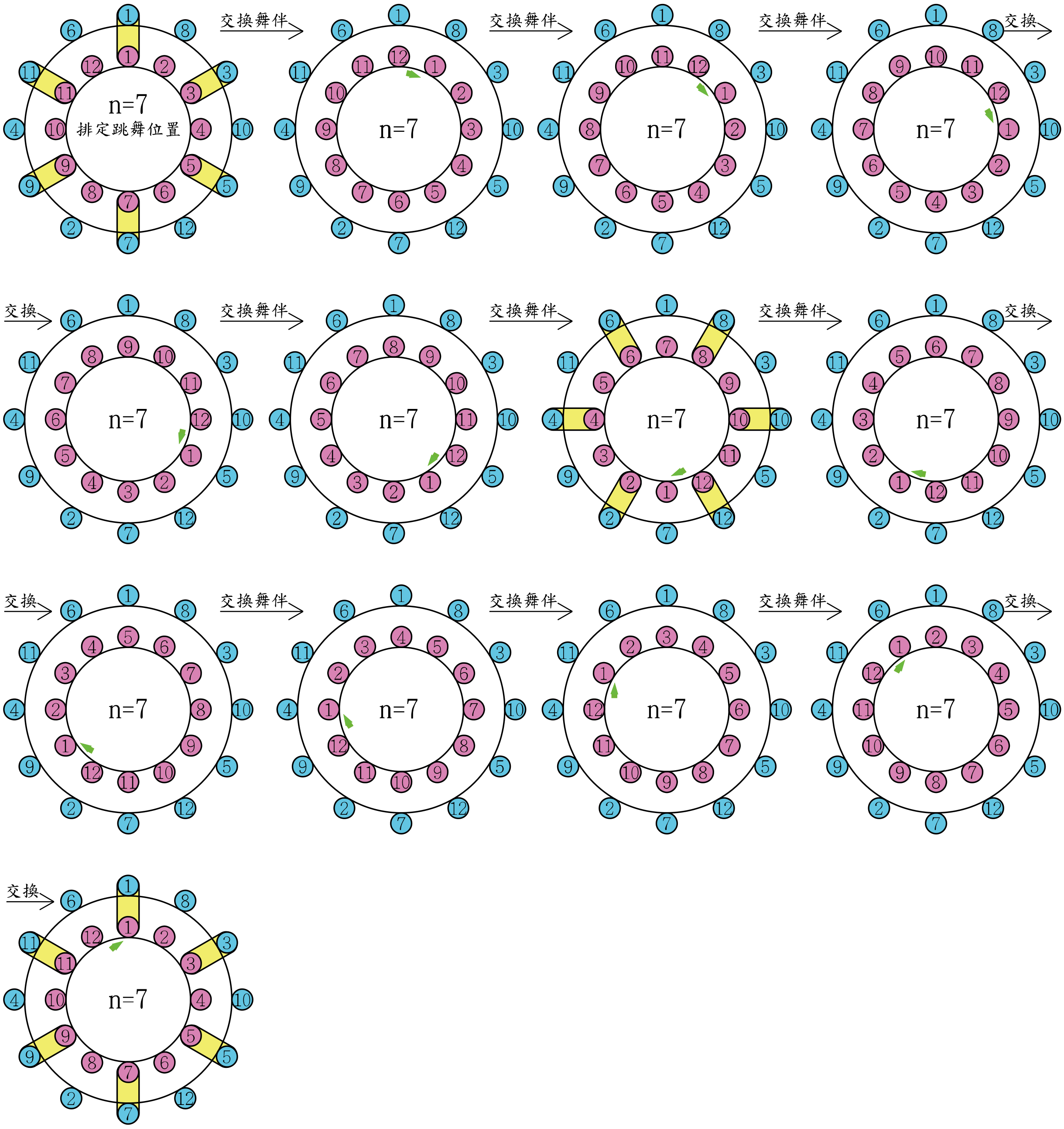


圖12-2：m=12，n=7

(2)排定跳舞位置，內、外圈數字的對應情形和數字差，如下表

A	外圈數字 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_1	和外圈數字 a 相對應的內圈數字通式	1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	1+5n	1+6n	1+7n	1+8n	1+9n	1+10n	1+11n
B_2	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時要減去 m)	1	8	3	10	5	12	7	2	9	4	11	6
C_1	數字差通式(B_1-A)	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	5n-5	6n-6	7n-7	8n-8	9n-9	10n-10	11n-11
C_2	數字差(當數字大於等於 m 時要減去 m)	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6

(3)分析 1：由圖 12-2 知 n=7 有 6 對同數衣。

分析 2：(m ,n)=(12 ,7)=1，(m ,n-1)=(12 ,6)=6

5.發現十：12 對舞者時，有 n=5、7、11 三種間隔排法符合條件，n=5 可排出 4 對回數衣，n=7 可排出 6 對回數衣，n=11 可排出 2 對回數衣。

五、我們將上述四的分析與發現整理成表二

表二

m 值	n 值 (1＜n＜m)	(m ,n)	(m ,n-1)	結果
3	2	(3 ,2)=1	(3 ,1)=1	1 對回數衣
4	2	(4 ,2)≠1		×
	3	(4 ,3)=1	(4 ,2)=2	2 對回數衣
5	2	(5 ,2)=1	(5 ,1)=1	1 對回數衣
	3	(5 ,3)=1	(5 ,2)=1	1 對回數衣
	4	(5 ,4)=1	(5 ,3)=1	1 對回數衣
6	2	(6 ,2)≠1		×
	3	(6 ,3)≠1		×
	4	(6 ,4)≠1		×
	5	(6 ,5)=1	(6 ,4)=2	2 對回數衣
7	2	(7 ,2)=1	(7 ,1)=1	1 對回數衣
	3	(7 ,3)=1	(7 ,2)=1	1 對回數衣
	4	(7 ,4)=1	(7 ,3)=1	1 對回數衣
	5	(7 ,5)=1	(7 ,4)=1	1 對回數衣
	6	(7 ,6)=1	(7 ,5)=1	1 對回數衣
8	2	(8 ,2)≠1		×
	3	(8 ,3)=1	(8 ,2)=2	2 對回數衣
	4	(8 ,4)≠1		×
	5	(8 ,5)=1	(8 ,4)=4	4 對回數衣
	6	(8 ,6)≠1		×
	7	(8 ,7)=1	(8 ,6)=2	2 對回數衣
9	2	(9 ,2)=1	(9 ,1)=1	1 對回數衣
	3	(9 ,3)≠1		×
	4	(9 ,4)=1	(9 ,3)=3	3 對回數衣
	5	(9 ,5)=1	(9 ,4)=1	1 對回數衣
	6	(9 ,6)≠1		×
	7	(9 ,7)=1	(9 ,6)=3	3 對回數衣
	8	(9 ,8)=1	(9 ,7)=1	1 對回數衣

10	2	(10 ,2)≠1		╳
	3	(10 ,3)=1	(10 ,2)=2	2 對<u>回數衣</u>
	4	(10 ,4)≠1		╳
	5	(10 ,5)≠1		╳
	6	(10 ,6)≠1		╳
	7	(10 ,7)=1	(10 ,6)=2	2 對<u>回數衣</u>
	8	(10 ,8)≠1		╳
	9	(10 ,9)=1	(10 ,8)=2	2 對<u>回數衣</u>
11	2	(11 ,2)=1	(11 ,1)=1	1 對<u>回數衣</u>
	3	(11 ,3)=1	(11 ,2)=1	1 對<u>回數衣</u>
	4	(11 ,4)=1	(11 ,3)=1	1 對<u>回數衣</u>
	5	(11，5)=1	(11，4)=1	1 對<u>回數衣</u>
	6	(11 ,6)=1	(11 ,5)=1	1 對<u>回數衣</u>
	7	(11 ,7)=1	(11 ,6)=1	1 對<u>回數衣</u>
	8	(11 ,8)=1	(11 ,7)=1	1 對<u>回數衣</u>
	9	(11 ,9)=1	(11 ,8)=1	1 對<u>回數衣</u>
	10	(11 ,10)=1	(11 ,9)=1	1 對<u>回數衣</u>
12	2	(12 ,2)≠1		╳
	3	(12 ,3)≠1		╳
	4	(12 ,4)≠1		╳
	5	(12 ,5)=1	(12 ,4)=4	4 對<u>回數衣</u>
	6	(12 ,6)≠1		╳
	7	(12 ,7)=1	(12 ,6)=6	6 對<u>回數衣</u>
	8	(12 ,8)≠1		╳
	9	(12 ,9)≠1		╳
	10	(12 ,10)≠1		╳
	11	(12 ,11)=1	(12 ,10)=2	2 對<u>回數衣</u>

分析表二發現：①當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=1 時，會有 1 對<u>回數衣</u>。
②當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=2 時，會有 2 對<u>回數衣</u>。
③當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=3 時，會有 3 對<u>回數衣</u>。
④當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=4 時，會有 4 對<u>回數衣</u>。
⑤當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=5 時，會有 5 對<u>回數衣</u>。
⑥當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=6 時，會有 6 對<u>回數衣</u>。
⑦當(m ,n)≠1，無法排出「一對一對應」的跳舞位置。

六、證明(m ,n)=1 時，可以排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置。

從表二的分析發現，若(m ,n)≠1 是無法排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置，所以要排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置，其條件是(m ,n)=1。

為了方便探討並究其原因，不妨將 m 男 m 女利用間隔排法排列跳舞位置時，外圈數字 a 和被對應的內圈數字整理成表三，表三中的間隔數為 n。

表三

A	外圈數字 a		1	2	3	4	5	…	m
B	和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時，要減去 m)		1	1+n	1+2n	1+3n	1+4n	…	1+(m-1)n
C	數字差(B-A，當數字大於等於 m 時，要減去 m)	原始	0	n-1	2n-2	3n-3	4n-4	…	(m-1)・n-(m-1)
		整理後	0	n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	…	(m-1)(n-1)

(一)說明外圈數字如何和內圈數字相對應，亦即如何找到 B 欄內的數。

1.排外圈數字，本研究都先排定數字 1，且與內圈的 1 構成 1 對。

2.因為每增加一個間隔數 n，就排下一個位置，所以外圈數字 2 會對應到內圈的 1 加上一個間隔數 n 的位置，外圈數字 3 會對應到內圈的 1 加上二個間隔數 n 的位置，……以此類推，可得 B 欄內的其他數。

3.B 欄內的數如果超過 m，必須要除以 m，且其餘數要兩兩不相同，這樣才能使得外圈的每一個數都有位置排，並對應到內圈的每一個數。

(二)證明(m ,n)=1，表三中 B 欄內的 m 個數除以 m 後兩兩不同餘，反之亦成立。

1.證明當(m ,n)=1 時，1、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)n 這 m 個數除以 m，兩兩不同餘。

[證明]:從這 m 個數中任取二數 1+sn、1+tn，且 s＞t

若此二數除以 m 同餘，則 m｜(s-t)n　∵(m ,n)=1　∴m｜s-t

但∵s、t 都是小於 m 的非負整數　∴s-t=0　→ s=t，此與 s＞t 矛盾，故假設錯誤，

所以這 m 個數除以 m，兩兩不同餘。

2.證明 1、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)n 這 m 個數除以 m，若兩兩不同餘，則(m ,n)=1。

[證明]:設(m ,n)=d≠1，且 $m=dm_1$，$n=dn_1$，

在這 m 個數中有一個數 $1+m_1n$，且 $1+m_1n>1$，

$1+m_1n=1+m_1dn_1=1+mn_1\equiv 1 \pmod m$，即 $1+m_1n$ 和 1 除以 m 餘數相同，

故假設錯誤，所以(m ,n)=1。

結論 1：當(m ,n)=1，內、外圈的數會「一對一對應」。

七、當$(m,n)=1$且$(m,n-1)=1$時，有1對同數衣

(一)表三中C欄內的數字差，就是內、外圈相同數字間的距離。例如外圈的1和內圈的1對應在一起，距離是0，所以數字差是0；外圈的2對應到內圈的1加上一個間隔數n的位置，和內圈2的距離是n-1；外圈的3對應到內圈的1加上二個間隔數n的位置，和內圈3的距離是二個n-1；以此類推可得其他數的數字差。

(二)當C欄內的數超過m，要除以m，且其餘數要兩兩不相同，此時這些數字差恰好為0、1、2、……、m-1，這樣才能使得排定跳舞位置及每次交換舞伴後，都有一對同數衣。

(三)證明$(m,n-1)=1$時，表三中C欄內的0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這m個數除以m後兩兩不同餘，反之亦成立。

1.證明當$(m,n-1)=1$時，0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這m個數除以m，兩兩不同餘。

[證明]:從這m個數中任取二數$s(n-1)$、$t(n-1)$，且$s>t$，
若此二數除以m同餘，則$m\mid s(n-1)-t(n-1)$，$\rightarrow m\mid(n-1)(s-t)$
$\because(m,n-1)=1$ $\therefore m\mid s-t$，但$\because s$、t都是小於m的非負整數 $\therefore s-t=0\rightarrow s=t$，此與$s>t$矛盾，故假設錯誤，所以這m個數兩兩不同餘。

2.證明 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這m個數除以m，若兩兩不同餘，則$(m,n-1)=1$。

[證明]:設$(m,n-1)=d\neq1$，且$m=dm_1$，$n-1=dn_1$，
在這m個數中有一個數$m_1(n-1)$，且$m_1(n-1)>0$，
$m_1(n-1)=m_1dn_1=mn_1\equiv0(\text{mod } m)$，亦即$m_1(n-1)$和0除以m餘數相同，
故假設錯誤，所以$(m,n-1)=1$。

結論2:當$(m,n)=1$且$(m,n-1)=1$，會有一對同數衣，且每交換一次舞伴後，也都恰有一對同數衣。

八、當$(m,n)=1$，且$(m,n-1)=d$時，有d對同數衣。

(一)表三中C欄內的0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這m個數除以m後，要有$\frac{m}{d}$組同餘數，且每組同餘數的個數有d個，這樣才能使得排定跳舞位置及交換d次舞伴後，都有d對男女舞者穿著同數衣。

(二)當(m ,n-1)=d 時，表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這 m 個數可平分成$\frac{m}{d}$組，每組 d 個數。

證明：1.同一組內的 d 個數除以 m，餘數都相同。

2.各組間的數除以 m，兩兩不同餘。

∵(m ,n-1)=d 設 $m=dm_1$ 、 $n-1=dn_1$ 將 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這 m 個數依下列方式平分成 m_1 組，每組 d 個數：

$$
d\text{個數}\left\{\begin{array}{ccccc}
0 & n-1 & 2(n-1) & 3(n-1)\ \cdots & (m_1-1)(n-1)\\
m_1(n-1) & (m_1+1)(n-1) & (m_1+2)(n-1) & (m_1+3)(n-1)\cdots & (2m_1-1)(n-1)\\
2m_1(n-1) & (2m_1+1)(n-1) & (2m_1+2)(n-1) & (2m_1+3)(n-1)\cdots & (3m_1-1)(n-1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
(d-1)m_1(n-1) & [(d-1)\cdot m_1+1](n-1) & & \cdots\cdots & (m-1)(n-1)\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\
\text{第一組} & \text{第二組} & \text{第三組} & \cdots\cdots & \text{第 } m_1 \text{ 組}
\end{array}\right.
$$

m_1 個數

1 的證明

證明:同一組內的數可表示成 $i(n-1)$、$(m_1+i)(n-1)$、$(2m_1+i)(n-1)$、…、$[(d-1)\cdot m_1+i](n-1)$， $i=0$、1、2、……、m_1-1，從上述同一組數中任取二數$(sm_1+i)(n-1)$、$(tm_1+i)(n-1)$，且 $s>t$，

$\rightarrow (sm_1+i)(n-1)-(tm_1+i)(n-1)$

$=(s-t)m_1(n-1)=(s-t)m_1dn_1=(s-t)mn_1$ ，

$\because (s-t)mn_1\equiv 0 \pmod{m}$

∴同一組數內任取二數除以 m，餘數都相同。

2 的證明

證明：若 0、n-1、2(n-1)、…、$(m_1-1)(n-1)$中有二個數 s(n-1)、t(n-1)除以 m 同餘，其中 $s>t$，

則 $m \mid (s-t)(n-1) \rightarrow m_1d \mid (s-t)n_1d$

$\rightarrow m_1 \mid (s-t)n_1 \quad \because (m_1 ,n_1)=1 \quad \therefore m_1 \mid s-t$ 　又 $\because 0\leq s$、$t<m_1$

∴s =t，與假設矛盾，故 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、$(m_1-1)(n-1)$除以 m 兩兩不同餘。

再由證明 1 知，同一組內的 d 個數除以 m，餘數都相同，故可推得各組間的數除以 m，兩兩不同餘。

(三)由(二)及所有數字差都是d的倍數知，C欄內的數字差除以m，餘數恰為0、d、2d、3d、……、$(m_1-1)d$，所以每交換 d 次，恰有 d 對同數衣。

結論 3:當(m ,n)=1 且(m ,n-1)=d，會有 d 對同數衣，且每交換 d 次舞伴後，也都恰有 d 對同數衣。

伍、應用推廣

一、從「間隔排法」衍生找到「非間隔排法」。

觀察圖 13-1 和圖 13-2 發現，圖 13-2 是圖 13-1 的“複製版”

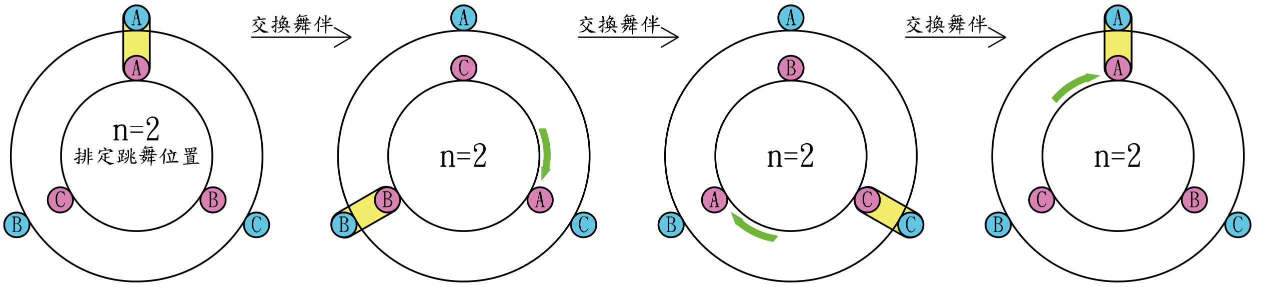


圖13-1：m=3，n=2

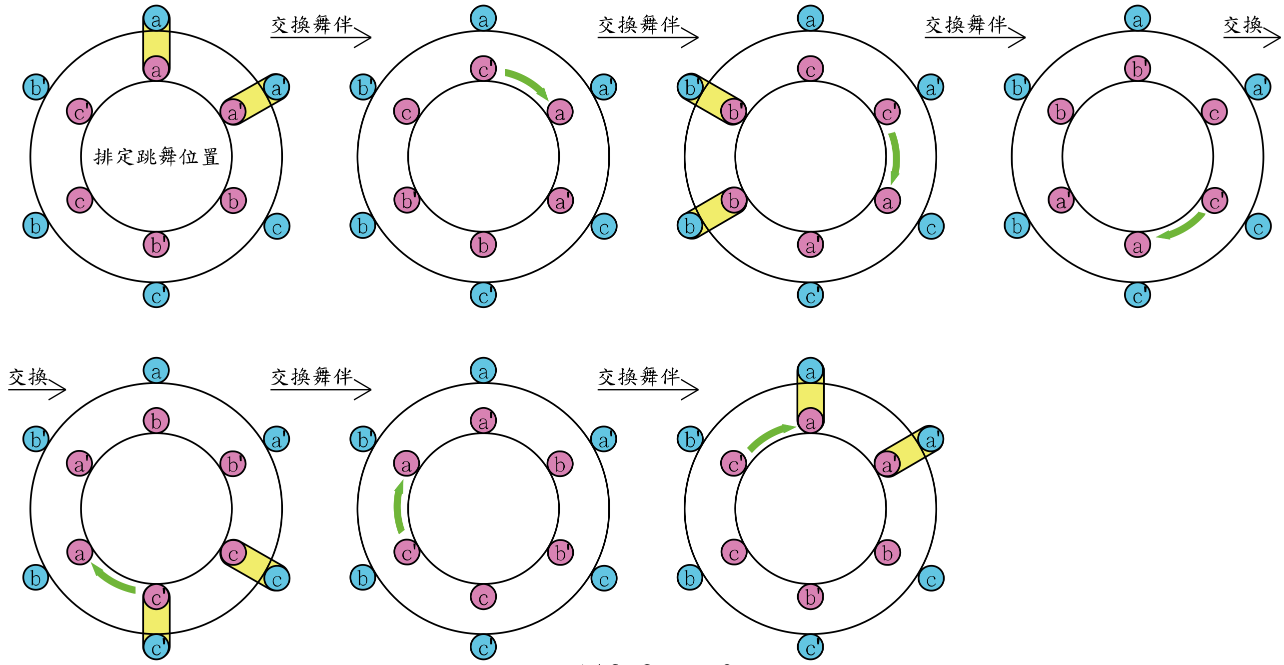


圖13-2：m=6

圖 13-1 是每交換一次有 1 對同數衣，而圖 13-2 是每交換二次有 2 對同數衣，但圖 13-1 是間隔排法，而圖 13-2 是非間隔排法。此外也可由圖 13-1 繼續衍生找到圖 13-3 的情形，甚至衍生找到更多對同數衣。

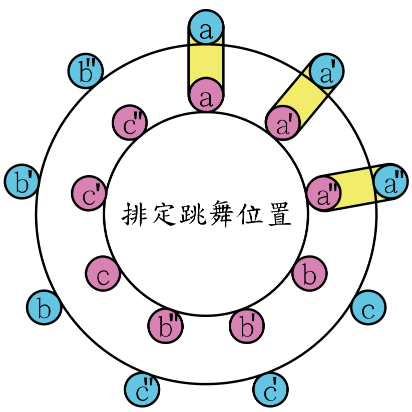


圖13-3：m=9

二、應用間隔排法做英文字母加密

由 a 到 z 的 26 個英文字母加上一個空白位置組成一個 27 碼的原始碼，並用數字 1 到 27，這 27 個數來代替 27 個原始碼，其對應關係如下表四。

表四

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

(一)將 1 到 27 加密，加密的方法是利用間隔排法，這樣便可將 1 到 27 重新排列如圖 14 中的外圈。

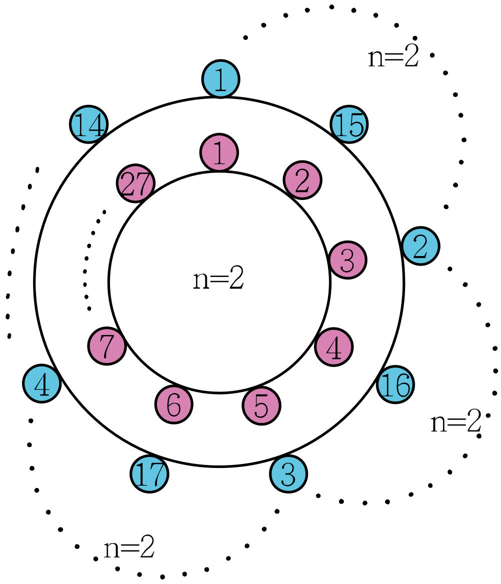


圖14

(二)說明加密過程，圖 14 的間隔數 n=2，排外圈的數字是先將內、外圈的 1 對應在一起，然後每增加一個間隔數 n 就排下一個數字。

(三)將圖 14 的對應關係表示成「表三的形式」，如下表五。

表五

外圈數字(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…	24	25	26	27
和外圈數字相對應的內圈數字(y)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	…	20	22	24	26

(四)要找表五中內、外圈數字的關係，不妨觀察表三。為了方便觀察和說明，把表三再列一次。

表三

<table>
<tr><td>A</td><td colspan="2">外圈數字 a</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td><td>m</td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">和外圈數字 a 相對應的內圈數字(當數字大於 m 時，要減去 m)</td><td>1</td><td>1+n</td><td>1+2n</td><td>1+3n</td><td>1+4n</td><td>…</td><td>1+(m-1)n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">數字差(B-A，當數字大於等於 m 時，要減去 m)</td><td>原始</td><td>0</td><td>n-1</td><td>2n-2</td><td>3n-3</td><td>4n-4</td><td>…</td><td>(m-1)・n-(m-1)</td></tr>
<tr><td>整理後</td><td>0</td><td>n-1</td><td>2(n-1)</td><td>3(n-1)</td><td>4(n-1)</td><td>…</td><td>(m-1)(n-1)</td></tr>
</table>

1.觀察表三 A、B 二欄數字間的關係，發現：

(1)B 欄內的數可由函數 $f(x,n)=[1+(x-1)\cdot n] \bmod 27$ 找到。

(2)A 欄內的數可由(1)中函數的反函數 $f^{-1}(y,n')=[1+(y-1)\cdot n'] \bmod 27$ 找到，

其中 $(n\cdot n')\equiv 1 \bmod 27$

2.由 1.推知表五中的內圈數字可由函數 $f(x,2)=[1+(x-1)\cdot 2] \bmod 27$ 找到，

外圈數字可由反函數 $f^{-1}(y,14)=[1+(y-1)\cdot 14] \bmod 27$ 找到。

3.舉例說明，如「I love math」用間隔數 n=2 加密

(1)將原始碼和數字對應關係表四再列一次：

表四

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

(2)由表四知「I love math」的對應數字為「9,27,12,15,22,5,27,13,1,20,8」

(3)數字加密：加密函數 $f(x,2)=[1+(x-1)\cdot 2] \bmod 27$，經由加密函數的運算如下，

$$f(9,2)=[1+(9-1)\cdot 2] \bmod 27=17$$
$$f(27,2)=[1+(27-1)\cdot 2] \bmod 27=26$$
$$f(12,2)=[1+(12-1)\cdot 2] \bmod 27=23$$
$$f(15,2)=[1+(15-1)\cdot 2] \bmod 27=2$$
$$f(22,2)=[1+(22-1)\cdot 2] \bmod 27=16$$
$$f(5,2)=[1+(5-1)\cdot 2] \bmod 27=9$$
$$f(13,2)=[1+(13-1)\cdot 2] \bmod 27=25$$
$$f(1,2)=[1+(1-1)\cdot 2] \bmod 27=1$$
$$f(20,2)=[1+(20-1)\cdot 2] \bmod 27=12$$
$$f(8,2)=[1+(8-1)\cdot 2] \bmod 27=15$$

(4)數字加密後為「17,26,23,2,16,9,26,25,1,12,15」。

(5)加密後的密文為「qzwbpizyalo」。

(6)解密：「qzwbpizyalo」的對應數字為「17,26,23,2,16,9,26,25,1,12,15」

(7)數字解密：解密反函數 $f^{-1}(y,14)=[1+(y-1)\cdot 14] \bmod 27$，經由解密反函數的運算如下，

$$f^{-1}(17,14)=[1+(17-1)\cdot 14] \bmod 27=9$$
$$f^{-1}(26,14)=[1+(26-1)\cdot 14] \bmod 27=0$$ (將 0 視為 27)
$$f^{-1}(23,14)=[1+(23-1)\cdot 14] \bmod 27=12$$
$$f^{-1}(2,14)=[1+(2-1)\cdot 14] \bmod 27=15$$
$$f^{-1}(16,14)=[1+(16-1)\cdot 14] \bmod 27=22$$
$$f^{-1}(9,14)=[1+(9-1)\cdot 14] \bmod 27=5$$
$$f^{-1}(25,14)=[1+(25-1)\cdot 14] \bmod 27=13$$
$$f^{-1}(1,14)=[1+(1-1)\cdot 14] \bmod 27=1$$
$$f^{-1}(12,14)=[1+(12-1)\cdot 14] \bmod 27=20$$
$$f^{-1}(15,14)=[1+(15-1)\cdot 14] \bmod 27=8$$

(8)解密後的數字為「9,27,12,15,22,5,27,13,1,20,8」。
(9)對應的英文字母為「I love math」。

三、多圈排列—p 個旋轉鈕的圓形鎖

(一)應用間隔排法做一個 p 個旋轉鈕的圓形鎖

p 個旋轉鈕的圓形鎖是由一個內圈和 p 個外圈組成，無論是內圈或每一個外圈都有 m 個數字。內圈數字依順時針方向從數字 1、數字 2、……由小到大依序排列成圓形；外圈 p 個旋轉鈕的數字排列，每一外圈都先排數字 1，且與內圈的數字 1 對應在一起，接著每一個外圈的數字 2、數字 3、……，按照每一圈的間隔數依序排列，而這 p 個外圈中，每一圈的間隔數都不相同，且必須從符合條件(m ,n)=1 的 n 值中取出。

(二)開鎖的條件

開鎖時，轉動外圈的每個旋轉鈕，當內圈的某個數字 a 和每個外圈的數字 a 都對應在一起，即可開鎖(a≠1)。

(三)開鎖的方法

有 p 個外圈，每個外圈分別對應到間隔數 n_1、n_2、n_3、……、n_k，若這 p 個外圈的旋轉鈕分別轉動(n_1-1)次、(n_2-1)次、(n_3-1)次、……、(n_k-1)次即可開鎖，這可由表三 C 欄中得知。

(四)舉 p=3，m=7 為例，這個圓形鎖有三個旋轉鈕，旋轉鈕上的數字為 1 到 7，符合條件的 n 值有 2、3、4、5、6 共 5 種，現在取 n=2、3、5 為例，第一個旋轉鈕的 n=2，第二個旋轉鈕的 n=5，第三個旋轉鈕的 n=3，如圖 15。當第一個旋轉鈕轉動 1 格，第二個旋轉鈕轉動 4 格，第三個旋轉鈕轉動 2 格，即可開鎖，如圖 16。

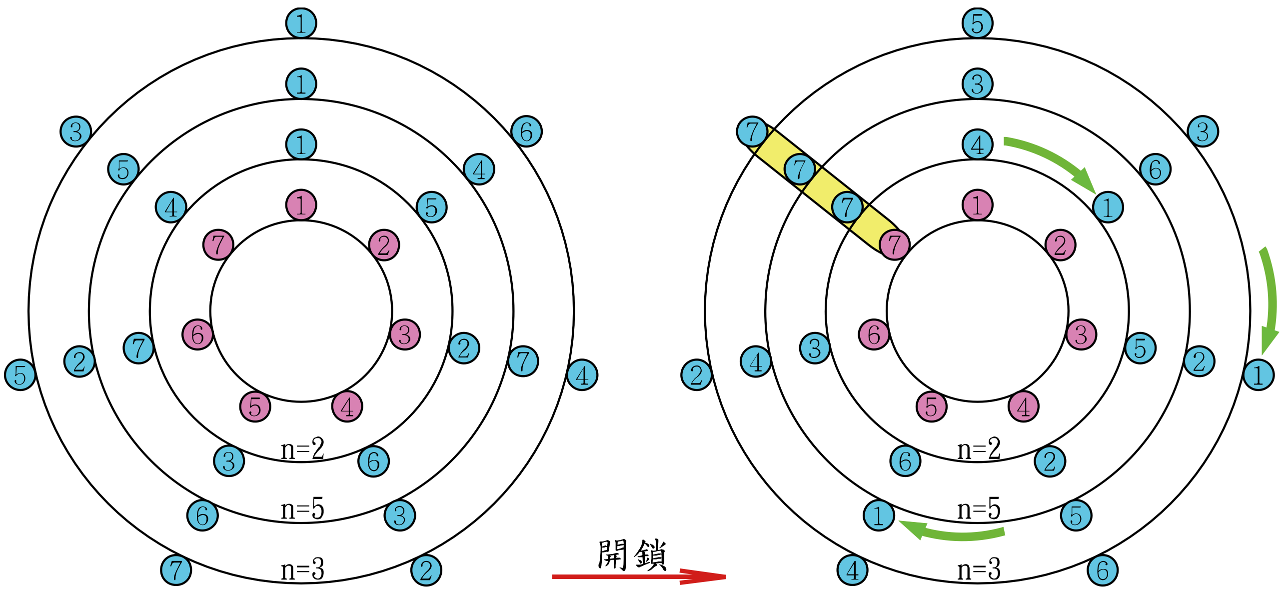


圖15　　圖16

陸、討論：

一、當 m 是奇數，則對於 m 的所有因數 $d(d\neq m)$，都可找到一種間隔排法 n，使得排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，會有 d 對男女舞者穿著同數字的衣服。

二、當 m 是偶數，則(1)對於 m 的所有偶數因數 $d(d\neq m)$，都可找到一種間隔排法 n，使得排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，會有 d 對男女舞者穿著同數字的衣服，(2)對於 m 的所有奇數因數 d，都無法找到任何一種間隔排法 n，使得排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，會有 d 對男女舞者穿著同數字的衣服。

三、未來的展望將著重於研究(1)非間隔排法是否具有其他規律性，(2)英文字母多重加密的方法，使其不易被解密。

柒、結論：

一、排出內、外圈「一對一對應」的跳舞位置，其條件是$(m,n)=1$。

二、排定跳舞位置及每交換 d 次舞伴後，恰好都有 d 對男女舞者穿著同顏色的衣服，其條件是$(m,n)=1$ 且$(m,n-1)=d$。

捌、參考資料

一、張文忠 基礎數論-原理及解題 台北 中央圖書出版社 347~351 頁 2002 年

二、林○欽 翩翩起舞-間隔排法的探討 第 52 屆全國科學展覽會 國小組 數學科 1~24 頁 2012 年

三、陸思明 函數 台北 建宏出版社有限公司 2005 年 5 月

四、屠耀華 張靜嚳 鄭建勳 英國 S.M.P.中學數學教程(第三冊) 台北 九章出 版社 175~204 頁 2000 年 4 月

【評語】030411

本作品是探討把數字排在兩個圖上彼此產生重疊或相異的狀況，基本上可以看成排列的研究。能夠利用它來排舞伴，或進而密碼應用，圓形鎖應用，是具有創意的作品。往後可以對排列(Permutation)多加了解，從探討更多的數學，讓作品的內容更豐富。