中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

平面切割~探討平面與共點的 n 條直線對交點數與區域數的影響

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國二 許育銘	蔡依玲
國二 吳政軒	梁瑜芳
國二 吳振維	

關鍵詞：直線切割、交點數、區域數

摘要

n 條直線最多可把平面分割成 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 個區域，如果這些直線有平行或共點的情況，其區域數會比 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 還少，且減少的區域數剛好爲三角形數的總和。

畫了許多分割的圖和推導區域數的過程，發現圖形中的「交點數」和「區域數」息息相關，所以往下探討圖形中的交點個數，得知 n 條直線最多有 $\frac{n^2-n}{2}$ 個交點，如果這些直線有平行或共點的情況，其交點數會比 $\frac{n^2-n}{2}$ 還少，平行直線所減少的交點數剛好爲三角形數的總和，直線共點的情況，所減少的交點數爲三角形數總和與共點組數的差。由於有交點數的結果，我們想解決傅立葉提出的 17 線問題，運用平行的結論，用電腦程式去運算可找到四組解法。徜徉在交點數、直線、區域數這趟的「點・線・面」之旅，沒想到竟有如此讓人驚艷的簡潔結果！

壹、研究動機

上數學課時，老師給了我們一個問題：「一條直線可將一平面分成兩個區域，兩條直線最多可把一平面分成四個區域，如此類推，2001 條直線最多可把平面分成幾個區域？」我們得知：如果直線要將平面分割成最多區域的情況，必須要符合：任兩條直線不平行、任三條直線不共點，此時 n 條直線可以把平面分成 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 個區域。我們想再知道：如果圖形中的直線有共點或平行的情形，那麼平面被切割的區域數會是如何？在研究的過程中，我們發現被切割的區域數和圖形中的交點數息息相關，所以我們也做了圖形交點個數的探討？進而想解決傅立葉提出的 17 線問題：『在平面上作 17 條直線，使它們的交點總數為 101 個』，可以辦得到嗎？

貳、研究目的

一、探討平面上不共點的 n 條直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1、m_2、⋯、m_k 條，其切割後的「區域數」與「交點數」為何。

二、探討平面上不平行的 n 條直線，其中有 h 組共點，分別有 p_1、p_2、⋯、p_h ($p_i>2$)條，且各組的共點沒有共用直線，其切割後的「區域數」與「交點數」為何。

三、探討平面上的 n 條直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1、m_2、⋯、m_k 條，以及有 h 組共點，分別有 p_1、p_2、⋯、p_h 條，其切割後的「區域數」與「交點數」為何。

四、17 線問題的探討。

參、研究設備及器材

紙，筆，電腦，GeoGebra 軟體。

肆、名詞與符號定義

一、共點：有三條以上直線通過的點。

※ 函數 f 表示『區域數』

二、 $f(n)$ ： n 條直線所分割成的最多區域數，故 $f(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$ （文獻）。

三、 $f_m(n;m)$ ：不共點的 n 條直線，其中有 m 條平行直線，其切割的區域數。

四、 $f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)$ ：不共點的 n 條直線，其中有 k 組平行直線，分別爲 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，其切割的區域數。

五、 $f_p(n;p)$ ：不平行的 n 條直線，其中有 p 條直線共點，其切割的區域數。

六、 $f_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)$ ：不平行的 n 條直線，其中有 h 組共點，分別有 p_1 、 p_2 、⋯、 p_h 條，其切割的區域數。

七、 $f_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)$ ： n 條直線中，有 k 組平行，分別爲 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，以及有 h 組共點，分別爲 p_1 、 p_2 、⋯、 p_h 條，其切割的區域數。

※ 函數 g 表示『交點數』

八、 $g(n)$ ： n 條直線所形成的最多交點數，故 $g(n)=\dfrac{n^2-n}{2}$ 。

九、 $g_m(n;m)$ ：不共點的 n 條直線，其中有 m 條直線平行，其圖形的交點數。

十、 $g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)$ ：不共點的 n 條直線，其中有 k 組平行直線，分別爲 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，其圖形的交點數。

十一、 $g_p(n;p)$ ：不平行的 n 條直線，其中有 p 條共點直線，其圖形的交點數。

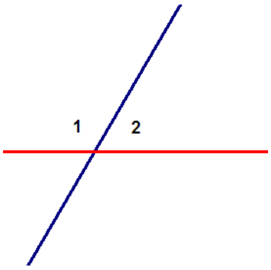
十二、 $g_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)$ ：不平行的 n 條直線，其中有 h 組共點，分別有 p_1 、 p_2 、⋯、 p_h 條，其圖形的交點數。

十三、 $g_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)$ ： n 條直線中，有 k 組平行，分別爲 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，以及有 h 組共點，分別爲 p_1 、 p_2 、⋯、 p_h 條，其圖形的交點數。

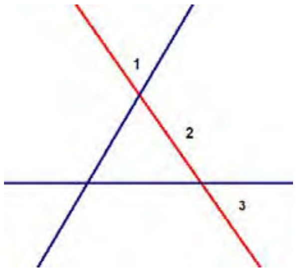
伍、文獻探討

問題：平面上有n條不平行，也不共點的直線，則此n條直線可將平面分割成$\frac{n^2+n+2}{2}$個區域

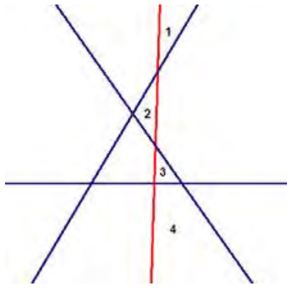
說明：



圖(1)



圖(2)



圖(3)

從圖(1)可看出畫上第 2 條直線後，與前 1 條直線有 1 個交點，增加 2 個區域，

從圖(2)可看出畫上第 3 條直線後，與前 2 條直線有 2 個交點，增加 3 個區域，

從圖(3)可看出畫上第 4 條直線後，與前 3 條直線有 3 個交點，增加 4 個區域，

⋮

故推得畫上第 n 條直線直線後，與前 n－1 條直線有 n－1 個交點，增加 n 個區域。

如果我們將n條直線分割成的區域數用數列$\{a_n\}$表示，則$a_1=2$、$a_2=a_1+2=4$、$a_3=a_2+3=7$、$a_4=a_3+4=11$、…、$a_n=a_{n-1}+n$，將以下式子全部加起來：

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=a_1+2 \\ a_3=a_2+3 \\ a_4=a_3+4 \\ \quad\vdots \\ a_n=a_{n-1}+n \end{cases}$$

推得：$a_n=2+2+3+4+\cdots+n=1+(1+2+\cdots+n)=\frac{n^2+n+2}{2}$

我們用$f(n)$代表n條直線所分割成的最多區域數，則$f(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$。

陸、研究過程與方法

【研究一】探討不共點的n條直線，其中有**平行**直線，其圖形的「區域數」與「交點數」

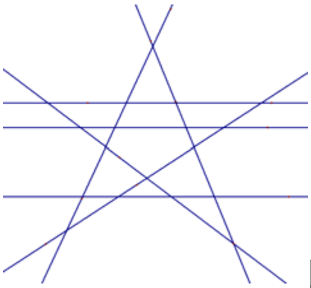
為何。

一、n條不共點的直線，有某些平行直線，其圖形的「區域數」爲何。

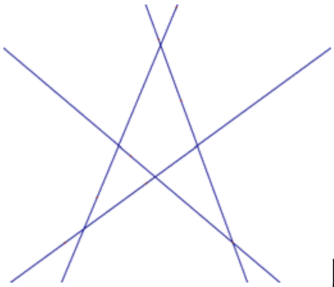
若將文獻中的問題加上不同的條件，如其中有 m 條直線平行的情況，則原本求最大區域數的公式就無法使用，因此我們想知道，加了平行的條件，會不會有新的計算區域數的公式？

舉例來說：若有 7 條直線，其中 3 條是互相平行，其餘的不平行也不共點，如圖(4)：

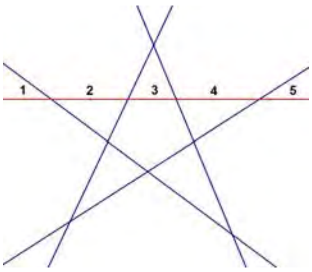
圖形看起來雜亂無章。



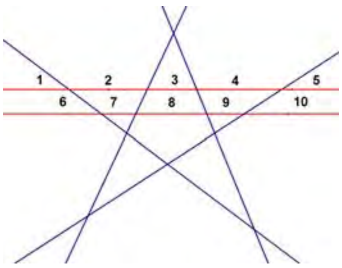
圖(4)



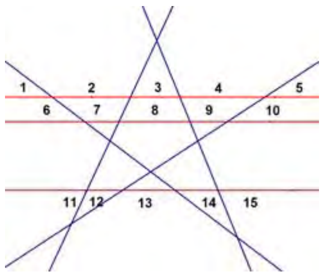
圖(5)



圖(6)



圖(7)



圖(8)

如果我們先拿走平行的 3 條直線，如圖(5)，則圖形可以看成是文獻中任 4 條不平行也不共點的切割問題，故可得知其區域數爲 $f(4)=11$。我們再加上第一條平行線，可看出此直線會跟原本圖(5)中的 4 條有交點，增加 5 個區域，如圖(6)。再加回第二條平行線，可看出此直線會跟原本圖(6)中的 4 條有交點，再增加 5 個區域，如圖(7)。再加回第三條平行線，可看出此直線會跟原本圖(7)中的 4 條有交點，再增加 5 個區域，如圖(8)。故我們得知總區域數爲：

$$f_m(7;3)=f(4)+5\times 3=26$$

將以上的推論方式推廣到：若有不共點的n條直線，其中有m條平行，其切割的區域數$f_m(n;m)$爲多少？

性質 1：在一平面上，有不共點的n條直線，其中有m條平行，其切割的區域數

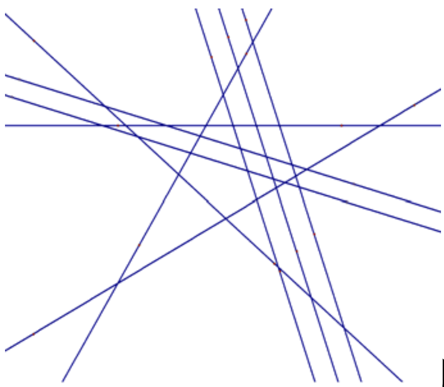
$$f_m(n;m)=f(n)-\frac{m^2-m}{2}$$

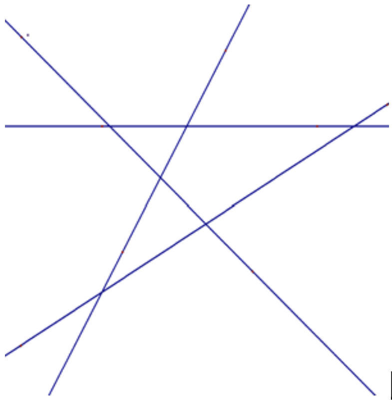
證明：依$f_m(7;3)$的解題方式，首先我們先拿掉其m條平行線，則此時共有$n-m$條不平行也不共點的直線，故切割的區域數爲$f(n-m)$，這時，只要我們加m條平行線中的其中一條就會跟原本的$(n-m)$條直線有$(n-m)$的交點，增加$(n-m+1)$個區域數，共要加回m條平行線，故共會增加$m(n-m+1)$個區域數，因而得到以下結論：

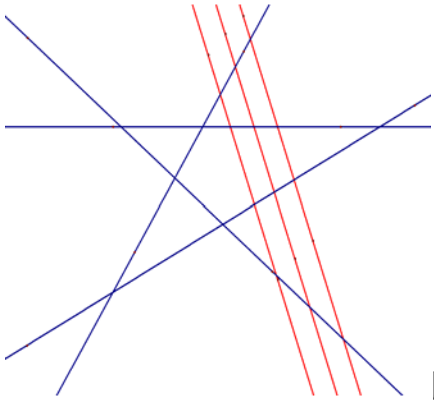
$$\begin{aligned}f_m(n;m)&=f(n-m)+m(n-m+1)\\&=\frac{(n-m)(n-m+1)+2}{2}+m(n-m+1)\\&=\frac{n^2+n+2-m^2+m}{2}=f(n)-\frac{m^2-m}{2}\end{aligned}$$

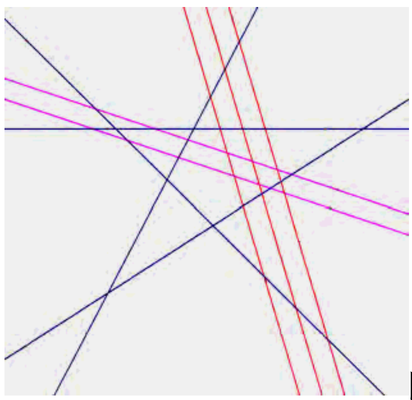
如果在圖形中的平行線不只一組的話，那麼切割後的區域數又會作何變化？

舉例來說：如有 9 條直線，其中有兩組平行的直線，一組是 3 條，另一組是 2 條，其餘的不平行也不共點，如圖(9)，圖形看起來更雜亂無章！


圖(9)


圖(10)


圖(11)


圖(12)

我們先試著拿掉兩組平行的直線，共 5 條，則圖形可以看成是任 4 條不平行也不共點的切割問題，如圖(10)，故可得知區域數為 $f(4)=11$。我們再加上第一組平行線，可看出此 3 條平行線都會跟原本圖(10)中的 4 條有交點，再增加 $5\times3=15$ 個區域，如圖(11)，我們又再加上第二組平行線，可看出此 2 條平行線，每 1 條都會跟原本圖(11)中的 7 條直線有 7 個交點，總共增加 $8\times2=16$ 個區域，如圖(12)，故我們得知總區域數為： $f_m(9;3,2)=f(4)+5\times3+8\times2=42$

將以上的推論方式推廣到：若有任三條不共點的 n 條直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，求其切割的區域數 $f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 為多少？

性質 2：在一平面上，有 n 條不共點的直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1 、 m_2 、⋯、 m_k 條，則其切割的區域數為

$$f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=f(n)-\frac{B_m-A_m}{2}\text{，其中 } A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i \text{ 、 } B_m=\sum_{i=1}^{k}{m_i}^2$$

證明：依 $f_m(9;3,2)$ 的解題方式，首先我們先拿掉其 k 組平行線，則此時共有 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條不平行也不共點的直線，可將平面切割成 $f(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)$ 個區域，我們再加上第一組 m_1 條平行線，每一條都會與原本的 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條直線有 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 個交點，增加 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i+1$ 個區域數，共可增加 $m_1(n-\sum_{i=1}^{k}m_i+1)$ 個區域；又加上第二組 m_2 條平行線，每一條都會與原本的 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條與 m_1 條直線皆有交點，也就是與 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i+m_1$ $=n-\sum_{i=2}^{k}m_i$ 條直線有交點，增加 $n-\sum_{i=2}^{k}m_i+1$ 個區域數，共可增加 $m_2(n-\sum_{i=2}^{k}m_i+1)$ 個區域。由此可知：第三組共增加 $m_3(n-\sum_{i=3}^{k}m_i+1)$ 個區域，⋯，第 k 組共增加 $m_k(n-m_k+1)$ 個區域，因而我們得知以下結論：

$$f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=f(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+m_1(n-\sum_{i=1}^{k}m_i+1)+m_2(n-\sum_{i=2}^{k}m_i+1)+$$
$$\cdots+m_k(n-\sum_{i=k}^{k}m_i+1)$$
$$=f(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+\sum_{j=1}^{k}\left[m_j(n-\sum_{i=j}^{k}m_i+1)\right]$$

但 $f(n-\sum_{i=1}^{k} m_i)+\sum_{j=1}^{k}\left[m_j(n-\sum_{i=j}^{k} m_i+1)\right]$ 的結果不夠簡潔，所以我們再進一步化簡。

原式 $= f(n-\sum_{i=1}^{k} m_i)+n\sum_{j=1}^{k} m_j-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} m_j m_i+\sum_{j=1}^{k} m_j$ ，假設 $\sum_{i=1}^{k} m_i = A_m$ ，

則原式 $= f(n-A_m)+nA_m-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} m_j m_i + A_m$

$$=\frac{(n-A_m)^2+(n-A_m)+2}{2}+nA_m-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} m_j m_i + A_m$$

，其中 $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} m_j m_i = m_1(m_1+m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_2+m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_k m_k$

$$=\sum_{i=1}^{k} m_i^{\,2}+m_1(m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_{k-1}m_k$$

因為 $(m_1+m_2+\cdots+m_k)^2$ 展開後的 k^2 項可寫成下列 $k\times k$ 的樣子：

$$\begin{array}{ccccccc}
m_1^{\,2} & m_1m_2 & m_1m_3 & \cdots & \cdots & m_1m_{k-1} & m_1m_k \\
m_1m_2 & m_2^{\,2} & m_2m_3 & \cdots & \cdots & m_2m_{k-1} & m_2m_k \\
m_1m_3 & m_2m_3 & m_3^{\,2} & & & & m_3m_k \\
\vdots & \vdots & & m_4^{\,2} & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
m_1m_{k-1} & m_2m_{k-1} & & & & \ddots & m_{k-1}m_k \\
m_1m_k & m_2m_k & m_3m_k & \cdots & \cdots & m_{k-1}m_k & m_k^{\,2}
\end{array}$$

故上半三角形黑色的總和，即指 $m_1(m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_{k-1}m_k$

會等於 $\dfrac{(\sum_{i=1}^{k} m_i)^2-\sum_{i=1}^{k} m_i^{\,2}}{2}=\dfrac{A_m^{\,2}-B_m}{2}$ ，在此令 $\sum_{i=1}^{k} m_i^{\,2}=B_m$

則 $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} m_j m_i = B_m+\dfrac{A_m^{\,2}-B_m}{2}=\dfrac{A_m^{\,2}+B_m}{2}$

所以原式 $=\dfrac{(n-A_m)^2+(n-A_m)+2}{2}+nA_m-\dfrac{A_m^{\,2}+B_m}{2}+A_m=\dfrac{n^2+n+2-B_m+A_m}{2}$

$= f(n)-\dfrac{B_m-A_m}{2}$ ，其中 $A_m=\sum_{i=1}^{k} m_i$ 、 $B_m=\sum_{i=1}^{k} m_i^{\,2}$

舉之前 $f_m(9;3,2)=42$ 的例子來驗證一下， $f(9)=46$ 、 $A_m=3+2=5$ 、

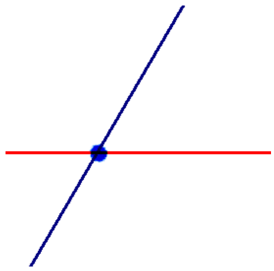
$B_m=3^2+2^2=13$ ，則 $f(9)-\dfrac{B_m-A_m}{2}=46-4=42$ 是成立的。

二、 n條不共點的直線中有某些平行直線，其圖形的「交點數」爲何。

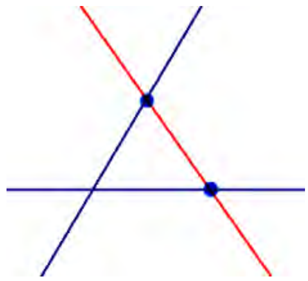
由於在做區域數的探討，都跟圖形中的交點個數息息相關，所以我們大膽猜測，圖形中的「交點數」也有其簡潔的計算式子，所以展開了以下的研究。

性質 3：平面上不平行與不共點的n條直線，其圖形的交點數最多會有$\dfrac{n^2-n}{2}$個

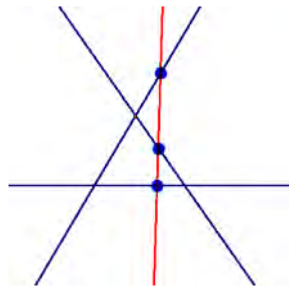
說明：



圖(13)



圖(14)



圖(15)

從圖(13)可看出畫上第 2 條直線後，與前 1 條直線有 1 個交點

從圖(14)可看出畫上第 3 條直線後，與前 2 條直線有 2 個交點

從圖(15)可看出畫上第 4 條直線後，與前 3 條直線有 3 個交點

:

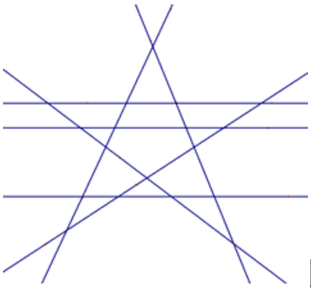
故推得畫上第 n 條直線直線後，與前(n－1)條直線有(n－1)個交點，如果我們將 n 條直線在平面上的交點數用數列$\{b_n\}$表示，則$b_1=0$、$b_2=b_1+1=1$、$b_3=b_2+2=3$、$b_4=b_3+3=6$、⋯、$b_n=n_{n-1}+(n-1)$，將以下的式子全部加起來：

$$\begin{cases} b_1=0 \\ b_2=b_1+1 \\ b_3=b_2+2 \\ \quad\vdots \\ b_n=b_{n-1}+(n-1) \end{cases}$$

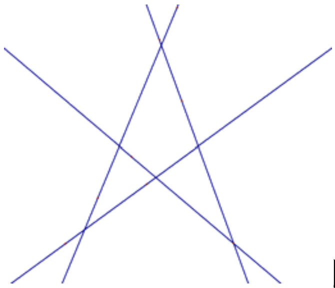
推得：$b_n=1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n^2-n}{2}$

我們用$g(n)$代表n條直線所形成的最多交點數，則$g(n)=\dfrac{n^2-n}{2}$

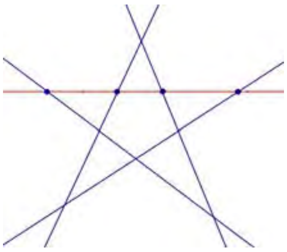
再來討論有一組平行的情況，舉例來說：如有 7 條直線，其中 3 條是互相平行，其餘的不平行也不共點，如圖(16)，圖形看起來雜亂無章。

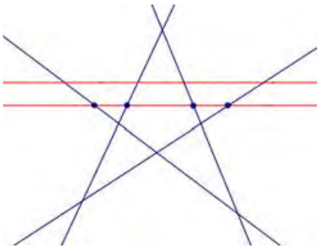


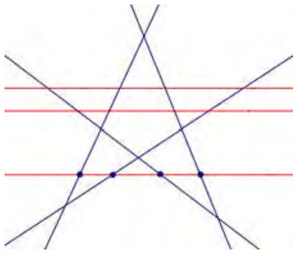
圖(16)



圖(17)







圖(18) 圖(19) 圖(20)

如果我們先拿走平行的 3 條直線，如圖(17)，則圖形可以看成是【性質 3】中任 4 條不平行也不共點的情形，故可得知交點數為 $g(4)=6$。我們再加上第一條平行線，可看出此直線會增加 4 個交點，如圖(18)。再加回第二條平行線，可看出此直線會比原本圖(18)，增加 4 個交點，如圖(19)。再加回第三條平行線，可看出此直線會比原本圖(19)，增加 4 個交點，如圖(20)。

故我們得知交點數為： $g_m(7;3)=g(4)+4\times 3=18$

將以上的推論方式推廣到：若有 n 條不共點的直線，其中有 m 條平行，其圖形的交點數 $g_m(n;m)$ 為多少？

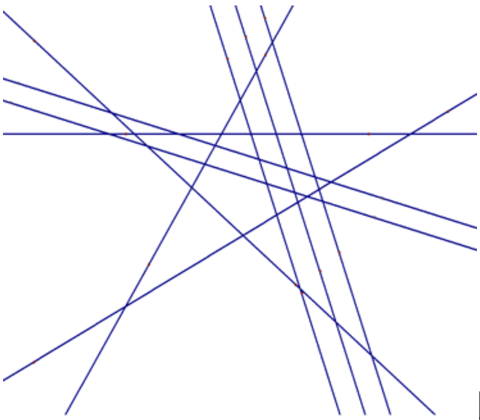
性質 4：在一平面上，有 n 條不共點的直線，其中有 m 條平行，則其圖形的交點數為

$$g_m(n;m)=g(n)-\frac{m^2-m}{2}$$

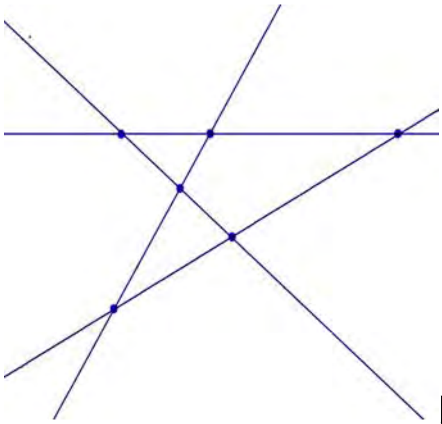
證明：依 $g_m(7;3)$ 的解題方式，首先我們先拿掉其 m 條平行線，則此時共有 $n-m$ 條不平行也不共點的直線，故交點數為 $g(n-m)$ ，這時，只要我們加 m 條平行線中的其中一條就會跟原本的 $n-m$ 條直線有交點，增加 $n-m$ 個交點，共要加回 m 條平行線，故共會增加 $m(n-m)$ 個交點，因而我們得知以下結論：

$$
\begin{aligned}
g_m(n;m) &= g(n-m)+m(n-m) \\
&= \frac{(n-m)^2-(n-m)}{2}+m(n-m) \\
&= \frac{n^2-n-m^2+m}{2} = g(n)-\frac{m^2-m}{2}
\end{aligned}
$$

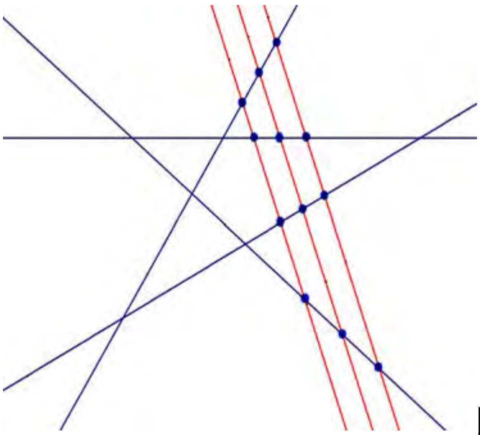
如果在圖形中的平行線不只一組的話，那麼圖形的交點數又會作何變化？舉例來說：如果有 9 條直線，其中有兩組平行的直線，一組是 3 條，另一組是 2 條，其餘的不平行也不共點，如圖(21)，圖形看起來更雜亂無章！



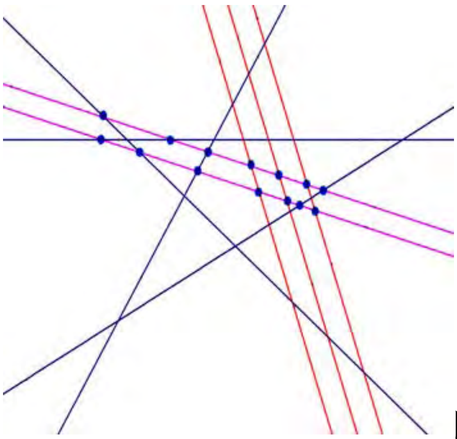
圖(21)



圖(22)



圖(23)



圖(24)

先試著拿掉兩組平行的直線，共 5 條，則圖形可以看成是任 4 條不平行也不共點的直線，如圖(22)，故可得知區域數爲 $g(4)=6$。我們再加上第一組平行線，可看出此 3 條平行線都會跟原本圖(22)中的 4 條直線有交點，增加 $4\times3=12$ 個交點，如圖(23)。我們又再加上第二組平行線，可看出此 2 條平行線都會跟原本圖(23)中的 7 條直線有交點，增加 $7\times2=14$ 個交點，如圖(24)。故我們得知總交點數爲：$g_m(9;3,2)=g(4)+4\times3+7\times2=32$

將以上的推論方式推廣到：若有 n 條不共點的直線，其中有 k 組平行，分別爲 m_1 、 m_2 、 $\cdots$ 、 m_k 條，求其圖形的交點數 $g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 爲多少？

性質 5：在一平面上，有 n 條不共點的直線，其中有 k 組平行，分別為 m_1 、 m_2 、$\cdots$、 m_k 條，則其圖形的交點數為

$$g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=g(n)-\frac{B_m-A_m}{2}$$ ，其中 $A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i$ 、 $B_m=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}$

證明：依 $g_m(9;3,2)$ 的解題方式，首先我們先拿掉其 k 組平行線，則此時共有 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條不平行也不共點的直線，可形成 $g(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)$ 個交點，我們再加上第一組 m_1 條平行線，每一條都會與原本的 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條直線有交點，增加 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 個交點，共可增加 $m_1(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)$ 個交點；又再加上第二組 m_2 條平行線，每一條都會與原本的 $n-\sum_{i=1}^{k}m_i$ 條與 m_1 條直線皆有交點，也就是與 $n-\sum_{i=2}^{k}m_i$ 條直線有交點，增加 $n-\sum_{i=2}^{k}m_i$ 個交點，共可增加 $m_2(n-\sum_{i=2}^{k}m_i)$ 個交點。由此可知第三組共增加 $m_3(n-\sum_{i=3}^{k}m_i)$ 個交點，$\cdots$，第 k 組共增加 $m_k(n-m_k)$ 個交點，因而我們得知以下結論：

$$g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=g(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+m_1(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+m_2(n-\sum_{i=2}^{k}m_i)+\cdots+m_k(n-\sum_{i=k}^{k}m_i)$$

$$=g(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+\sum_{j=1}^{k}\left[m_j(n-\sum_{i=j}^{k}m_i)\right]$$

但 $g(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+\sum_{j=1}^{k}\left[m_j(n-\sum_{i=j}^{k}m_i)\right]$ 的結果不夠簡潔，所以我們再進一步化簡。

原式 $=g(n-\sum_{i=1}^{k}m_i)+n\sum_{j=1}^{k}m_j-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}m_jm_i$ ，假設 $\sum_{i=1}^{k}m_i=A_m$ ，

則原式 $=g(n-A_m)+nA_m-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}m_jm_i$

$$=\frac{(n-A_m)^2-(n-A_m)}{2}+nA_m-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}m_jm_i$$

，其中$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}m_j m_i = m_1(m_1+m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_2+m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_k m_k$

$$=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}+m_1(m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_{k-1}m_k$$

因爲$(m_1+m_2+\cdots+m_k)^2$展開後的k^2項可寫成下列$k\times k$的樣子：

$$\begin{array}{ccccccc}
m_1^{\ 2} & m_1m_2 & m_1m_3 & \cdots & \cdots & m_1m_{k-1} & m_1m_k \\
m_1m_2 & m_2^{\ 2} & m_2m_3 & \cdots & \cdots & m_2m_{k-1} & m_2m_k \\
m_1m_3 & m_2m_3 & m_3^{\ 2} & & & & m_3m_k \\
\vdots & \vdots & & m_4^{\ 2} & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
m_1m_{k-1} & m_2m_{k-1} & & & & \ddots & m_{k-1}m_k \\
m_1m_k & m_2m_k & m_3m_k & \cdots & \cdots & m_{k-1}m_k & m_k^{\ 2}
\end{array}$$

故上半三角形黑色的總和，即指$m_1(m_2+\cdots+m_k)+m_2(m_3+\cdots+m_k)+\cdots+m_{k-1}m_k$

會等於$\dfrac{(\sum_{i=1}^{k}m_i)^2-\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}}{2}=\dfrac{A_m^{\ 2}-B_m}{2}$，在此令$\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}=B_m$

則$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}m_j m_i=B_m+\dfrac{A_m^{\ 2}-B_m}{2}=\dfrac{A_m^{\ 2}+B_m}{2}$

所以原式$=\dfrac{(n-A_m)^2-(n-A_m)}{2}+nA_m-\dfrac{A_m^{\ 2}+B_m}{2}=\dfrac{n^2-n-B_m+A_m}{2}$

$=g(n)-\dfrac{B_m-A_m}{2}$，其中$A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i$、$B_m=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}$

舉之前$g_m(9;3,2)=32$的例子來驗證一下：

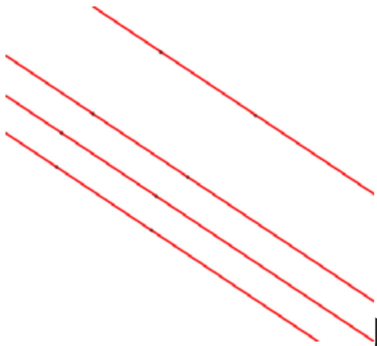
$g(9)=36$、$A_m=3+2=5$、$B_m=3^2+2^2=13$，則$g(9)-\dfrac{B_m-A_m}{2}=36-4=32$成立

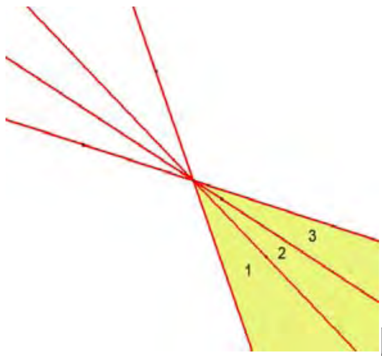
【研究二】探討 n 條不平行直線中有某些共點的直線，其圖形的「區域數」與「交點數」為何

一、 n 條不平行的直線，**其中有某些共點的直線，其圖形的「區域數」為何。**

如果將平行的條件換成「共點」的情況，對區域數又會作何變化？一開始我們從不平行也不共點的直線中，去增加一組三條共點的圖形，來觀察區域數的變化，但如果多組共點時，用這種方法討論會相當複雜，所以我們改成用平行的直線綁成共點的情形，來討論區域數的變化會簡單許多，以下為例：

首先觀察 4 條直線平行或共點的圖形，如圖(25)和圖(26)，其區域數的差異。

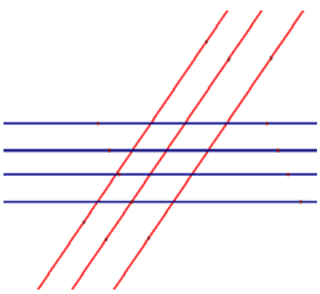

圖(25)

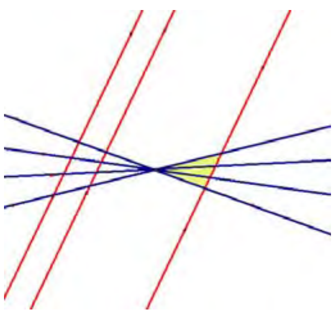


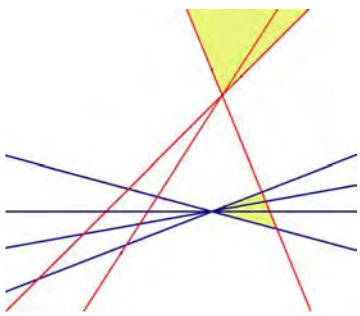
圖(26)

從圖(25)可看出是 4 條平行線是將平面切成 5 個區域，但 4 條共點的圖(26)可看成是用橡皮圈將 4 條平行的直線在共點的位置綁起來，從著色部份可以很明顯看出來多的 3 個區域是共點的直線總數減 1，即 4－1。

再來我們觀察：二組平行與共點的圖形如圖(27)、圖(28)、圖(29)，其區域數不同之處，見下例：


圖(27)


圖(28)

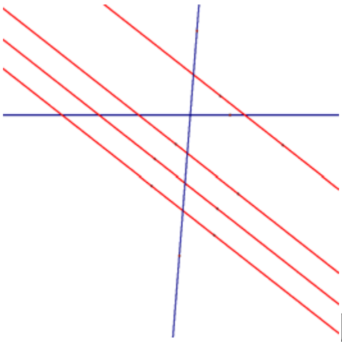

圖(29)

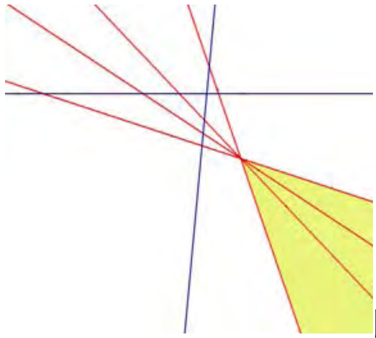
從圖(27)與圖(28)可看出：4 條共點的部份比 4 條平行多了 3 個區域；

從圖(28)與圖(29)可看出：3 條共點的部份比 3 條平行多了 2 個區域。

故我們可得知：**n 條共點的直線比 n 條平行的直線多了 $n-1$ 個區域數**。

我們來看個例子：圖(30)中，$n=6$ 條直線，其中 $m=4$(4 條平行)，而圖(31)中，$n=6$ 條直線，其中 $p=4$(4 條共點)，$f_m(6;4)=\dfrac{(6-4+1)(6+4)+2}{2}=16$，因爲 4 條共點的區域比 4 條平行多了 3 個區域數，故 $f_p(6;4)=f_m(6;4)+(4-1)=19$


圖(30)


圖(31)

因此我們利用此性質推廣以下的性質 6 與性質 7。

性質 6：在一平面上，有 n 條不平行的直線，其中有 p 條共點，則其可切割的區域數

$$f_p(n;p)=f(n)-\frac{p^2-3p+2}{2}$$

證明：因爲 p 條共點的直線比 p 條平行的直線多了 $p-1$ 個區域數

故 $f_p(n;p)=f_m(n;p)+(p-1)=\dfrac{n^2+n+2-p^2+p}{2}+(p-1)$ …根據性質(1)

$$=\frac{n^2+n+2-p^2+3p-2}{2}=f(n)-\frac{p^2-3p+2}{2}$$

性質 7：在一平面上，有 n 條不平行的直線，其中有 h 組共點，分別有 p_1、p_2、…、p_h 條，則其可切割的區域數

$$f_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f(n)-\frac{B_p-3A_p+2h}{2}$$ ，其中 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^2$

證明：因爲 p 條共點的直線比 p 條平行的直線多了 $p-1$ 個區域數

所以有 h 組共點的直線比 h 條平行的直線多了 $\sum_{i=1}^{h}(p_i-1)$ 個區域數

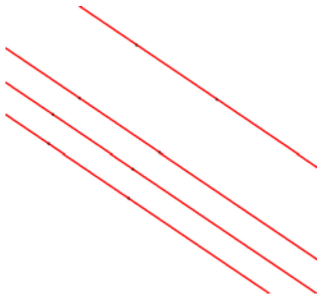
故 $f_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f_m(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)+\sum_{i=1}^{h}(p_i-1)$

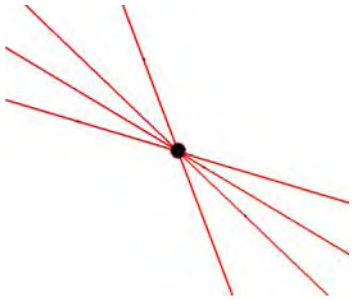
$$=f(n)-\frac{B_p-A_p}{2}+A_p-h=f(n)-\frac{B_p-3A_p+2h}{2}$$

，其中 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^2$

二、 n 條不平行的直線，其中有某些**共點**的直線，其圖形的「交點數」爲何。

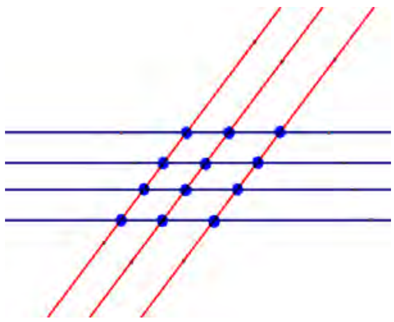
首先觀察一組 4 條直線平行或共點的圖形，如圖(32)、(33)，其交點數的差異。

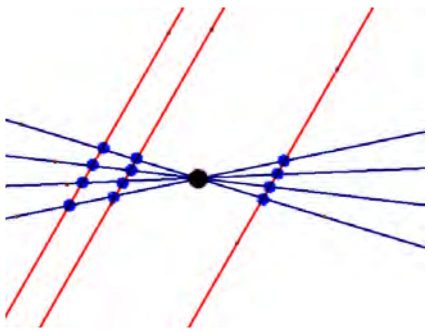

圖(32)

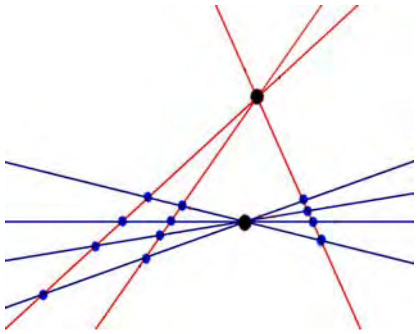

圖(33)

從圖(32)可看出是 4 條平行線不會有交點，但 4 條共點的圖(33)可看成是用橡皮圈將 4 條平行的直線在共點的位置綁起來，**很明顯是多了 1 個交點**。

再來觀察二組平行與共點的圖形，如圖(34)、(35)、(36)，其交點數的不同之處：


圖(34)


圖(35)

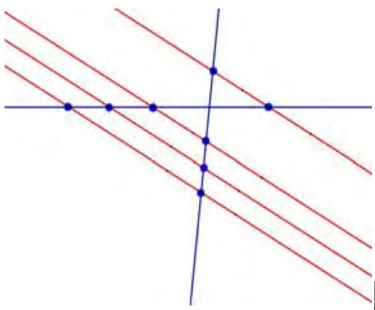

圖(36)

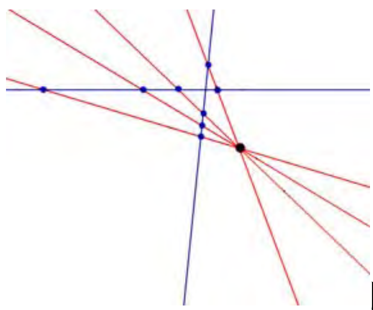
從圖(34)與圖(35)可看出：4 條共點比 4 條平行多了 1 個交點；

從圖(35)與圖(36)可看出：3 條共點比 3 條平行多了 1 個交點。

故我們可得知： n 條共點的直線比 n 條平行的直線多了 1 個交點。

我們來看個例子：如圖(37)中，$n=6$ 條直線，其中 $m=4$(4 條平行)，而圖(38)中，$n=6$ 條直線，其中 $p=4$(4 條共點)， $g_m(6;4)=g(6)-\dfrac{4^2-4}{2}=9$ ，因爲 4 條共點比 4 條平行多了 1 個交點數，故 $g_p(6;4)=g_m(6;4)+1=10$


圖(37)


圖(38)

因此我們利用此性質推廣以下的性質 8 與性質 9。

性質 8：在一平面上，有 n 條不平行的直線，其中有 p 條共點，則其圖形的交點數

$$g_p(n;p)=g(n)-\frac{p^2-p-2}{2}$$

證明：因爲 p 條共點直線比 p 條平行的直線多了 1 個交點

故 $g_p(n;p)=g_m(n;p)+1=\dfrac{n^2-n-p^2+p}{2}+1$ …根據性質(1)

$$=\frac{n^2-n-p^2+p+2}{2}=g(n)-\frac{p^2-p-2}{2}$$

性質 9：在一平面上，有 n 條不平行的直線，其中有 h 組共點，分別有 p_1 、 p_2 、…、 p_h 條，則其圖形的交點數

$$g_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g(n)-\frac{B_p-A_p-2h}{2}$$ ，其中 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^{\,2}$

證明：因爲 p 條共點比 p 條平行多了 1 個交點

所以有 h 組共點比 h 組平行多了 h 個交點

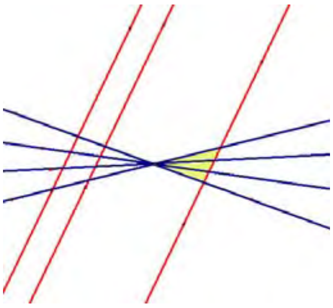
故 $g_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g_m(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)+h$

$$=g(n)-\frac{B_p-A_p}{2}+h=g(n)-\frac{B_p-A_p-2h}{2}$$

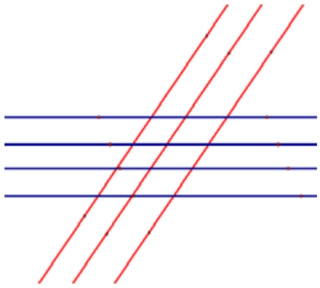
，其中 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^{\,2}$

【研究三】探討 n 條直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1 、 m_2 、…、 m_k 條，以及有 h 組共點，分別有 p_1 、 p_2 、…、 p_h 條，其圖形的「區域數」與「交點數」為何。

由之前【研究二】討論得知:「平行與共點」間的區域數與交點數是息息相關的，所以在【研究三】我們要研究<u>同時含有平行與共點</u>圖形的區域數與交點數為何？



圖(39)



圖(40)

如圖(39)可視為 $m_1=3$ 、 $p_1=4$ 的圖形，跟圖(40) $m_1=3$ 、 $m_2=4$ 比較可明顯看出多了 3 個區域，即 4－1＝3，所以我們的想法是不管平行或共點，先通通視為平行的情況，最後再加上共點所增加的區域數即可。

性質 10：在一平面上的 n 條直線，其中有 k 組平行，分別有 m_1 、 m_2 、…、 m_k 條，以及有 h 組共點，分別有 p_1 、 p_2 、…、 p_h 條，則其圖形的區域數為

$$f_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f(n)-\frac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+(A_p-h)$$

，其中 $A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}+\sum_{i=1}^{h}p_i^{\ 2}$ 、 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$

證明：可以先看成有 $k+h$ 組的平行的情形

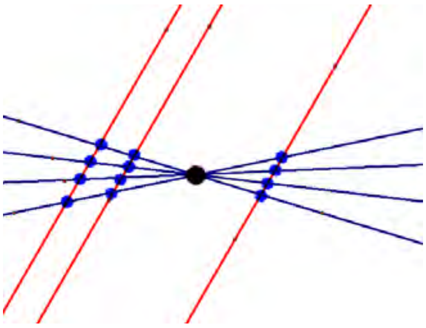
但實際上 p 條共點的區域比 p 條平行多了 $p-1$ 個區域數

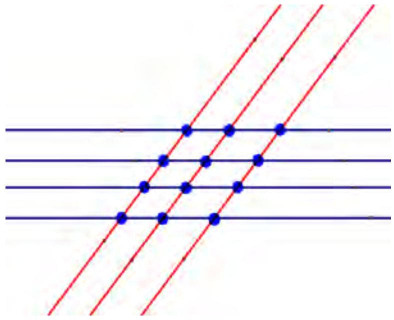
所以有 h 組共點的區域比 h 條平行多了 $\sum_{i=1}^{h}(p_i-1)$ 個區域數

$$\text{故 } f_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)+\sum_{i=1}^{h}(p_i-1)$$

$$=f(n)-\frac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+A_p-h$$

，其中 $A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\ 2}+\sum_{i=1}^{h}p_i^{\ 2}$ 、 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$


圖(41)


圖(42)

同理，如圖(41)可視爲$m_1=3$、$p_1=4$的圖形，跟圖(42)$m_1=3$、$m_2=4$比較，可明顯看出多了 1 個交點(即共點會比平行時多了 1 個交點)，所以我們的想法，同樣是不管平行或共點，先通通視爲平行的情況，最後再加上共點所增加的交點數即可。

性質 11：在一平面上的n條直線，，其中有k組平行，分別有m_1、m_2、…、m_k條，以及有h組共點，分別有p_1、p_2、…、p_h條，則其圖形的交點數為

$$g_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g(n)-\frac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+h$$

，其中$A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$、$B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\,2}+\sum_{i=1}^{h}p_i^{\,2}$、$A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$

證明：可以先看成有$k+h$組的平行情形

但實際上因爲p條共點比p條平行多了 1 個交點

所以有h組共點比h組平行多了h個交點

故$g_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)+h$

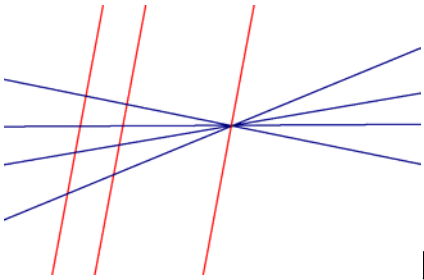
$$=g(n)-\frac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+h$$

，其中$A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$、$B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^{\,2}+\sum_{i=1}^{h}p_i^{\,2}$、$A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$

但在之前的討論中，我們忽略掉兩種情況的圖形：

第一種：一組共點剛好在其中一組平行的線上(即共點與平行共用同 1 直線)

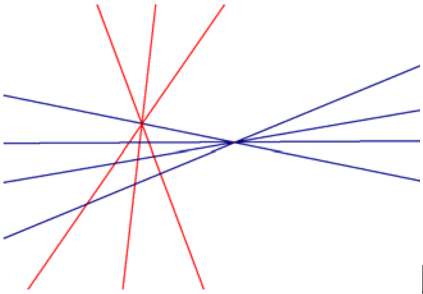
如下圖(43)的 $m_1 = 3$ 、 $p_1 = 5$ ， p_1 共點的位置剛好在 m_1 其中的一條線上



圖(43)

第二種：一組共點剛好在另一組共點的線上(即兩組共點共用同 1 直線)

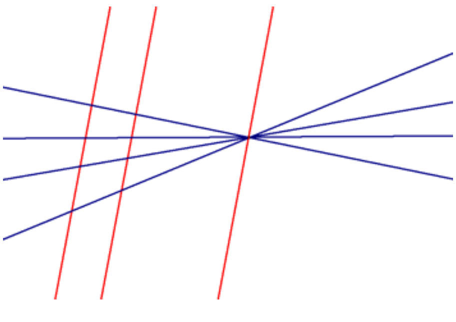
如下圖(44)的 $p_1 = 4$ 、 $p_2 = 4$ ， p_2 共點的位置剛好在 p_1 其中的一條線上



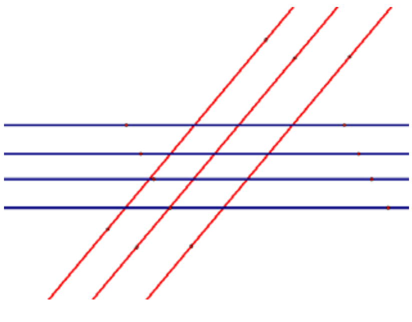
圖(44)

因此，我們再來要討論的是：如果遇到這兩種情況，之前的區域數與交點數的公式是否會成立？

我們拿第一種情況來討論：如圖(45) $m_1 = 3$ 、 $p_1 = 5$ 與圖(46) $m_1 = 3$ 、 $m_2 = 4$ ，圖(45)中的 $p_1 = 5$ 可看成是圖(46)的 $m_2 = 4$ 條平行線用橡皮圈綁起來剛好在 m_1 的其中一線上，則本來 m_2 平行的 4 條就變成 p_1 共點的 5 條，總線數同樣是 7 條。此外，很明顯區域總數不變，但平行 4 線原本的 4 個交點被縮成 1 個交點，故交點數少了 3 個點，即 4－1。



圖(45)



圖(46)

$\therefore \quad f_{m,p}(7;3;5) = f_m(7;3,4)$ 、 $g_{m,p}(7;3;5) = g_m(7;3,4) - 3$

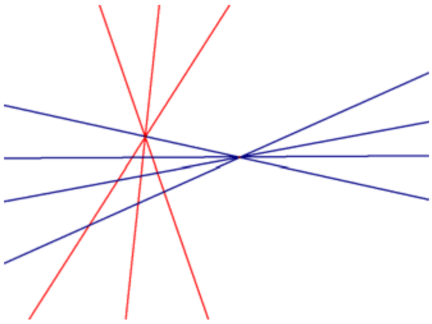
多畫幾個圖形後，我們發現：若有一組 p_1 條共點的直線其共點恰好落在一組 m_1 條平行線的其中一條，則其區域數跟兩組 m_1 條與 $m_2(m_2=p_1-1)$ 條平行的直線是一樣的，但交點數會少 m_2-1 個 ，即兩種情況的總線數都是一樣的。將兩種條件代入之前的公式來驗証：

$$\begin{aligned} f_m(n;m_1,m_2) &= f(n)-\frac{m_1^{\ 2}-m_1}{2}-\frac{m_2^{\ 2}-m_2}{2} \\ &= f(n)-\frac{m_1^{\ 2}-m_1}{2}-\frac{(p_1-1)(p_1-2)}{2} \\ &= f_{m,p}(n;m_1;p_1) \quad \cdots\text{代表區域數一樣} \end{aligned}$$

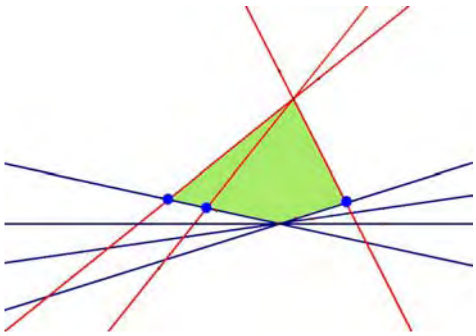
$$\begin{aligned} g_m(n;m_1,m_2)-(m_2-1) &= g(n)-\frac{m_1^{\ 2}-m_1}{2}-\frac{m_2^{\ 2}-m_2}{2}-(m_2-1) \\ &= g(n)-\frac{m_1^{\ 2}-m_1}{2}-\frac{(p_1-2)(p_1+1)}{2} \\ &= g_{m,p}(n;m_1;p_1) \quad \cdots\text{代表交點數少 } m_2-1\text{個} \end{aligned}$$

由上面的式子推論，我們得知：即使遇到第一種情況，其區域數與交點數也是符合性質 10 與性質 11 的結論。

我們再拿第二種情況來觀察：如圖(47) $p_1=4$ 、 $p_2'=4$ 與圖(48) $p_1=4$ 、 $p_2=3$，若圖(48)中的 p_2 ＝3 條直線的共點剛好落在另一組 $p_1=4$ 的其中一條直線上，則圖(48)中 $p_2=3$ 就演變成圖(47)中的 $p_2'=4$ 的情形，兩個圖的總線數同樣是 7 條。此時，因爲圖(47)中的 $p_2'=4$ 直接在 $p_1=4$ 的線上，少了原本圖(48) $p_2=3$ 與 $p_1=4$ 圍成的 2 個區域，即 3－1＝2，同時交點數也少了 3 個，即圖(48)的 $p_2=3$ 個。



圖(47)



圖(48)

$\therefore \quad f_p(7;4,4)=f_p(7;4,3)-2$ 、 $g_p(7;4,4)=g_p(7;4,3)-3$

多畫幾個圖形後，我們發現：若有一組 p_1 條共點的直線恰好在另一組 p_2' 條共點的其中一條直線的圖形，其區域數會跟兩組沒有共用直線的 p_1 條和 $p_2(p_2=p_2'-1)$ 條共點的圖形少了 p_2-1 個，但交點數會少 p_2 個，但兩種情況總線數都是一樣。將兩種條件代入之前的公式來驗証：

$$\begin{aligned}
f_p(n;p_1,p_2)-(p_2-1) &= f(n)-\frac{p_1^2-3p_1+2}{2}-\frac{p_2^2-3p_2+2}{2}-(p_2-1)\\
&= f(n)-\frac{p_1^2-3p_1+2}{2}-\frac{p_2'^2-3p_2'+2}{2}\\
&= f_p(n;p_1,p_2') \quad \cdots\text{代表區域數少 } p_2-1\text{ 個}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_p(n;p_1,p_2)-p_2 &= g(n)-\frac{p_1^2-p_1-2}{2}-\frac{p_2^2-p_2-2}{2}-p_2\\
&= g(n)-\frac{p_1^2-p_1-2}{2}-\frac{p_2'^2-p_2'-2}{2}\\
&= g_p(n;p_1,p_2') \quad \cdots\text{代表交點數少 } p_2\text{ 個}
\end{aligned}$$

由上面的式子推論：我們得知即使遇到第二種情況，其區域數與交點數也是符合性質 10 與性質 11 的結論。

故我們得知不管怎樣的情況，在一平面上，n 條直線相交後的圖形必符合下面公式：

性質 10：區域數 $f_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f(n)-\dfrac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+(A_p-h)$

性質 11：交點數 $g_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g(n)-\dfrac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+h$

，其中 $A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$ 、 $B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^2+\sum_{i=1}^{h}p_i^2$ 、 $A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$

同時可得知：同一圖形中，區域數－交點數$=f(n)-g(n)+A_p-2h$

【研究四】17 線問題的探討

傅立葉提出的 17 線問題：「在平面上作 17 條直線，使其交點數爲 101 個」，可做到嗎？17 條不平行也不共點的直線，會產生的交點數爲 136 個，所以要讓交點數爲 101 個，必須要減少 35 個，所以要再加上平行或共點的條件才能讓交點數減少。因爲有共點的直線會出現研究三中的兩種特殊狀況，所以只用平行的條件去畫線，則不會有共用線的問題產生，因此我們先探討只畫平行線，不畫共點的所有解法，運用之前的**性質 5：**

在一平面上，有 n 條不共點的直線，其中有 k 組平行，分別為 m_1、m_2、⋯、 m_k 條，則其圖形的交點數為

$$g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=g(n)-\frac{B_m-A_m}{2}$$ ，其中 $A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i$ 、 $B_m=\sum_{i=1}^{k}{m_i}^2$

其中 $\frac{B_m-A_m}{2}$ 可改寫爲 $\frac{\sum_{i=1}^{k}{m_i}^2-\sum_{i=1}^{k}m_i}{2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{{m_i}^2-m_i}{2}$ ，

而 $\frac{{m_i}^2-m_i}{2}=1+2+\cdots+(m_i-1)$ ，即三角形數，所以 $g(n)-g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{{m_i}^2-m_i}{2}$ ，即三角形數的總和(三角形數可以相同也可以不同)。

因此，我們知道 17 線問題中： $g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=101$ ， $g(n)=$ 136，少掉的 35 個點，從公式中知道可視爲是三角形數的總和，小於 35 的三角形數有 1、3、6、10、15、21、28，如下表：

三角形數 $\frac{{m_i}^2-m_i}{2}$	1	3	6	10	15	21	28
m_i 條平行線	2	3	4	5	6	7	8

用電腦程式跑出來符合的結果有下列四種情況的組合：

(要符合 $\sum_{i=1}^{k}m_i\le n=17$ 與 $\sum_{i=1}^{k}\frac{{m_i}^2-m_i}{2}=35$)。

35 = 28+3+3+1 $\Rightarrow g_m(17;8,3,3,2)=101$

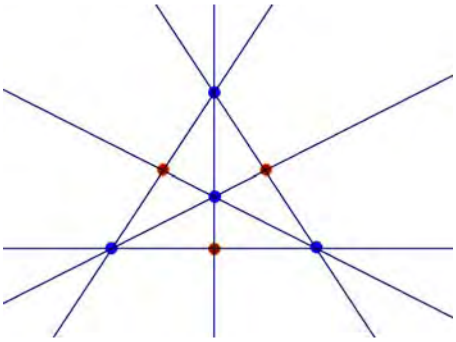
= 21+10+3+1 $\Rightarrow g_m(17;7,5,3,2)=101$

= 15+10+10 $\Rightarrow g_m(17;6,5,5)=101$

= 28+6+1 $\Rightarrow g_m(17;8,4,2)=101$

由於共點的直線會出現特殊情況(同研究三)，所以$\sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{h} p_i \le n$不一定會成立。

以下圖爲例：$g_p(6;3,3,3,3)=7$，但$\sum_{i=1}^{h} p_i = 3+3+3+3=12>6=n$，這就是因爲不同共點間有共用的直線的關係。



目前還沒找到完整的條件讓電腦跑出共點或共點加平行的所有情況，這是今後我們要研究的方向！

柒、研究結論

一、n條直線有平行或共點的區域數公式與$f(n)$的關係，$f(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

條件	區域數公式與$f(n)$的關係
m 條平行	$f_m(n;m)=f(n)-\dfrac{m^2-m}{2}$
k 組平行	$f_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=f(n)-\dfrac{B_m-A_m}{2}$，其中$A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i$、$B_m=\sum_{i=1}^{k}m_i^2$
p 條共點	$f_p(n;p)=f(n)-\dfrac{p^2-3p+2}{2}$
h 組共點	$f_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f(n)-\dfrac{B_p-A_p}{2}+(A_p-h)$，其中$A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$、$B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^2$

二、n條直線有平行或共點的交點數公式與$g(n)$的關係，$g(n)=\dfrac{n^2-n}{2}$

條件	交點數公式與$g(n)$的關係
m 條平行	$g_m(n;m)=g(n)-\dfrac{m^2-m}{2}$
k 組平行	$g_m(n;m_1,m_2,\cdots,m_k)=g(n)-\dfrac{B_m-A_m}{2}$，其中$A_m=\sum_{i=1}^{k}m_i$、$B_m=\sum_{i=1}^{k}m_i^2$
p 條共點	$g_p(n;p)=g(n)-\dfrac{p^2-p-2}{2}$
h 組共點	$g_p(n;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g(n)-\dfrac{B_p-A_p}{2}+h$，其中$A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$、$B_p=\sum_{i=1}^{h}p_i^2$

三、在一平面上的n條直線，其圖形必符合下面公式：

(1) 區域數 $f_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=f(n)-\dfrac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+(A_p-h)$

(2) 交點數 $g_{m,p}(n;m_1,m_2,\cdots,m_k;p_1,p_2,\cdots,p_h)=g(n)-\dfrac{B_{m+p}-A_{m+p}}{2}+h$

，其中$A_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{h}p_i$、$B_{m+p}=\sum_{i=1}^{k}m_i^2+\sum_{i=1}^{h}p_i^2$、$A_p=\sum_{i=1}^{h}p_i$

四、只考慮畫平行線的情況下，找到四組$g_m(17;8,3,3,2)$、$g_m(17;7,5,3,2)$、$g_m(17;6,5,5)$、$g_m(17;8,4,2)$符合 17 線問題的畫法。

捌、未來發展

一、給 n 條直線與特定的「區域數」，可以利用電腦程式跑出全部的情況。

二、給 n 條直線與特定的「交點數」，可以利用電腦程式跑出全部的情況。

玖、參考資料

一、Brian Bolt（民 85）。數學遊樂園之趣味盎然。牛頓出版。

二、Brian Bolt（民 85）。數學遊樂園之舉一反三。牛頓出版。

三、吳振奎、吳旻 (2002)。名人趣題妙解。九章出版

【評語】030410

1. 作品說明順暢，團隊合作良好。

2. 主題內容與國中教材連結適切。

3. 所用數學論證簡易。

4. 主題內容未見創新。

5. 傅立葉 17 線問題討論可更深入，探討可能性需更廣泛。