中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030409

圓柱積木的遊戲設計概念及其解的尋找

學校名稱：新北市立五股國民中學

作者：	指導老師：
國二 林文心	孫正大
國二 薛嘉宜	王晞安
國二 秦　如	

關鍵詞：圓柱積木、排列群、Burnside's Formula

圓柱積木的遊戲設計概念及其解的尋找

摘要

本研究從圓柱積木遊戲的「位置數、盤數、洞數、柱高、柱數」數量開始，第一部份反思遊戲的設計概念。在盤數的關係中採用代數的觀點探討；在洞數、柱高與柱數的關係中，根據遊戲規則找出關係式，最後得到給定位置數時，盤數與洞數就能被決定，而柱高僅有有限種選擇，柱數則跟隨著柱高改變。

第二部份則尋找位置數為 6 的圓柱積木可行解：首先利用洞數與盤數的關係列出洞數解，並定義何謂相同解；再利用二元記錄法，畫圖找出所有的空間解(也就是實際可行解)，並在附錄中揭錄詳細的排法。

透過這些一般性方法，往後我們也能藉此尋找更多洞數的圓柱積木遊戲可行解。

壹、研究動機

在中華民國第 49 屆及第 51 屆的中小學科展中，有作品介紹了「圓柱積木」這個遊戲，並嘗試研究可行解的規則與數量。這引發我們對這件作品更深一層的好奇心。

關於這個遊戲的設計，為什麼每盤有 6 個位置數時，盤數會有 13 盤，且每根柱子的高度為 3？若以填滿所有洞為目標，如果每盤的位置數不為 6，盤數會有什麼變化，柱高又有什麼限制條件？進一步地，位置數為 6 的圓柱積木，可行解各有多少組？是否有些堆疊的規律？

貳、研究目的

一、探討圓柱積木位置數(任意給定)、盤數、洞數、柱高、柱數間的關係。

二、找出位置數為 6(特定，實體遊戲)的圓柱積木所有可行解。

參、研究工具

二元記錄板、紙、筆、Microsoft Office Word、Microsoft Office Excel。

肆、符號解釋與遊戲介紹

以下我們對遊戲中的幾個變數做定義，以便探討遊戲的設計概念：

一、位置數(n)

圓柱積木每個盤可視為有 n 個位置，每個位置可開洞或不開洞。

二、盤數(k)

整組遊戲的總盤數以 k 表示。

三、洞數(x)

將每個盤開洞的數量加總起來，稱為整組遊戲的總洞數，以 x 表示。

四、柱高(h)

遊戲中每根圓柱的高度都相同，以 h 表示，意即柱高等於 h 個圓盤疊起來的高度。

五、柱數(s)

遊戲中圓柱的總圓柱數量稱為柱數，以 s 表示。

六、圓柱積木遊戲介紹

每個圓盤的圓周上有 6 個位置(**n＝6**，中心貫穿連接所有盤的洞不計)，如圖 1：整組遊戲共有 13 個相異盤(**k＝13**)，每盤的開洞方式皆不相同，但整組遊戲的洞數共有 39 個(**x=39**)；每根圓柱的高度皆為 3(**h＝3**)，整組遊戲共有 13 個圓柱(**s＝13**)。

遊戲的規則是將各盤堆疊在一起，盤可以任意旋轉或翻轉，並放入圓柱；當堆疊完成時，所有 13 根圓柱必須剛好被用盡(也就是說填了 13x3＝39 個洞，而所有盤開的洞數總和恰好是 39 個洞，因此每個洞都必須被填滿)，完成的樣貌如圖 2。

圖 1：圓柱積木遊戲組

圖 2：完成的樣貌

研究流程圖一

遊戲設計概念：位置數、盤數、洞數、柱高、柱數間的關係

將位置編號，考慮S_n的子集G_n (旋轉及翻轉動作)

旋轉動作：$\left|X_g\right| = \sum_{d|n} \phi(d) \cdot 2^{\frac{n}{d}}$

翻轉動作：

n為偶數時$\left|X_g\right| = \frac{3}{2} n \cdot 2^{\frac{n}{2}}$

n為奇數時$\left|X_g\right| = n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$

引入 Burnside's Formula：盤數$k = \frac{1}{\left|G_n\right|} \sum_{g \in G_n} \left|X_g\right|$

不同開洞數的盤數會被個別決定，故總洞數x被決定

n為奇數時的總洞數公式：$x = n + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{a}{2n} \left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a) \\ d|n}} \frac{\phi(d) \times \left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)! \left(\frac{n-a}{d}\right)!} \right) + \frac{n \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left[\frac{a}{2}\right]! \left[\frac{n-a}{2}\right]!} \right)$

n為偶數時的總洞數公式：

$$x = 2n + \sum_{a=2}^{n-2} \frac{a}{2n} \left\{ \left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a) \\ d|n}} \frac{\phi(d) \times \left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)! \left(\frac{n-a}{d}\right)!} \right) + \left(\frac{n-2}{2}\right)! \times \frac{n}{2} \times \left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)! \left(\frac{n-a}{2}\right)!} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)! \left(\frac{n-a-2}{2}\right)!} \right) + \frac{n}{2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)! \left(\frac{n-a}{2}\right)!} \right\} \times \left(a - 2\left[\frac{a-1}{2}\right] - 1 \right)$$

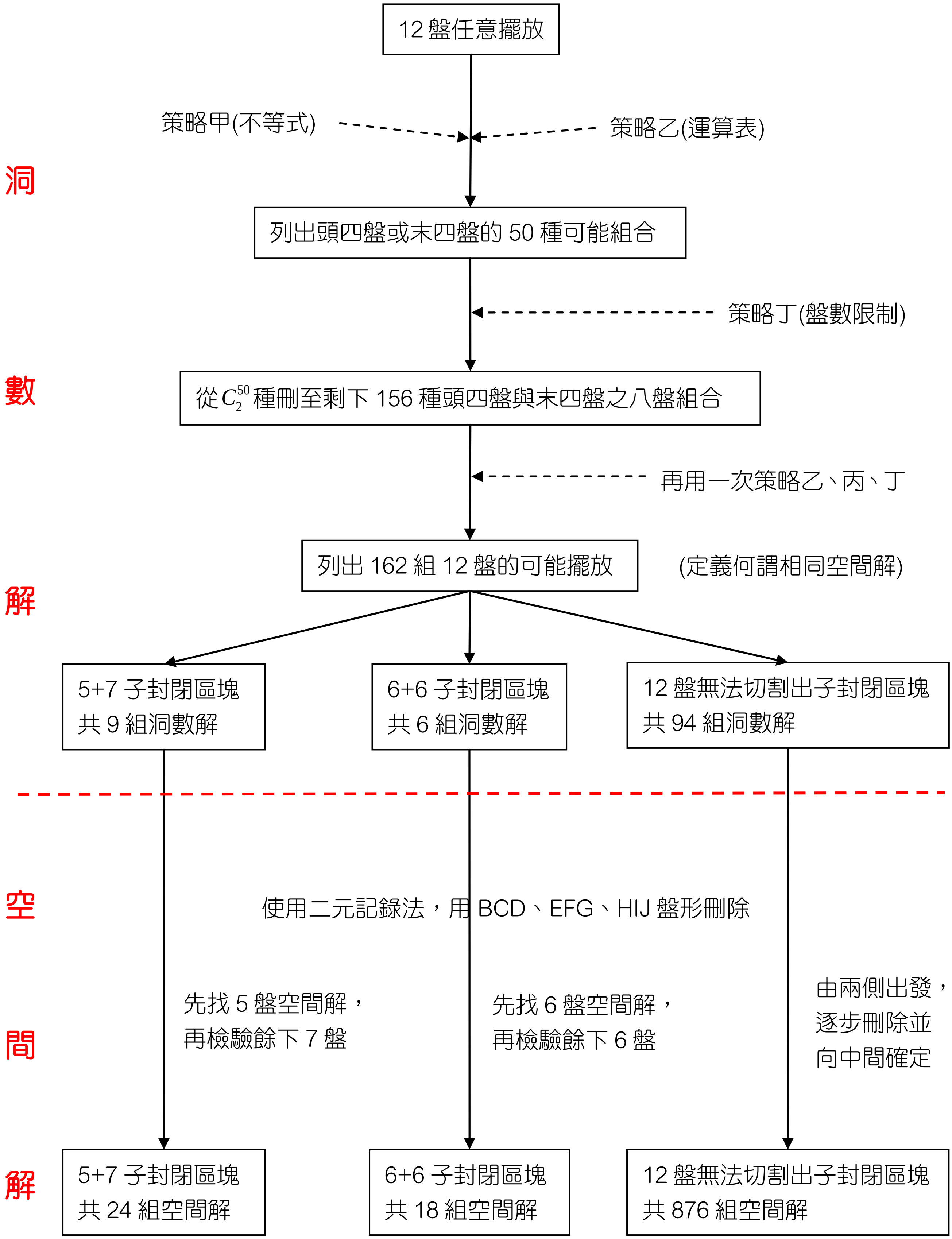
$$+ \sum_{a=1}^{n-1} \frac{a}{2n} \left\{ \left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a) \\ d|n}} \frac{\phi(d) \times \left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)! \left(\frac{n-a}{d}\right)!} \right) + \frac{n}{2} \times \left(\frac{n-2}{2}\right)! \times 2 \times \frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)! \left(\frac{n-a-1}{2}\right)!} \right\} \times \left(a - 2\left[\frac{a-1}{2}\right] \right)$$

$x = hs$，且$1 < h < k$ 、$2h - 1 \le k$ (封閉區塊限制)

給出$n = 2 \sim 8$的盤數、柱數及柱高例子

研究流程圖二

位置數為 6 的圓柱積木可行解



伍、研究結果

一、位置數、盤數、洞數、柱高、柱數間的關係

位置數為 6 時，我們發現 13 個盤的開洞情形(後稱為**等價類**)皆不相同，而且沒有這 13 種以外的開洞情形。故可以假定：**遊戲盤數的設計時需使相異的盤(等價類)各恰使用一次**。在此前提下，位置數、盤數、洞數、柱高、柱數，這五個變數間的關係為何？

現給定位置數 n，那麼盤數 k 是否能以位置數 n 的函數來表示呢？

(一)總盤數

1.代數化處理

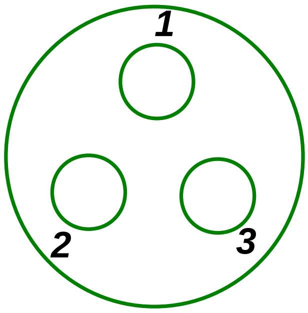


圖 3：將每個洞予以編號

因為每個位置上的洞可開或可不開，並且旋轉或翻轉都視為相同的等價類，因此盤數的計算即不盡相異物的珠狀排列問題。

我們嘗試以代數的觀點來探討這個問題：設 $A=\{1,2,3,\ldots n\}$，S_n 表 A 集合上所有排列方法形成的集合(排列群)，則 $|S_n|=n!$，再將圓柱積木上的洞編上 1~n 號，我們以 $n=3$ 為例，如圖 3，可知 $|S_3|=6$，並給定名稱 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ ：

$$e=\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)、\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\,2\,3)、\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\,3\,2)、$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\,3)、\sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(2)(1\,3)、\sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(3)(1\,2)$$

注意這 6 個排列方法恰好能分別對應圓盤的旋轉或翻轉動作：

σ_1 為圓盤不動、σ_2 為旋轉 120°、σ_3 為旋轉 -120°、

σ_4 為對稱軸過 1 的翻轉、σ_5 為對稱軸過 2 的翻轉、σ_6 為對稱軸過 3 的翻轉。

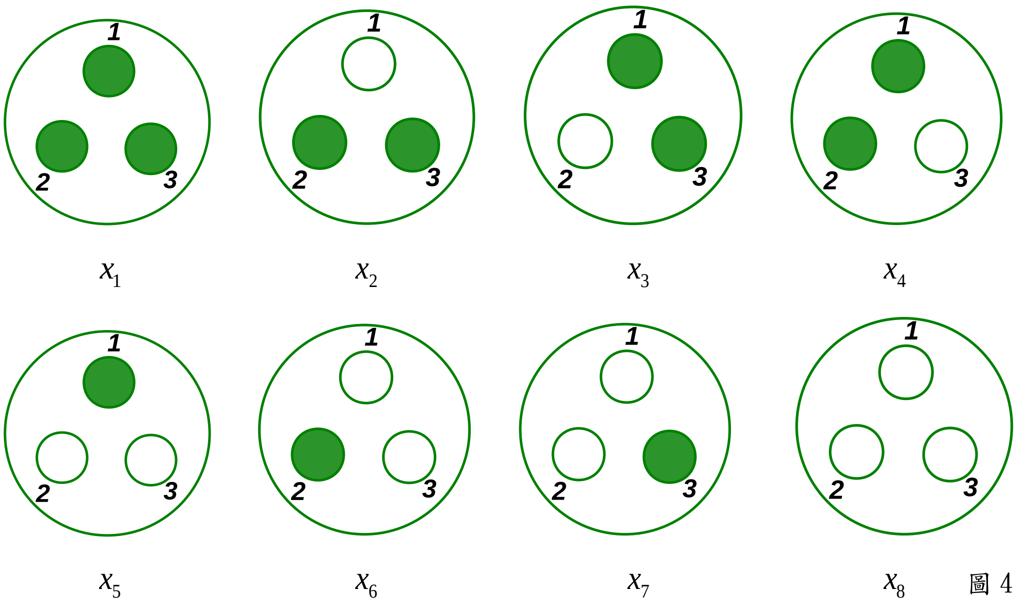


圖 4：n=3 時的 8 種配置

這三個位置有開洞或不開洞兩種選擇，按重複排列計算共有2^3種情形。令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$表每個位置上分別為有無開洞的 8 種結果(如上頁圖 4)，把這 8 種情形各稱為一種**<u>配置</u>**，有些配置經旋轉或翻轉運動後會相同，再討論那些會相同的配置可分成幾類。

$n=4$時，雖然$|S_4|=4!=24$，但實際上可被當作圓盤旋轉或翻轉的動作不到 24 種。例如不會出現$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(1)(2\ 3\ 4)$這種對稱軸只過 1 的翻轉，我們觀察到$S_4$中可做的動作只有以下(圖 5)這 8 種，並令這 8 種動作所形成的集合為G_4。

$G_4\subset S_4$			
排列方法	旋轉動作	排列方法	翻轉動作
$e=(1)(2)(3)(4)$	轉0°	$(1\ 2)(3\ 4)$	對稱軸過$1,2$間和$3,4$間的翻轉
$(1\ 2\ 3\ 4)$	轉90°	$(1\ 4)(2\ 3)$	對稱軸過$1,4$間和$2,3$間的翻轉
$(1\ 3)(2\ 4)$	轉180°	$(1)(3)(2\ 4)$	對稱軸過$1,3$的翻轉
$(1\ 4\ 3\ 2)$	轉270°	$(2)(4)(1\ 3)$	對稱軸過$2,4$的翻轉
共 4 種動作		共 4 種動作	
合計共 8 種動作			

圖 5：n=4 時只有 8 種動作可做

則當$G_n\subset S_n$時，我們可得知旋轉有n種動作：轉$\frac{k}{n}\times 360^\circ$，$k=0\sim n-1$；

翻轉也有n種動作：

$$\begin{cases}\text{奇數時：對稱軸過}k\text{的翻轉，}k=1\sim n\text{ 共有}n\text{ 個}\\ \text{偶數時：對稱軸過}k\text{及}k+\frac{n}{2}\text{的翻轉，}k=1\sim\frac{n}{2}-1\\ \qquad\text{以及對稱軸過}k\text{與}k+1\text{間和}k+\frac{n}{2}\text{與}k+1+\frac{n}{2}\text{間的翻轉，合計共有}n\text{ 個}\end{cases}$$

因此不論n為奇數或偶數，$|G_n|=n+n=2n$。

2. 計算$|X_g|$

我們引入代數學中的 Burnside's Formula 來解決後續問題(證明在說明書中略過)：

Burnside's Formula： 設G_n為作用在集合X的排列群，$G_n\subset S_n$，若集合$X_g=\{x\mid gx=x,x\in X\}$表示某個排列元素$g$作用在$X$上會保持不動的元素所形成的集合，則$k=\frac{1}{\lvert G_n\rvert}\sum_{g\in G_n}\lvert X_g\rvert$，其中$k$表示集合$X$可分割出$k$個不同的等價類數量。

X_g 在圓柱積木中，可以看成「**針對某種旋轉或翻轉動作** g **後，仍然會是相同配置」的那些配置所形成的集合**；而這裡的等價類數量 k 即為圓柱積木的相異盤數。也就是說，只要計算出 G_n 中每個 g 所對應的 $|X_g|$ ，就能利用 Burnside's Formula 來計算盤數。

Burnside's Formula (代數理論)與圓柱積木(實物遊戲)的連結如下表：

Burnside's Formula 中的角色		圓柱積木中的物件
集合 X	⟺	2^n 種圓盤配置
X 中的元素 x	⟺	任一種圓盤配置 x
排列群集合 G_n	⟺	$2n$ 種圓盤變換方式
G_n 中的元素 g	⟺	任一種圓盤變換方式 g
不動群集合 X_g	⟺	經過 g 方式變換仍會是原來配置的那些配置，所形成的集合。
等價類數量 k	⟺	k 個相異圓盤

G_{12} 中的旋轉動作	G_{12} 中的翻轉動作
$e=g_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)$	$g_{13}=(1)(7)(2\ 12)(3\ 11)(4\ 10)(5\ 9)(6\ 8)$
$g_2=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$	$g_{14}=(2)(8)(1\ 3)(4\ 12)(5\ 11)(6\ 10)(7\ 9)$
$g_3=(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12)$	$g_{15}=(3)(9)(2\ 4)(1\ 5)(6\ 12)(7\ 11)(8\ 10)$
$g_4=(1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 8\ 11)(3\ 6\ 9\ 12)$	$g_{16}=(4)(10)(3\ 5)(2\ 6)(1\ 7)(8\ 12)(9\ 11)$
$g_5=(1\ 5\ 9)(2\ 6\ 10)(3\ 7\ 11)(4\ 8\ 12)$	$g_{17}=(5)(11)(10\ 12)(1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)$
$g_6=(1\ 6\ 11\ 4\ 9\ 2\ 7\ 12\ 5\ 10\ 3\ 8)$	$g_{18}=(6)(12)(1\ 11)(2\ 10)(3\ 9)(4\ 8)(5\ 7)$
$g_7=(1\ 7)(2\ 8)(3\ 9)(4\ 10)(5\ 11)(6\ 12)$	$g_{19}=(1\ 2)(3\ 12)(4\ 11)(5\ 10)(6\ 9)(7\ 8)$
$g_8=(1\ 8\ 3\ 10\ 5\ 12\ 7\ 2\ 9\ 4\ 11\ 6)$	$g_{20}=(2\ 3)(1\ 4)(5\ 12)(6\ 11)(7\ 10)(8\ 9)$
$g_9=(1\ 9\ 5)(2\ 10\ 6)(3\ 11\ 7)(4\ 12\ 8)$	$g_{21}=(3\ 4)(2\ 5)(1\ 6)(7\ 12)(8\ 11)(9\ 10)$
$g_{10}=(1\ 10\ 7\ 4)(2\ 11\ 8\ 5)(3\ 12\ 9\ 6)$	$g_{22}=(4\ 5)(3\ 6)(2\ 7)(1\ 8)(9\ 12)(10\ 11)$
$g_{11}=(1\ 11\ 9\ 7\ 5\ 3)(2\ 12\ 10\ 8\ 6\ 4)$	$g_{23}=(5\ 6)(4\ 7)(3\ 8)(2\ 9)(1\ 10)(11\ 12)$
$g_{12}=(1\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$	$g_{24}=(6\ 7)(8\ 5)(4\ 9)(3\ 10)(2\ 11)(1\ 12)$

圖 6：G_{12} 的 24 個元素

以 $n=12$ 的 g_2 為例，若要使一個配置 x 經過 g_2 作用後仍是相同的配置，則每個位置必須都開洞或都不開洞，故只有 2 種選擇，即 $|X_{g_2}|=2$ 。又如 g_3 ，因為 g_3 可以拆成兩個互斥的 cycle，若某種配置的位置 1,3,5,7,9,11 同樣開洞或都不開洞、位置 2,4,6,8,10,12 同樣開洞或都不開洞，那麼這種配置就會是 X_{g_3} 裡的元素，故則 $|X_{g_3}|=2^2$ (有都開洞或都不開洞的 2 種選擇，又有 2 個 cycle)，同理 $|X_{g_{11}}|=2^2$ 。下列我們將旋轉動作與翻轉動作分開考慮：

(1)旋轉動作

因為任何旋轉動作 g 必可被拆成互斥的 cycle 或僅有一個 cycle，且若 g 可被拆成 m 個(注意

$m\,|\,n$)cycle，則$\left|X_g\right|=2^m$。$n=12$時，可以拆成 1 個 12-cycle 的有 4 種排列、可以拆成 2 個 6-cycle 的有 2 種排列、可以拆成 3 個 4-cycle 的有 2 種排列、可以拆成 4 個 3-cycle 的有 2 種排列、可以拆成 6 個 2-cycle 的有 1 種排列、可以拆成 12 個 1-cycle 的有 1 種排列。

不同長度的 cycle 排列方法數有規則可循。考慮 cycle 的產生方式：12-cycle 是因為旋轉的格數與 12 互質(每次可轉 1,5,7,11 格，恰對應g_2, g_6, g_8, g_{12}，所以會把將每個位置「跳」完後，才回到出發點，故**考慮「12 以下，與 12 互質的正整數有幾個」**，通常以$\phi(d)$來表示(尤拉函數：正整數d的標準分解式$d=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$，則不大於$d$且與$d$互質的正整數有$\phi(d)=d\cdot\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$ 個)。

6-cycle 的g_3與g_{11}，旋轉格數分別為 2 格與 10 格。考慮$\phi(6)=6(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=2$，不大於 6 且與 6 互質的正整數是 1,5；一方面因為$n=12$，所以整個動作g_3與g_{11}會有 2 個 6-cycle，故旋轉格數即為1×2與5×2。意即$\phi(6)$同樣就是 6-cycle 的動作個數。其餘 12 的因數 4、3、2、1 皆以此類推，分別考慮$\phi(4)$、$\phi(3)$、$\phi(2)$、$\phi(1)$即可。

(2)翻轉動作

翻轉動作會將兩個兩個一組的位置互換，所以必定可以寫成一群 2-cycle 的乘積。但是位置數n為偶數時，翻轉的對稱軸可能不通過任何位置，或同時通過對面的兩個位置；n為奇數時，對稱軸一定會恰通過某一個位置。故這兩種情形的g都可預期出樣貌：

①n為偶數時：對稱軸過對面的兩個位置的g可拆成 2 個 1-cycle 與$\frac{n-2}{2}$個 2-cycle、

對稱軸不過任何位置的g可拆成$\frac{n}{2}$個 2-cycle；

②n為奇數時：所有g的對稱軸必定過某一個位置，均可拆成 1 個 1-cycle 與$\frac{n-1}{2}$個 2-cycle。

根據(1)(2)，圖 7 整理出$n=12$的所有情形。

旋轉動作			
cycle 長度d	排列數量$\phi(d)$	cycle 數量$\frac{n}{d}$	旋轉的排列方法數$\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}$
1	1	12	$1\cdot 2^{12}$
2	1	6	$1\cdot 2^{6}$
3	2	4	$2\cdot 2^{4}$
4	2	3	$2\cdot 2^{3}$
6	2	2	$2\cdot 2^{2}$
12	4	1	$4\cdot 2^{1}$
旋轉的$\left|X_g\right|$總和			$1\cdot 2^{12}+1\cdot 2^{6}+2\cdot 2^{4}+2\cdot 2^{3}+2\cdot 2^{2}+4\cdot 2^{1}$

翻轉動作			
12 為偶數	排列數量 $\frac{n}{2}$	cycle 數量	翻轉的環狀排列方法數
對稱軸過對面的兩個位置的 g	6	2 個 1-cycle 5 個 2-cycle	$6\cdot 2^7$
對稱軸不過任何位置的 g	6	6 個 2-cycle	$6\cdot 2^6$
翻轉的 $\lvert X_g\rvert$ 總和			$6\cdot 2^7+6\cdot 2^6$

圖 7： $n=12$ 的 $\lvert X_g\rvert$

根據 Burnside's Formula $k=\frac{1}{\lvert G_n\rvert}\sum_{g\in G_n}\lvert X_g\rvert$，可以得到位置數為 12 時的盤數為：

$$k=\frac{1}{\lvert G_{12}\rvert}\sum_{g\in G_{12}}\lvert X_g\rvert=\frac{1}{24}\Big(\underbrace{1\cdot 2^{12}+1\cdot 2^6+2\cdot 2^4+2\cdot 2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2^1}_{\text{旋轉部份}}+\underbrace{6\cdot 2^7+6\cdot 2^6}_{\text{翻轉部份}}\Big)=224(\text{盤})$$

3.建立公式

注意 n 為偶數時，翻轉的 $\lvert X_g\rvert$ 可整理成 $\frac{n}{2}[2^2\cdot 2^{\frac{n-2}{2}}+2^{\frac{n}{2}}]=\frac{3}{2}n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$

n 為奇數時，翻轉的 $\lvert X_g\rvert$ 可整理成 $\frac{n}{2}\cdot 2^1\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$

至此我們仿照前述的 1,2，可以建立出任意位置數 n 時，盤數 k 的公式：

若 n 為偶數，則盤數 $k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d\mid n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+\frac{3}{2}n\cdot 2^{\frac{n}{2}}\}$

若 n 為奇數，則盤數 $k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d\mid n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\}$

＊驗證 $n=6$ ：盤數 $k=\frac{1}{12}\{[1\cdot 2^6+1\cdot 2^3+2\cdot 2^2+2\cdot 2^1]+\frac{3}{2}\cdot 6\cdot 2^3\}=13$

(二)指定開洞數的盤數(第二種型態的盤數、總盤數公式)與洞數

$n=12$ 時，總盤數

$$k=\frac{1}{\lvert G_{12}\rvert}\sum_{g\in G_{12}}\lvert X_g\rvert=\frac{1}{24}\Big(1\cdot 2^{12}+1\cdot 2^6+2\cdot 2^4+2\cdot 2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2^1+6\cdot 2^7+6\cdot 2^6\Big)=224(\text{盤})\text{。}$$

不同開洞數的盤數，並非直接是式子中的個別項。計算上需要個別討論，我們先觀察幾個數字例，再逐步建立公式。**令 a 為單盤開洞數：**

1.舉例： $a=6$ 、 $n-a=6$

(1) $1\cdot 2^{12}$ 項表示 G_{12} 有1種12個1-cycle的 g ，12個1-cycle裡有 $a=6$ 個開洞與 $n-a=6$ 個不開洞可以排

列，可視為$\frac{12!}{6!6!}$的直線排列，而這個直線排列只有1種，所以共有$\frac{12!}{6!6!}\times 1=924$(種)；

(2)$1\cdot 2^{6}$項表示G_{12}有1種6個2-cycle的g，6個2-cycle裡有$a=6$個開洞與$n-a=6$個不開洞可以排列，而同一個2-cycle中必為都開洞或都不開洞，這可視為$\frac{6!}{\frac{6}{2}!\frac{6}{2}!}$的直線排列，而這個直線排列只有1種，所以共有$\frac{6!}{\frac{6}{2}!\frac{6}{2}!}\times 1=20$(種)；

(3)$2\cdot 2^{4}$項表示G_{12}有2種4個3-cycle的g，4個3-cycle裡有$a=6$個開洞與$n-a=6$個不開洞可以排列，而同一個3-cycle中必為都開洞或都不開洞，這可視為$\frac{4!}{\frac{6}{3}!\frac{6}{3}!}$的直線排列，但這個直線排列有2種，所以共有$\frac{4!}{\frac{6}{3}!\frac{6}{3}!}\times 2=12$(種)；

(4)$2\cdot 2^{3}$項表示G_{12}有2種3個4-cycle的g，3個4-cycle裡有$a=6$個開洞與$n-a=6$個不開洞可以排列，而同一個4-cycle中必為都開洞或都不開洞，但扣去前2個4-cycle中的開洞和不開洞後，第3個4-cycle必無法都開洞或都不開洞，所以沒有任何的配置法。

觀察可得：a與$n-a$的最大公因數$m=(a,n-a)$須被 cycle 長度d整除。(考慮$a\neq 0,n$)

(5)$2\cdot 2^{2}$項表示G_{12}有2種2個6-cycle的g，$d=6$可整除$a=6$及$n-a=6$，同理計算後會有4個。

(6)$4\cdot 2^{1}$項表示G_{12}有4種1個12-cycle的g，但$d=12$的長度已超過$a=6$與$n-a=6$，無法在同個12-cycle中開洞情形相同，所以沒有任何的配置法。

(7)$6\cdot 2^{7}$項表示G_{12}有6種2個1-cycle和5個2-cycle的g，先考慮2個1-cycle，後面的5個2-cycle須為都開洞或都不開洞，故2個1-cycle在$a=6,n-a=6$的條件下，須為都開洞或都不開洞所以只有2種，剩下的5個2-cycle為$\frac{5!}{\frac{(6-2)}{2}!\frac{6}{2}!}$，所以共有$6\times[\frac{5!}{\frac{(6-2)}{2}!\frac{6}{2}!}+\frac{5!}{\frac{6}{2}!\frac{(6-2)}{2}!}]=120$(種)；

(8)$6\cdot 2^{6}$項表示G_{12}有6種6個2-cycle的g，所以共有$\frac{6!}{\frac{6}{2}!\frac{6}{2}!}\times 6=120$(種)。

綜合上述(1)~(8)，224盤中，開洞數為6的盤數共有$\frac{1}{24}[924+20+12+4+120+120]=50$(盤)。

4.個別盤數的計算方法整理

在$n=12$的例子外，我們還觀察了$n=15$的狀況，發現位置數是偶數或奇數，以及開洞數是偶數或奇數時，計算方法會不太一樣，但基本的考慮方法仍然是**a與$n-a$的最大公因數$m=(a,n-a)$須被 cycle 長度d整除。**最後將「開洞數」與「不開洞數」分兩堆考慮奇偶性，將計算方法整理如下：

(1) n 為奇數：

開洞數與不開洞數必定一偶一奇：旋轉動作的 g 之 cycle 長度 d 要整除 $m=(a,n-a)$ ；

翻轉動作的 g ：奇的那個情形要去填入 1-cycle。

(2) n 為偶數：

①開洞數與不開洞數均為偶數：旋轉動作的 g 之 cycle 長度 d 要整除 $m=(a,n-a)$ ；

翻轉動作的 g ：過兩位置的 g 的兩個 1-cycle 要同時開洞或不開洞;未過兩位置的 g 兩個 1-cycle 可分開討論。

②開洞數與不開洞數均為奇數：旋轉動作的 g 之 cycle 長度 d 要整除 $m=(a,n-a)$ ；

翻轉動作的 g ：過兩位置的 g 的兩個 1-cycle 一個要開洞、一個不開洞；未過兩位置的 g 方法數為零。

另外，若開洞數 a 與不開洞時數 $n-a$ 互質時：旋轉動作除了 e ，其餘方法數為零；翻轉動作時，奇數的那種(開洞數 a 或不開洞數 $n-a$)情況要填入 1-cycle 中。

5.建立指定開洞數的盤數公式、總洞數公式

設 k_a 為開洞數為 a 時的盤數：

(1) n 為奇數：

因為 n 為奇數，所以 a 與 $n-a$ 必為一偶一奇。當 $a=0$ 或 $a=n$ 時， $k_0=k_n=1$(不考慮 0 與 n 的最大公因數)。

旋轉動作的 g 會切割 $\frac{n}{d}$ 個 d 長度的 cycle，並可看成有幾個位置可以排列 a 個開洞與 $n-a$ 個不開洞，因此 cycle 的直線排列共有 $\left(\frac{n}{d}\right)!$ 種，而在這之中 a 個開洞與 $n-a$ 個不開洞會有重複，且每個 d -cycle 中要都開洞或都不開洞，將 a 與 $n-a$ 做「 d 個為一組的切割」，做直線的同物排列，故方法數為 $\dfrac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}$ ，並乘上 $\phi(d)$ (因為有 $\phi(d)$ 個同為 cycle 長度 d 的變換動作 g)，所以是 $\dfrac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}$ ，又因為符合 $d\mid m=(a,n-a)$ 的 d 可能會有多種，把這些 d 全部累加起來，故旋轉動作的 cycle 直線排列數共有 $\displaystyle\sum_{\substack{d\mid m=(a,n-a)\\ d\mid n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}$ 種。

翻轉動作的 g 因為會分成 1 個 1-cycle 與 $\frac{n-1}{2}$ 個 2-cycle，1 個 1-cycle 必須填入奇的情形(需要求同 cycle 內開洞情形相同)，只有一種選擇，而剩下有 $\frac{n-1}{2}$ 個位置，故為 $\left(\frac{n-1}{2}\right)!$，同物排列時則再除以 $\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{n-a}{2}\right\rfloor!$。取高斯的原因：奇數的 a 或 $n-a$ 要扣掉 1(填入 1-cycle 中了)，而我們不知道那 1 個 1-cycle 到底是開洞或不開洞，因此取高斯後，就會是正確的 cycle 數。最後再乘上 n (有 n 個翻轉動作 g)，故翻轉動作的 cycle 直線排列數共有 $\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{n-a}{2}\right\rfloor!}$ 種。

由 Burnside's Formula，開洞數為 a 時的盤數 $k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{n-a}{2}\right\rfloor!}\right)$

將所有相異開洞數 a 的旋轉和翻轉個數全部累加，就得到 n 為奇數時的總盤數公式：

$$k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d|n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\}$$

$$=2+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{n-a}{2}\right\rfloor!}\right);$$

n 為奇數時的總洞數公式：$x=n+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{a}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{n-a}{2}\right\rfloor!}\right)$。

(2) n 為偶數：

當 $a=0,1,n-1,n$，$k_0=k_1=k_{n-1}=k_n=1$ (後續避開負階乘的問題)。旋轉動作與奇數時相同，翻轉動作個別討論：

①開洞數與不開洞數均為偶數時(以下簡寫為**偶偶**)：因為 n 為偶數時的翻轉動作會有兩種，過兩位置的 g 會有 2 個 1-cycle 和 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle，而 2 個 1-cycle 必須都開洞或都不開洞；未過兩位置的 g 則因都是 2-cycle，故沒有需先填入的情形。

②開洞數與不開洞數均為奇數時(以下簡寫為**奇奇**)：過兩位置的 g 一個要開洞、一個不開洞，即

討論 2 個 1-cycle 和 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle 的直線排列。

不論偶偶或奇奇，旋轉動作的排列數均為 $\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}} \frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}$ 。

偶偶的翻轉：拆成 2 個 1-cycle 和 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle 的 g，2 個 1-cycle 必為都開洞和都不開洞，剩下有 $\frac{n-2}{2}$ 個位置可以排列開洞與不開洞，故為 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!$，這 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!$ 中會有重複，故要再除以 $\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!$(2 個 1-cycle 都為開洞)+$\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!$(2 個 1-cycle 都為不開洞)，整理一下，直線排列數為 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)$，最後翻轉動作會有 $\frac{n}{2}$ 種 2 個 1-cycle 和 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle，故為 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)$ 。

另一種有 $\frac{n}{2}$ 個 2-cycle 的翻轉動作 g ，可視為 $\frac{n}{2}$ 個位置的直線排列，之中又有重複的 a 個開洞與 $n-a$ 個不開洞，再除以 $\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!$，再乘上 $\frac{n}{2}$ 個翻轉動作，就是 $\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}$ 。

這兩種翻轉動作都是偶偶的，所以必須相加，最後整理一下，偶偶情形的 cycle 直線排列數為

$$\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}} \frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\text{ 。}$$

奇奇的翻轉：因為未過兩位置的 g 方法數為零，故只需討論過兩位置的 g (2 個 1-cycle 和 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle)。2 個 1-cycle 需一個開洞一個不開洞，有 2 種選擇，再乘上剩下的 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle，為 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2$，這 $\frac{n-2}{2}$ 個 2-cycle 之中又會有重複的 $\frac{a-1}{2}$ 個開洞的 cycle 與 $\frac{n-a-1}{2}$ 個不開洞的 cycle，故再除以 $\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!$，因過兩位置的 g 有 $\frac{n}{2}$ 種 $\frac{n}{2}$ 個 2 個 1-cycle，所以再乘上 $\frac{n}{2}$ ，得到奇奇情形的 cycle 直線排列數為 $\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}} \frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}$ 。

因此，當 n 為偶數時，開洞數為 a 的盤數為：

a 為奇數時(奇奇)，

$$k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right)\text{。}$$

a 為偶數時(偶偶)，

$$k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right)\text{。}$$

因為 a 作為變數在代入時，我們無法選定都是偶數或都是奇數的數字帶入，但只要乘上判別式(特定的情況下代入為 1 或 0)，這個問題就能被輕鬆解決。其中偶偶情況的判別式為 $a-2\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor-1$、奇奇情況的判別式為 $a-2\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor$。

最後利用 Burnside's Formula (再乘上 $\frac{1}{2n}$)，將所有相異開洞數 a (奇奇和偶偶)的旋轉和翻轉個數全部累加，再加上 4(當 $a=0,1,n-1,n$ ， $k_0=k_1=k_{n-1}=k_n=1$)，就得到 n 為偶數時的總盤數公式：

$$k=\frac{n}{2}[2^2\cdot 2^{\frac{n-2}{2}}+2^{\frac{n}{2}}]=\frac{3}{2}n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$$

$$=4+\sum_{a=2}^{n-2}\frac{1}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]-1\right)$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)$$

n 為偶數時的總洞數公式：

$$x=2n+\sum_{a=2}^{n-2}\frac{a}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]-1\right)$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{a}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)$$

(三)柱高與柱數

當 n 值固定，盤數 k 的值也會隨之固定，再利用前述指定開洞數的盤數公式，對每個盤開的洞數進行加總，就可以得到總洞數 x 。

例如 $n=6$ 時，有 1 個 0 洞的盤、1 個 1 洞的盤、3 個 2 洞的盤、3 個 3 洞的盤、3 個 4 洞的盤、1 個 5 洞的盤、1 個 6 洞的盤，故總洞數為 $x=1\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 5+1\cdot 6=39$(洞) 。

在圓柱高度均相同的前提下，顯然$h|x$，故柱高取值需為洞數的因數，不妨排除$h=1$，因為在討論解時無意義。注意$39=3\cdot 13$，故$n=6$的柱高只能為 3 或 13。同時也要考慮盤數k，這代表遊戲堆疊完成的高度是k，且其中有完全不開洞的盤，因此柱高必須要小於盤數($h<k$)，這時$n=6$的柱高也不能是 13 了，得注意整個遊戲只有 13 盤。所以$n=6$的圓柱積木，柱高只能為 3。

柱數s是最後被決定的數，只能跟隨著柱高調整，以符合填滿所有洞的規則。最終我們可將柱高與柱數的限制整理成：$\boxed{x=hs，且 1<h<k}$ (後續根據堆疊策略戊，尚有$2h-1\le k$的限制)

如圖 8，簡單整理$n=2\sim 8$時，柱高與柱數的設計有哪些選擇：

位置數n	總盤數k	不同洞數的盤數	總洞數x	可能的柱高×柱數($x=hs$，且$1<h<k$)
2	3	1,1,1	3	無
3	4	1,1,1,1	6	2×3
4	5	1,1,2,1,1	12	2×6、3×4
5	8	1,1,2,2,1,1	20	2×10、4×5
6	13	1,1,3,3,3,1,1	39	3×13
7	18	1,1,3,4,4,3,1,1	63	3×21、7×9、9×7
8	30	1,1,4,5,8,5,4,1,1	120	2×60、3×40、4×30、 5×24、6×20、8×15、 10×12、12×10、15×8

圖 8：可能的柱高×柱數之值

附註：在不同洞數的盤數表格中，以$n=6$為例，「1,1,3,3,3,1,1」表示零個洞的有 1 盤、一個洞的有 1 盤、二個洞的有 3 盤、三個洞的有 3 盤、四個洞的有 3 盤、五個洞的有 1 盤、六個洞的有 1 盤。總洞數即為「開洞數乘上盤數，再加總」。其他位置數的情形以此類推。

二、位置數為 6 的圓柱積木可行解

(一)洞數解

除去不開洞的盤，將剩餘 12 個盤由上至下依序編為k_1、$k_2\cdots k_{12}$，開的洞數編為x_1、$x_2\cdots x_{12}$，洞數記為「1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,6」。透過實際操作，容易歸納出一些洞數的規則：先列出符合規則的圓盤洞數排列法，稱為「**洞數解**」。若一組圓盤的上下排列不符合洞數解，那麼它必定無法形成**空間解(實際能以圓柱填滿的可行解)**。**洞數解方法立即排除了大半排列情形，爾後我們再從符合的洞數解選擇中去挑選。**

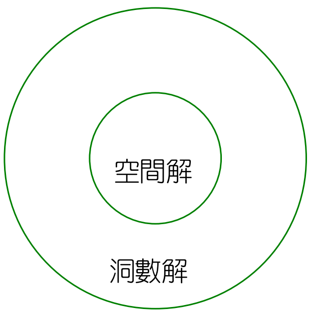


圖 9：從洞數解中去尋找空間解

不開洞的盤涉及子封閉區塊解以及解的數量定義問題，後續再討論。

1.策略甲：兩側盤的洞數有不等式關係

疊盤的過程中會陸續放入圓柱，若假設 $x_1 > x_2$，則 k_1 必定有洞沒被填滿(放圓柱的選擇被 k_2 遮蔽住了)；即使 $x_1 = x_2$，由於遊戲中任兩盤皆相異的緣故，k_1 也會有洞沒被填滿。故得證 $x_1 < x_2$。在疊放到 k_3 的過程中，也因為圓柱只能從靠中間的那一側放入，故 $x_2 < x_3$。

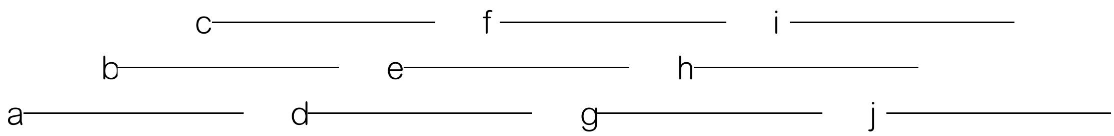
這個規則會在疊放到 k_4 時終止，因為圓柱的高度只有 3，故通過 k_4 的柱子，不一定會通過 k_3；另一方面，$k_{10} \sim k_{13}$ 也有相同的規則，故可得 $x_1 < x_2 < x_3$、$x_{10} > x_{11} > x_{12}$。注意這個結論可被延伸至任意柱高的情形。若柱高為 h，能排序大小的盤數就有 $2h$ 盤：$x_1 < x_2 < \ldots < x_h$，以及 $x_{k-h+1} > \ldots > x_{k-1} > x_k$。

2.策略乙：由兩側向中間堆疊，過程中兩側的洞會被逐步填滿

將 k_1 填滿，意味著 k_2、k_3 都至少有 x_1 根圓柱通過。利用這個想法，因為由兩側向中間堆疊，兩側的洞會被逐步填滿，故我們可以**逐層減去洞數**，如下頁圖 11，並且「在這個**運算表中，每個位置都不能是負數**」。將這些條件納入考慮，就能快速刪去許多不可能出現的洞數解。

3. 策略丙：將各盤予以分組

洞數有 $x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} = x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} = x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} = 13$ 的規則，理由：圖 11 列出圓柱的可能位置，設通過 k_1 的有 a 根、通過 k_2 的有 a+b 根、…通過 k_{12} 的有 j 根， a~j 均為非負整數。



k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}
a	a	a	d	d	d	g	g	g	j	j	j
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	b	b	b	e	e	e	h	h	h	i	
		+	+	+	+	+	+	+	+		
		c	c	c	f	f	f	i	i		

圖 11：圓柱所在的十種可能位置

注意 a 只會存在於 k_1, k_2, k_3 三層，其餘同理，故必可依 3 的倍數將盤分為三組，其中

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} = a + (d + b + c) + (g + e + f) + (j + h + i) = 13 \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} = (a + b) + (d + e + c) + (g + h + f) + (j + i) = 13 \\ x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} = (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) + j = 13 \end{cases}$$

，故得證。

這個策略同樣可對任意柱高作推廣，當柱高為 h 時，將所有盤分成 h 組，亦有相同結果。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
$-$	x_1	x_1	x_1							x_{12}	x_{12}	x_{12}
$=$	0	x_2-x_1	x_3-x_1	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$x_{10}-x_{12}$	$x_{11}-x_{12}$	0
$-$		x_2-x_1	x_2-x_1	x_2-x_1					$x_{11}-x_{12}$	$x_{11}-x_{12}$	$x_{11}-x_{12}$	
$=$	0	0	x_3-x_2	$x_4-x_2+x_1$	x_5	x_6	x_7	x_8	$x_9-x_{11}+x_{12}$	$x_{10}-x_{11}$	0	0
$-$			x_3-x_2	x_3-x_2	x_3-x_2			$x_{10}-x_{11}$	$x_{10}-x_{11}$	$x_{10}-x_{11}$		
$=$	0	0	0	$x_4-x_3+x_1$	$x_5-x_3+x_2$	x_6	x_7	$x_8-x_{10}+x_{11}$	$x_9-x_{10}+x_{12}$	0	0	0
$-$				$x_4-x_3+x_1$	$x_4-x_3+x_1$	$x_4-x_3+x_1$	$x_9-x_{10}+x_{12}$	$x_9-x_{10}+x_{12}$	$x_9-x_{10}+x_{12}$			
$=$	0	0	0	0	$x_5-x_4+x_2-x_1$	$x_6-x_4+x_3-x_1$	$x_7-x_9+x_{10}-x_{12}$	$x_8-x_9+x_{11}-x_{12}$	0	0	0	0
$-$					$x_5-x_4+x_2-x_1$	$x_5-x_4+x_2-x_1$	$x_5-x_4+x_2-x_1$					
$-$						$x_8-x_9+x_{11}-x_{12}$	$x_8-x_9+x_{11}-x_{12}$	$x_8-x_9+x_{11}-x_{12}$				
$=$	0	0	0	0	0	$x_6+x_3-x_5-x_2-x_8$ $+x_9-x_{11}+x_{12}=0$	$x_7+x_{10}-x_5+x_4-x_2$ $+x_1-x_8-x_{11}=0$	0	0	0	0	0

圖 10：表中每個位置都不能是負數

由甲乙兩個策略，列出頭四盤($x_1 \sim x_4$)或末四盤($x_9 \sim x_{12}$)的可能擺放有：

$$123+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix}、124+\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}、125+\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}、1265、134+\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}、135+\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}、1365、145+\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}、1465、$$

$$234+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix}、235+\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}、236+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}、245+\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}、246+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}、2564、345+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\6\end{pmatrix}、346+\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}、$$

$$356+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}、456+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$，共 50 組。

4. 策略丁：利用盤數限制刪去不可能的洞數解

開洞數(x_i)	1	2	3	4	5	6
盤數	1	3	3	3	1	1

圖 12：不同開洞數的盤數

從上述 50 組中任挑出相異兩組，共有 $C_2^{50}=1225$ 組挑法，就能得出例如「1232xxxx3653」或是「1232xxxx2432」的頭四盤與末四盤的可能組合。但注意盤數數量：開有 1,2,3,4,5,6 個洞的盤，分別只有 1,3,3,3,1,1 個，所以「1232xxxx3653」這種組合就會被保留，而「1232xxxx2432」則因為出現了四盤洞數為 2 的盤，故予以刪除。

透過策略丁，我們得到頭四盤與末四盤的可行組合共有 156 種。

如圖 13，確定頭四盤與末四盤的可行組合後，結合策略丙、丁，x_6 與 x_7 就能確定。例如「1232xxxx3653」可以進一步確定為「1232x44x3653」。

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
✔	✔	✔	✔		*	*		✔	✔	✔	✔

圖 13：x_6 與 x_7 皆能確定

此時僅剩k_5與k_8兩個位置待定，但「1232x44x3653」中只剩一個 2 與一個 4 未使用，故 12 盤的洞數解只有「123224443653」或「123244423653」兩種可能。仿照此法，我們得到總計 276 種的擺放。再利用一次策略乙，刪去運算表中出現負數的擺放，可得到剩下 162 組可能擺放。

為了方便整理數據與尋找規律，我們採用**二元記錄法**，以「0」代表該位置不開洞、以「1」代表該位置開洞。如圖 14，因為盤可旋轉或翻轉，故這 12 種配置皆為同一個盤的可能擺放。

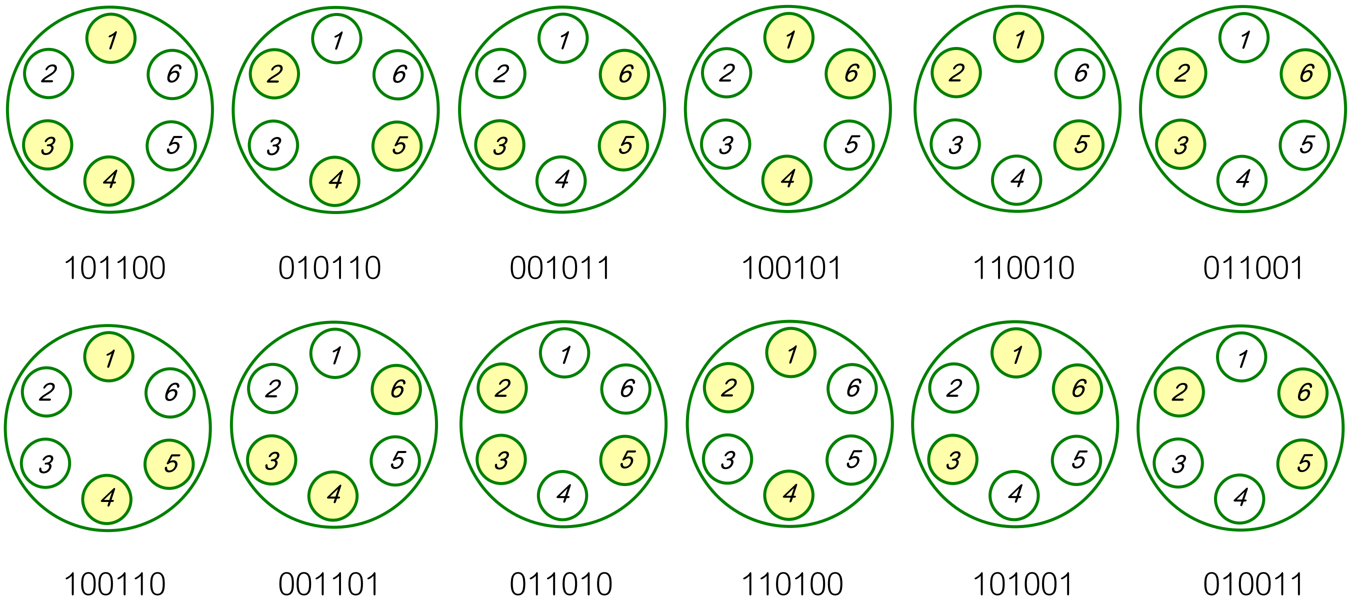


圖 14：二元記錄法中，同一盤可能的擺放法

如圖 15，將$n=6$的 13 盤分別予以編碼：

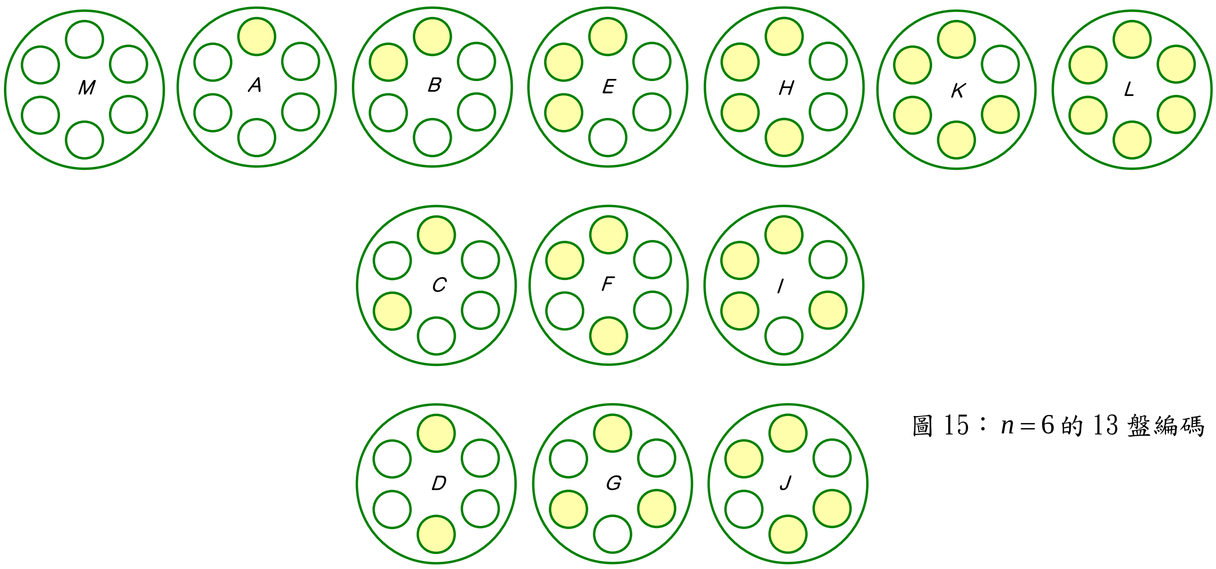


圖 15：$n=6$的 13 盤編碼

5. 策略戊：子封閉區塊 5+7 或 6+6，或沒有封閉區塊

觀察一些已發現的空間解，發現有些可被切割成兩個區塊，且這**兩個區塊能夠被分割成填滿的狀態，而彼此間沒有圓柱相連接，我們稱這兩個區塊為「子封閉區塊」**。

如圖 16，$n=6$ 的 12 盤，子封閉區塊只能分成 5+7 盤或 6+6 盤兩種(必定不會出現 4 盤以下的子封閉區塊)。

由策略甲簡單證明：設 $k_1 \sim k_4$ 為一組子封閉區塊，因為柱高 $h=3$，故它封閉的一側要求 $x_1<x_2<x_3$，但封閉的另一側要求 $x_2>x_3>x_4$，兩條件矛盾，所以不可能出現 4 盤以下的狀況。

這衍生出對空間解的定義問題：由於完全不開洞的盤，可以疊放在子封閉區塊的上方或下方，而且子封閉區塊可以自由旋轉、上下翻轉、兩區塊互相交換位置(當 n 足夠大，且 h 取值不大時，可能分割出多個子封閉區塊，情形會更加複雜)。但這些堆疊法，內部的圓柱放入方式皆相同，故我們將「**內部圓柱放入方式相同的解，視為同一種解**」，因此找解時不考慮不開洞的盤。

A100000	A100000
D100100	B110000
H111100	E111000
E011100	H111100
B011000	F101100
C101000	D100100
G101010	C101000
K111110	G101010
J110110	I111010
L111111	L111111
I101011	K111101
F001011	J101101

圖 16：5+7 盤或 6+6 盤分割

只要是封閉的區塊，就能再使用策略甲，刪去 5+7 盤與 6+6 盤中不符合不等式關係的擺放情形。

x_1	x_1
x_2	x_2
x_3	x_3
x_4	x_4
x_5	x_5
x_6	x_6
x_7	x_7
x_8	x_8
x_9	x_9
x_{10}	x_{10}
x_{11}	x_{11}
x_{12}	x_{12}

圖 17：再使用策略甲刪除一次

5+7 盤需再滿足：$\begin{cases} x_3>x_4>x_5 \\ x_6<x_7<x_8 \end{cases}$ 6+6 盤需再滿足：$\begin{cases} x_4>x_5>x_6 \\ x_7<x_8<x_9 \end{cases}$

例如 5 盤的子封閉區塊，洞數不等式可列成

$x_1<x_2<x_3>x_4>x_5$。

(從這個式子可以觀察到：柱高為 h 的遊戲，子封閉區塊的盤數至少需 $2h-1$ 盤。)

洞數解可分成三類：

(1)具有 5+7 盤子封閉區塊的共有 9 組：

$$12432+\begin{pmatrix}2343654\\2344653\\2354643\end{pmatrix}、\begin{pmatrix}12654\\14652\end{pmatrix}+2343432、23532+1244643、23643+\begin{pmatrix}1234542\\1244532\end{pmatrix}、24642+1233543$$

(2)具有 6+6 盤子封閉區塊的共有 6 組：

$$234432+\begin{pmatrix}123654\\124653\\145632\\135642\end{pmatrix}、123432+\begin{pmatrix}234654\\245643\end{pmatrix}$$

(3)12 盤無法切割出子封閉區塊的共有 94 組。

這三類共 **9+6+94＝109 組擺放就稱為圓柱積木的洞數解**。

(二)空間解

空間解需要考慮各盤自身的旋轉與翻轉，同開洞數的相異盤也要考慮擺放的順序性(洞數為 2 的 B,C,D 盤、洞數為 3 的 E,F,G 盤、洞數為 4 的 H,I,J 盤)。所以我們將洞數解轉成二元記錄法，以檢驗各組洞數解是否能排得出空間解。

利用**直畫三層代表放入圓柱**。若將圖中的「1」填滿，就代表這組洞數解能夠進一步找到空間解；若圖中的「1」無法被填滿，則代表無法找到空間解。這需要將各盤旋轉或翻轉來檢驗，例如圖 18-1 中，有些洞落單無法填滿。但將某些盤適當地調整，變成圖 18-2 的狀態，就能完全填入圓柱。

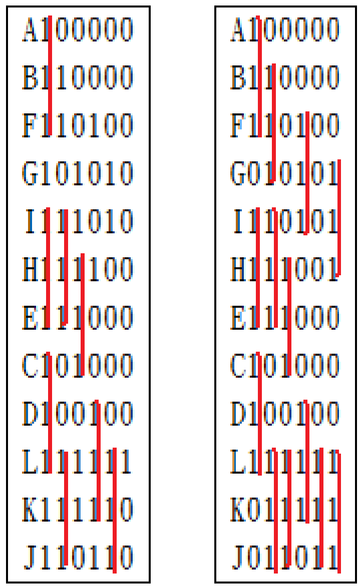


圖 18-1 及圖 18-2

尋找空間解的方法：

前述的洞數解就已經決定了圓柱的上下位置，代表二元記錄法裡的圓柱只能左右移動，一旦左右移動必定出現重複的盤形時，就能快速刪去不可能的空間解。

過程中我們只需注意 B,C,D 盤、E,F,G 盤、H,I,J 盤，因為洞數為 1,5 的 A,K 盤可任意旋轉，洞數為 6 的 L 盤只有一種擺放。

以下我們都通過這個方式逐一檢驗。

1. 5+7 盤子封閉區塊的空間解

先考慮較少層的 5 盤子封閉區塊，6 種 5 盤的洞數解可產生 16 組子封閉區塊的空間解。再檢驗剩下未選取的 7 盤，各形成多少組子封閉區塊的空間解，**最後得到共 24 組 5+7 盤的空間解**。

2. 6+6 盤子封閉區塊的空間解

作法與 5+7 相同， 6 種洞數解可產生 24 組子封閉區塊的空間解。再檢驗剩下未選取的 6 盤，各形成多少組子封閉區塊的空間解，**最後得到共 18 組 6+6 盤的空間解**。

3. 12 盤無法切割出子封閉區塊的空間解

這類的洞數解有 94 組，且洞數為 2 的盤有 B,C,D 三種、洞數為 3 的盤有 E,F,G 三種、洞數為 4 的盤有 H,I,J 三種，故在不考慮單層旋轉或翻轉的情況下，共有 $94\times3!\times3!\times3!=20304$ 種盤的順序。

處理策略是從兩側出發，逐層找出兩側所有可行的空間解，再向中間確定，如圖 19。

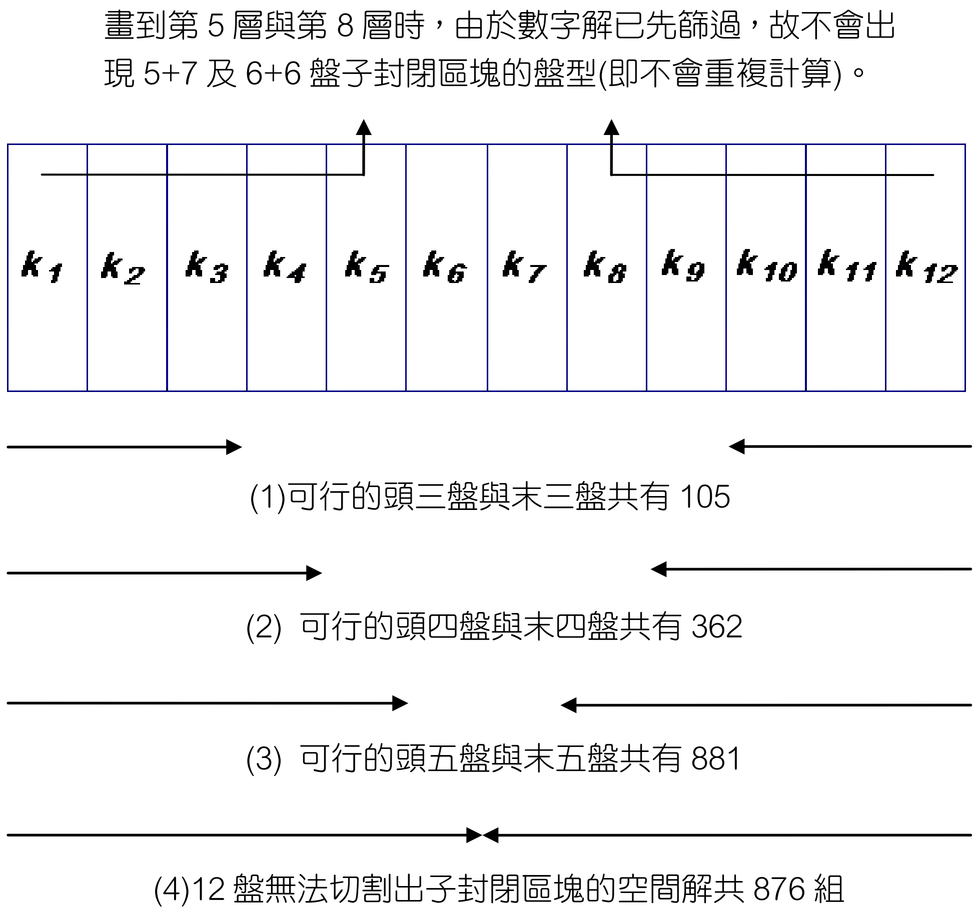


圖 19：12 盤的處理流程

(1)由策略甲列出頭三盤與末三盤，共有 136 種堆疊可能(如 ABE、ACG、…)，接著 ABG, ADE, ADG, AEJ, AGH, AGJ, BEJ, BGH, BGI, BGJ, BGK, BGL, CEJ, CGH, CGJ, DEH, DEI, DEJ, DEK, DEL, DGH, DGI, DGJ, DGK, DGL, EJK, EJL, GHK, GHL, GJK, GJL 以上 31 種堆疊不出來，予以刪除，剩下 105 種頭三盤或後三盤的組合。

(2)繼續列出頭四盤與末四盤，共有 503 種堆疊可能(如 ABEH、ADFG、…)，其中 141 種堆疊不出來，予以刪除，剩下 362 種頭四盤或後四盤的組合。

(3)續繼列出頭五盤與末五盤，共有 1148 種開放的堆疊可能(如 ABECD、ABECF、…，並且這些都已排除封閉的情形)，其中 267 種堆疊不出來，予以刪除，剩下 881 種頭五盤或後五盤的組合，此時 12 盤的順序剩下 2710 組(意即放入最中間的 k_6 與 k_7)。

(4)檢驗 2710 組，得到 **12 盤無法切割出子封閉區塊的空間解共 876 組**。

這三類**共 24+18+876＝918 組擺放就稱為圓柱積木的空間解**，詳見附錄。

(三)整理從洞數解到空間解的尋找步驟

尋找可行解過程中，為了要把所有解都找出來，我們的處理方法並非單純正面「找出解」來，而是反面利用前述多項策略「刪去不可能的解」，再實際將其堆疊出來。列洞數解的步驟如下：

1.洞數解尋找步驟：

步驟	內容	利用策略	可行的結果	舉例
1	頭 4 盤	甲、乙	50 組	1 2 3 2
2	列舉頭 4 盤＋末 4 盤	C_2^{50}	1225 組	1 2 3 2 x x x x 3 6 5 4
3	加入第 6、7 盤	丙、丁	156 組	1 2 3 2 x 3 4 x 3 6 5 4
4	加入 5、8 盤	乙	162 組	1 2 3 2 2 3 4 4 3 6 5 4
5	分別考慮子封閉區塊 5+7 盤、6+6 盤，以及無法切割者	戊	9＋6＋94 ＝109 組	1 2 4 3 2|2 3 4 3 6 5 4 1 2 3 4 3 2|2 3 4 6 5 4

2.空間解尋找步驟：

(1)5+7 盤子封閉區塊：由 9 組洞數解可實際排出 24 組空間解。

(2)6+6 盤子封閉區塊：由 6 組洞數解可實際排出 18 組空間解。

(3)12 盤無法切割出子封閉區塊的空間解步驟：

步驟	內容	可能的堆疊種類數	實際無法堆疊的種類	實際可以堆疊的種類	12 盤剩下的可能組數
1	12 盤的排列	有 94(組)×216(種)＝共 20304 組可能			
2	頭末 3 盤可能堆疊	136 種	31 種	105 種	12194 組
3	頭末 4 盤可能堆疊	503 種	141 種	362 種	4957 組
4	頭末 5 盤可能堆疊	1148 種	267 種	881 種	2710 組
5	利用二元紀錄法刪除	找出所有空間解共 876 組			

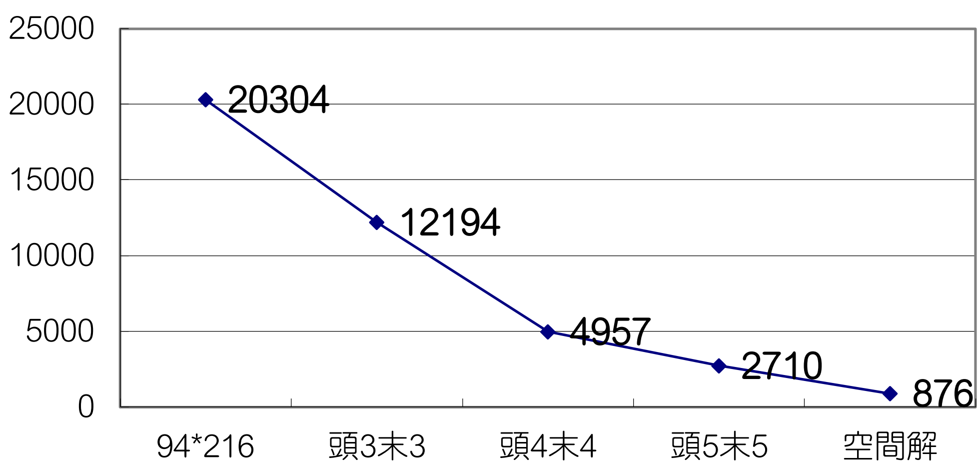


圖 20：12 盤空間解組數的遞減

陸、研究結論

一、遊戲設計概念：位置數、盤數、洞數、柱高、柱數間的關係

給定位置數 n → 利用 Burnside's Formula →

若 n 為偶數，總盤數 $k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d|n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+\frac{3}{2}n\cdot 2^{\frac{n}{2}}\}$

若 n 為奇數，總盤數 $k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d|n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\}$

→ 不同洞數的盤數皆被個別決定 → 總洞數 x 被決定 → $x=hs$，且 $1<h<k$、$2h-1\le k$ (封閉區塊限制)

柱高 h 與柱數 s 都必須是總洞數 x 的因數

n 為奇數時，開洞數為 a 的盤數 $k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left[\frac{a}{2}\right]!\left[\frac{n-a}{2}\right]!}\right)$。

n 為奇數時的總盤數 k 公式(兩種型態)：

$$k=\frac{1}{2n}\{[\sum_{d|n}\phi(d)\cdot 2^{\frac{n}{d}}]+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\}$$

$$=2+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left[\frac{a}{2}\right]!\left[\frac{n-a}{2}\right]!}\right);$$

n 為奇數時的總洞數 x 公式：$x=n+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{a}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left[\frac{a}{2}\right]!\left[\frac{n-a}{2}\right]!}\right)$。

n 為偶數時，開洞數為 a 的盤數：

a 為偶數，

$$k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right)$$

a 為奇數，

$$k_a=\frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right)$$

n 為偶數時的總盤數 k 公式(兩種型態)：

$$k=\frac{n}{2}[2^2\cdot 2^{\frac{n-2}{2}}+2^{\frac{n}{2}}]=\frac{3}{2}n\cdot 2^{\frac{n}{2}}$$

$$=4+\sum_{a=2}^{n-2}\frac{1}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]-1\right)+$$

$$\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)$$

n 為偶數時的總洞數 x 公式：

$$x=2n+\sum_{a=2}^{n-2}\frac{a}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a-2}{2}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}\right)!\times\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]-1\right)$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\frac{a}{2n}\left\{\left(\sum_{\substack{d|m=(a,n-a)\\ d|n}}\frac{\phi(d)\times\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{a}{d}\right)!\left(\frac{n-a}{d}\right)!}\right)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{n-2}{2}\right)!\times 2\times\frac{1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)!\left(\frac{n-a-1}{2}\right)!}\right\}\times\left(a-2\left[\frac{a-1}{2}\right]\right)$$

二、位置數為 6 的圓柱積木可行解

(一)尋找洞數解的策略

1.策略甲：兩側盤的洞數有不等式關係「$x_1<x_2<x_3$、$x_{10}>x_{11}>x_{12}$」。

2.策略乙：由兩側向中間堆疊，過程中兩側的洞會被逐步填滿，逐層減去洞數時，圖 10 的運算表中，每個位置都不能是負數。

3.策略丙：將各盤予以分組，因柱高為 3，故可將所有盤分為洞數和皆為 13 的 3 組。

4.策略丁：利用盤數限制刪去不可能的洞數解。

5.策略戊：討論洞數解的子封閉區塊 5+7 盤或 6+6 盤，或沒有封閉區塊。

最後得到 9 組(5+7 封閉) + 6 組(6+6 封閉) + 94(無子封閉) ＝ 109 組洞數解。

(二)尋找空間解的策略

1.利用二元記錄法，直畫代表放入圓柱。

2.洞數解決定圓柱的上下位置；空間解只要檢驗圓柱的左右位置。

(只需注意 B,C,D 盤、E,F,G 盤、H,I,J 盤)。

3.5+7 盤的子封閉區塊先討論 5 盤，再檢驗剩餘 7 盤，此類得到 24 組空間解；

6+6 盤的子封閉區塊討論其中 6 盤，再檢驗剩餘 6 盤，此類得到 18 組空間解。

4.逐步列出並刪除不可行的頭三盤與末三盤、頭四盤與末四盤、頭五盤與末五盤，

放入最中間的 k_6 與 k_7 檢驗，得到 12 盤無法切割出子封閉區塊的空間解共 876 組。

最後得到 24 組(5+7 封閉) +18 組(6+6 封閉) + 876(無子封閉) ＝ 918 組空間解(實際可行)。

柒、參考文獻

1. John B. Fraleigh(2003)。A First Course in Abstract Algebra。7th Edition。

2. 陳鼎文等：臺中市烏日區九德國民小學(民 98)。「數」解圓柱積木。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會國小組數學科作品。

3. 林湘妮等：臺中市烏日區九德國民小學(民 100)。圓柱積木「新」解。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會國小組數學科作品。

4. 洪鵬凱(2007)。MTS2007 第一屆全國高中數學教學研討會論文集(130-157 頁)。

捌、附錄

附錄一：給入門者的遊戲建議

如何較快堆疊出一組空間解？我們運用研究結果內的部份性質(某些其他性質難以在遊戲實物中使用)，給入門者提供一些堆疊建議，避免漫無目的地嘗試。

(一)先堆疊頭四末和末四盤

首先隨意挑一盤出來，視為第一盤，以 010101(圖 21)為例，放入 3 根柱子填滿第一盤所有的洞(圖 22)，在此可發現第二盤(往上堆疊)和第三盤開洞數均要大於 3。


圖 21


圖 22

故第二盤和第三盤時能用的盤型只有 101011(圖 23)、011111(圖 24)和 111111(圖 25)三種。


圖 23


圖 24


圖 25

例如(僅舉出一種可能)我們使第二盤為 011111，第三盤為 111111，另加入第四盤如 101011，並以柱子填滿所有的洞(圖 26)。


圖 26

再用此方式堆疊出末四盤，例如依序擺放 100000、110000、110001 和 010001 (圖 27)。


圖 27

(二)洞數必須被逐層填滿

將每一層的洞都填滿後，再放入下一盤，避免中間有盤的洞未填滿卻被遮蓋住。(因為遊戲完成時，圓柱不能突出，所以只要有洞沒放入圓柱，則無法完成遊戲。)

(三)使用策略丙(分三組的洞數和皆為 13)刪除不可能的解

延續前例，利用策略丙，第六盤只能擺放 110110 或 111100、第七盤 110100。更進一步地可以推估出第五盤和第八盤，如此可以刪除大多數不可能的擺放。

(四)不要忘了盤能夠翻轉或旋轉

適時考慮每一盤共有多少種翻轉或堆疊的擺放可能，如第七盤 101001(圖 28)，此盤共有 12 種擺放可能(如 110100、010011…)，我們考慮第七盤的放法為 101001。

圖 28

利用這些相關性，找解的過程也就輕鬆、簡單許多了。圖 29 為圓柱積木遊戲完成成品。

圖 29

附錄二：空間解的代換表

100000 A_1	010000 A_2	001000 A_3	000100 A_4	000010 A_5	000001 A_6
110000 B_1	011000 B_2	001100 B_3	000110 B_4	000011 B_5	100001 B_6
101000 C_1	010100 C_2	001010 C_3	000101 C_4	100010 C_5	010001 C_6
100100 D_1	010010 D_2	001001 D_3			
111000 E_1	011100 E_2	001110 E_3	000111 E_4	100011 E_5	110001 E_6
110010 F_1	011001 F_2	101100 F_3	010110 F_4	001011 F_5	100101 F_6
100110 F_7	010011 F_8	101001 F_9	110100 F_{10}	011010 F_{11}	001101 F_{12}
101010 G_1	010101 G_2				
111100 H_1	011110 H_2	001111 H_3	100111 H_4	110011 H_5	111001 H_6
111010 I_1	011101 I_2	101110 I_3	010111 I_4	101011 I_5	110101 I_6
110110 J_1	011011 J_2	101101 J_3			
111110 K_1	011111 K_2	101111 K_3	110111 K_4	111011 K_5	111101 K_6
111111 L_1					

附錄三：5+7 盤子封閉區塊的空間解

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	B_1	B_1	B_1	B_1	C_1	C_1
D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_3	J_3
H_1	H_1	I_6	I_6	I_6	H_1	I_6	I_6	H_1	I_6	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
E_2	E_2	G_2	G_2	G_2	E_2	G_2	G_2	E_2	G_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	H_3	H_3	H_3	H_3	I_4	I_4
B_2	B_2	C_6	C_6	C_4	B_2	C_6	C_6	B_2	C_6	J_2	J_2	J_2	J_2	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_2	D_2
C_1	C_5	B_1	B_1	D_1	C_5	B_1	B_1	C_5	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
F_3	G_1	E_1	F_1	F_3	G_1	E_6	F_1	G_1	E_1	E_6	E_1	F_1	F_1	E_6	E_1	F_1	F_1	C_1	C_1	C_1	C_1	B_6	B_6
J_3	I_3	H_1	J_1	J_3	I_1	H_5	J_1	K_5	K_5	H_6	I_1	H_5	I_1	H_6	I_1	H_5	I_1	E_1	F_3	G_1	G_1	E_6	F_6
G_2	F_3	F_3	E_3	H_3	J_2	J_2	H_2	J_2	J_2	F_2	G_1	E_5	G_1	F_2	G_1	E_5	G_1	F_2	E_2	E_3	F_5	G_2	G_2
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_2	H_4	I_5	H_6	I_2	H_4	I_5	H_6	K_5	K_1	K_2	K_2	K_2	K_4
K_1	K_5	K_5	K_5	K_1	K_3	K_6	K_5	I_3	H_1	G_2	F_6	G_1	E_6	G_2	F_6	G_1	E_6	I_5	I_1	I_2	I_2	H_3	H_5
I_3	J_2	J_2	H_5	E_1	F_3	F_6	E_5	F_3	F_3	C_4	C_4	C_3	C_6	C_4	C_4	C_3	C_6	G_1	G_1	F_2	E_2	F_5	E_5

附錄四：6+6 盤子封閉區塊的空間解

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
B_1	C_5	D_1	D_1	B_1	C_5	D_1	D_1	B_1	C_1	B_1	D_1	D_1	E_1	E_1	F_1	H_1	I_6
E_1	G_1	F_3	F_3	E_1	G_1	F_3	F_3	E_1	G_1	H_1	H_1	J_3	K_1	K_5	K_5	K_1	K_6
H_1	I_3	H_1	I_3	H_1	I_3	H_1	I_3	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
F_3	F_3	E_1	G_1	F_3	F_3	E_1	G_1	K_3	K_4	K_3	K_5	K_5	H_4	H_4	J_3	E_5	G_1
D_1	D_1	B_1	C_5	D_1	D_1	B_1	C_5	H_4	I_6	E_5	E_5	F_1	B_6	D_1	D_1	B_6	C_5
C_1	B_1	C_1	B_1	C_1	B_1	C_1	B_1	C_1	B_1	C_1	B_1	B_1	C_1	B_1	B_1	C_1	B_1
G_1	E_1	G_1	E_1	J_3	J_1	J_3	J_1	G_1	E_1	G_1	F_1	E_1	G_1	F_1	E_1	G_1	E_1
I_1	H_6	I_1	H_6	K_6	K_4	K_6	K_4	I_1	H_6	I_1	J_1	H_6	I_1	J_1	H_6	I_1	H_6
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	J_2	J_3	J_2	I_4	I_2	J_2	I_4	I_2	J_2	J_3
K_6	K_4	K_6	K_4	I_1	H_6	I_1	H_6	F_2	F_6	F_2	G_2	G_2	F_2	G_2	G_2	F_2	F_6
J_3	J_1	J_3	J_1	G_1	E_1	G_1	E_1	D_3	D_1	D_3	C_6	C_2	D_3	C_6	C_2	D_3	D_1

附錄五：12 盤無法切割出子封閉區塊的空間解

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
B_6	B_6	B_6	B_6	B_6	B_1	B_1	C_1	C_1	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_6	B_6	B_6	B_1	B_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	C_5	C_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1
E_6	E_6	E_6	F_6	F_6	F_1	F_1	E_1	E_1	E_5	F_3	F_3	F_1	F_1	F_3	F_3	F_6	F_6	E_6	E_6	E_6	E_6	F_6	F_6	F_1	F_1	E_1	E_1	E_1	E_1	F_3	F_3	F_1	F_1	F_3	F_3	F_6	F_6	E_6	E_6	E_5	E_1	F_1	F_1	F_1	F_1	F_1	F_3	F_3	F_3	F_3	F_3	F_1	F_1	F_1	F_1	F_1	F_3	F_3	F_3
C_6	C_6	C_6	C_4	C_4	D_2	D_2	B_2	B_2	B_5	B_3	B_3	D_2	D_2	B_3	B_3	C_4	C_4	C_6	C_6	C_6	C_6	C_4	C_4	D_2	D_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_3	B_3	D_2	D_2	B_3	B_3	C_4	C_4	C_6	C_6	B_5	B_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	B_3	B_3	B_3	B_3	B_3	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	B_3	B_3	B_3
D_2	D_2	D_2	D_1	D_1	C_5	C_5	D_2	D_2	D_3	D_1	D_1	B_1	B_1	C_1	C_1	B_6	B_6	D_3	D_3	D_3	D_2	D_1	D_1	C_5	C_5	D_2	D_2	D_2	D_2	D_1	D_1	B_1	B_1	C_1	C_1	B_6	B_6	D_3	D_2	D_3	D_2	E_4	E_4	G_1	G_1	G_1	E_2	E_2	G_1	G_1	G_1	E_4	E_4	G_1	G_1	G_1	E_2	E_2	G_1
F_4	G_1	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	F_4	G_1	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	F_3	F_5	G_1	G_1	E_5	G_1	E_1	G_1	F_5	F_1	G_1	G_1	E_1	G_1	E_5	G_1	E_1	G_1	E_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	C_4	C_4	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2	C_5	C_5	C_5	C_4	C_4	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2	C_5
J_1	I_1	I_3	H_5	I_1	H_5	I_5	J_1	I_1	I_1	H_6	I_1	H_5	I_5	H_6	I_1	H_5	I_5	H_1	J_2	I_3	I_5	H_5	I_5	H_6	I_5	H_3	J_1	I_5	I_5	H_6	I_1	H_5	I_5	H_6	I_1	H_6	I_5	I_1	I_1	I_1	I_1	H_4	J_3	H_6	I_3	J_3	H_1	J_1	H_5	I_3	J_1	H_3	J_3	H_6	I_3	J_3	H_1	J_1	H_5
H_1	H_6	J_3	J_2	J_2	J_2	J_2	H_1	H_6	J_1	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_1	H_5	H_4	J_3	J_2	J_2	J_2	J_2	J_3	H_1	H_6	J_3	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	K_5	K_1	K_5	K_1	G_1	G_1	E_6	E_3	E_4	G_1	G_1	E_6	E_2	E_2	J_2	H_1	J_2	J_1	I_2	J_3	H_5	J_2
G_1	F_2	F_6	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	F_2	F_4	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	E_6	G_1	E_6	I_1	I_1	J_3	H_4	I_1	H_6	I_5	H_6	I_3	I_3	J_2	H_4	I_5	H_5	I_1	H_6	I_5	H_5	I_5	H_6	H_6	J_1	H_6	J_1	I_5	I_3	I_6	H_3	H_3	I_1	I_1	I_6	H_2	H_1	K_2	K_6	K_2	K_1	K_6	K_6	K_4	K_2
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
K_4	K_1	K_1	K_4	K_1	K_4	K_3	K_4	K_1	K_5	K_6	K_1	K_4	K_3	K_6	K_1	K_4	K_3	K_6	K_2	K_1	K_5	K_4	K_3	K_6	K_3	K_2	K_4	K_3	K_5	K_6	K_1	K_4	K_3	K_6	K_1	K_6	K_3	J_1	H_6	J_1	H_6	K_4	K_6	K_2	K_4	K_6	K_6	K_4	K_2	K_3	K_4	I_3	I_5	I_6	H_3	H_4	I_1	I_3	I_6
I_6	J_1	H_2	I_4	H_2	I_4	H_3	I_6	J_1	H_6	I_2	H_2	I_4	H_3	I_2	H_2	I_4	H_3	G_2	G_2	F_4	F_2	G_2	E_4	G_2	E_4	G_2	G_2	F_6	F_2	G_2	E_2	G_2	E_4	G_2	E_2	G_2	E_4	F_4	F_2	F_4	F_2	J_1	H_6	J_2	J_1	I_6	J_3	H_4	J_2	J_3	I_4	G_1	G_1	E_6	E_4	E_4	G_1	G_1	E_6
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
D_1	D_1	B_6	B_6	B_6	B_1	B_1	B_6	B_6	B_1	B_1	B_1	B_1	C_1	C_5	C_1	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	C_1	C_5	B_1	B_6	C_1	C_5	B_6	B_6	B_1	B_1	B_1	B_1	C_5	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1
F_3	F_3	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	F_6	F_6	F_1	F_1	F_1	F_1	E_1	E_5	E_1	E_5	E_5	F_3	F_3	F_1	F_1	F_1	F_1	F_3	F_3	F_3	F_3	F_6	F_6	F_6	F_6	F_1	F_1	F_1	F_1	F_3	F_3	F_3	F_3	E_6	E_6	E_1	E_5	E_6	E_6	E_1	E_5	E_6	E_6	F_1	F_1	F_1	F_1	E_5	E_5	F_1	F_1	F_3	F_3
B_3	B_3	C_6	C_6	C_6	C_6	C_6	C_4	C_4	D_2	D_2	D_2	D_2	B_2	B_5	B_2	B_5	B_5	B_3	B_3	D_2	D_2	D_2	D_2	B_3	B_3	B_3	B_3	C_4	C_4	C_4	C_4	D_2	D_2	D_2	D_2	B_3	B_3	B_3	B_3	C_6	C_6	B_2	B_5	C_6	C_6	B_2	B_5	C_6	C_6	D_2	D_2	D_2	D_2	B_5	B_5	D_2	D_2	B_3	B_3
G_1	G_1	F_1	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	G_2	E_4	E_4	G_1	G_1	F_1	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	G_2	E_1	E_1	G_2	G_2	E_2	E_2	G_1	G_1	E_5	E_5	G_2	G_2	E_5	E_5	G_1	G_1	E_3	E_3	G_1	G_1	H_5	J_2	H_1	J_3	H_5	J_2	H_1	J_3	H_1	J_1	H_4	I_5	J_1	J_2	H_5	J_2	H_6	J_2	H_1	I_1
C_5	C_5	G_1	F_6	F_6	F_4	F_4	G_1	E_6	G_2	G_2	E_1	E_1	G_1	F_4	F_6	F_4	F_4	G_1	E_6	G_1	G_1	E_4	E_4	G_2	G_2	E_5	E_5	G_1	G_1	E_2	E_2	H_4	J_3	I_3	J_3	H_3	J_1	I_5	J_1	F_1	F_5	F_3	F_3	F_1	F_5	F_3	F_3	K_6	K_4	K_6	K_6	K_6	K_6	K_4	K_2	K_6	K_2	K_4	K_4
I_1	J_1	I_1	H_4	I_6	J_1	J_1	I_1	H_5	I_6	I_2	H_1	H_6	I_1	H_2	I_6	J_1	J_1	I_1	H_6	I_3	I_5	H_4	H_4	I_6	I_4	H_5	H_4	I_3	I_3	H_2	H_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	J_1	H_3	J_3	H_1	J_1	H_3	J_3	H_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
J_2	I_6	H_1	I_5	H_6	H_5	I_1	H_6	I_5	H_6	J_2	I_2	J_2	H_1	I_3	H_6	H_5	I_1	H_6	I_1	H_3	J_2	I_5	J_1	H_5	J_2	I_6	J_3	H_2	J_3	I_3	J_2	K_2	K_2	K_2	K_4	K_5	K_6	K_2	K_2	D_1	D_1	D_3	D_2	G_2	G_2	G_2	G_2	J_2	H_6	J_2	J_1	H_3	I_3	J_3	H_4	J_1	H_1	J_2	J_3
K_2	K_4	K_6	K_3	K_6	K_5	K_5	K_6	K_3	K_6	K_2	K_3	K_5	K_6	K_1	K_6	K_5	K_5	K_6	K_1	K_6	K_6	K_3	K_1	K_4	K_2	K_1	K_3	K_4	K_6	K_1	K_5	J_2	H_5	J_2	I_1	J_1	H_3	J_1	I_5	I_3	I_3	I_5	I_1	K_2	K_2	K_4	K_6	G_1	G_1	E_5	G_1	E_3	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_1	G_1
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_5	I_5	H_3	H_1	I_4	I_3	H_5	H_5	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_1	I_5	I_5	H_1	I_3	H_6	I_5	I_3	I_3	I_5	I_1	H_4
H_1	H_2	J_2	J_1	J_1	I_3	H_4	J_1	J_1	J_1	H_1	J_1	I_6	J_2	J_2	J_1	I_3	H_4	J_1	J_3	J_1	H_4	J_1	I_5	J_3	H_4	J_2	I_4	J_3	H_2	J_2	I_3	G_1	G_1	E_4	E_2	G_2	G_1	E_6	E_6	K_2	K_2	K_4	K_6	I_3	I_3	I_5	I_1	F_1	F_5	G_1	E_2	G_1	E_6	F_5	F_3	E_3	E_5	G_1	E_4
E_1	E_2	D_2	D_2	D_2	D_1	D_1	D_2	D_2	C_5	C_1	C_2	C_4	D_2	D_3	D_2	D_1	D_1	D_2	D_3	B_4	B_5	B_1	B_6	C_1	C_5	C_6	C_2	B_3	B_4	B_5	B_4	C_1	C_3	C_4	C_2	C_6	C_1	C_6	C_6	G_2	G_2	G_2	G_2	D_1	D_1	D_3	D_2	D_2	D_3	C_3	C_2	C_5	C_6	D_3	D_1	B_4	B_6	C_3	C_4
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_1	C_5	C_5	C_1	C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_5	C_1	C_1	C_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_5	C_1	C_1	C_1	B_1	B_1	B_6	B_6	C_1	C_1	C_1	C_1	B_1	B_1	B_6	B_1	B_1	B_6	C_1	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1
F_3	F_3	F_6	F_6	E_6	E_6	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	F_6	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	E_1	E_1	E_6	E_6	E_6	E_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_6	F_6
B_3	B_3	C_4	C_4	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	F_5	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	F_5	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	F_5	F_5	F_2	F_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	E_2	E_4	G_2
J_3	J_2	H_5	J_2	C_4	C_4	C_2	C_4	C_2	C_2	B_4	B_3	B_3	B_4	B_5	B_5	D_3	D_3	C_6	C_6	C_2	C_4	C_2	C_2	B_3	B_4	B_5	B_5	C_2	C_4	C_2	C_2	B_3	B_4	B_5	B_5	C_4	C_4	C_2	C_2	B_4	B_4	B_5	B_5	D_3	D_3	C_2	C_4	C_4	C_2	B_4	B_3	B_4	B_4	D_3	D_3	D_3	B_2	B_5	C_6
K_3	K_4	K_4	K_2	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2	D_2	D_1	D_1	D_1	D_1	D_3	D_3	B_5	B_6	B_1	B_2	H_3	I_2	H_5	I_4	H_3	I_2	H_3	I_2	H_3	I_2	H_2	I_4	H_3	I_2	H_3	I_2	H_3	I_2	H_2	I_4	H_3	I_2	H_3	I_2	H_5	J_3	H_3	H_2	I_2	I_4	H_3	H_2	I_2	I_4	H_4	I_6	J_3	H_1	J_2	H_6
L_1	L_1	L_1	L_1	F_6	F_3	F_6	F_6	E_4	E_5	F_6	F_3	F_6	F_6	E_2	E_1	E_4	E_5	E_6	E_1	F_5	F_2	E_5	E_4	F_5	F_2	E_3	E_2	F_5	F_2	E_3	E_4	F_5	F_2	E_3	E_2	F_5	F_2	E_3	E_4	F_5	F_2	E_3	E_2	I_1	I_3	I_5	J_2	H_6	J_2	I_5	J_2	H_6	J_2	I_3	H_1	H_1	I_3	I_2	I_5
H_2	I_3	J_3	H_4	H_4	I_3	J_3	J_3	H_3	I_5	H_4	I_3	J_3	J_3	H_1	I_1	H_3	I_5	H_5	I_1	I_5	H_6	I_5	H_3	I_5	H_6	I_3	H_2	I_5	H_6	I_3	H_3	I_5	H_6	I_3	H_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
E_2	G_1	G_1	G_1	I_4	H_2	H_3	I_2	J_3	J_3	I_4	H_2	H_3	I_2	J_1	J_1	J_3	J_2	J_2	J_1	D_1	D_1	D_3	D_3	D_1	D_1	D_1	D_2	J_3	J_1	J_1	J_2	J_1	J_3	J_3	J_2	J_1	J_1	J_2	J_2	J_1	J_1	J_2	J_2	J_3	H_5	J_1	I_6	J_1	H_1	J_1	I_6	J_1	H_1	J_2	J_2	I_4	J_2	H_4	J_1
I_3	H_5	I_3	I_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	K_3	K_5	K_2	K_6	K_2	K_6	K_2	K_6	K_2	K_6	K_2	K_2	K_2	K_5	K_4	K_4
G_1	E_6	E_3	E_1	K_6	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_6	K_6	K_4	K_4	K_2	K_6	K_4	K_4	K_6	K_6	K_2	K_2	K_4	K_4	K_2	K_2	K_2	K_6	K_2	K_2	K_2	K_4	K_2	K_2	K_2	K_6	I_5	H_6	I_3	H_4	I_5	H_6	I_3	H_1	G_1	G_1	F_5	F_2	F_2	F_2	F_5	F_2	F_2	F_2	E_3	E_2	E_2	G_1	G_2	E_5
C_5	C_6	B_3	B_1	J_3	J_3	I_6	H_4	I_4	H_5	J_3	J_3	I_6	H_4	I_2	H_6	I_4	H_4	I_6	H_6	J_2	J_2	J_1	J_1	J_2	J_2	J_2	J_3	D_2	D_3	D_3	D_1	D_3	D_2	D_2	D_1	D_3	D_3	D_1	D_1	D_3	D_3	D_1	D_1	C_3	C_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	D_3	B_3	B_3	B_2	C_5	C_2	B_5
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_6	B_1	B_1	B_1	B_1	C_5	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	B_1	B_6	B_6	B_6	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_5	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	B_6	B_1	B_6	B_6	B_6	C_1
F_6	F_6	E_1	E_1	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_3	F_6	F_6	F_6	F_6	E_6	E_6	E_6	E_6	G_1	G_1	F_3	F_3	F_6	F_6	F_6	F_6	E_5	E_6	E_6	F_6	F_6	E_1	E_1	F_3	F_3	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_6	E_5	E_6	E_6	F_6	F_6	E_1
G_2	G_2	F_2	F_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	F_5	E_2	E_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	E_3	E_3	G_2	G_2	G_2	G_2	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	F_2	F_2	E_2	E_2	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	E_3	G_2	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	F_2
C_6	C_6	D_3	D_3	C_4	C_2	C_4	C_4	C_4	C_4	B_3	B_3	B_3	B_4	B_4	B_3	D_3	D_3	D_3	D_3	B_2	B_2	C_6	C_6	C_6	C_6	F_6	F_6	F_6	F_6	F_3	F_3	G_1	G_1	E_6	E_6	E_6	E_6	H_3	H_4	I_2	I_6	J_1	H_6	J_2	H_1	J_1	H_3	I_3	H_3	I_5	J_2	J_2	J_2	H_2	H_4	I_2	I_6	J_1	H_5
I_2	J_1	H_5	J_2	H_1	H_3	I_6	I_2	J_3	J_3	H_1	H_3	I_6	I_2	J_3	J_3	H_4	I_6	J_3	J_3	H_1	J_1	H_1	I_6	J_1	J_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	C_5	C_5	B_1	B_1	B_1	B_1	I_2	J_1	H_3	H_5	H_5	I_5	I_5	I_1	I_1	I_2	J_1	I_2	H_6	I_2	I_4	H_2	I_2	J_1	H_3	H_5	H_5	I_5
H_3	H_4	K_5	K_5	K_6	K_2	K_4	K_2	K_6	K_6	K_6	K_2	K_6	K_2	K_6	K_6	K_4	K_4	K_6	K_6	K_1	K_1	K_6	K_4	K_4	K_4	H_1	H_5	J_1	J_1	I_3	I_5	I_3	I_1	H_4	H_6	J_3	J_1	G_2	F_1	F_5	E_5	E_5	G_1	G_1	G_1	G_1	F_2	F_1	E_2	E_1	E_2	G_2	E_3	G_2	F_1	F_5	E_5	E_5	G_1
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_2	J_2	H_2	I_4	H_2	J_2	H_2	J_2	I_4	J_2	H_3	I_4	C_2	D_2	C_5	C_5	D_3	B_4	D_1	B_4	D_3	B_1	D_2	B_2	B_1	D_1	C_4	B_4	C_4	D_2	C_5	C_3	D_3	B_2
J_1	I_2	J_3	H_4	I_4	J_1	H_3	J_1	H_2	I_4	I_4	J_1	H_2	J_1	H_2	I_4	J_2	J_2	H_5	I_4	J_2	H_6	J_2	J_2	H_6	I_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	D_1	C_3	D_1	D_1	C_3	D_1	B_3	D_1	B_6	D_1	B_5	D_3	D_1	B_1	B_6	C_5	J_3	I_4	J_3	J_3	I_2	J_2
K_4	K_2	I_3	I_3	J_2	I_5	J_3	H_6	I_3	H_4	J_2	I_5	J_2	H_6	I_3	H_4	I_5	H_6	I_1	H_2	I_5	I_5	I_1	H_6	I_5	H_3	K_4	K_6	K_6	K_6	K_6	K_4	K_6	K_6	K_6	K_4	K_4	K_6	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
E_4	E_4	G_1	G_1	F_2	F_5	F_6	F_2	F_3	F_6	F_2	F_5	F_2	F_2	F_3	F_6	E_5	E_6	E_1	E_2	G_1	G_1	E_1	E_6	E_5	E_4	J_1	I_6	I_6	H_1	J_3	H_4	J_3	H_1	J_3	I_6	I_6	H_1	K_5	K_6	K_2	K_2	K_4	K_5	K_5	K_5	K_1	K_2	K_6	K_4	K_2	K_2	K_1	K_6	K_5	K_6	K_2	K_4	K_4	K_3
B_5	B_5	C_3	C_1	D_3	D_3	D_1	D_3	D_1	D_1	D_3	D_3	D_3	D_3	D_1	D_1	B_6	B_6	B_2	B_2	C_5	C_3	B_1	B_1	B_5	B_5	C_2	C_6	C_2	C_2	B_3	B_5	B_3	B_2	C_4	C_6	C_4	C_2	J_2	I_6	J_2	J_2	I_6	J_2	H_5	J_2	H_2	J_2	H_1	J_1	J_2	H_3	H_2	I_2	D_2	C_1	D_2	D_2	C_5	D_1
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
C_1	C_1	C_1	C_1	C_5	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	B_6	B_6	B_1	B_6	B_6	B_6	B_6	B_6	C_5	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	B_1	B_1	B_6	C_1	C_1	C_5	C_1	C_5	C_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	B_6	B_1	B_1	B_1	C_5	C_1	C_1	C_1	D_1	B_1	B_6	B_6	B_1	B_1	B_1	C_5	C_1	C_5
E_1	F_3	F_3	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_6	E_5	E_5	E_6	E_6	F_6	F_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_6	F_6	F_6	E_6	E_6	E_6	F_6	E_1	E_1	F_1	F_3	G_1	G_1	F_6	F_6	F_3	F_3	E_1	E_5	E_5	F_1	F_1	F_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	E_1	E_5	E_5	F_1	F_1	F_1	G_1	G_1	G_1
F_2	E_2	E_2	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	E_3	G_2	F_5	F_5	G_2	G_2	E_4	E_4	G_2	G_2	E_3	E_3	F_5	F_5	E_3	E_4	G_2	G_2	H_5	J_2	J_2	H_3	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_1	H_4	H_4	I_3	I_3	H_1	I_4	I_5	H_5	I_4	I_1	H_2	H_2	I_5	I_1	I_3	H_1	I_4	I_5	H_5	I_4	I_1	H_2	H_2	I_1
J_2	H_1	J_1	H_2	I_3	H_3	I_5	J_2	J_2	J_2	H_3	J_2	H_4	J_1	H_3	J_1	H_2	J_1	I_3	J_1	I_5	J_2	H_2	J_2	H_5	J_2	F_1	F_5	F_5	E_3	F_1	G_2	E_1	G_2	E_1	F_1	E_5	E_5	G_1	G_1	F_3	F_4	G_1	E_5	E_4	G_1	E_2	F_4	E_5	F_1	G_1	F_3	F_4	G_1	E_5	E_4	G_1	E_2	F_4	E_1
I_5	I_1	I_1	I_2	J_1	I_2	H_6	I_2	I_4	H_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	G_1	E_6	F_1	E_1	G_1	G_1	E_5	E_5	I_6	H_2	H_1	I_6	H_3	H_1	I_6	I_6	H_6	H_1	J_1	I_6	H_2	H_1	I_6	H_4	H_6	I_6	I_6	H_5
G_1	G_1	G_1	F_2	F_1	E_2	E_1	E_2	G_2	E_3	K_4	K_4	K_5	K_5	K_6	K_6	K_3	K_3	K_5	K_5	K_1	K_1	K_6	K_6	K_3	K_3	C_3	C_5	C_1	C_1	B_2	B_1	B_4	B_6	B_5	B_2	C_3	C_3	B_6	B_6	C_6	C_3	C_2	C_2	C_3	C_2	B_6	B_6	B_2	B_3	C_2	C_6	C_3	C_2	C_2	C_5	C_6	B_6	B_6	B_5
D_1	B_5	D_3	B_6	D_2	B_1	B_2	D_1	C_4	B_4	J_1	H_4	J_2	H_6	J_1	H_3	J_3	H_3	J_2	I_5	J_1	I_3	J_3	H_4	J_3	H_4	I_3	H_4	I_3	I_1	H_1	H_6	H_3	H_5	H_4	H_1	I_3	J_2	H_5	J_3	G_2	G_1	F_4	G_2	G_1	E_2	F_6	E_6	F_2	E_2	E_2	G_2	G_1	F_4	G_2	G_1	E_6	F_6	E_6	F_5
H_2	J_3	H_3	J_1	H_3	J_1	J_2	H_1	H_3	I_4	D_1	D_3	C_3	C_5	D_2	D_2	D_3	D_2	B_5	B_1	D_1	D_3	B_3	B_4	C_5	C_3	K_3	K_3	K_1	K_1	K_6	K_6	K_2	K_4	K_4	K_6	K_1	K_5	K_4	K_6	D_1	D_1	D_2	D_3	D_1	D_3	D_1	D_2	D_3	D_2	B_2	J_3	J_3	J_1	J_3	J_3	J_1	J_3	J_1	J_2
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_3	I_5	I_3	I_5	I_4	I_4	I_5	I_1	H_4	H_6	H_1	H_3	I_3	I_4	I_3	I_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
K_5	K_1	K_1	K_2	K_6	K_2	K_4	K_2	K_1	K_6	G_1	G_1	F_3	F_5	G_2	G_2	E_5	E_1	F_6	F_2	E_2	E_4	G_1	G_2	E_3	E_1	J_2	I_1	H_6	J_3	J_2	J_1	J_1	J_3	J_2	J_2	J_2	I_3	J_3	H_5	K_5	K_2	K_6	K_1	K_2	K_4	K_5	K_3	K_1	K_3	K_4	K_5	K_2	K_6	K_1	K_4	K_2	K_5	K_3	K_4
B_6	D_2	B_1	D_3	B_1	D_3	D_1	B_5	B_1	C_1	C_3	C_5	D_1	D_3	C_4	C_4	C_5	C_1	D_1	D_3	B_2	B_4	C_5	C_6	B_3	B_1	D_2	D_2	D_3	D_3	D_2	D_2	D_1	D_3	D_3	D_2	B_5	B_4	C_1	C_5	J_2	J_2	J_3	J_1	J_2	J_1	J_2	J_3	J_1	J_3	H_4	D_2	D_2	D_3	D_2	D_2	D_3	D_2	D_3	D_1

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
C_1	D_1	B_1	C_5	C_1	D_1	B_1	B_1	C_5	C_5	B_1	B_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_5	C_1	C_5	C_5	C_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_6	B_6	B_6	B_6	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	C_1	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	B_1	B_1	B_6	B_6	B_6	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_1	C_5	C_5	C_5
G_1	F_3	E_1	G_1	G_1	F_3	E_1	E_1	G_1	G_1	E_6	E_1	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	F_6	F_6	E_6	E_6	E_1	E_6	F_6	F_6	F_6	E_5	E_5	F_3	F_3	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	F_6	F_6	E_6	E_6	E_6	E_6	F_6	F_6	F_6	E_5	E_5	F_3	F_3	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1
I_1	I_3	I_1	H_2	I_5	I_3	H_1	J_2	I_3	J_2	H_6	H_1	J_2	J_2	J_3	J_3	H_3	I_5	I_5	J_2	J_2	J_3	J_3	J_3	H_6	H_5	H_1	J_2	J_3	J_3	J_3	H_4	H_4	J_3	J_3	H_3	I_5	I_1	I_5	I_5	J_2	J_3	J_3	J_3	H_6	H_5	H_6	J_2	J_3	J_3	J_3	H_4	H_3	J_3	J_3	H_3	I_1	I_1	I_5	I_5
F_1	G_1	G_1	E_2	E_5	G_1	F_3	F_5	F_3	F_2	I_5	J_3	I_1	I_5	H_1	I_3	J_3	H_5	J_3	H_6	H_5	H_6	I_5	I_5	I_5	I_5	J_3	I_1	H_1	I_3	I_3	J_3	J_3	H_4	H_4	J_3	H_6	H_5	J_3	J_3	H_6	H_6	I_5	I_5	I_5	I_1	J_3	I_5	H_1	I_3	I_3	J_3	J_3	H_4	H_4	J_3	H_5	H_6	J_3	J_3
H_1	J_1	H_5	I_4	H_6	J_1	L_1	L_1	L_1	L_1	G_1	F_6	G_1	G_1	E_1	G_1	F_6	E_6	F_6	E_6	E_6	E_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	G_1	E_1	G_1	G_1	F_3	F_3	E_5	E_5	F_6	E_6	E_6	F_6	F_6	E_6	E_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	G_1	E_1	G_1	G_1	F_3	F_3	E_5	E_5	F_6	E_6	E_6	F_6	F_6
B_3	C_2	C_6	B_5	B_2	C_2	J_2	H_1	J_2	I_3	D_2	D_3	C_5	D_1	D_2	D_2	D_1	D_2	D_1	B_6	D_1	B_1	B_5	C_5	C_5	D_3	C_6	D_1	C_6	C_5	D_2	B_2	D_3	B_5	D_2	B_6	B_1	D_3	B_4	D_1	D_1	C_2	B_5	C_5	C_3	D_3	C_2	D_1	C_6	C_5	D_2	B_2	D_1	B_5	D_2	B_6	B_5	D_3	B_4	D_1
E_2	E_2	K_4	K_4	K_1	K_4	K_5	K_1	K_2	K_3	C_6	C_1	D_2	C_4	C_5	C_2	B_4	B_5	B_6	D_3	B_3	C_5	C_4	B_6	D_1	C_6	D_2	C_2	D_3	D_1	C_6	D_2	B_6	D_3	B_1	D_3	D_1	B_2	D_2	B_6	B_4	B_4	C_4	B_6	F_3	F_6	G_2	F_6	G_2	E_5	E_6	G_2	G_2	G_2	G_2	E_5	F_5	F_3	E_5	E_5
J_1	H_6	J_1	J_1	J_1	H_4	D_1	D_2	D_1	D_3	F_2	G_1	F_1	F_6	G_1	E_2	E_3	F_5	E_5	F_5	F_3	G_1	E_4	E_5	J_3	J_2	I_1	H_2	I_5	H_4	H_5	I_1	I_5	I_5	I_1	I_2	J_3	J_2	H_2	H_4	I_4	I_3	H_3	H_4	K_1	K_3	K_6	K_3	K_4	K_5	K_5	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_3	K_3	K_3	K_3
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_6	I_4	H_4	H_3	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
K_3	K_4	F_2	F_5	F_2	E_2	G_2	G_2	E_5	E_3	K_1	K_2	K_3	K_1	K_2	K_5	K_6	K_1	K_1	K_4	K_4	K_6	K_5	K_1	K_5	K_3	K_6	K_3	K_4	K_5	K_1	K_6	K_2	K_4	K_2	K_4	K_5	K_3	K_3	K_1	K_6	K_6	K_5	K_1	J_2	J_2	I_1	H_2	I_5	H_1	H_2	I_1	I_3	I_5	I_1	I_2	J_1	J_2	H_2	H_1
D_3	B_4	D_3	D_3	D_3	B_2	C_6	C_4	B_5	B_4	J_1	I_2	H_3	H_2	I_4	H_5	I_6	J_1	H_1	I_6	I_4	I_6	H_6	H_1	F_1	F_6	G_2	F_6	G_2	E_1	E_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_5	F_1	F_3	E_5	E_1	F_3	G_2	E_6	E_1	D_3	C_6	D_2	C_2	D_3	D_1	C_2	D_2	B_3	D_3	B_2	D_3	D_2	B_2	D_2	B_1
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
C_5	D_1	D_1	D_1	B_6	B_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_5	C_5	C_5	C_1	C_5	D_1	D_1	D_1	B_6	B_6	B_1	B_6	C_5	C_5	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_6	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_1	C_5	C_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	C_1	B_1	B_6	B_6	B_1	B_1	B_1	B_6	B_1	B_1	C_5	C_5
G_1	F_6	F_6	F_6	E_6	E_1	E_6	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_6	F_6	E_5	E_5	E_1	E_5	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_3	F_3	F_3	E_1	E_1	E_1	E_5	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_6	F_6	F_6	F_6	E_6	E_5	G_1	H_1	H_6	I_5	I_6	I_6	I_6	I_6	J_1	J_1	H_4	H_4
J_2	J_3	J_3	J_3	H_6	H_1	J_2	J_2	J_3	J_3	H_3	I_5	I_5	J_2	J_2	J_3	J_3	J_3	H_4	H_4	J_2	J_2	I_3	I_3	J_2	J_2	H_2	H_2	J_3	J_3	H_1	H_1	J_2	J_2	H_3	H_3	I_1	I_1	J_2	J_2	J_2	J_2	H_3	H_3	J_3	J_3	K_4	K_4	K_1	E_2	F_2	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	F_4	F_4	E_4	E_4
H_6	H_6	I_5	I_5	I_1	J_3	I_1	I_5	H_1	I_3	J_3	H_6	J_3	H_5	H_6	H_6	I_5	I_5	K_3	K_4	K_2	K_2	K_3	K_3	K_5	K_5	K_2	K_2	K_5	K_6	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	H_4	J_1	J_1	F_3	E_2	G_1	E_4	E_4	E_4	F_4	E_3	E_3	G_2	G_2
E_6	E_1	G_1	G_1	G_1	F_6	G_1	G_1	E_1	G_1	F_6	E_6	F_6	E_6	E_6	E_6	G_1	G_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	K_4	K_4	K_4	K_6	K_4	K_4	K_6	K_6	K_4	K_6	K_4	K_6	K_1	K_1	K_1	K_1	L_1	L_1	L_1	C_1	C_4	C_5	C_5	D_2	D_2	C_5	C_1	C_1	B_1	D_2
D_1	C_6	B_5	C_5	D_2	D_3	C_5	D_1	D_2	D_2	D_1	D_2	D_1	B_1	D_1	B_2	B_5	C_5	J_2	J_2	H_1	H_4	J_2	J_2	I_3	I_3	J_3	J_3	H_2	H_2	J_2	J_2	H_1	H_4	J_1	J_1	J_3	J_3	H_4	H_1	I_3	I_3	J_1	J_1	H_2	H_2	F_2	F_5	F_5	G_1	G_2	E_5	F_1	F_1	F_1	E_5	G_1	G_1	F_1	F_1
F_3	G_2	E_4	E_5	J_1	I_2	H_3	H_2	I_4	H_2	I_6	J_1	H_4	I_2	I_4	I_2	H_6	H_4	F_1	G_1	F_3	G_1	E_2	F_2	E_3	F_3	E_1	G_1	E_2	G_1	C_1	D_3	C_1	D_2	B_4	D_1	B_1	D_1	B_6	D_2	B_3	D_2	B_5	C_5	B_3	C_3	J_2	H_3	I_5	I_3	I_6	H_4	H_6	H_6	J_1	H_5	H_4	I_3	I_5	I_5
K_6	K_2	K_3	K_3	K_1	K_6	K_3	K_1	K_2	K_1	K_6	K_1	K_3	K_6	K_4	K_6	K_5	K_3	D_1	C_5	D_1	C_1	B_4	D_3	B_5	D_1	B_1	C_5	B_2	C_5	G_1	F_5	G_1	F_1	E_3	F_3	E_1	F_3	E_5	F_1	E_3	F_1	E_5	G_1	E_3	G_1	D_2	D_1	D_1	K_3	K_6	K_4	K_6	K_6	K_4	K_4	K_3	K_3	K_3	K_3
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_6	I_5	I_3	I_1	H_3	H_3	H_4	H_4	I_1	I_1	I_1	I_3	I_5	I_5	I_5	I_1	I_3	I_3	H_1	H_1	I_5	I_1	H_3	H_5	I_5	I_3	I_3	I_1	I_4	I_3	H_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
I_4	I_5	H_6	H_1	F_2	G_1	F_1	F_6	G_1	E_6	E_3	F_5	E_1	F_1	F_3	G_1	E_4	E_1	G_2	F_5	G_1	F_1	F_5	E_3	F_6	E_4	G_1	E_1	G_1	E_3	F_5	G_1	F_5	G_1	F_3	E_3	F_3	E_1	F_5	E_1	F_5	E_5	G_1	E_3	G_1	E_1	G_2	G_1	E_2	J_2	J_2	J_2	J_1	J_1	H_6	J_3	I_1	H_5	J_1	J_1
B_4	B_6	C_6	B_1	C_6	C_3	D_2	C_4	C_5	C_6	B_4	B_5	B_1	D_2	B_3	C_3	C_4	B_1	C_6	D_3	C_3	D_2	D_3	B_4	D_1	B_5	C_3	B_2	C_5	B_3	D_3	C_1	D_3	C_3	D_1	B_4	D_1	B_1	D_3	B_2	D_3	B_5	C_3	B_4	C_1	B_2	C_4	C_3	B_2	D_2	D_2	D_3	D_2	C_5	C_1	D_3	D_2	D_2	D_2	B_1
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	B_6	B_6	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	B_6	B_6	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	B_1	B_6	B_1	B_6	B_6	C_5
H_1	H_6	J_1	J_1	H_1	H_1	I_3	I_3	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	H_4	H_4	I_3	I_6	I_6	J_1	J_1	H_4	I_5	I_6	I_6	J_1	H_1	I_3	I_3	I_6	I_6	I_6	J_1	H_4	I_5	I_6	I_6	J_1	H_1	I_3	I_3	I_6	I_6	I_6	J_1	I_6	H_1	H_1	I_3	I_6	I_6	J_1	J_1	H_5	I_5	I_1	J_3	J_3	H_4
E_2	F_2	F_4	F_4	E_2	E_2	E_3	E_3	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_4	E_4	E_3	G_2	G_2	F_4	F_4	E_4	F_5	G_2	G_2	F_4	E_2	E_3	E_3	G_2	G_2	G_2	F_4	E_4	F_5	G_2	G_2	F_4	E_2	E_3	E_3	G_2	G_2	G_2	F_4	G_2	E_2	E_2	E_3	G_2	G_2	F_4	F_4	I_4	H_3	J_2	H_3	I_2	I_4
G_2	G_2	G_2	G_2	F_2	F_2	G_1	G_1	E_6	E_6	F_2	F_2	F_2	F_2	J_1	I_4	J_2	H_2	H_5	J_2	H_2	I_1	I_4	J_2	H_1	J_3	I_3	I_2	H_3	J_2	H_6	J_2	J_2	I_1	I_4	J_2	H_2	J_3	I_3	I_1	H_3	J_2	H_5	J_2	J_2	I_4	J_3	I_1	J_2	H_2	H_5	J_2	H_2	I_1	E_4	E_3	F_5	E_3	E_2	G_2
D_3	B_3	B_6	B_5	C_6	C_6	C_1	C_1	C_1	C_1	B_2	B_2	C_1	C_1	C_5	C_2	B_2	C_2	C_5	C_3	B_3	C_1	C_6	C_6	C_1	C_1	C_1	C_4	C_4	C_6	C_1	C_3	C_3	C_1	C_6	C_6	C_3	C_1	C_1	C_5	C_4	C_6	C_5	C_3	C_3	C_4	C_1	C_5	B_5	C_2	C_5	C_3	B_3	C_1	D_1	D_1	D_3	C_3	D_2	D_2
F_5	E_3	E_5	E_5	G_2	G_2	F_3	F_3	F_3	F_3	E_1	E_1	E_1	E_1	E_5	G_2	F_2	G_2	E_5	F_5	E_2	G_1	G_2	G_2	E_1	F_3	G_1	G_2	G_2	G_2	E_1	E_3	F_5	G_1	G_2	G_2	E_3	F_3	G_1	G_1	G_2	G_2	E_5	E_3	F_5	G_2	E_1	G_1	F_5	G_2	E_5	F_5	E_2	G_1	C_5	C_5	C_1	D_3	C_5	B_5
J_2	I_3	H_4	I_1	I_2	J_1	H_2	J_3	H_2	J_3	H_6	J_1	H_6	J_1	D_3	B_6	C_4	B_6	B_6	B_6	C_2	B_4	D_1	D_1	D_2	D_1	D_2	B_1	B_1	B_3	B_1	B_3	B_6	B_5	F_4	E_4	F_4	E_2	E_3	F_3	F_2	F_6	F_6	F_6	E_4	E_2	H_6	J_2	I_2	J_2	J_2	H_3	I_1	H_2	G_1	G_1	G_1	F_2	G_1	E_5
K_5	K_3	K_3	K_5	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_6	K_4	K_2	K_2	F_2	F_6	G_2	F_6	F_6	E_6	G_2	E_3	J_3	H_4	J_1	H_1	H_2	J_1	J_1	H_2	J_1	H_2	H_6	H_5	K_2	K_2	K_2	K_2	K_3	K_3	K_2	K_4	K_6	K_6	K_2	K_2	K_6	K_5	K_2	K_2	K_2	K_2	K_1	K_1	F_5	F_5	E_5	G_2	F_3	F_6
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
I_3	J_2	I_1	H_4	J_1	I_2	J_3	H_2	J_3	H_2	J_1	H_6	J_1	H_6	K_4	K_2	K_5	K_2	K_2	K_2	K_5	K_5	K_2	K_2	K_6	K_2	K_3	K_2	K_2	K_4	K_2	K_4	K_2	K_1	J_3	H_1	J_3	H_4	H_5	J_2	J_1	H_2	J_2	H_2	H_6	H_5	F_4	F_3	G_1	F_6	F_6	E_6	G_2	E_5	K_4	K_4	K_6	K_3	K_4	K_2
B_4	D_2	D_2	D_1	B_4	B_3	B_3	B_3	B_3	B_3	C_5	C_1	B_1	B_1	H_4	J_2	I_5	J_2	J_2	H_3	I_1	H_5	F_4	E_2	F_2	E_4	E_5	F_2	F_2	F_6	F_2	F_6	E_4	E_3	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2	B_2	B_1	B_3	B_5	B_4	B_6	B_1	D_2	B_3	C_1	B_6	B_6	B_6	C_6	B_5	J_1	J_1	H_1	I_5	H_5	J_2
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
C_5	C_1	C_5	C_5	C_5	C_1	D_1	D_1	B_6	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_6	B_6	B_1	C_1	C_5	C_5	C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	B_6	B_6	B_6	B_6	B_6	B_1	C_5	C_5	D_1	D_1	B_1	B_6	B_6	B_6	B_6	B_6	C_1	C_5	D_1	D_1	B_6	B_6	C_5	D_1	B_6	B_1	B_6	B_1	C_1	C_5	C_1	C_5
H_5	J_3	J_1	J_1	J_1	J_3	J_3	J_3	H_6	H_6	H_6	I_1	I_1	J_1	J_3	J_3	J_1	H_1	H_5	J_1	J_3	J_3	J_1	J_1	J_3	J_3	J_3	J_3	H_6	H_6	H_4	H_5	I_5	I_1	H_4	H_4	J_3	J_3	H_5	H_6	H_4	H_4	I_5	I_5	H_1	H_4	J_3	J_3	H_6	I_5	H_4	J_3	H_5	H_6	J_3	J_1	I_1	I_5	J_3	J_1
J_2	H_3	H_2	I_4	I_4	I_2	H_3	I_2	I_2	J_2	J_2	H_2	J_2	H_2	H_3	H_3	I_4	I_2	J_2	H_2	H_3	I_2	I_4	I_4	H_3	H_3	H_3	I_2	I_2	I_2	I_4	I_4	H_3	H_2	I_4	I_4	I_2	I_2	I_4	I_2	I_4	I_4	H_3	H_3	I_2	I_4	I_2	I_2	I_2	H_3	I_4	I_2	K_5	K_5	K_2	K_4	K_2	K_2	K_2	K_4
F_2	E_4	E_2	G_2	G_2	G_2	F_5	F_2	E_2	F_5	F_5	E_3	F_5	E_3	E_3	E_3	E_4	G_2	F_2	E_2	E_4	G_2	G_2	G_2	F_5	F_5	F_5	F_2	E_2	E_2	F_4	F_4	E_3	E_3	G_2	G_2	F_2	F_2	E_4	E_2	F_4	F_4	E_3	E_3	G_2	G_2	F_2	F_2	E_2	E_3	G_2	F_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
D_3	B_4	D_3	B_6	D_3	D_2	C_5	B_1	D_1	D_2	D_2	D_1	D_3	C_1	D_2	D_2	D_3	D_3	D_3	B_3	D_2	B_1	D_3	D_3	B_5	B_5	C_5	B_1	F_3	G_2	E_1	G_2	F_3	G_2	E_6	F_4	E_1	G_2	F_3	G_2	E_1	G_2	F_3	G_2	E_4	F_4	E_1	G_2	G_2	G_2	E_2	G_2	J_3	J_1	H_5	H_6	J_3	J_1	I_1	I_5
B_6	D_1	B_5	D_1	B_2	B_4	B_6	C_5	C_1	C_2	C_2	C_1	C_1	D_1	C_6	C_6	C_1	B_2	B_6	D_1	B_2	D_1	B_3	B_3	C_4	C_4	B_6	C_5	C_1	C_6	C_1	C_6	C_1	C_6	B_6	B_4	C_1	C_4	C_1	C_6	C_1	C_4	C_1	C_6	B_4	B_4	C_1	C_4	C_6	C_6	B_3	C_4	E_4	E_2	E_5	E_1	G_1	G_1	G_1	G_1
E_5	F_3	F_5	F_6	E_2	F_4	E_6	G_1	G_1	E_2	G_2	G_1	G_1	F_3	F_2	G_2	G_1	E_1	E_6	F_6	F_2	F_3	E_3	F_3	E_4	G_2	E_5	G_1	G_1	F_2	G_1	E_6	G_1	F_2	F_6	E_4	G_1	E_4	G_1	F_2	G_1	E_4	G_1	F_2	F_4	E_4	G_1	E_4	K_4	K_4	K_2	K_6	C_3	D_3	C_3	D_1	B_5	D_3	B_5	D_1
G_1	G_1	G_1	E_4	F_4	E_2	G_2	E_3	J_2	I_3	I_6	J_2	H_4	I_3	I_5	I_6	H_5	J_1	I_6	I_6	I_2	H_1	H_2	H_1	I_3	I_6	I_5	H_2	D_2	D_3	D_2	D_1	D_2	D_3	D_1	D_3	B_5	B_5	J_1	J_3	J_1	J_2	J_2	J_3	J_2	J_2	H_2	H_2	J_1	J_1	J_2	H_1	G_1	F_5	G_1	F_3	E_5	F_5	E_5	F_3
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_1	I_5	I_1	I_3	H_5	H_3	H_5	H_1
K_6	K_4	K_4	K_1	K_5	K_3	K_3	K_4	K_6	K_4	K_1	K_6	K_6	K_4	K_4	K_5	K_6	K_2	K_3	K_1	K_1	K_4	K_6	K_2	K_6	K_3	K_6	K_4	K_6	K_4	K_6	K_2	K_6	K_4	K_5	K_1	K_6	K_6	K_6	K_4	K_6	K_6	K_6	K_4	K_3	K_1	K_6	K_6	F_2	F_2	F_3	E_4	F_1	G_1	F_1	G_1	F_1	E_3	F_1	E_1
I_6	I_6	I_4	H_1	H_6	H_4	I_5	H_5	F_3	G_2	E_3	F_3	E_1	G_2	G_2	F_5	F_3	F_2	G_1	G_1	G_1	E_4	F_6	E_4	G_2	E_3	G_2	E_5	J_3	J_1	J_3	J_2	J_3	J_1	J_2	J_1	H_1	H_1	D_3	D_2	D_3	D_1	D_1	D_2	D_1	D_1	B_6	B_6	D_3	D_3	D_1	B_5	D_2	C_1	D_2	C_5	D_2	B_3	D_2	B_1
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
B_1	B_1	B_6	B_1	B_6	B_1	C_1	C_1	C_5	C_5	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	E_6	F_3	F_6	F_6	F_6	F_6	F_6	F_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_1	E_6	E_6	E_5	E_5
H_6	I_1	I_5	J_1	J_3	J_1	H_6	H_6	J_1	J_1	H_1	H_4	I_3	I_3	J_1	J_1	J_1	J_3	J_3	J_3	K_1	K_1	H_6	H_6	H_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	H_1	H_4	H_4	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_6	I_3	I_3	I_3	I_3	I_3	I_3	I_3	I_5	I_5	I_5	I_5	I_5	I_5	H_5	H_6	H_5	H_5	I_5	I_5
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	H_2	H_2	F_2	F_2	F_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_2	E_4	E_4	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	F_5	F_5	F_5	F_5	F_5	F_5	I_4	J_2	J_2	J_2	H_3	J_2
K_3	K_3	K_1	K_3	K_1	K_3	K_4	K_4	K_6	K_6	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	K_5	L_1	L_1	B_2	D_3	D_3	B_4	B_4	B_4	C_4	C_4	D_1	D_1	B_1	D_2	D_2	B_1	C_6	D_2	D_2	D_2	D_2	B_4	B_3	B_4	C_2	C_2	D_1	D_1	B_6	C_4	D_3	D_3	D_3	D_3	B_4	B_5	C_3	C_3	B_3	B_2
J_1	J_3	J_1	H_6	I_1	I_5	J_1	J_1	H_6	H_6	I_5	I_1	H_6	H_5	H_6	H_6	I_5	I_1	I_1	I_1	F_6	F_6	C_2	C_4	C_4	C_5	D_2	D_2	D_3	D_3	C_1	C_1	C_1	C_6	C_6	C_5	B_6	B_5	B_5	C_5	C_5	C_5	D_3	D_2	D_2	D_2	C_1	C_1	C_5	B_4	B_2	B_3	C_1	C_1	D_1	C_3	B_3	D_3	D_1	D_2
D_2	C_1	D_2	D_2	C_1	D_2	B_2	D_2	B_2	D_2	B_3	C_3	B_3	C_3	B_2	B_1	B_4	B_2	C_3	C_3	J_3	J_3	G_2	G_2	G_2	F_1	F_1	F_1	F_2	F_2	F_3	F_3	G_1	G_2	G_2	E_5	E_6	E_5	E_5	E_5	E_5	F_1	F_5	F_1	F_4	F_4	F_3	F_3	E_5	E_4	E_1	E_3	E_1	E_1	C_5	D_3	D_1	B_5	C_5	C_5
F_4	G_1	F_4	F_4	G_1	F_4	E_1	F_1	E_1	F_1	E_2	G_1	E_2	G_1	E_2	F_1	E_4	F_2	G_1	G_1	B_2	C_1	I_4	I_2	J_1	H_6	H_6	J_1	H_1	J_2	H_2	J_3	I_3	I_4	J_3	H_4	H_6	H_5	J_3	H_5	J_3	H_6	H_4	J_1	H_3	J_1	H_2	J_3	H_4	H_4	H_6	J_1	H_6	J_1	G_1	F_2	F_3	F_5	G_1	G_1
E_3	E_5	G_2	E_3	E_5	G_2	G_1	G_1	G_1	G_1	G_2	E_1	G_2	E_1	F_3	E_5	G_2	G_2	E_5	F_1	E_1	G_1	K_4	K_2	K_4	K_6	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_3	K_4	K_6	K_4	K_6	K_4	K_6	K_2	K_2	K_6	K_4	K_4	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_6	K_4	K_2	K_2	F_5	G_2	G_1	G_1	F_5	F_3
I_3	H_4	H_4	I_3	H_4	H_4	I_5	I_3	I_5	I_3	J_2	J_1	J_2	J_1	I_3	I_4	H_5	H_3	H_6	H_1	I_1	I_3	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
G_1	F_6	E_5	G_1	F_6	E_5	F_5	E_3	F_5	E_3	F_5	F_4	F_5	F_4	G_1	G_2	F_1	E_3	F_2	E_2	G_1	E_3	J_3	J_1	I_2	J_1	J_1	H_6	J_2	H_1	J_3	H_2	J_2	J_3	I_4	J_2	J_1	J_3	H_5	J_3	H_5	J_1	J_2	H_6	J_1	H_3	J_3	H_2	J_2	J_2	J_1	H_3	J_1	H_6	K_4	K_3	K_4	K_4	K_4	K_4
C_5	D_1	C_5	C_5	D_1	C_5	D_3	B_4	D_3	B_4	C_3	B_4	C_3	B_4	C_3	C_2	C_5	C_3	B_2	B_3	C_3	B_3	D_3	B_1	B_2	D_2	C_5	C_1	B_2	B_2	B_3	B_3	D_2	B_3	B_4	D_3	D_2	C_1	C_5	B_6	B_6	D_2	C_3	C_1	B_4	B_3	B_3	B_3	D_3	D_3	C_5	C_3	B_1	B_1	J_1	I_5	I_6	I_4	J_1	H_5
A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
F_1	F_1	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_5	E_5	E_5	E_6	E_6	E_1	E_1	F_1	F_1	F_1	F_1	F_3	F_3	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_6	E_1	E_5	F_1	F_1	F_1	F_1	G_1	G_1	E_6	E_6	E_1	E_1	F_1	F_1	F_1	F_1	G_1	G_1	E_6	E_1	F_1	G_1	E_1	E_6	E_5	E_6	E_6	F_6	F_6	F_1
H_5	I_1	J_3	J_3	I_1	I_5	I_1	I_1	H_6	H_5	H_5	H_5	H_6	H_5	I_1	I_1	H_5	H_5	H_5	I_1	J_3	J_3	J_3	J_3	I_3	I_1	I_1	I_5	H_6	H_6	I_1	I_5	I_1	I_1	I_1	I_1	I_3	I_3	H_6	H_6	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_3	I_3	H_5	I_1	I_1	I_1	H_1	H_6	H_5	H_5	H_6	J_3	J_3	J_1
J_2	J_2	H_3	I_2	H_2	J_2	J_2	J_2	I_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	H_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	H_3	H_3	H_3	I_2	H_2	J_2	J_2	J_2	I_2	I_2	H_2	H_3	H_2	H_2	J_2	J_2	H_2	H_2	I_2	I_2	H_2	H_2	H_2	H_2	J_2	J_2	H_3	H_2	I_4	H_2	J_2	H_2	I_2	J_2	J_2	J_2	J_2	H_3	H_3	I_4
D_3	D_3	C_3	B_2	C_2	C_6	C_6	C_6	B_3	B_2	B_2	B_2	C_3	C_3	B_4	B_5	D_3	D_3	D_3	D_3	B_5	B_5	C_3	B_2	C_2	C_6	C_6	C_6	B_3	B_3	B_4	B_3	B_3	B_3	D_3	D_3	C_2	C_2	B_3	B_3	B_4	B_4	B_3	B_3	D_3	D_3	C_4	C_2	B_4	B_4	D_3	C_2	G_2	F_5	F_2	G_1	G_1	E_3	G_1	G_2
C_1	B_6	D_2	D_2	D_1	B_2	D_3	D_3	D_1	C_3	D_3	D_3	B_5	D_3	D_1	D_3	B_2	B_2	C_1	B_6	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	B_5	D_3	D_2	F_3	G_2	F_3	G_2	E_3	G_2	E_5	G_2	E_2	F_4	F_3	G_2	F_3	G_2	E_3	G_2	E_5	G_2	E_4	F_4	G_2	G_2	G_2	E_4	C_6	B_5	D_3	C_1	C_5	B_4	C_5	C_6
B_1	C_1	B_2	C_3	B_1	D_3	B_2	B_2	C_1	D_2	C_4	C_6	D_3	B_6	C_1	C_1	C_2	C_2	B_1	C_1	C_6	C_6	B_2	C_5	B_4	D_2	B_3	B_4	C_1	C_6	C_1	C_6	C_3	C_6	C_5	C_2	B_3	B_4	C_1	C_6	C_1	C_6	C_3	C_6	C_5	C_2	B_4	B_4	C_6	C_6	C_2	B_5	D_2	D_3	B_6	B_6	D_1	D_1	D_1	D_2
E_6	G_1	E_1	G_1	E_6	F_5	E_2	F_2	G_1	F_1	F_6	G_2	F_2	F_6	G_1	G_1	E_2	G_2	E_1	G_1	E_6	G_2	E_2	G_1	E_3	F_4	E_3	F_4	G_1	F_2	G_1	F_2	G_1	E_6	G_1	E_2	F_3	E_3	G_1	F_2	G_1	F_2	G_1	E_6	G_1	E_2	F_4	E_4	K_4	K_4	K_4	K_4	B_5	C_3	C_1	D_3	B_3	C_5	B_4	B_5
G_2	E_3	G_1	E_1	F_2	E_4	F_4	E_6	J_2	I_1	I_3	I_2	I_2	I_6	J_2	H_5	I_3	I_6	I_1	H_3	I_5	I_2	I_2	H_1	J_3	H_2	H_2	H_1	D_2	D_3	D_2	D_3	D_1	D_1	B_2	B_2	D_1	D_3	J_1	J_3	J_2	J_3	J_1	J_1	H_3	H_3	J_1	J_3	J_1	J_1	H_4	J_1	F_5	G_1	G_1	F_5	F_3	G_1	E_3	E_5
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
K_1	K_6	K_2	K_2	K_1	K_6	K_5	K_1	K_6	K_2	K_2	K_5	K_3	K_5	K_6	K_6	K_4	K_1	K_4	K_6	K_2	K_5	K_5	K_4	K_4	K_5	K_6	K_3	K_6	K_4	K_6	K_4	K_2	K_2	K_4	K_4	K_2	K_4	K_6	K_4	K_6	K_4	K_2	K_2	K_4	K_4	K_3	K_1	F_2	F_2	E_2	F_5	K_1	K_6	K_4	K_4	K_4	K_6	K_6	K_1
I_1	H_6	I_2	H_3	J_1	H_6	H_6	H_2	F_3	G_2	G_2	F_1	G_1	G_1	F_3	F_3	G_2	E_3	G_2	E_1	G_2	E_5	G_1	E_5	F_4	E_6	F_6	E_4	J_3	J_1	J_3	J_1	J_2	J_2	H_4	H_4	J_2	J_1	D_3	D_2	D_1	D_2	D_3	D_3	B_1	B_1	D_3	D_2	D_3	D_3	B_2	D_3	J_1	I_2	I_6	I_6	I_4	I_6	I_6	H_2

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_5	E_1	E_6	E_1	E_1	E_6	E_6	F_1	F_1	F_1	F_6	F_1	F_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_5	E_1	E_6	E_1	E_1	E_6	E_6	F_6	F_1	F_1	F_6	F_1	F_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_5	E_6	E_6	E_6	E_6	F_1	F_6	F_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1
I_3	I_1	I_5	I_5	I_1	I_1	H_4	H_6	H_6	H_6	H_6	H_5	H_5	J_1	J_1	J_1	J_3	J_1	J_1	I_5	I_3	I_1	I_5	I_5	I_1	I_1	H_5	H_6	H_6	H_6	H_6	H_5	H_6	J_3	J_1	J_1	J_3	J_1	J_1	I_3	I_3	I_5	I_5	I_5	I_1	I_1	H_4	H_6	H_5	H_5	H_6	J_1	J_3	J_1	I_1	I_5	I_1	I_5	I_1	I_1
H_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	I_4	I_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	H_2	H_2	H_2	H_3	I_4	I_4	H_3	H_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	I_4	I_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	H_3	H_2	H_2	H_3	I_4	I_4	H_2	H_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	I_4	J_2	J_2	J_2	J_2	H_2	H_3	I_4	H_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2
E_2	E_6	E_6	F_2	F_2	F_2	G_2	G_2	F_5	F_5	F_5	F_5	G_1	E_2	E_3	E_3	G_1	G_2	G_2	E_4	E_2	E_6	F_2	F_2	F_2	F_2	G_2	G_2	F_5	F_5	F_5	F_5	G_1	E_3	E_3	E_3	G_1	G_2	G_2	E_2	E_2	E_6	F_2	F_2	F_2	F_2	G_2	F_5	F_5	G_1	G_1	E_2	G_1	G_2	E_2	E_6	E_6	F_2	F_2	F_2
B_2	B_6	B_1	B_2	D_3	D_3	C_6	C_2	B_5	C_3	C_3	D_3	C_1	B_2	C_3	C_3	C_5	C_6	C_6	B_4	B_2	B_6	B_2	B_2	D_3	D_3	C_4	C_2	B_5	C_3	C_3	D_3	C_5	B_4	C_3	C_3	C_5	C_6	C_6	B_2	B_2	B_1	B_2	B_2	D_3	D_3	C_6	B_5	D_3	C_1	C_5	B_2	C_5	C_6	B_3	B_1	B_6	B_2	D_3	D_3
D_3	C_1	D_1	D_3	B_3	C_1	B_6	D_2	C_6	B_2	D_3	C_6	D_1	C_2	B_5	D_2	B_6	B_1	D_2	C_5	D_3	D_1	C_1	D_3	B_2	C_1	B_5	D_2	C_6	B_2	D_3	C_4	D_1	C_4	B_5	D_2	B_1	B_1	D_2	C_3	D_3	D_1	C_1	D_3	B_3	C_3	D_3	D_3	B_6	B_1	D_1	D_2	D_1	D_2	D_3	C_5	D_1	D_3	B_2	C_1
C_4	D_3	C_4	C_4	C_4	B_1	D_1	B_4	D_2	D_2	B_6	B_1	B_4	D_1	D_3	B_1	D_3	D_1	B_5	D_1	C_6	C_2	D_1	C_4	C_2	B_1	F_5	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	F_3	G_2	G_2	G_2	E_1	E_1	E_5	F_5	F_6	F_6	E_5	E_4	E_4	E_3	J_2	I_2	I_6	I_2	I_4	I_4	I_6	H_5	J_2	H_3	H_2	H_3	H_5	H_1
F_6	F_5	F_6	E_4	E_4	E_1	J_3	J_1	I_1	I_1	I_5	I_1	I_4	I_3	I_5	I_1	I_2	H_1	H_5	J_3	J_2	H_2	H_4	H_3	H_2	H_1	K_3	K_5	K_6	K_6	K_6	K_6	K_6	K_4	K_4	K_4	K_6	K_5	K_5	K_3	K_3	K_3	K_5	K_3	K_3	K_1	K_5	K_2	K_4	K_6	K_4	K_4	K_6	K_5	K_5	K_3	K_1	K_3	K_5	K_1
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
K_5	K_1	K_1	K_5	K_1	K_3	K_5	K_5	K_6	K_6	K_2	K_2	K_6	K_2	K_4	K_2	K_4	K_5	K_1	K_5	K_3	K_3	K_5	K_5	K_5	K_3	J_1	J_1	I_1	I_1	I_5	I_3	I_4	I_5	I_5	I_1	I_4	H_4	H_2	J_1	J_2	H_2	H_1	H_6	H_1	H_5	F_3	G_1	G_1	F_1	F_3	G_1	E_3	E_3	F_6	F_1	F_6	E_6	E_2	E_5
J_2	H_1	H_2	H_6	H_1	H_4	F_1	F_5	G_2	G_2	G_2	G_2	F_3	G_2	G_2	G_2	E_5	E_5	E_3	F_1	F_6	F_6	E_1	E_6	E_6	E_5	D_2	B_4	D_2	D_2	B_5	B_4	B_4	D_3	D_3	B_2	D_2	D_1	B_4	D_2	C_6	C_2	D_1	C_6	C_2	B_5	B_3	C_1	C_1	D_2	B_3	C_3	B_4	B_4	C_4	D_2	C_4	C_6	C_2	B_6

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
E_6	E_1	E_6	E_6	E_1	E_5	F_3	F_1	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_6	E_1	E_6	E_6	E_1	E_5	F_3	F_1	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_1	F_1	F_3	F_6	E_6	E_5	E_1	E_6	F_6	F_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	E_1	E_1	E_6	F_3	F_6	F_1	F_1	H_1
H_5	H_1	H_6	H_5	I_1	I_5	H_1	I_1	J_3	J_3	I_1	I_1	I_3	I_5	I_1	I_5	H_5	H_1	H_6	H_5	I_1	I_5	H_1	I_1	J_3	J_3	I_3	I_1	I_3	I_5	I_1	I_5	H_5	I_1	J_3	J_3	H_5	H_5	H_6	H_6	J_3	J_3	I_5	I_1	I_5	I_5	I_5	I_5	I_5	I_5	I_1	I_1	K_1	K_5	K_6	K_3	K_4	K_1	K_1	K_1
I_4	I_2	J_2	J_2	H_2	J_2	I_2	H_2	H_3	I_2	H_2	H_2	H_3	J_2	J_2	J_2	I_4	I_2	J_2	J_2	H_2	J_2	I_2	H_2	H_3	I_2	H_3	H_2	H_3	J_2	J_2	J_2	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
F_4	G_2	G_1	G_1	F_4	F_2	G_2	E_2	G_1	E_2	E_2	F_4	F_6	E_6	E_6	F_2	F_4	G_2	G_1	G_1	F_4	F_2	G_2	E_2	G_1	E_2	E_4	F_4	F_6	E_6	E_6	F_2	J_3	J_3	H_5	I_1	K_3	K_6	K_4	K_1	K_5	K_5	K_6	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_4	K_6	K_6	H_4	H_4	I_3	H_5	I_1	J_3	J_3	E_5
G_2	F_2	F_1	F_3	G_2	G_2	E_4	G_2	E_5	G_2	F_3	E_4	E_5	F_1	F_6	E_1	G_2	F_2	F_1	F_3	G_2	G_2	E_4	G_2	E_5	G_2	F_5	E_4	E_5	F_1	F_6	E_1	K_3	K_3	K_1	K_4	J_3	J_3	J_1	J_1	H_5	H_5	H_1	H_4	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_3	J_3	J_3	J_1	J_1	J_1	J_3	H_6	I_6	J_3
C_6	B_2	B_1	D_1	C_6	C_4	B_4	C_6	B_6	C_4	C_1	B_5	C_5	C_5	D_1	C_1	C_6	B_2	B_1	D_1	C_6	C_4	B_4	C_6	B_6	C_4	C_3	B_5	C_5	C_5	D_1	C_1	B_5	C_3	B_3	C_4	B_5	B_6	D_2	D_2	D_3	D_3	D_3	D_2	B_4	B_4	C_3	C_3	D_2	D_2	D_3	D_3	B_3	D_2	C_2	B_4	C_4	B_2	C_2	B_3
B_5	C_1	D_2	B_4	B_5	D_1	C_3	B_6	D_3	D_3	B_1	C_4	B_4	D_2	C_2	D_1	B_6	C_3	D_2	B_4	B_5	D_1	C_3	B_6	D_3	D_3	B_3	C_4	B_4	D_2	C_2	D_1	E_4	G_1	E_2	G_2	C_3	D_1	B_5	C_5	B_3	C_3	B_6	C_6	C_2	D_1	B_3	D_3	B_1	B_1	C_6	C_6	F_3	F_1	G_2	E_4	G_2	E_1	G_2	F_3
D_2	D_1	C_3	C_3	D_2	B_6	D_3	D_1	C_3	B_3	D_2	D_1	D_1	B_2	B_2	B_3	J_3	J_2	I_3	I_3	J_2	H_4	J_2	J_1	I_3	H_3	J_3	J_3	J_1	H_2	H_1	H_2	D_1	D_1	D_2	D_2	G_1	F_3	F_5	G_1	E_3	G_1	E_5	E_6	E_2	F_3	E_3	F_5	E_1	F_1	E_6	F_2	D_1	B_1	B_6	D_3	D_2	D_1	D_3	D_1
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	I_3	H_1	I_1	H_2	I_1	I_3	I_5	I_5	I_3	I_1	J_1	J_3	H_1	H_1	H_3	H_3	H_6	H_4	H_1	H_2	I_6	I_6	H_5	I_5	H_2	I_6	H_6	I_6
K_6	K_2	K_6	K_6	K_6	K_2	K_4	K_2	K_4	K_4	K_3	K_5	K_5	K_3	K_3	K_5	K_2	K_6	K_6	K_6	K_6	K_2	K_4	K_2	K_4	K_4	K_5	K_5	K_5	K_3	K_3	K_5	G_1	E_2	G_1	E_3	F_1	G_1	G_1	F_5	G_1	E_1	F_4	F_3	F_3	E_2	F_5	E_3	F_2	E_4	F_3	E_3	G_2	G_2	F_1	G_1	E_3	G_2	E_1	G_2
J_3	J_2	I_6	I_6	J_3	H_2	J_1	J_2	I_6	H_5	J_3	J_2	J_2	H_4	H_4	H_5	D_2	D_1	C_6	C_6	D_1	B_2	D_1	D_3	C_6	B_1	D_2	D_2	D_3	B_6	B_5	B_6	C_3	B_2	C_1	B_3	D_2	C_5	C_5	B_5	C_1	B_2	C_2	B_3	D_1	C_2	D_3	B_3	C_6	C_4	B_3	B_4	C_6	C_4	D_2	C_5	B_3	C_6	B_1	C_6

A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	B_1	B_1	C_1	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	B_1	B_1	C_1	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	C_1	C_1	C_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	C_1
I_6	I_6	J_3	J_3	H_5	H_1	H_5	H_6	J_1	J_3	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1	J_3	J_3	J_1	J_1	J_1	H_4	H_1	I_5	I_5	J_1	J_1	J_1	J_1	E_1	E_6	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_3	E_1	E_1	G_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_3	E_6	E_1	E_1	F_1	F_1	G_1	G_1	G_1	F_3	F_3	E_6	E_1	E_1	F_1	F_1	G_1
K_4	K_4	K_3	K_3	K_4	K_6	K_5	K_6	K_4	K_6	K_4	K_1	K_4	K_4	K_4	K_6	K_6	K_4	K_4	K_4	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	H_6	H_6	I_5	I_3	I_1	I_1	H_1	H_1	H_6	H_6	I_3	I_5	I_1	I_1	H_1	H_1	H_5	H_1	I_1	H_5	I_1	I_5	I_3	I_5	J_3	J_3	H_5	H_1	I_1	H_5	I_1	I_5
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	K_2	D_3	D_3	B_5	B_4	D_2	D_2	B_2	B_2	D_3	D_3	B_4	B_5	D_2	D_2	B_2	B_2	I_4	I_2	H_2	I_4	H_2	H_5	H_4	J_2	I_5	I_2	I_4	I_2	H_2	I_4	H_2	H_5
G_1	G_1	F_1	F_1	I_3	I_5	J_3	J_1	H_6	H_5	H_6	H_6	I_5	I_5	I_5	I_1	I_1	I_5	I_5	I_5	J_2	J_2	J_1	J_1	H_3	H_3	I_5	I_5	C_6	C_1	D_3	D_1	B_2	B_1	C_2	C_2	C_6	C_6	D_1	D_3	B_1	B_1	C_2	C_2	F_4	G_2	F_4	G_2	E_2	E_6	F_6	F_2	E_5	G_2	F_4	G_2	F_4	G_2	E_2	E_6
J_3	J_3	H_5	I_6	G_1	G_1	F_6	F_1	E_1	E_5	E_1	E_6	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	G_1	B_5	B_2	C_5	C_5	B_4	B_4	C_5	C_5	A_2	A_1	A_3	A_1	A_3	A_1	A_4	A_4	A_2	A_2	A_1	A_3	A_1	A_1	A_4	A_4	G_2	F_2	G_2	E_2	G_2	F_1	E_6	E_1	G_1	E_2	G_2	F_2	G_2	E_2	G_2	F_1
C_4	C_4	B_5	C_4	D_2	D_3	D_3	D_2	B_1	B_6	D_2	D_2	B_5	B_5	C_5	C_3	D_3	D_2	D_2	D_2	E_4	E_1	G_1	G_1	E_4	E_4	G_1	G_1	F_1	G_1	E_1	F_3	E_1	F_3	E_3	G_2	F_1	G_2	E_1	F_5	E_1	F_3	E_3	G_2	A_6	A_3	A_6	A_3	A_6	A_5	A_2	A_1	A_3	A_3	A_6	A_3	A_6	A_3	A_6	A_5
E_4	F_6	E_5	G_2	B_2	C_4	B_2	C_3	C_5	D_1	B_5	C_5	C_4	D_3	B_1	D_2	B_5	B_1	C_2	C_2	C_2	D_1	B_3	D_3	C_4	D_3	B_3	D_3	G_1	F_5	F_1	E_2	F_1	E_2	G_1	E_6	J_1	I_4	H_1	J_2	H_1	J_3	J_2	J_2	C_6	C_1	C_6	C_1	C_6	B_5	B_1	D_1	C_1	C_1	C_6	C_1	C_6	C_1	C_6	B_5
B_5	D_1	D_1	D_2	E_1	E_4	E_1	G_1	G_1	F_3	F_5	G_1	E_4	F_5	E_1	F_1	E_5	F_1	E_2	F_4	G_2	F_3	E_3	F_5	G_2	F_2	E_3	F_5	I_5	J_2	J_1	H_2	J_1	H_2	I_3	I_6	K_4	K_2	K_1	K_2	K_1	K_6	K_2	K_2	D_2	D_1	D_2	D_1	D_2	D_3	D_1	B_3	B_1	B_1	J_1	J_1	J_2	J_1	J_1	J_2
H_4	H_1	I_6	H_5	J_3	J_1	I_1	I_5	I_3	I_3	I_5	I_5	H_3	H_3	H_1	H_5	H_4	H_4	H_3	H_4	I_6	I_3	H_3	H_3	I_2	I_2	H_3	H_3	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
F_6	E_2	G_2	E_5	F_6	F_1	G_1	E_5	F_3	G_1	G_1	F_5	F_5	E_4	F_3	E_5	F_6	E_4	F_5	E_5	F_6	G_1	F_5	E_3	F_2	G_2	F_5	E_3	K_4	K_1	K_6	K_3	K_6	K_3	K_2	K_2	I_5	J_3	J_2	H_4	J_2	H_2	I_3	I_6	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3	K_1	K_2	K_5	K_2	K_2	K_3	K_2	K_3	K_2	K_3	K_1
D_1	B_2	C_6	B_6	C_4	B_1	C_3	B_5	D_1	C_5	C_5	B_5	D_3	C_4	D_1	B_5	C_4	C_4	B_5	B_6	D_1	C_5	D_3	B_3	D_3	C_4	D_3	B_3	J_1	I_3	H_6	J_3	H_6	J_3	J_2	J_2	G_1	F_6	F_2	E_5	F_2	E_3	G_1	E_6	J_3	J_2	J_3	J_2	J_3	J_1	J_2	H_5	H_3	H_3	D_3	D_3	D_1	D_3	D_3	D_1

C_1	C_1	D_1	D_1	B_1	B_1	B_1	B_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	B_1	C_1	C_1	B_1	D_1	D_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	B_1	B_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1
G_1	G_1	F_3	F_3	E_1	E_6	F_1	F_1	E_1	F_3	G_1	G_1	G_1	E_1	G_1	G_1	E_1	F_3	F_3	J_3	J_3	J_3	J_3	J_3	J_3	J_3	J_3	I_6	I_1	H_1	H_1	I_3	I_3	I_6	I_3	I_6
I_3	I_5	J_3	J_3	K_1	K_5	K_1	K_4	K_5	K_3	K_1	K_3	K_5	K_6	K_1	K_5	L_1	L_1	L_1	K_6	K_6	K_6	K_6	K_6	K_6	K_6	K_6	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1
H_4	J_2	I_5	I_2	H_2	I_5	H_2	I_4	J_2	H_4	H_2	H_4	J_2	I_2	H_2	J_2	H_3	J_2	J_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	G_2	H_3	H_3	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2	J_2
F_6	F_2	E_5	G_2	F_4	G_1	E_2	G_2	F_5	E_5	E_2	F_6	F_2	G_2	E_2	F_2	I_4	H_5	I_4	B_1	B_1	B_1	B_2	D_2	D_2	D_2	D_2	E_3	G_2	E_5	F_5	E_6	F_2	G_1	G_2	G_1
E_6	E_1	G_1	E_2	C_2	C_5	C_6	C_2	D_3	B_1	B_2	B_1	D_3	C_2	B_2	D_3	A_2	A_1	A_4	A_1	A_1	A_1	A_3	A_5	A_5	A_5	A_5	A_4	A_2	A_1	A_3	A_1	A_3	A_1	A_4	A_1
A_2	A_1	A_3	A_3	A_4	A_5	A_6	A_4	A_6	A_2	A_2	A_2	A_6	A_4	A_2	A_6	D_2	C_1	B_3	D_1	D_1	D_1	D_3	B_5	B_4	B_5	B_5	D_1	D_2	C_1	C_1	B_1	B_2	B_1	C_2	C_1
B_2	D_1	C_1	C_1	G_2	F_1	G_2	E_2	G_2	G_2	F_1	E_1	E_5	H_2	I_2	I_2	C_3	B_3	C_1	E_3	E_4	F_3	F_2	E_5	E_4	F_5	F_2	C_5	C_3	B_2	B_1	C_2	C_2	C_2	B_1	B_2
J_2	H_1	H_1	H_1	J_2	J_1	J_1	J_2	H_2	J_3	J_1	J_3	H_5	J_2	J_3	H_1	G_1	E_2	G_1	H_2	I_4	H_1	I_2	H_4	I_4	H_3	I_2	G_1	E_3	F_2	E_6	G_2	G_2	F_4	E_1	F_2
L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	K_1	K_1	K_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	K_3	K_1	K_5	K_5	K_4	K_6	K_4	K_1	K_2
K_4	K_5	K_2	K_2	I_3	H_3	I_5	H_4	I_5	I_1	I_2	I_4	I_2	F_6	F_1	E_5	J_1	I_1	H_2	I_6	H_1	I_4	H_4	I_2	H_1	I_6	H_4	J_3	J_1	I_5	I_5	H_5	H_6	H_5	H_2	H_3
D_1	B_5	B_5	B_5	D_1	D_3	D_3	D_1	B_6	D_2	D_3	D_2	B_3	D_1	D_2	B_5	F_4	G_1	E_2	F_6	F_3	E_4	E_5	F_2	F_3	E_6	E_5	F_6	F_1	G_1	G_1	F_1	E_1	E_6	F_4	E_3

【評語】030409

圓柱積木問題已有數件良好的歷屆作品可供參考，但作者群又引入群論的 BURNSIDE'S LEMMA，再度強化作品的深度且研究內容討論完備，足堪為中小學之數學教具之教學研究參考。