中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030408

過已知點之正多邊形性質研究

學校名稱：高雄市立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國三 姚尚汶	陳宏清

關鍵詞：外心、費馬點、拿破崙定理

摘要

本研究由「通過三點之正 n 邊形」作圖延伸到「過 n 點之正 n 邊形」時，意外的發現到此 n 個點形成之 n 邊形可將費馬點以及拿破崙三角形推廣，也將視野拓展到了一個全然不同的世界。另外，在文獻收集過程中發現全國科展第 51 屆高中數學組「你泥中有我，我泥中有你」也有類似的研究討論。此文獻在過 n 點之正 n 邊形上探討的主要內容為「是否存在」，而我們主要為探討「如何作出存在無限多解的 n 個點及相關性質」，並利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，來簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法。

壹、研究動機

以平面上不共線之三點為頂點可以畫出一個三角形，在學三角形的外心時也學到：「給定平面上不共線之三點可找到通過此三點的外接圓」。此時，我突然想到那麼是否也可以找到通過這三個頂點正三角形呢?以此類推，正方形呢?甚至是正 n 邊形呢?這個突然浮現的問題讓我開始了這一連串的探索。

貳、研究目的

一、 是否存在通過平面上任意不共線三點的正三角形、正方形、正五邊形…，甚至推廣到正 n 邊形。
二、 通過已知三點之正 n 邊形的面積和周長的最大值探討。
三、 探討作通過已知三點之正 n 邊形時，不共線之三點是否一定會有解。
四、 探討須具備甚麼條件，才存在通過平面上不共線的 n 點之正 n 邊形。
五、 推廣費馬點和拿破崙三角形，並探討已知 n 點所成的 n 邊形之廣義費馬點、拿破崙多邊形與通過已知 n 點之正 n 邊形的關係及性質。
六、 利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作通過平面上 n 點之正 n 邊形的方法。

參、研究器材

筆、尺、圓規、GSP 軟體。

肆、文獻探討

在全國科展第 51 屆高中數學組「你泥中有我，我泥中有你」中，有與本研究類似的研究探討。以下為兩篇作品的異同之處：

一、 我們主要研究「通過平面上不共線的相異 3 點，可否存在使之每點恰有一邊經過的正 n 邊形」，然後再推廣到「不共線的相異 n 點」；而參考文獻則以後者開頭，所以內容上後者有部分重疊到。
二、 參考文獻在過 n 點之正 n 邊形上探討的主要內容為「是否存在」，而我們主要為探討「如何作出存在無限多解的 n 個點」以及「其中之性質」。
三、 我們將研究的內容拓展到了「廣義費馬點」和「拿破崙多邊形」，並利用相關性質簡化作通過平面上 n 點之正 n 邊形的方法。

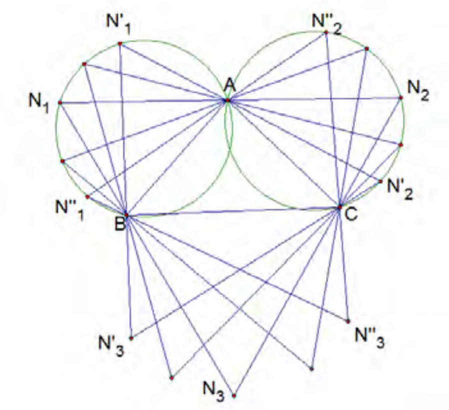
伍、研究過程

一、 名詞定義：

(一) 「**通過已知點之正多邊形**」：已知A點、B點、C點為平面上ΔABC的三個頂點或不共線之任意三點，若存在一正n邊形，使得A點、B點、C點三點都在其邊上，則我們稱此正n邊形為「過已知三點之正n邊形」。另外，在本研究中，我們再增加一項限制條件：已知之三點需分別在正多邊形的三個相鄰邊上。

(二) 旋轉角的「**正負**」性質：在作圖時，需要將某些邊作旋轉，若為逆時針旋轉，則旋轉角為正；若為順時針旋轉，則旋轉角為負。

(三) 「**固定點**」、「**移動點**」：以右圖為例，已知A點、B點、C點為平面上不共線之任意三點，因為在作通過此三點之正多邊形時，須先分別作過$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的圓，我們將兩圓相交的頂點A定義為「移動點」，而B、C兩點定義為「固定點」（原因將於p.11解釋）。雖然A、B、C三點的位置是相對且可互換的，但文後若無特別說明，也都以此假設。



(四) **過已知點之正多邊形的「旋轉」**：仍以右圖為例，過A、B、C三點之正三角形的頂點N_1以過A、B、N_1三點之外接圓的圓心為旋轉中心，順（或逆）時針旋轉至N_1'（或N_1''），則另外二個頂點也會分別旋轉至N_2'、N_3'（或N_2''、N_3''），我們稱為正$\Delta N_1N_2N_3$的「旋轉」

(五) **過已知點之最大正多邊形**：將正多邊形$N_1N_2\ldots N_n$旋轉，當其面積與周長為最大值時，稱此正多邊形為「過已知點之最大正多邊形」。

二、 預備定理：

(一) **維維安妮定理**：正三角形內任一點到三邊的距離之和等於定值。

(二) **費馬點**：若P點為平面上之一點，使得P點到ΔABC的三個頂點之距離和最小，則P點稱為ΔABC的費馬點；另外，存在唯一的費馬點與三個頂點的連線形成三個120°的夾角。

(三) **拿破崙定理**：以三角形各邊分別向外（內）側作正三角形，則這三個正三角形的外心會構成一個正三角形，稱此三角形為外（內）拿破崙三角形，且任意三角形之內、外拿破崙三角形有共同之外心。

三、 問題分析與討論

研究一：通過已知三點之正 n 邊形的存在性探討

(一)求作「通過平面上已知三點之正三角形」。

1. 作法：

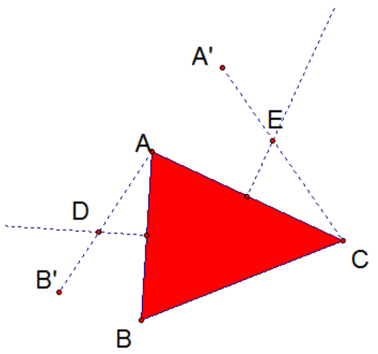
(1) 已知A點、B點、C點為平面上不共線的三點，分別以A點、C點為旋轉中心，將$\overline{AB}$、$\overline{AC}$旋轉－30° ，可得$\overline{B'A}$、$\overline{A'C}$。

(2) 作$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中垂線，使其分別交$\overline{B'A}$、$\overline{A'C}$於D、E兩點。

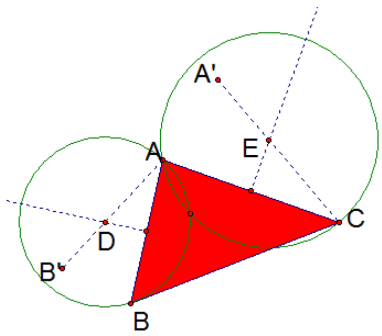
(3) 分別以D、E為圓心，$\overline{DB}$、$\overline{EC}$為半徑作圓得圓D及圓E。

(4) 如圖，在圓 D 上取一點N_1，作$\overleftrightarrow{N_1A}$交圓 D 於$N_2$，再分別作$\overleftrightarrow{N_1B}$、$\overleftrightarrow{N_2C}$相交於$N_3$，則正三角形$N_1N_2N_3$即為所求。

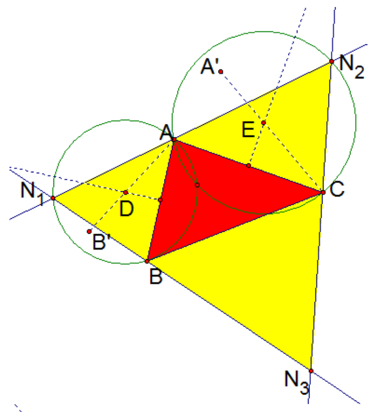
（1）、（2）



（3）



（4）



2. 證明：

∵∠DBA、∠DAB=30°

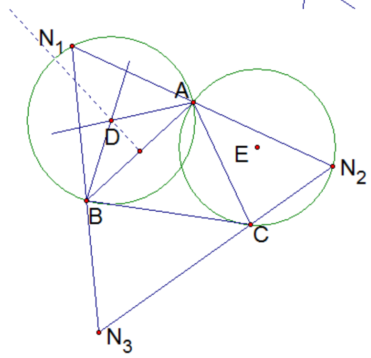
∴∠BDA=120°

又∵∠BN_1A為圓周角，

可得∠BN_1A=1/2∠BDA =60° 。

同理，$\angle AN_2C = 60°$，

因此，$\Delta N_1N_2N_3$為過已知A、B、C三點之正三角形。



3. 討論：

(1) 性質1-1：ΔABC之費馬點P為圓D與圓E的兩交點之一。

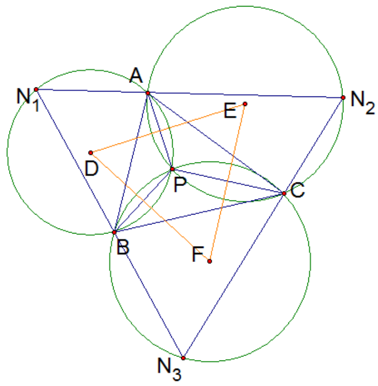
設ΔABC之費馬點為P點，則∠APB=∠APC=120°，

∴∠AN_1B+∠APB =∠AN_2C+∠APC=180°，

因此，A、N_1、B、P共圓，且A、N_2、C、P共圓，

可得P點在圓D、E上，

即圓D與圓E交於ΔABC之費馬點P。



(2) 以作圓D之方法作過B、C二點之圓F，則點N_3在圓F上。

∵∠$N_1N_3N_2$=60° $=\frac{1}{2}$∠BFC

∴∠$N_1N_3N_2$為圓F之圓周角

因此，點N_3必在圓F上。

由此得知：如圖，在作過已知三點之正三角形時，不論以哪一點作為移動點來作圖，皆不會影響作圖結果。

(3) 性質1-2：ΔDEF為ΔABC之外拿破崙三角形

由外拿破崙三角形之定義可知ΔDEF為ΔABC之外拿破崙三角形。

∵ΔABC各邊向外作正三角形的另一頂點也會分別落在圓D、E、F上

∴點D、E、F分別為ΔABC各邊向外作的正三角形的外心。

因此，ΔDEF為ΔABC之外拿破崙三角形。

(二) 求作「通過平面上已知三點之正方形」。

1. 作法：

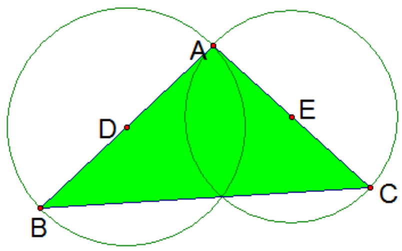
(1)已知 A 點、B 點、C 點為平面上不共線的三點，作$\overline{AB}$、$\overline{AC}$中點 D、E。

(2)分別以 D、E 為圓心，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$為直徑作圓得圓 D 及圓 E。

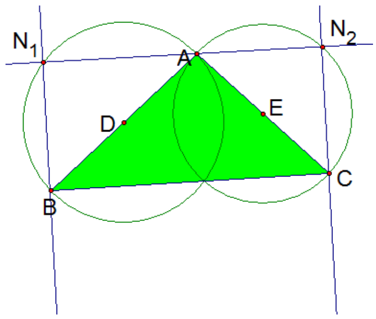
(3)於圓 D 上作$\overleftrightarrow{N_1A}$交圓 E 於點 N_2，再作$\overleftrightarrow{N_1B}$、$\overleftrightarrow{N_2C}$。

(4)如圖，以$\overline{N_1N_2}$為邊長，∠AN_1B 為內角作通過 A、B、C 三點的正方形$N_1N_2N_3N_4$，則正方形$N_1N_2N_3N_4$即為所求。

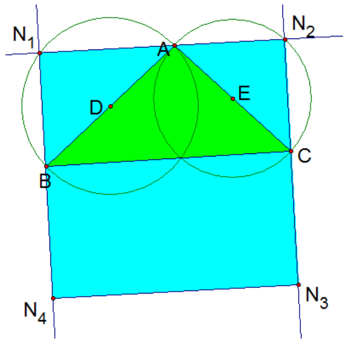
(1)、(2)



(3)



(4)

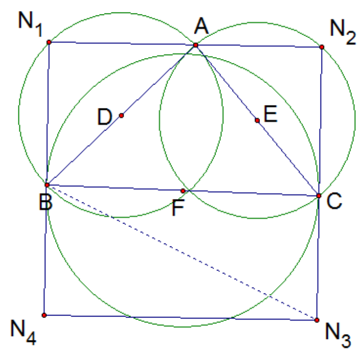


2. 證明：

∵$\overline{AB}$為直徑，∴∠BN_1A=90°，同理，$\angle AN_2C = 90°$，

又∵四邊形$N_1N_2N_3N_4$的四邊等長

∴四邊形$N_1N_2N_3N_4$為過已知A、B、C三點之正方形。



3. 討論：

若以作圓D、E之方法作過$\overline{BC}$之圓F，則N_3、N_4卻不在圓F上。

連$\overline{BN_3}$

∵∠CN_3N_4=∠CN_3B+∠BN_3N_4=90°

∴∠CN_3B<90°

∴N_3不在圓F上

同理，N_4也不在圓F上。

由此可得<u>**性質1-3-1**</u>：**在作過已知三點之正方形時，以不同點當作移動點會得到不同作圖結果。**

(三)求作「通過平面上已知三點之正五邊形」

1. 作法：

(1)已知A點、B點、C點為平面上不共線的三點，分別以A點、C點為旋轉中心，

將$\overline{AB}$、$\overline{AC}$旋轉－18° 可得$\overline{A'B}$、$\overline{C'A}$。

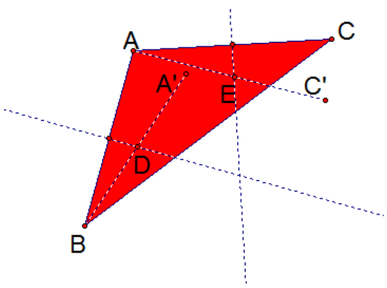
(2)作$\overline{AB}$、$\overline{AC}$中垂線，使其分別交$\overline{A'B}$、$\overline{C'A}$於D、E兩點。

(3)分別以D、E為圓心，$\overline{DB}$、$\overline{EA}$為半徑得圓D及圓E。

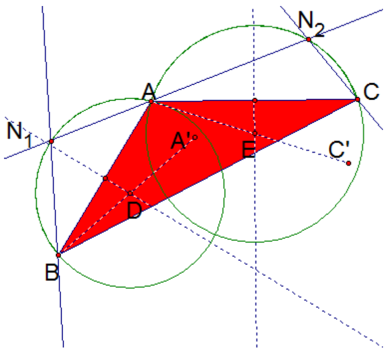
(4)在圓D上取一點N，作$\overleftrightarrow{N_1A}$交圓E於$N_2$，再作$\overleftrightarrow{N_1B}$、$\overleftrightarrow{N_2C}$。

(5)如圖，以$\overline{N_1N_2}$為邊長，∠AN_1B為內角作通過A、B、C三點的正五邊形$N_1N_2N_3N_4N_5$，則正五邊形$N_1N_2N_3N_4N_5$即為所求。

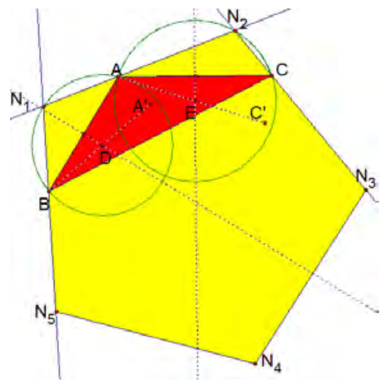
（1）、（2）



（3）、（4）



（5）



2. 證明：

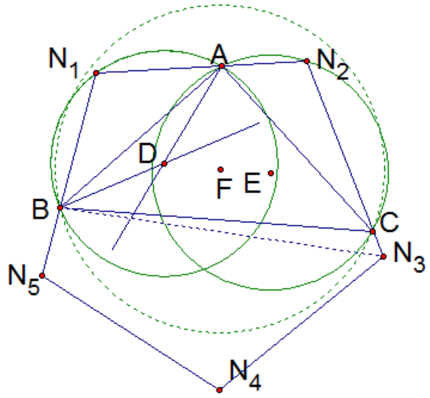
∵ $\angle DAB=\angle DBA=18^\circ$

∴ $\angle BDA=144^\circ=\widehat{BN_1A}$，$\angle BN_1A=\frac{(360-\widehat{BN_1A})}{2}=108^\circ$

同理，$\angle AN_2C=108^\circ$。

又∵五邊形$N_1N_2N_3N_4N_5$的邊長皆相等

∴五邊形$N_1N_2N_3N_4N_5$為過已知A、B、C三點之正五邊形。



3. 討論：

以作圓D、E之方法作過$\overline{BC}$之圓F，但N_3、N_4、N_5卻不在圓F上。

其證明原理、結論與正方形相同。

由此可得性質1-3-2：**只有過已知三點之正三角形時才沒有移動點、固定點之分。**

(四)求作「通過平面上已知三點之正n邊形」

1. 作法：

若欲作過平面上已知A、B、C三點之正n邊形，可先假設其內角為x°（文後若無特別說明，都以此原則假設），則作法如下：

(1) 分別以B、A為旋轉中心，將$\overline{AB}$和$\overline{AC}$旋轉$(90-x)^\circ$或$(\frac{360}{n}-90)^\circ$，可得$\overline{A'B}$和$\overline{AC'}$。

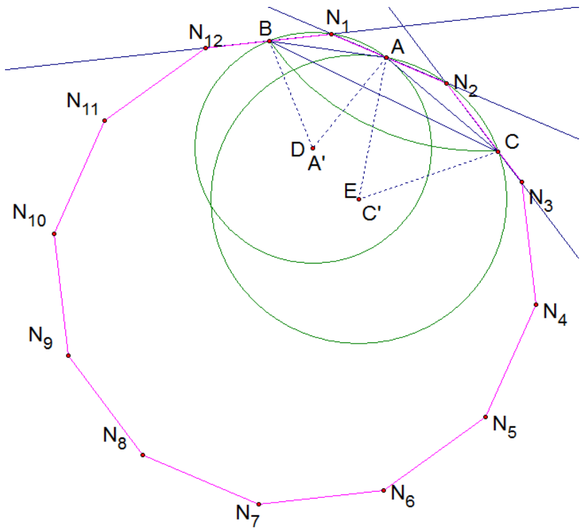
(2) 再分別以A、C為旋轉中心，將$\overline{AB}$和$\overline{AC}$旋轉$(x-90)^\circ$或$(90-\frac{360}{n})^\circ$，且分別交$\overline{A'B}$和$\overline{AC'}$於D、E兩點。

(3) 分別以D、E為圓心，$\overline{DA}$和$\overline{EC}$為半徑作圓D及圓E。

(4) 在圓D上作$\overleftrightarrow{N_1A}$、$\overleftrightarrow{N_1C}$，且$\overleftrightarrow{N_1C}$交圓E於$N_2$，再作$\overleftrightarrow{N_2B}$。

(5) 如下圖，以$\overline{N_1N_2}$為邊長，$\angle AN_1B$為內角作通過A、B、C三點的正n邊形$N_1N_2\ldots N_n$，則正n邊形$N_1N_2\ldots N_n$即為所求。

❈ 並非任意之三點都可作出通過此三點的正n邊形，在研究三將會有更詳細的討論。



2. 證明：

(1) 分為以下三種情況說明：

a. 當n＝3，則$x<90^\circ$ ，

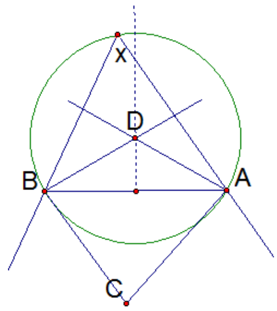
$\angle DAB=\angle DBA=\frac{180-2x}{2}=(90-x)^\circ$

若依照角度的正負性質區分：

$\angle DBA>0 \Rightarrow \angle DBA=(90-x)^\circ$

$\angle DAB<0 \Rightarrow \angle DAB=-(90-x)^\circ=(x-90)^\circ$

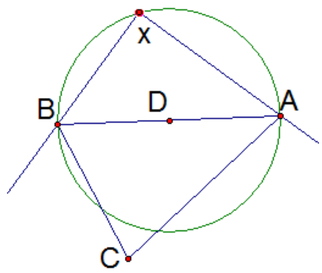
∴成立。



b. 當n＝4，則$x=90^\circ$ ，

$\angle DBA=\angle DAB=\frac{180-2x}{2}=(90-x)^\circ=0^\circ$

∴成立。



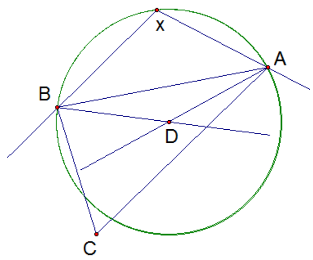
c. 當n＞4，則$x>90^\circ$ ，

$\angle DBA=\angle DAB=\frac{180-(360-2x)}{2}=(x-90)^\circ$

$\angle DBA<0\Rightarrow\angle DBA=-(x-90)^\circ=(90-x)^\circ$

$\angle DAB>0\Rightarrow\angle DAB=(x-90)^\circ$

亦成立，故得證。



❈ 因為只涉及角度的旋轉，所以上述證明的逆命題「藉由分別旋轉$(90-x)^\circ$和$(x-90)^\circ$使之相交所得到的圓可作出x°的圓周角」，是沒有問題的。

❈ 因為n＝3、4、5剛好分屬以上三種不同的討論部分，數字又小、圖形較簡單，所以文後的舉例多從正三角形、正方形、正五邊形來作對比。

(2) $(x-90)^\circ=\left(\frac{(n-2)\times 180}{n}-90\right)^\circ=\left(90-\frac{360}{n}\right)^\circ$

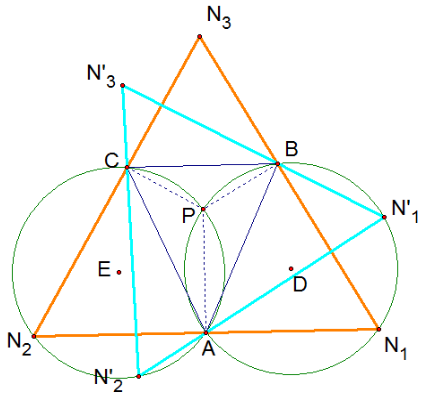
同理，$(90-x)^\circ=\left(\frac{360}{n}-90\right)^\circ$

得證。

研究二：過已知三點之正多邊形的面積最大值探討

(一)將過A、B、C三點之正多邊形$N_1N_2...N_n$旋轉時，會發現其面積和周長會有最大值。在研究初期，我發現正三角形的面積最大值似乎和ΔABC之費馬點或圓D、圓E的交點P有關(引理1-1)。如下圖，$\Delta N_1N_2N_3$為通過ΔABC之最大正三角形，則$\overline{N_1N_2}\perp\overline{PA}$，$\overline{N_2N_3}\perp\overline{PC}$，$\overline{N_3N_1}\perp\overline{PB}$。

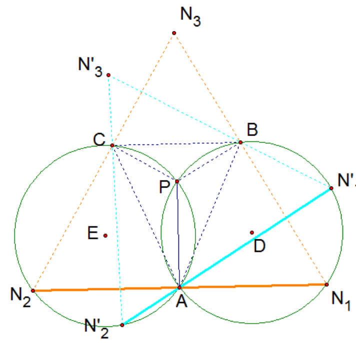
但是基於以下原因，推斷P點只是在某些情況下，才和費馬點重合：



1. 因為$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$才能夠經由作過A、B、C三點之$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$的垂線相交而得$60^\circ$角，但$120^\circ$角卻與其它正多邊形的內角無關。
2. 當ΔABC內有任一角≧120°時，費馬點即為兩較短邊相交的頂點，這時此作法便無法成立。

所以可知P點只有在作通過A、B、C三點之正三角形時，剛好與費馬點重合。

我們又想到：任何正三角形皆相似，唯不同在邊長和面積，故我們決定從邊長著手說明：先將右上圖分解成右下圖之實線部分，如果可證明「若$\overline{N_1N_2}\perp\overline{PB}$，則$\overline{N_1N_2}\geq\overline{N_1'N_2'}$」為真，就可證明$\Delta N_1N_2N_3$為過$\Delta ABC$之最大正三角形（若$\angle BAC=120^\circ$，則圓D與圓E相切，稍後解釋）。



證明： 如下圖，分別作$\overline{N_1N_2}$和$\overline{N'_1N'_2}$之垂線過N_1和N_1'

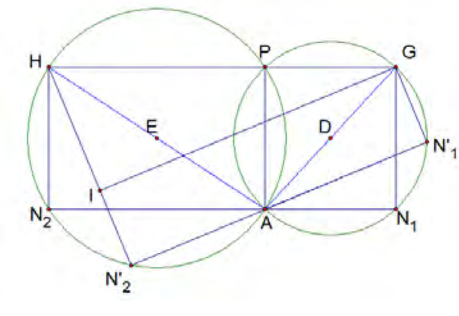
∵皆為90°

∴兩垂線皆交圓D於同一點G，且$\overline{AG}$為圓D直徑。

同理，作$\overline{N_1N_2}$和$\overline{N'_1N'_2}$之垂直線過N_2和N_2'也皆交圓E於同一點H，且$\overline{AH}$為圓E直徑；

最後過G點作$\overline{N_2'H}$之平行線可得$\overline{GI}$。

由上述條件可知四邊形GHN_2N_1、四邊形$GIN_1'N_2'$為矩形。



∴$\overline{N_1N_2}=\overline{GH}$，且$\overline{N_1'N_2'}=\overline{GI}$……①

又知ΔGHI為直角三角形

∴$\overline{GH}>\overline{GI}$……②

由①②可知$\overline{N_1N_2}>\overline{N_1'N_2'}$

得證。

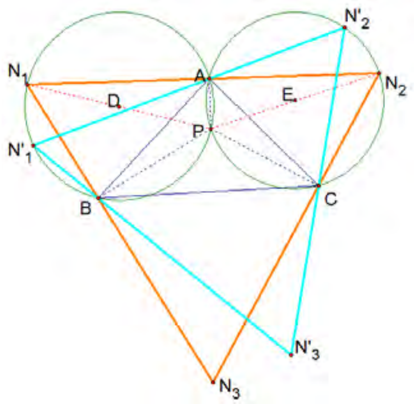
結論： n＝3時，若$\overline{N_1N_2}\perp\overline{PA}$，則$\overline{N_1N_2}$出現最大值。

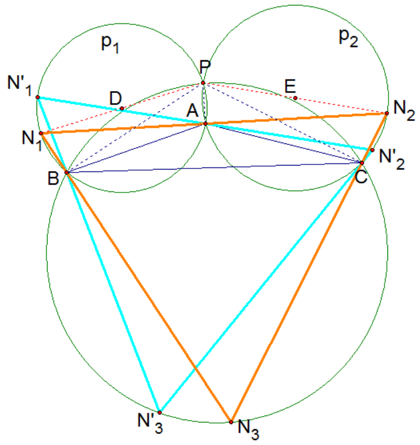
如下圖，我們將上頁結論代入不同的n值也得到相同結果：

定理2：若$\overline{\mathbf{N_1N_2}}\perp\overline{\mathbf{PA}}$，則多邊形 $\mathbf{N_1N_2}\ldots\mathbf{N_n}$的面積 ≥ 多邊形$\mathbf{N_1'N_2'}\ldots\mathbf{N_n'}$的面積，

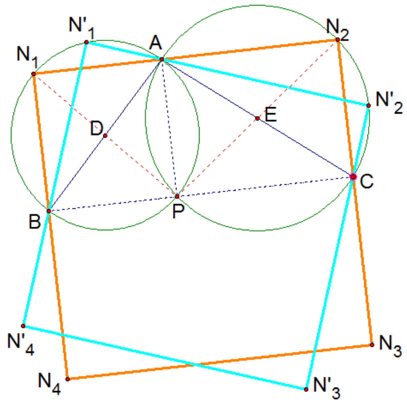
當$\overline{\mathbf{N_1'N_2'}}\perp\overline{\mathbf{PA}}$時等號成立。

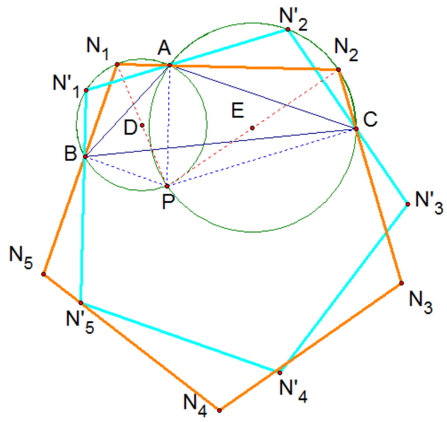
1. n＝3：





2. n＞３：





由以上四圖還發現：

1. 性質2-1：P、D、$\mathbf{N_1}$三點共線，且P、E、$\mathbf{N_2}$三點共線。

   證明：

   ∵$\angle N_1AP=90^\circ$

   ∴$\overline{N_1P}$為直徑

   ∴ P、D、N_1三點共線 （同理，P、E、N_2三點共線），得證。

   功能：直接作$\overrightarrow{PD}$交圓D就可得ΔABC之最大正n邊形的頂點N_1，可簡化作圖。

2. 性質2-2：不只最大正三角形，最大正n邊形也符合$\overline{\mathbf{PA}}\perp\overline{\boldsymbol{N_1N_2}}$、$\overline{\mathbf{PB}}\perp\overline{\mathbf{N_nN_1}}$、$\overline{\mathbf{PC}}\perp\overline{\mathbf{N_2N_3}}$。

   證明：

   ∵N_1APB為圓內接四邊形

   ∴$\angle N_1AP+\angle N_1BP=180^\circ$

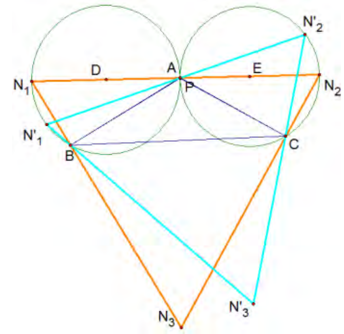
   又知$\overline{AP}\perp\overline{N_1N_2}\Rightarrow\angle N_1AP=90^\circ$

   ∴$\angle N_1BP=90^\circ$　$\Rightarrow\overline{PB}\perp\overline{N_1N_n}$

   同理，$\overline{PC}\perp\overline{N_2N_3}$

   得證。

接下來，討論圓D、圓E相切的情況。我發現只有在作正三角形時，且$\angle BAC=120^\circ$，圓D、E才會相切，且若$\overline{N_1N_2}$通過D、E兩點，則$\overline{N_1N_2} > \overline{N_1'N_2'}$。



證明：

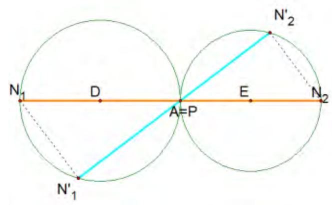
(1) 將n=3代入定理1可得$\angle EAC=\angle DAB=30^\circ$
因此，當$\angle BAC=120^\circ$時，D、A、E共線，得$\overline{DA}+\overline{AE}=\overline{DE}$
∴圓D、E相切。

(2) 連$\overline{N_1N_1'}$、$\overline{N_2N_2'}$

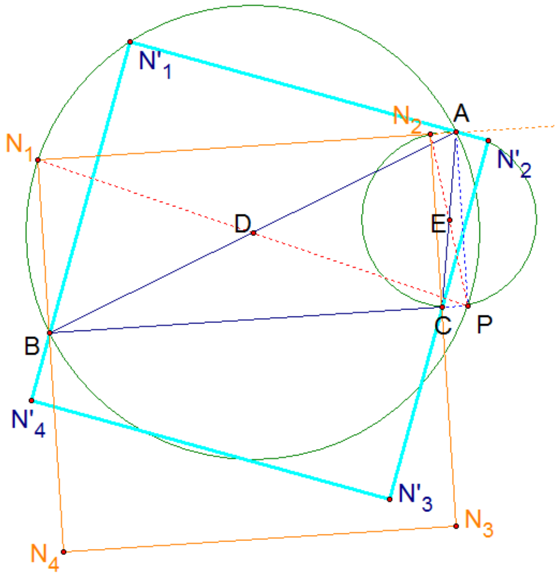
∵$\Delta N_1N_1'A$、$\Delta N_2N_2'A$為直角三角形

∴$\overline{AN_1} > \overline{AN_1'}$，$\overline{AN_2} > \overline{AN_2'}$

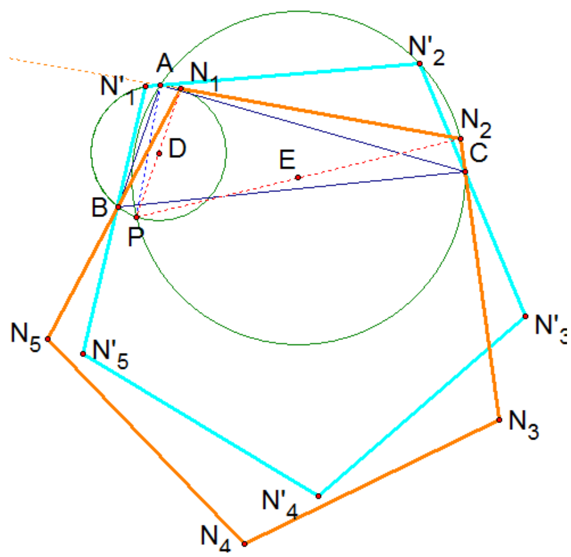
兩式相加，得$\overline{N_1N_2} > \overline{N_1'N_2'}$



(二) 事實上，並非所有情況的過ΔABC之最大正n邊形都是如此，此作法也可能會使A點在$\overleftrightarrow{N_1N_2}$上，其原因我們留待性質5-6說明，而此時通過$\Delta ABC$之最大正n邊形為$N_1'N_2' \dots N_n'$在旋轉至$N_1N_2 \dots N_n$前，先與A點重合的那頂點$N_1'$或$N_2'$所作出的正n邊形。



（旋轉$N_1'N_2' \dots N_n'$時，N_2'會先與A重合）

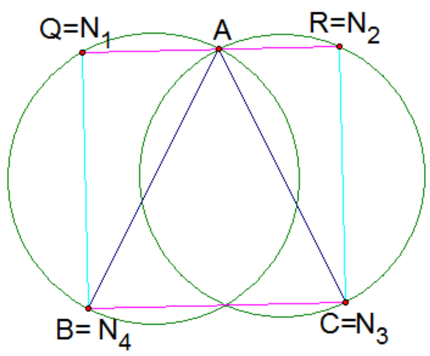


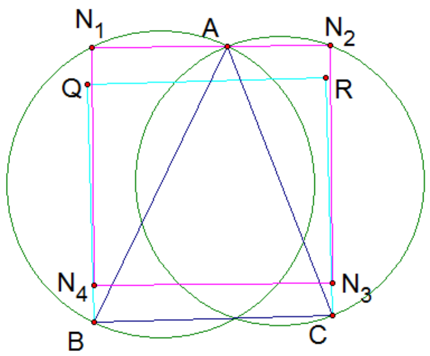
（旋轉$N_1'N_2' \dots N_n'$時，N_1'會先與A重合）

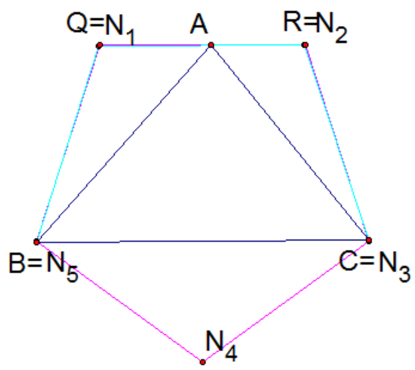
(三) 上文所謂的最大正多邊形皆指A為移動點時的相對極大值，而真正的最大正多邊形還是得分別將A、B、C作為移動點，各作出其對應之最大值再進行一次比較，才能找到絕對的極大值。而所謂的「ΔABC有頂點只在$N_1N_2 \dots N_n$的某邊延長線上」須以A為移動點為前提，如左上圖；若將C作移動點，還是可以作出通過ΔABC之最大正方形。

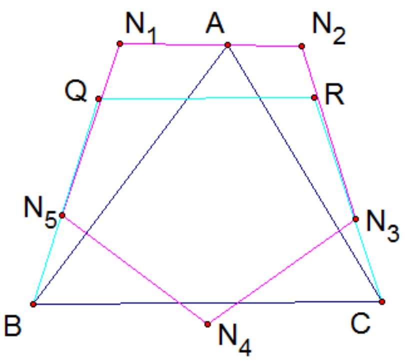
研究三：探討作過已知三點之正n邊形時，不共線之三點是否一定會有解

(一) 引理3-1：若將$\overline{BC}$固定，然後將A點沿著過A點垂直$\overline{BC}$的直線往上移，我們發現從正方形開始（n≧4），A與$\overline{BC}$的距離會有限制值，若超過限制值就會無解（但正三角形卻沒有，稍後解釋）；當此距離剛好等於限制值時，正n邊形是只有一解；然後我們又發現了這距離的限制值其實就是**以$\overline{BC}$為底邊的正n邊形任意相鄰之四頂點所形成之梯形的相似形的高，如下圖之四邊形BQRC**（文後若無說明，皆令A點與$\overline{BC}$的距離限制值為$\overleftrightarrow{QR}$與$\overline{BC}$的距離）：







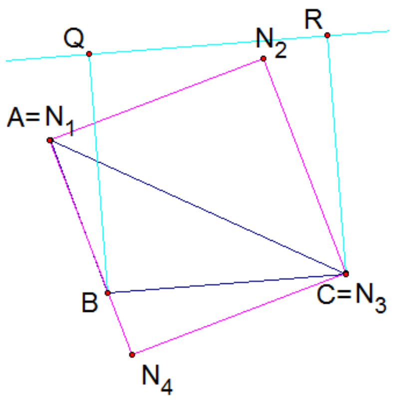


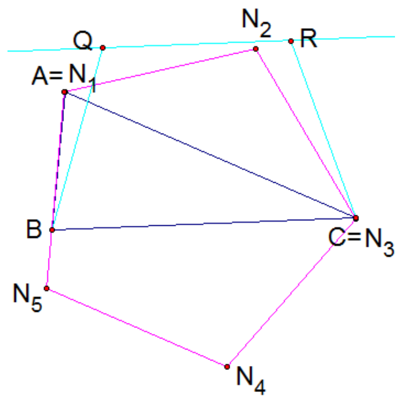
（Q、A、R共線，只有一解）　　　　（A超過範圍，無解，如圖所示）

❈ 結論是要作「以$\overline{BC}$為底邊的正n邊形任意相鄰之四頂點所形成之梯形的相似形的高」，但正三角形只有 3 個頂點，故得引理3-2：**在作過A、B、C三點的正三角形時，我們找不到A點向上移動之限制值**。

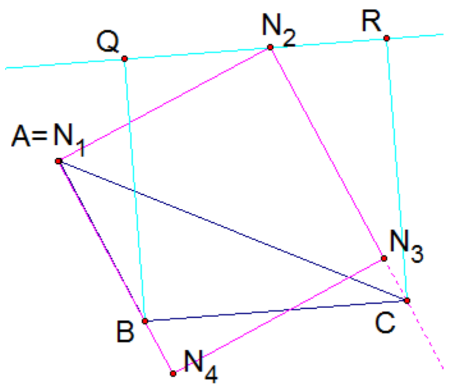
(二) 依照性質3-1的方式，因為是將B、C兩點固定，故我們將B點、C點命名為「固定點」，而將A點命名為「移動點」。上述所謂之無解指的是「當移動點為A點時，無法作出過A、B、C之正多邊形」，若將移動點改為B或C時，還是可能有解，但文後若無特別說明，無解的討論皆以假設移動點為A點來討論。

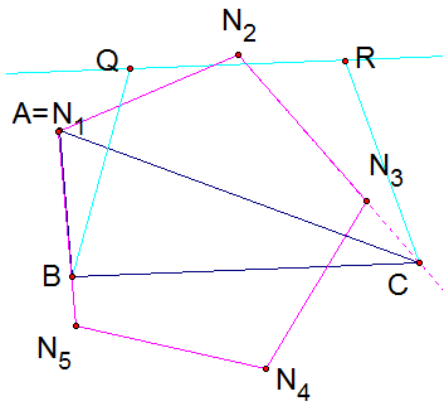
(三) 因為A點向上移動時有$\overleftrightarrow{QR}$這個限制邊界，接下來我們在不超過此限制的條件下，將A往左右兩個方向移動，發現兩側亦有限制邊界的存在，但是卻不是在$\overline{QB}$和$\overline{RC}$上（但正三角形仍無限制，其說明詳見性質3-1）。





而如果持續將A點向兩側延伸移動，則會發生無解的情況：

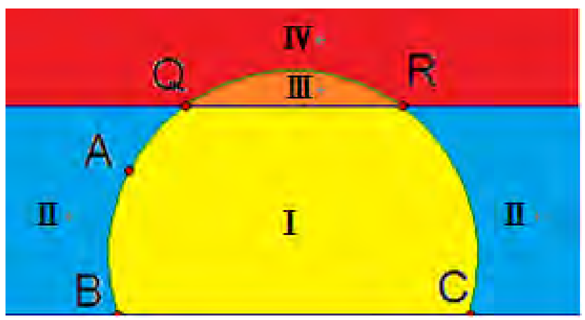




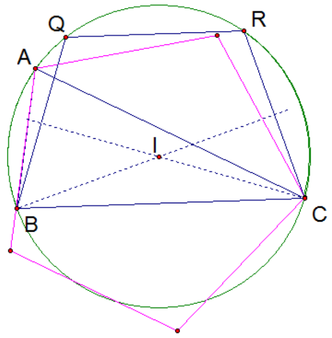
(四) 引理3-3：A點兩側限制區域的探討：

1. 探討：

我發現到將A點移動至兩側的限制邊界時，$\angle BAC=\angle N_nN_1N_3$，意思就是當把$\overline{BC}$固定，$\angle BAC=\angle N_nN_1N_3$時A的所有軌跡所形成的集合即為A點兩側可移動的範圍，根據圓周角的定義：對同一弧之圓周角相等，所以我們知道此集合會是個弧，如下圖$\overparen{BQC}$。同$\overline{QR}$，若A落在弧上，則過A、B、C三點之正n邊形就會只有一解；換句話說：只要A在此弧外（Ⅱ、Ⅳ區）就必定無解。但因為$\overparen{BQC}$被$\overleftrightarrow{QR}$所截，而我們已知在$\overleftrightarrow{QR}$以上（Ⅲ、Ⅳ區）皆無解，我們得到了結論：因其逆否命題「若其有解，則A點必不在Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ區內」等價，意即$\overparen{BQ}$、$\overline{QR}$、$\overparen{CR}$即為A點移動的臨界邊界。



2. 作法：



(1) 分別以B、C為旋轉中心，將$\overline{BC}$旋轉$(180-\frac{3}{2}x)^\circ$和$(\frac{3}{2}x-180)^\circ$交於I。

(2) 以I為圓心，$\overline{IB}$為半徑作圓恰通過Q、R兩點。

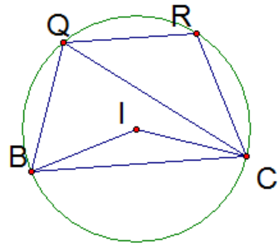
(3) $\overparen{BQ}$、$\overparen{CR}$即為所求。

3. 證明：

$\because \angle R = x^\circ$

$\Rightarrow \angle RQC = \left(\frac{180-x}{2}\right)^\circ$

$\Rightarrow \angle BQC = \left(x - \frac{180-x}{2}\right)^\circ = \left(\frac{3x-180}{2}\right)^\circ$



n<6(圖一)

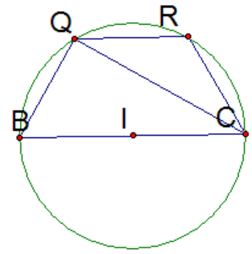
分以下三種情況說明：

(1) $\frac{3x-180}{2} \leqq 90$　（$x \leqq 120 \Rightarrow$ n≦6，如圖一、二）

$\angle BIC = 2\angle BQC = (3x-180)^\circ$

$\angle IBC = \left(\frac{180-(3x-180)}{2}\right)^\circ = \left(180 - \frac{3x}{2}\right)^\circ$

$\angle ICB = -\angle IBC = \left(\frac{3x}{2} - 180\right)^\circ$



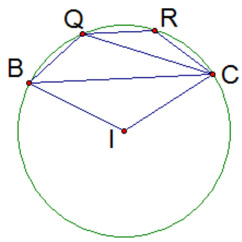
n=6(圖二)

(2) $\frac{3x-180}{2} > 90$　（$x > 120 \Rightarrow$ n>6，如圖三）

$\angle BIC = 360^\circ - 2\angle BQC = 540^\circ - 3x^\circ$

$\angle CBI = \frac{180-(540-3x)}{2} = \left(180 - \frac{3x}{2}\right)^\circ$

$\angle BCI = -\angle CBI = \left(\frac{3x}{2} - 180\right)^\circ$



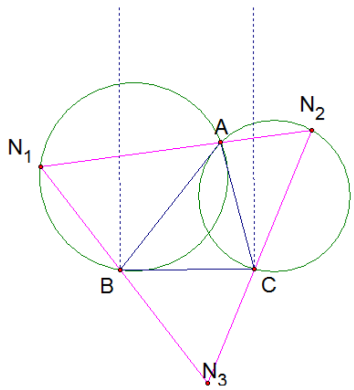
n>6(圖三)

都成立，故得證。

4. 討論：

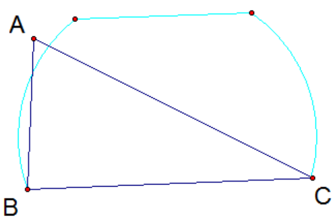
將n=3，x=60帶入上述公式：

$180 - \frac{3}{2}x = 180 - \frac{3}{2} \times 60 = 90^\circ$

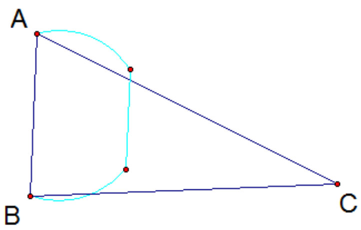


由結果可知：這兩條平行，意即沒有交點 I，自然也就無法作出 A 點可移動之兩側限制，而我們已由引理 3-2 知 n＝3 時，無 A 點之向上限制，可得性質 3-1：**任何三角形都必有無限多個通過其之正三角形**。

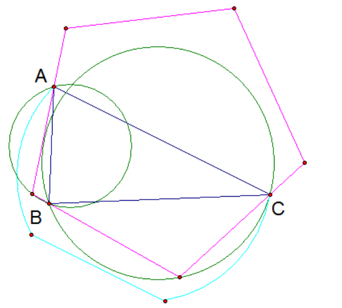
(五) 定理3：綜合引理3-1、引理3-3，得到了有解和無解的界限的結論：如下圖，在一開始作圖時，先分別以A點、B點、C點為移動點，將n值帶入找出移動點可移動的範圍並判斷哪一點作為移動點時落在範圍內，進而再作出通過ΔABC之正n邊形；如三點皆在圖形外，則一定無解，無法作圖。



（A點為移動點，無解）



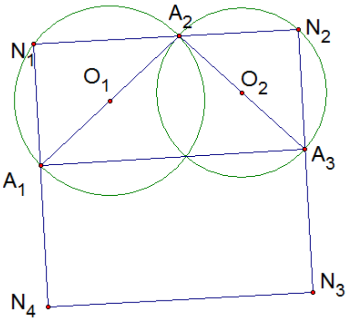
（C點為移動點，無解）

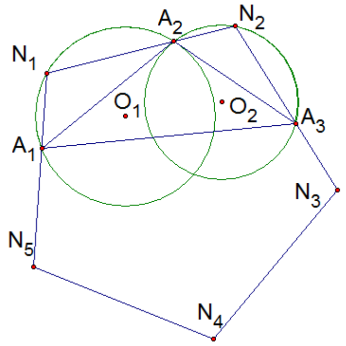


（B點為移動點，無限多解）

研究四：過已知n點之正n邊形性質探討

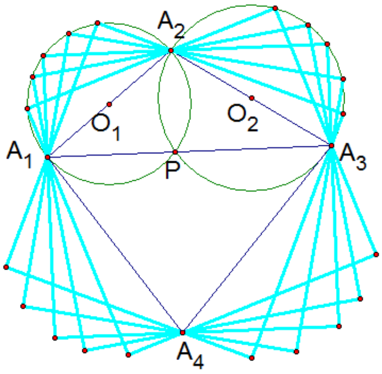
(一) 更改對點的命名：為因應及區分接下來的討論，原本在本研究中，對已知點的命名方式不適合沿用在接下來的研究中，故文後的命名將在不影響研究的前提下作些許改變。例如：$\Delta BAC \to \Delta A_1A_2A_3$；D點、E點→$O_1$點、$O_2$點。

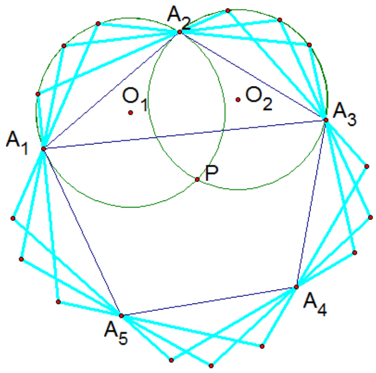




(二) 在研究過程中，我們推測由「過已知三點之正三角形」推廣至「過已知 n 點之正 n 邊形」時，已知 n 點的位置可能存在限制。最後發現：

定理4-1：通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解（定理3），這些正n邊形除了會通過點A_1、A_2、A_3外，也都會交於點A_4、A_5、…、A_n這n－3個點。而將A_1、A_2、…、A_n連成一個n邊形後（如下圖），我發現了此n邊形許多與費馬點、拿破崙定理相關的性質及推廣。

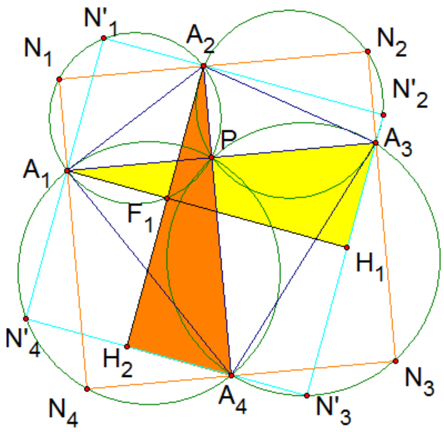




證明：

如右圖，以正方形為例，已知存在$\Delta A_1A_2A_3$，並已作出過其之任意一個正方形和最大正方形，且令$\overline{N_3N_4}$、$\overline{N_3'N_4'}$交於A_4，$\overline{A_2H_2}$與$\overline{A_1H_1}$交於F_1，$\angle N_1'A_2N_1=\angle N_2'A_3N_2=\theta^{\circ}$

作$\overline{A_1H}\perp\overline{N_2'N_3'}$於$H_1$，$\overline{A_2H'}\perp\overline{N_3'N_4'}$於$H_2$



可知$\angle A_4A_2H_2=\angle A_3A_1H_1=\theta°$

$\because \overline{A_2H_2}=\overline{N_1'N_4'}=\overline{N_1'N_2'}=\overline{A_1H_1}$

$\therefore \overline{A_2H_2}=\overline{A_1H_1}$

又$\because \angle A_4A_2H_2=\angle A_3A_1H_1=\theta°$，

$\angle A_2H_2A_4=A_3H_1A_1=90^{\circ}$，$\overline{A_2H_2}=\overline{A_1H_1}$

$\therefore \Delta A_4H_2A_2\cong\Delta A_3H_1A_1$(AAS全等)

得$\overline{A_2A_4}=\overline{A_1A_3}$⋯①

$\because \angle N_1'A_2F_1=\angle N_1'A_1F_1=90°$

$\therefore \angle A_1F_1A_2 = 180° - \angle A_1N_1'A_2 = 90°$

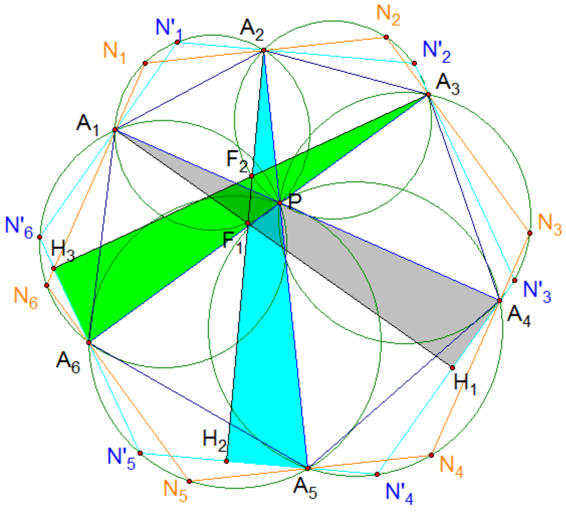
又$\because \angle A_1F_1A_2 = 90°$，$\triangle A_2H_2A_4 \cong \triangle A_3H_1A_1$

$\therefore \angle A_1PA_2 = 90° \cdots$②

$\because \theta$為不定值

$\therefore$可知多個過$\triangle A_1A_2A_3$之正方形皆交於A_4，且$\overline{A_2A_4} = \overline{A_1A_3}$，$\angle A_1PA_2 = 90°$。

n＝6時則作3個直角三角形，如右圖；n＝8時作4個，以此類推，可得結論：



n＝2k時，多個過A_1、A_2、A_3三點之正ｎ邊形除了會通過點A_1、A_2、A_3外，也都會交於點A_4、A_5、…、A_n這n－3個點，且

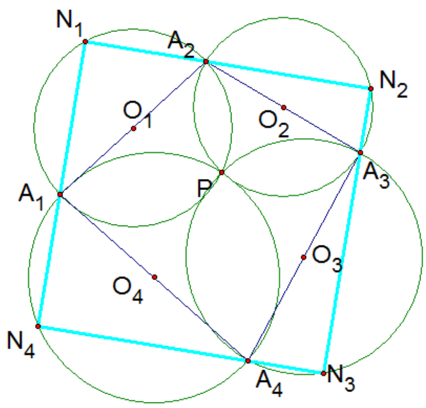
$$\overline{A_1A_{1+k}} = \overline{A_2A_{2+k}} = \cdots = \overline{A_kA_n}，\angle A_iPA_{i+1} = \frac{360}{n}。$$

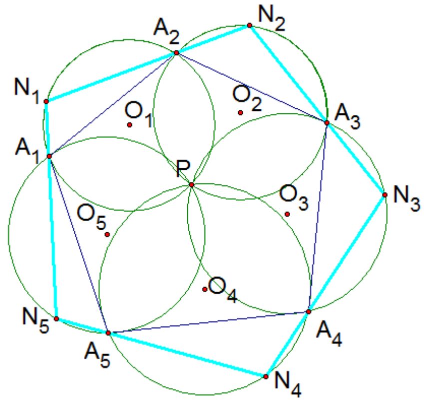
❋ 在「你泥中有我」文獻中將可以作出無限多組通過n點之正n邊形的n邊形視為特例，而我們發現這種n邊形其實只要由三個相鄰點就可決定，如定理4-1，有了A_1、A_2、A_3就可作出A_4、A_5…、A_n。因為此文獻中已發現存在可作出無限多組解的n邊形，故我們以定理4-1為基礎，繼續後續之研究。

❋ 文後的研究內容將以過已知三點之正三角形性質為基礎來加以延伸。

(三) 過n點之正n邊形的性質：

1. 根據定理1在$\overline{A_iA_{i+1}}$上作出圓O_i後，我發現作出$N_1N_2 \ldots N_n$後，**$N_1N_2 \ldots N_n$為正n邊形（定理4-2）**，且**圓O_1、O_2、…、O_n皆交於一點P（性質4-1）**。



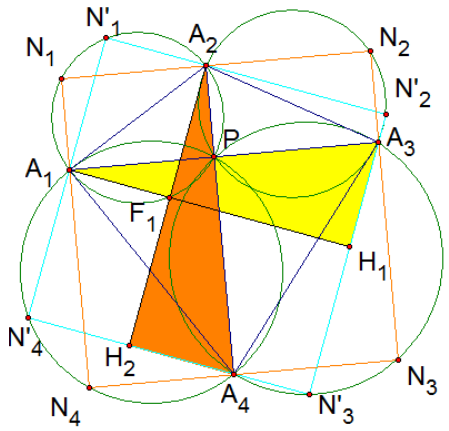


證明：

(1) 定理4-2：$N_1N_2 \dots N_n$為正n邊形。

如下圖，以n＝4為例，已知存在$A_1A_2A_3A_4$，並已作出過其之任意一個正方形和最大正方形，令$\angle N_1'A_2N_1=\angle N_2'A_3N_2=\theta°$

作$\overline{A_1H} \perp \overline{N_2'N_3'}$於$H_1$，$\overline{A_2H'} \perp \overline{N_3'N_4'}$於$H_2$，並已知$\overline{A_2A_4}=\overline{A_1A_3}$，$N_1N_2N_3N_4$為各內角皆為$90°$的四邊形，可知$\angle A_4A_2H_2=\angle A_3A_1H_1=\theta°$。



$\because \angle A_4A_2H_2=\angle A_3A_1H_1=\theta°$，

$\angle A_2H_2A_4=A_3H_1A_1=90°$，$\overline{A_2A_4}=\overline{A_1A_3}$

$\therefore \Delta A_2H_2A_4 \cong \Delta A_3H_1A_1$（AAS全等）

得$\overline{A_2H_2}=\overline{A_1H_1}$

$\because \overline{N_1'N_2'}=\overline{A_1H_1}$，$\overline{N_1'N_4'}=\overline{A_2H_2}$，$\overline{A_2H_2}=\overline{A_1H_1}$

$\therefore \overline{N_1'N_2'}=\overline{N_1'N_4'}$

又$\because \overline{N_1'N_2'}=\overline{N_1'N_4'}$，$N_1N_2N_3N_4$各內角皆為$90°$

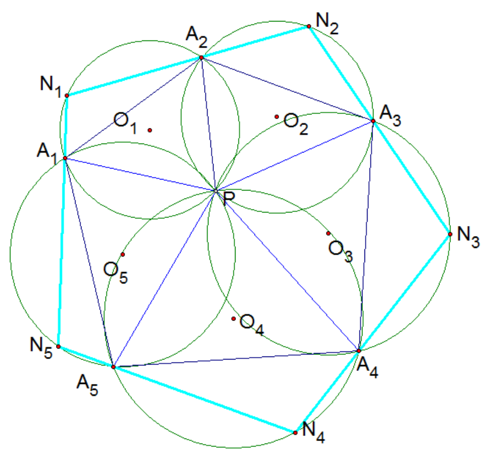
$\therefore N_1'N_2'N_3'N_4'$為正方形。

以此類推，得證。

(2) 性質4-1：圓O_1、O_2、…、O_n皆交於一點P。

以n＝5為例，已知$\angle A_2N_2A_3=\angle A_3N_3A_4=108°$，$\angle A_1PA_2=\angle A_2PA_3=72°$

作ΔPA_3N_3之外接圓O_3，並在圓O_3上取一點A_4使$\angle A_3N_3A_4=108°$；同理，作ΔPA_4N_4之外接圓O_4，再取A_5；最後，連接$\overline{N_5N_1}$。



在五邊形$N_1N_2 \dots N_5$中，

$\because \angle N_1=\angle N_2=\cdots=\angle N_4=108°$

$\therefore \angle N_5=(540-4\times 108)°=108°$

又$\because \angle A_1PA_2=\angle A_2PA_3=\cdots=\angle A_4PA_5=72°$

$\therefore \angle A_5PA_1=(360-4\times 72)°=72°$

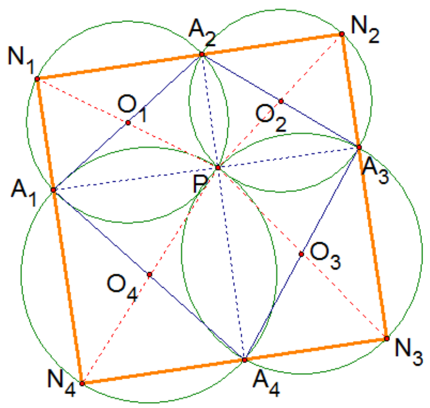
又$\because \angle N_5+\angle A_5PA_1=(108+72)°=180°$

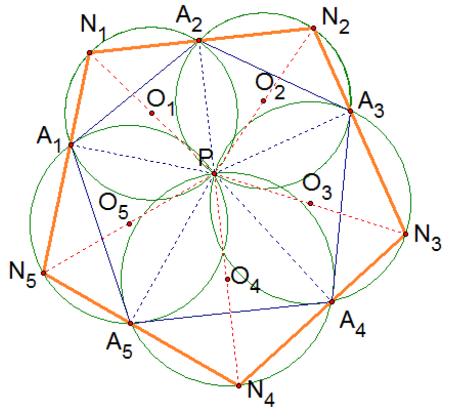
$\therefore$P、A_5、N_5、A_1共圓

$\Rightarrow$P為圓O_1、O_2、…、O_5之共同交點。

以此類推，故得證。

2. 性質2-1、性質2-2之延伸：過$A_1A_2 \dots A_n$的最大正n邊形也會符合**P、O_i、N_i共線**（性質4-2）以及$\overline{PA_i} \perp \overline{N_iN_{i-1}}$（性質4-3），證法同原性質。





研究五：試推廣費馬點和拿破崙三角形，並探討已知 n 點所成的 n 邊形之廣義費馬點、拿破崙多邊形與通過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質

(一) 費馬點的推廣：

1. 引理5-1：**維維安尼定理的推廣。**

P是圓O_1、$O_2 \dots O_n$的共同交點（性質4-1），又從引理1-1進而發現P點就是$A_1A_2 \dots A_n$的費馬點（意即$\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}$為最小值），證明之前，我們需要先將維維安尼定理往正n邊形推廣當預備引理：

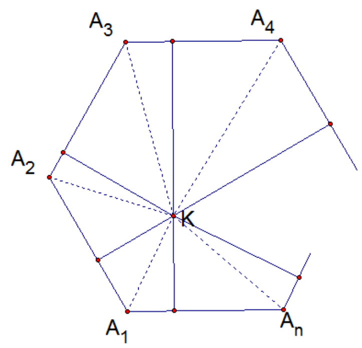
證明：如圖，設正n邊形$A_1A_2 \dots A_n$內任一點K到各邊之距離依次為h_1、$h_2 \cdots h_n$，正n邊形面積為S，邊長為a，連接$\overline{KA_1}$、$\overline{KA_2} \cdots \overline{KA_n}$，則

$\Delta KA_1A_2 + \Delta KA_2A_3 + \cdots + \Delta KA_nA_1 = S$

$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \cdots + \frac{1}{2}ah_n = S$

$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{2S}{a}$ 為定值，

得證。



2. 定理5-1：**圓O_1、O_2之交點P為$A_1A_2 \dots A_n$之費馬點。**

如下圖，設已存在由定理4-1得之n邊形$A_1A_2 \dots A_n$及圓O_1、O_2之交點P，由性質4-3可知如分別作過A_1、A_2、 … 、A_n之$\overline{PA_1}$、$\overline{PA_2} \cdots \overline{PA_n}$的垂線會形成一正n邊形。

在$N_1N_2 \dots N_n$中取任意一點K不與P重合，設K到各邊之距離依次為h_1、$h_2 \cdots h_n$，並連接$\overline{KA_1}$、$\overline{KA_2} \cdots \overline{KA_n}$。

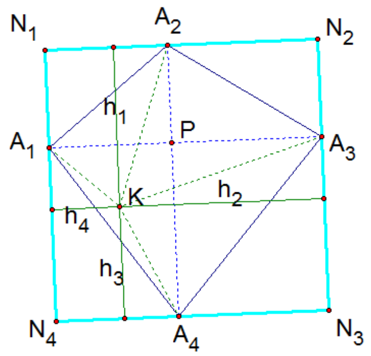
利用勾股定理可知：$\overline{KA_i} > h_i$

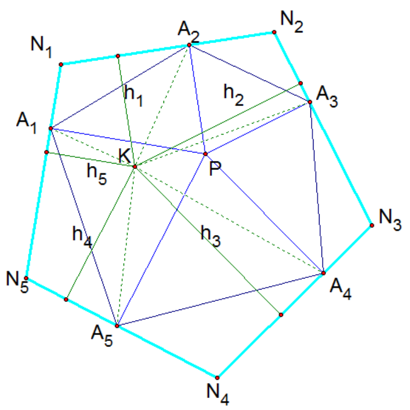
$\therefore \sum_{k=1}^{n}\overline{KA_k} > \sum_{k=1}^{n}h_k \cdots$①

而由引理5-1可知$\sum_{k=1}^{n}h_k = \sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k} \cdots$②

綜合①②可得$\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k} < \sum_{k=1}^{n}\overline{KA_k}$

得證。





3. 廣義費馬點其他的性質：

a. 性質5-1-1：$\angle A_iPA_{i+1}=\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$

證明：

已知$A_iN_iA_{i+1}P$為圓內接四邊形

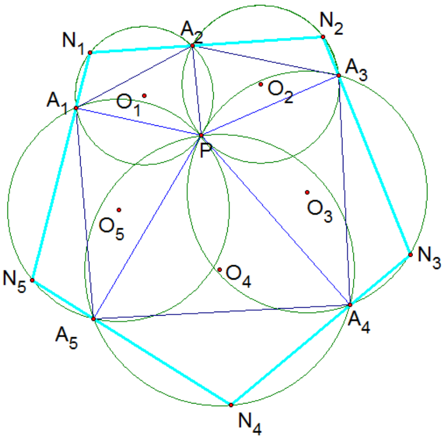
$\Rightarrow \angle A_iN_iA_{i+1}+\angle A_{i+1}PA_i=180^{\circ}$

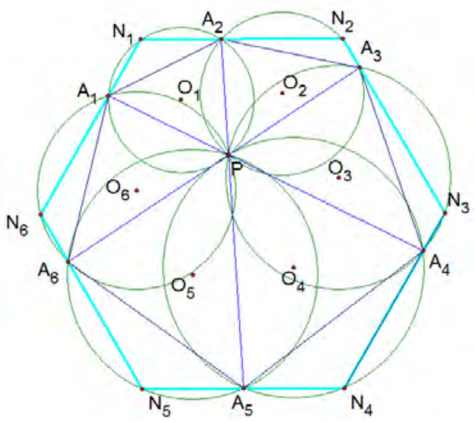
且$\because \angle A_1N_1A_2=\angle A_2N_2A_3=\cdots=\angle A_nN_nA_{n+1}$

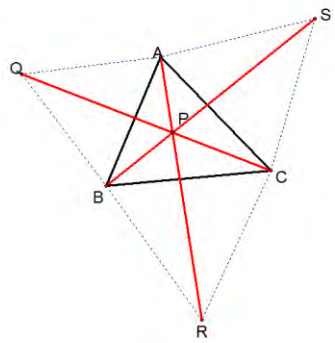
$\therefore \angle A_1P_1A_2=\angle A_2P_2A_3=\cdots=\angle A_nP_nA_{n+1}$

又$\because \angle A_1P_1A_2+\angle A_2P_2A_3+\cdots+\angle A_nP_nA_{n+1}=360^{\circ}$

得$\angle A_iPA_{i+1}=\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$，得證。





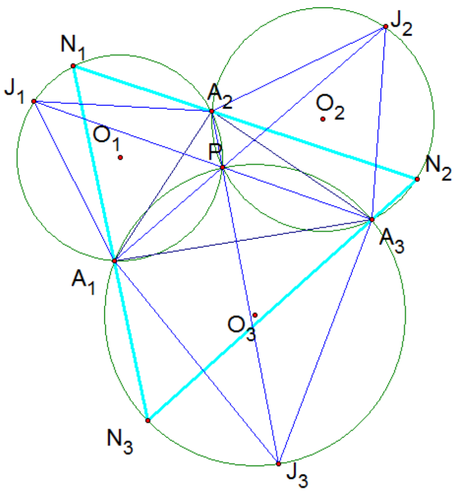


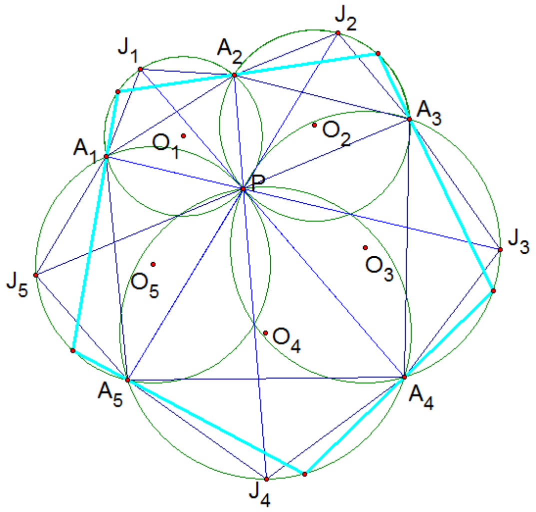
b. 如右圖，我們已知在作狹義費馬點P時要以三角形個邊分別向外側作等邊三角形，且$\overline{AR}=\overline{BS}=\overline{CQ}$。可將此性質推廣至性質5-1-2：

分n為奇數或偶數兩種情況：

(a) n=2k+1：作$\overrightarrow{A_iP}$交圓O_{i+k}於J_{i+k}，則$\overline{A_1J_{1+k}}=\overline{A_2J_{2+k}}=\cdots=\overline{A_iJ_{i+k}}$，

$\Delta A_iJ_iA_{i+1}$為頂角為$\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^{\circ}$的等腰三角形（n=3時，$\Delta A_iJ_iA_{i+1}$為正三角形）。





證明：

i. $\angle A_iJ_iA_{i+1}=\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ$，且$\overline{A_iJ_i}=\overline{J_iA_{i+1}}$

$\because J_i$在O_i上

$\therefore \angle A_iJ_iA_{i+1}=(\frac{180(n-2)}{n})^\circ$

$\Rightarrow \angle A_iPA_{i+1}=(\frac{360}{n})^\circ$

$\Rightarrow \angle A_{i+k}PJ_{i+k}=\left(180-\frac{360}{n}\times k\right)^\circ=\left(180-\frac{360k}{2k+1}\right)^\circ=\left(\frac{180}{2k+1}\right)^\circ=\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$

同理，$\angle J_{i+k}PJ_{i+k+1}=\left(\frac{180}{n}\right)^\circ=\angle A_{i+k}PJ_{i+k}$

$\Rightarrow \widehat{A_{i+k}J_{i+k}}=\widehat{A_{i+k+1}J_{i+k}}\Rightarrow \widehat{A_iJ_i}=\widehat{A_{i+1}J_i}$

$\therefore \overline{A_iJ_i}=\overline{A_{i+1}J_i}$，得證。

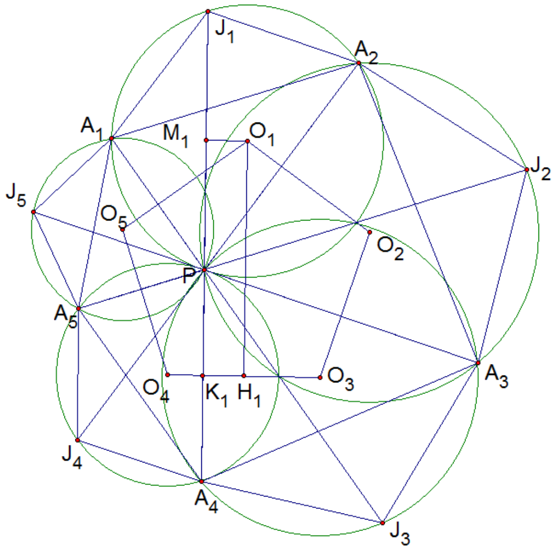
ii. $\overline{A_1J_{1+k}}$=$\overline{A_2J_{2+k}}$=⋯=$\overline{A_iJ_{i+k}}$

先備知識：外拿破崙多邊形

由外拿破崙多邊形的證明可知A_i對稱 P 於$\overline{O_iO_{i-1}}$，故下圖即為：

設已存在一正 n 邊形$O_1O_2...O_n$，並有任意一點 P 在$O_1O_2...O_n$內，且$A_1A_2...A_n$為 P 點向$O_1O_2...O_n$各邊外部作對稱所得的圖形。

以n=5為例，令$\overline{J_1P}$中點為M_1，$\overline{O_3O_4}$垂直平分$\overline{PA_4}$於K_1，$\overline{O_1H_1}\perp\overline{O_3O_4}$於$H_1$



可得知$\overline{M_1K_1}=\frac{1}{2}\overline{J_1P}$⋯①

$\because \overline{J_1P}$為圓O_1之弦

$\therefore \overline{O_1M_1}\perp\overline{J_1P}$

又$\because \overline{O_1M_1}\perp\overline{J_1P}$，$\overline{PK_1}\perp\overline{O_3O_4}$，$\overline{O_1H_1}\perp\overline{O_3O_4}$

$\therefore O_1M_1K_1H_1$為長方形

$\Rightarrow \overline{M_1K_1}=\overline{O_1H_1}$⋯②

由①②，得$\overline{A_4J_1}=2\overline{O_1H_1}$

以此類推，$\overline{A_iJ_{i+k}}=2\overline{O_{i+k}H_{i+k}}$⋯③

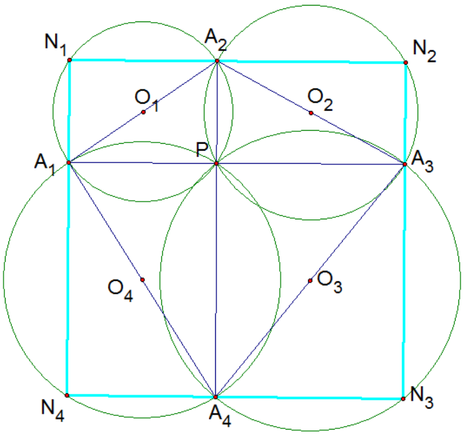
又$\because \overline{O_1H_1}=\overline{O_2H_2}=\cdots=\overline{O_iH_i}$⋯④

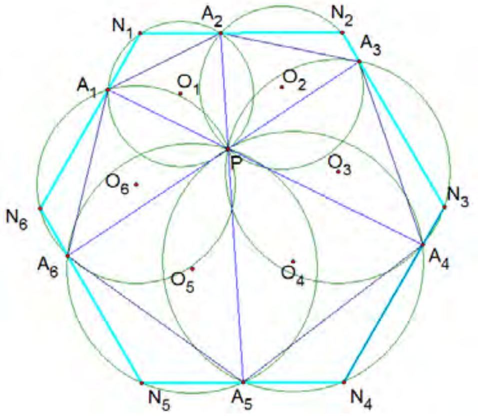
由③④，得$\overline{A_1J_{1+k}}$=$\overline{A_2J_{2+k}}$=⋯=$\overline{A_iJ_{i+k}}$

得證。

(b) n=2k： $\overline{A_1A_{1+k}} = \overline{A_2A_{2+k}} = \cdots = \overline{A_iA_{i+k}}$。

作過$A_1A_2 \dots A_n$之最大正n邊形$N_1N_2 \dots N_n$，證明與奇數邊類似，但因為$\overline{A_iA_{i+k}}$已經垂直$\overline{N_{i-1}N_i}$和$\overline{N_{i+k-1}N_{i+k}}$，且正 n 邊形$N_1N_2 \dots N_n$的各對邊距離皆相等，故得證。





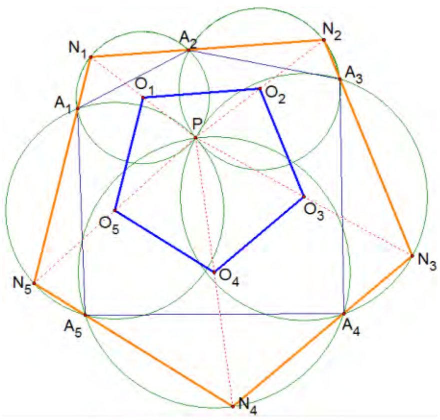
c. 我們試著將這結論帶入到任意n邊形看是否會成立，卻發現圓O_1、O_2、 ... O_n不會交於同一點，利用GSP也觀察出其費馬點P以不在圓的任何交點上，此篇所推出的廣義費馬點只存在於由定理4-1所得到的n邊形$A_1A_2 \dots A_n$中。

(二) 拿破崙定理(定理5-2)之推廣

1. 定理5-2-1：外拿破崙三角形的推廣

(1). 由引理1-2可知，在作過$\Delta A_1A_2A_3$之正三角形時，$\Delta O_1O_2O_3$恰為$\Delta A_1A_2A_3$之外拿破崙三角形，後來在作出$A_1A_2 \dots A_n$後，再將O_1、O_2、 ... O_n連成一n邊形，如下圖，我發現$O_1O_2 \dots O_n$也都是正n邊形。意即我們將外拿破崙三角形推廣到了「外拿破崙多邊形」，但作法卻不是原本的「向多邊形外部作正多邊形再找外心」，而是向外作「頂角為

$\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)^\circ$ 的等腰三角形」的外心。



證明：

作過$A_1A_2 \dots A_n$最大正n邊形$N_1N_2 \cdots N_n$

連$\overline{O_iO_{i+1}}$，由性質4-2再連$\overline{PO_iN_i}$

=>可知$\overline{PN_i}$為圓O_i之直徑

=>O_i為$\overline{PN_i}$中點

∴在ΔPN_iN_{i+1}中，$\overline{O_iO_{i+1}} = \frac{1}{2}\overline{N_iN_{i+1}}$

故$\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = \cdots = \overline{O_{n-1}O_n} = \overline{O_nO_1}$ …①

又∵$\overline{O_iO_{i+1}}$為ΔPN_iN_{i+1}之兩腰中點連線段

∴$\overline{O_iO_{i+1}} // \overline{N_iN_{i+1}}$

∵$\overline{O_iO_{i+1}} // \overline{N_iN_{i+1}}$

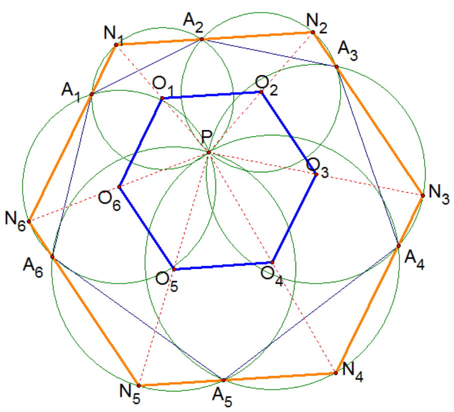
∴$\angle N_iN_{i+1}P = \angle O_iO_{i+1}P$

且$\angle N_{i+2}N_{i+1}P = \angle O_{i+2}O_{i+1}P$

⇒$\angle N_iN_{i+1}N_{i+2} = \angle O_iO_{i+1}O_{i+2} = x^\circ$ …②

由①②可知： $O_1O_2 \dots O_n$為一正n邊形，

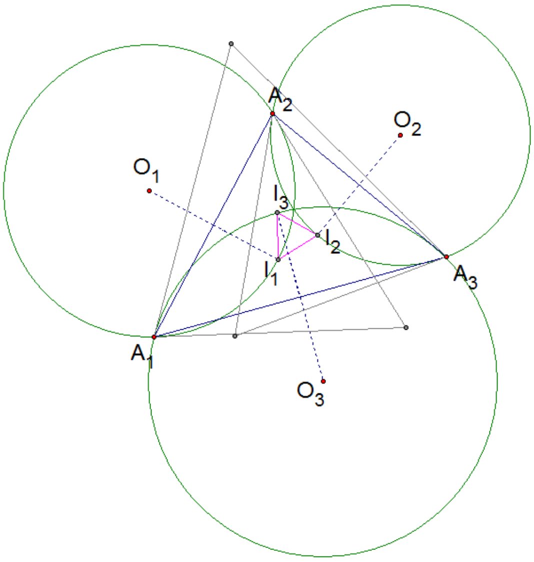
得證。

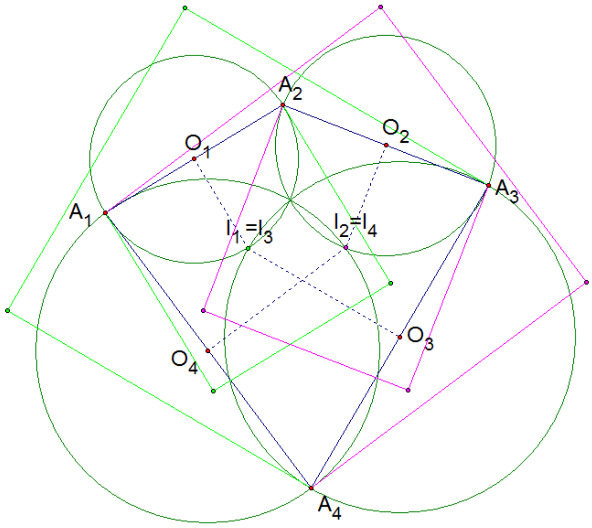


(2). 在發現此定理後，我們試著尋找是否任意n邊形都存在外拿破崙n邊形，卻仍然發現此篇所推出的外拿破崙n邊形只存在於由定理4-1所得到的n邊形$A_1A_2 \ldots A_n$中。

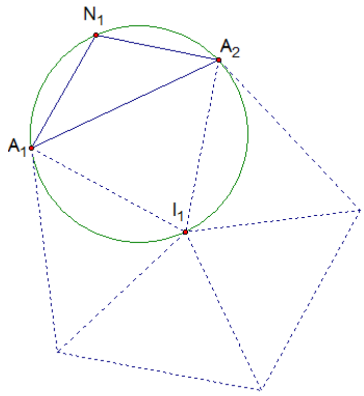
2. 定理5-2-2：內拿破崙三角形的推廣

(1). 既然已經證明外拿破崙多邊形，我們也就開始尋找內拿破崙多邊形的存在性。我們發現：內拿破崙多邊形的各頂點I_i為向所得到的n邊形$A_1A_2 \ldots A_n$的各邊內側作正n邊形之外心（定理4-1），而其外心也恰分別為各邊$\overline{A_iA_{i+1}}$向內側作中垂線與圓O_i的交點，如下圖。故得知：內外拿破崙多邊形只有在n＝3時才具有共通性，都是在邊上作正三角形，但在本質上作法完全不同。





證明：



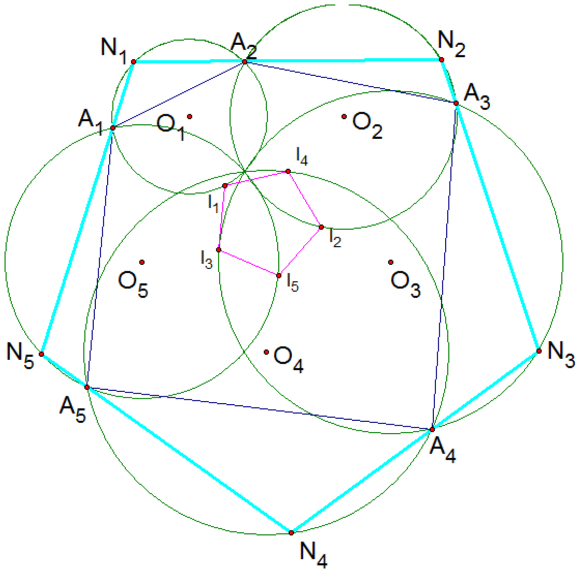
如右圖，已知$\angle A_1N_1A_2 = \left(\frac{180(n-2)}{n}\right)°$，且$\angle A_1I_1A_2 = \left(\frac{360}{n}\right)°$

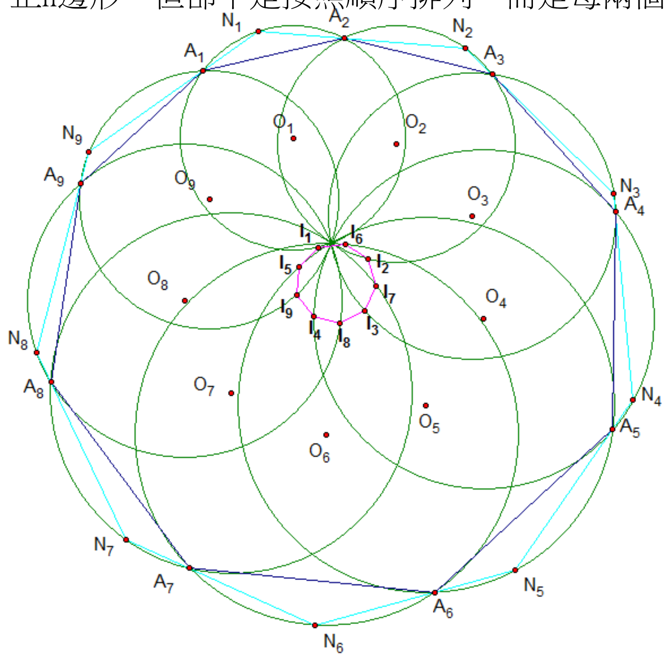
$\because \angle A_1N_1A_2 + \angle A_1I_1A_2 = \left(\frac{360+180(n-2)}{n}\right)° = 360°$

$\therefore A_1$、N_1、A_2、I_1共圓，得證。

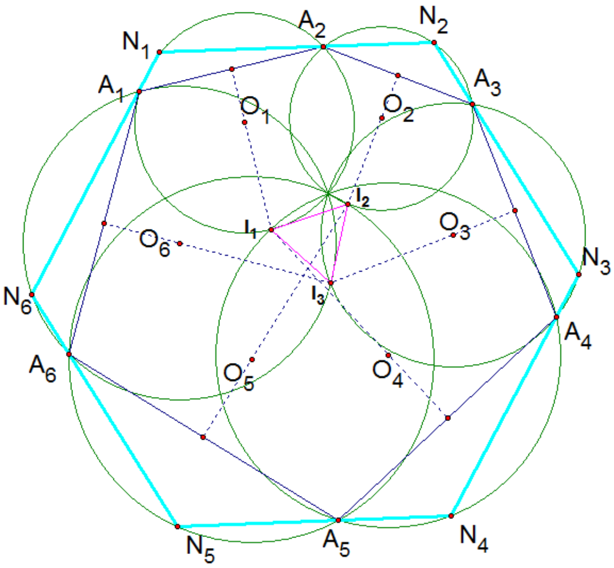
(2). 而內拿破崙多邊形分成以下兩種情況：

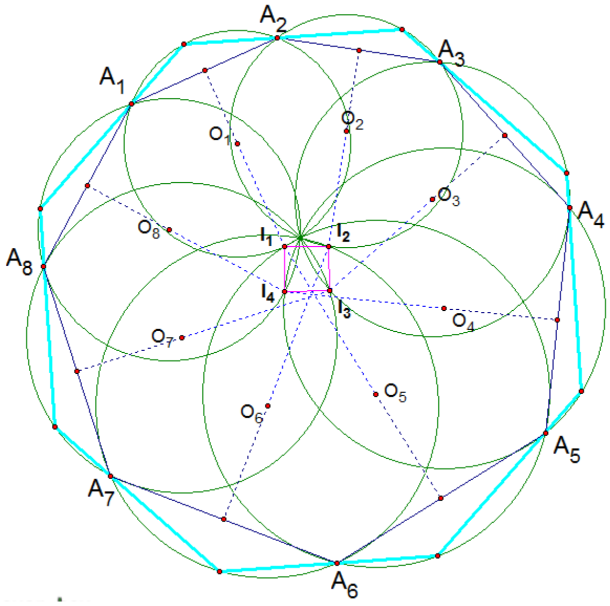
a. n=2k+1：如圖，I_1、$I_2 \ldots I_n$可連成一正n邊形，但卻不是按照順序排列，而是每兩個跳一個數字。





b. n=2k：如圖，$I_1=I_{1+k}$、$I_2=I_{2+k}$、⋯、$I_k=I_n$，故只能說I_1、I_2 ... I_k可連成一正k邊形（其中，n=4時，則只存在$\overline{I_1I_2}$，無法形成正多邊形）。



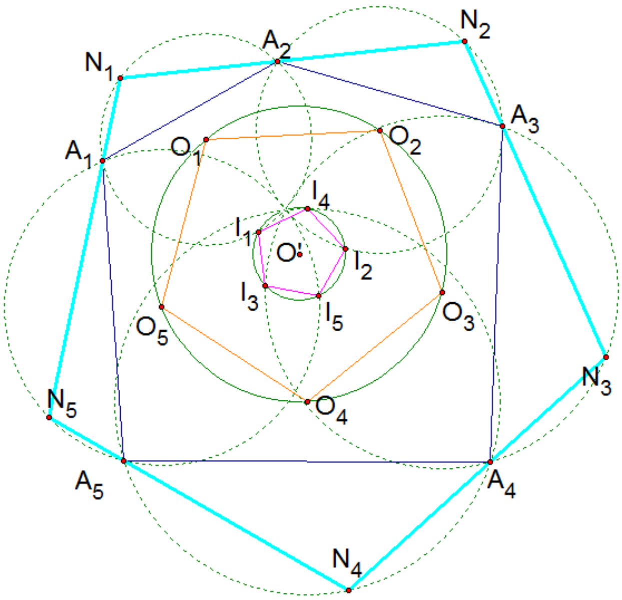


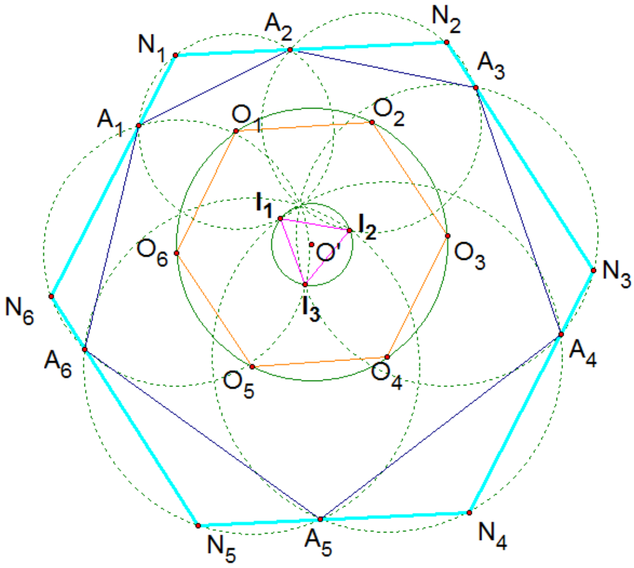
討論：

為了方便分辨（譬如只講內拿破崙三角形會不知道原本$A_1A_2\ldots A_n$之n到底是3還是6），故我們再將內拿破崙多邊形細分為**奇內拿破崙多邊形**和**偶內拿破崙多邊形**（舉前例，如果n＝3，則我們稱之為奇內拿破崙三角形；反之，如果n＝6，則我們稱之為偶內拿破崙三角形）。

(3). 而在找到以上這些性質後，我們試著尋找是否任意n邊形都存在內拿破崙n（k）邊形，然後發現此篇所推出的內拿破崙n(k)邊形只存在於定理4-1所得到的n邊形$A_1A_2\ldots A_n$中。

3. 性質5-2：**$A_1A_2\ldots A_n$之內、外拿破崙多邊形有共同外心O'** 。

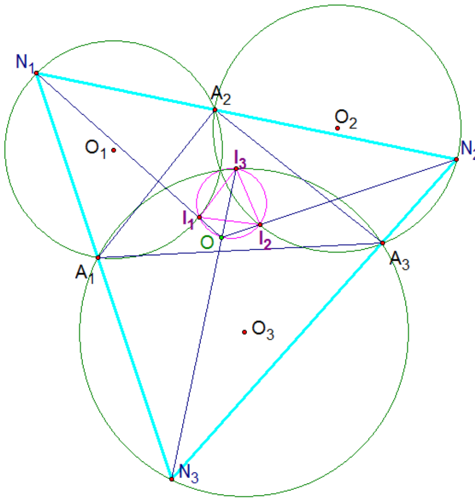


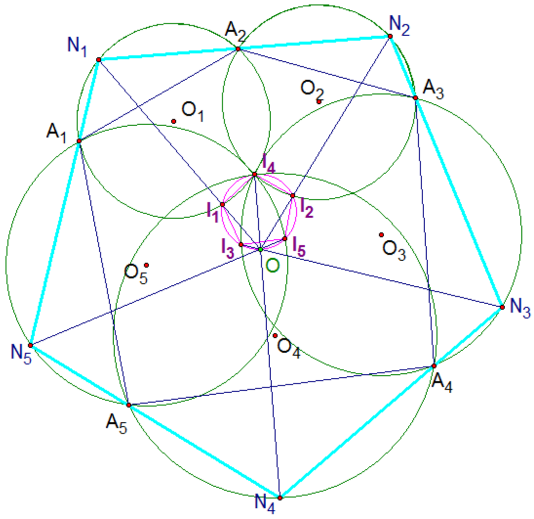


(三) 過 n 點之正n邊形、廣義費馬點、內拿破崙多邊形之綜合性質

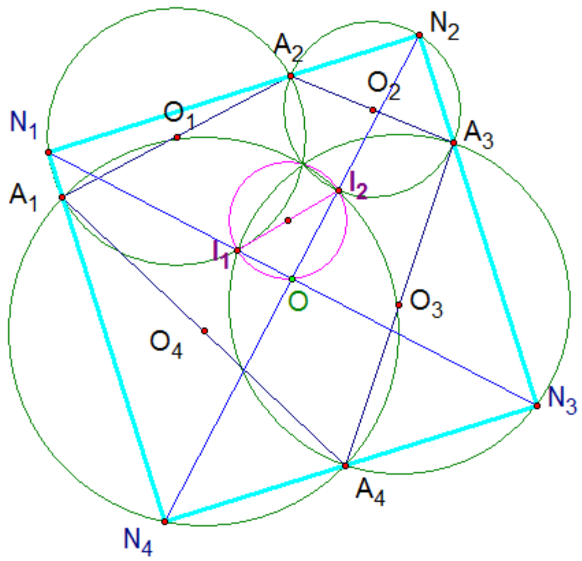
1. 我發現過A_1、A_2、…、A_n之正n邊形在旋轉時，其外心軌跡為一弧，而其弧恰為A_1、A_2、…、A_n之內拿破崙多邊形的外接圓之部分集合，進而發現了性質5-3：
過A_1、A_2、…、A_n之正n邊形的各頂點N_i、外心O，和$A_1A_2 \dots A_n$之內拿破崙多邊形$I_1I_2 \dots I_{n\,(k)}$之關係，可分n為奇數或偶數討論：

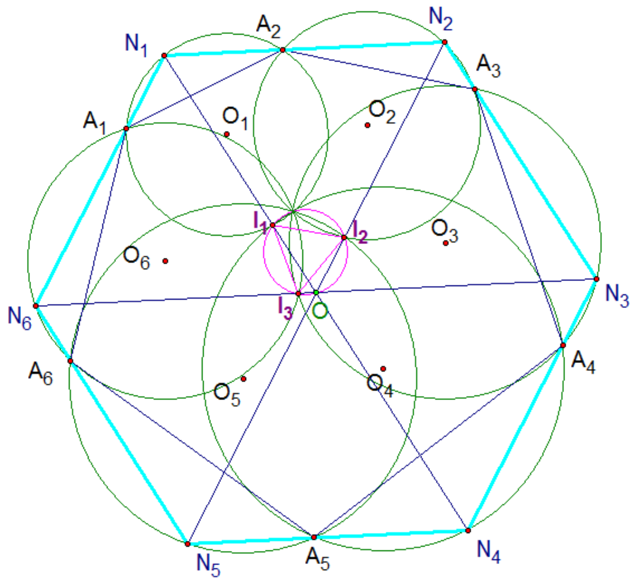
(1). **n=2k+1： N_i、O、I_i共線，且O在$I_1I_2 \dots I_n$之外接圓上。**





(2). **n=2k： N_i、O、I_i N_{i+k}共線，且O在$I_1I_2 \dots I_k$之外接圓上。**





證明：

i. N_i、O、I_i共線。

$\because \widehat{A_iJ_i} = \widehat{J_iA_{i+1}}$

$\therefore \angle A_iN_iJ_i = \angle A_{i+1}N_iJ_i$

$\Rightarrow \overrightarrow{N_iI_i}$為$\angle A_iN_iA_{i+1}$之角平分線

$\Rightarrow$O 在$\overrightarrow{N_iI_i}$上，得證。

ii. O在$\mathbf{I_1I_2 \dots I_{n(k)}}$之外接圓上。

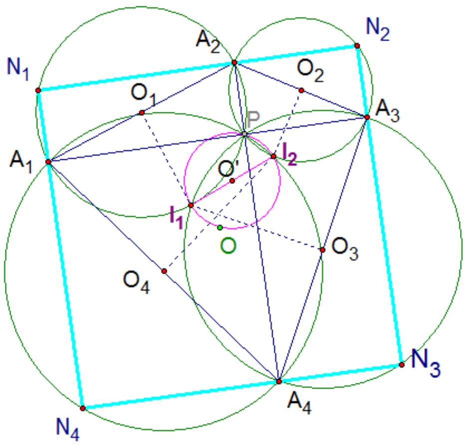
已知$\angle N_1ON_2 = \left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$，且 O 在$\overrightarrow{N_iI_i}$上。

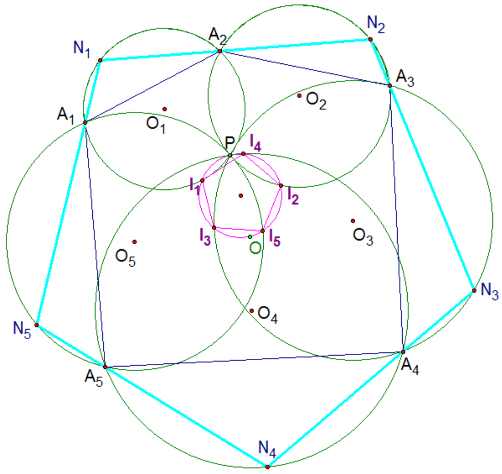
$\Rightarrow \angle I_1OI_2 = \angle N_1ON_2 = \left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$

又$\because \widehat{J_1J_2} = \left(\frac{720}{n}\right)^{\circ} = 2\angle I_1OI_2$

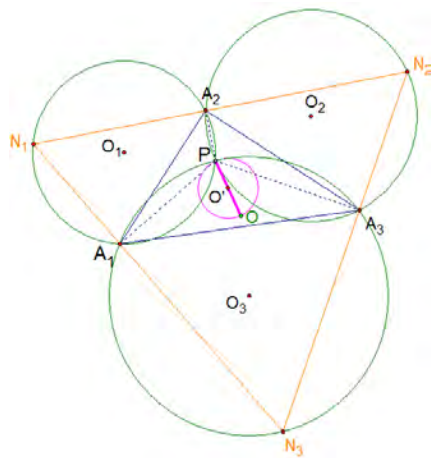
$\therefore$O在$I_1I_2 \dots I_{n(k)}$的外接圓上，得證。

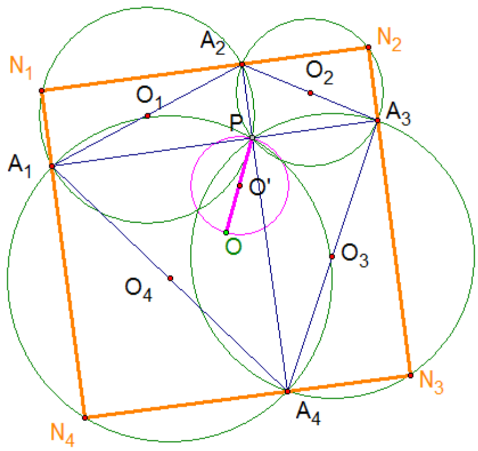
2. 性質5-4：由性質5-3進而發現「過$\mathbf{A_1A_2 \dots A_n}$正n邊形之外心（O）、廣義費馬點（P）、內拿破崙多邊形落在同一圓O'上（n=4時，$\overline{\mathbf{I_1I_2}}$為直徑）」。





3. 性質5-5：連過$\mathbf{A_1A_2 \dots A_n}$之最大正n邊形之外心O與其費馬點P得$\overline{\mathbf{OP}}$，則$\overline{\mathbf{OP}}$恰為圓O'之直徑。





證明：

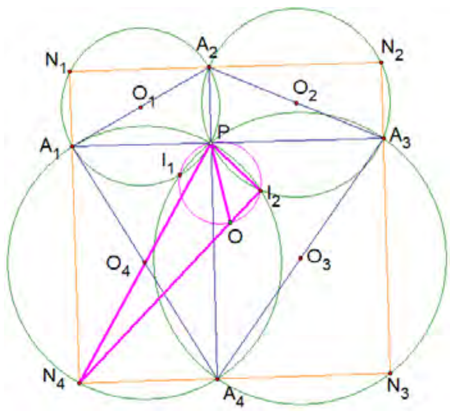
以n＝4為例，如右圖，連$\overline{PI_2}$，由性質4－2連$\overline{PO_4N_4}$，再由性質5－3連$\overline{I_2ON_4}$。

$\because \overline{PN_4}$為圓O_4直徑

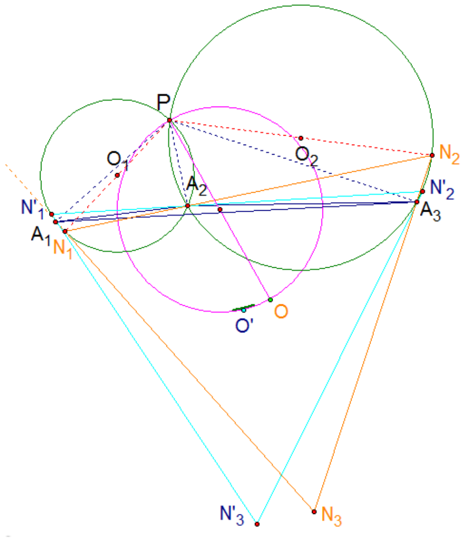
$\therefore \angle PI_2N_4 = 90^{\circ} = \angle PI_2O$

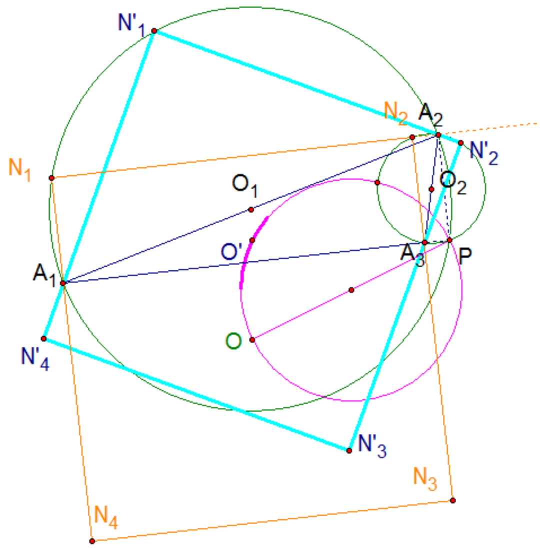
又$\because \angle PI_2O = 90^{\circ}$

$\therefore \overline{OP}$為圓O'之直徑，得證。



4. **性質5-6**：過$A_1A_2 \ldots A_n$之正多邊形的外心在內拿破崙多邊形之外接圓上（性質5-4）移動時有限制，而其外心（此暫令為O’）可移動的這段弧，我將之命名為「有效區」，而有效區的範圍目前未知，尚待發現。而在研究二所說的其實就是看過$A_1A_2 \ldots A_n$之最大正n邊形之外心O（性質5-5）是否落在有效區上，且過其之正n邊形有解、無解或許也可用此判斷，故只要能得知有效區位置將會是一大助益。





研究六：探討是否能利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過n點之正n邊形的方法

已知$\Delta A_1A_2A_3$、O_1、O_2，求作$A_1A_2 \dots A_n$及過$A_1A_2 \dots A_n$之正n邊形、費馬點、內外拿破崙多邊形時，若是將$A_1A_2 \dots A_n$及過其之正n邊形、費馬點、內、外拿破崙多邊形依序作出，會非常耗費時間，而由定理3與定理5-1分別可知：過已知n點之正n邊形有無限多解，且圓O_1、O_2之交點P將為$A_1A_2 \dots A_n$之費馬點，因此，我們將研究三、四、五加以整合，得到以下更快的作法。

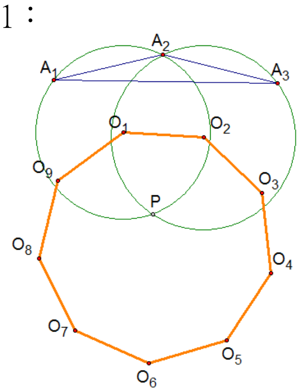
1. 如圖，以$\overline{O_1O_2}$為邊，作出正n邊形$O_1O_2 \dots O_n$。（定理5-2-1）
2. 以$\overline{O_iP}$為半徑，O_i為圓心作圓，則圓O_i與圓O_{i+1}交於A_{i+1}。（性質4-1）
3. 連$\overline{A_iA_{i+1}}$得$A_1A_2 \dots A_n$。
4. 在$\widehat{A_1A_2}$上取一點N_1作$\overrightarrow{N_1A_2}$交$\widehat{A_2A_3}$於N_2，再作$\overrightarrow{N_2A_3}$交$\widehat{A_3A_4}$於N_3…最後作$\overrightarrow{N_nA_1}$會恰經過N_1，如此得過$A_1A_2 \dots A_n$之正n邊形$N_1N_2 \dots N_n$。（定理4-2）
5. 作$O_1O_2 \dots O_n$之外心O'，並以O'為圓心，$\overline{O'P}$為半徑作圓交圓O_i於I_i。（性質5-2）
6. 將I_1、I_2、 … 、$I_{n(k)}$ 連接後就得$A_1A_2 \dots A_n$之內拿破崙多邊形。　（定理5-2-2、5-4）

❈ 由上述式子可知我們作圖的順序是：$\Delta A_1A_2A_3$→$A_1A_2 \dots A_n$之費馬點→外拿破崙n邊形→$A_1A_2 \dots A_n$→過$A_1A_2 \dots A_n$之正n邊形→$A_1A_2 \dots A_n$之內拿破崙n邊形，與原先應有的順序大不相同，其原因就是我們將某些性質取「逆命題」的形式，才能先作出，而某些步驟可視需要性省略。

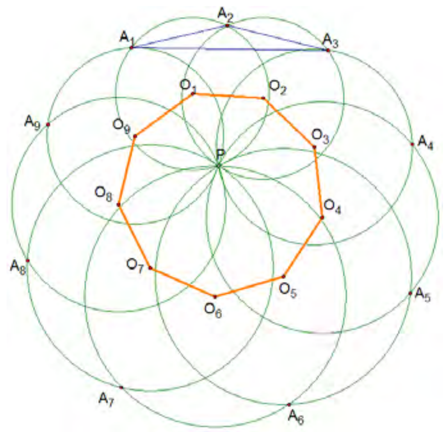
❈ 作法４的缺點在於不一定可直接作出解，可能要試個幾次才能作出，但若未來我們找的到過$A_1A_2 \dots A_n$之正n邊形的外心在其內拿破崙多邊形之外接圓上（性質5-4）可移動的範圍的話，我們就可在範圍內直接取一點並利用性質5-3之逆定理退回去求出過$A_1A_2 \dots A_n$之正n邊形，不會有問題。

(1)　n=2k+1：

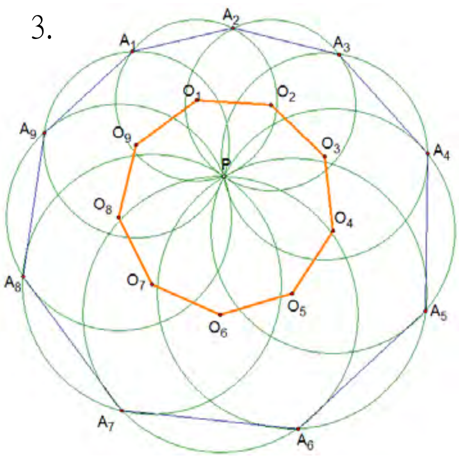
1.



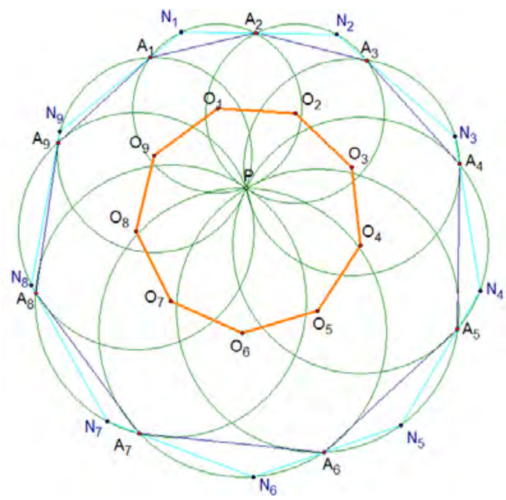
2.



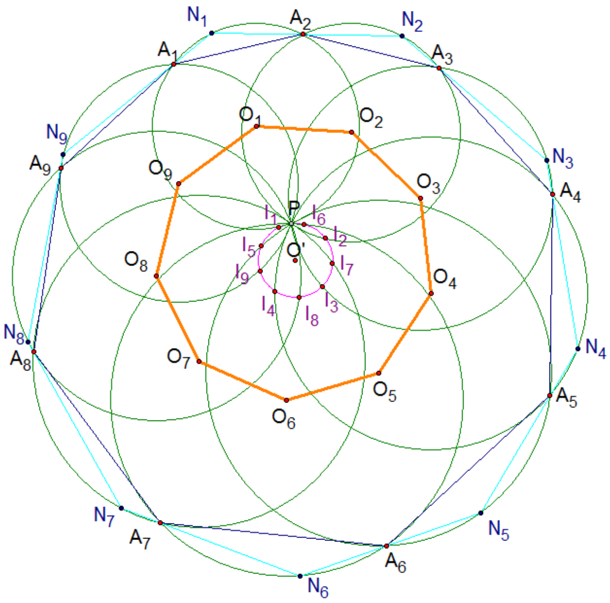
3.



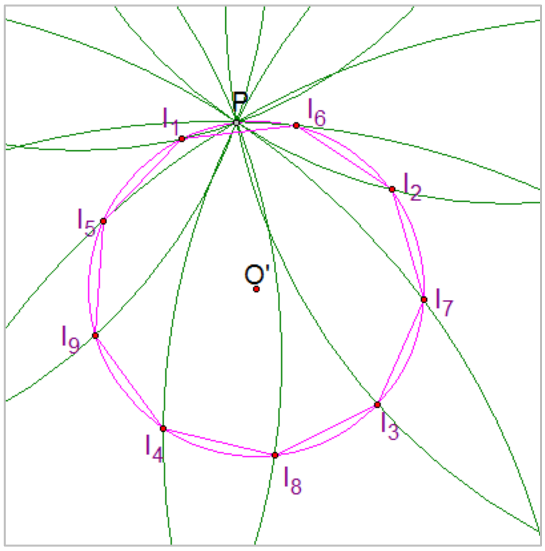
4.



5.

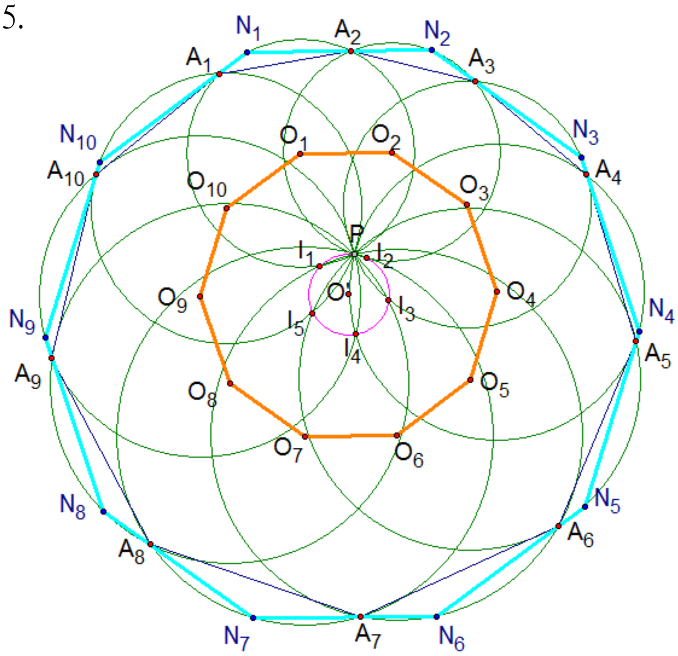


6.

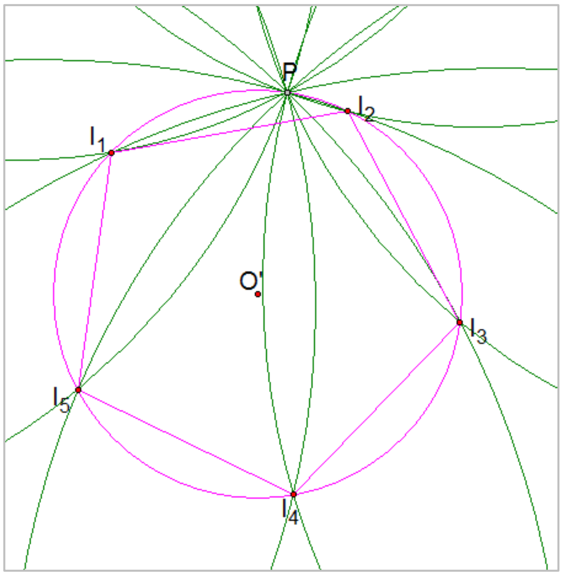


(2) n=2k（因為只有第5、6步驟不同，故省略前面步驟之圖）：

5.



6.



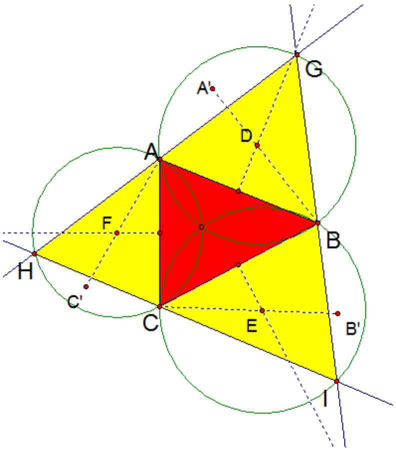
陸、 研究結果與討論

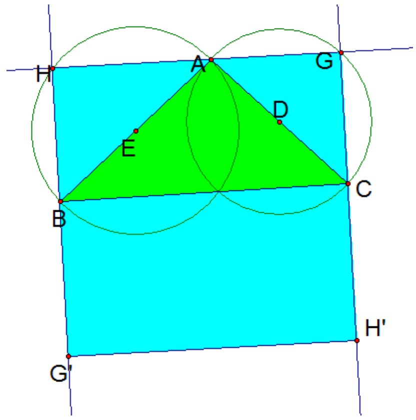
研究一：通過已知三點之正多邊形存在性

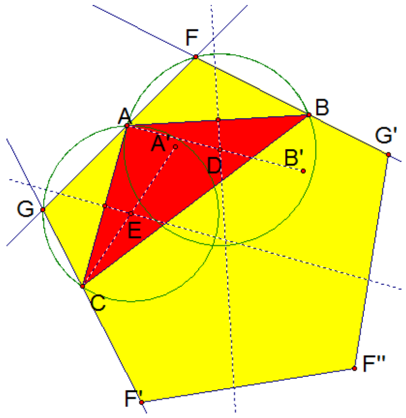
(一) 通過已知三點之正三角形有無限多解。

(二) 通過已知三點之正方形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形。

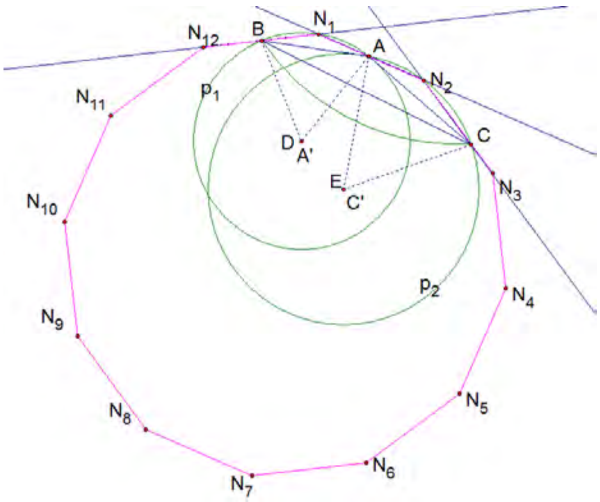
(三) 通過已知三點之正五邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形。





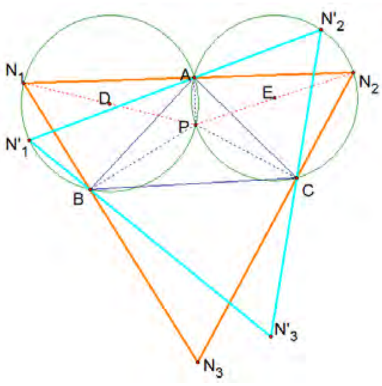


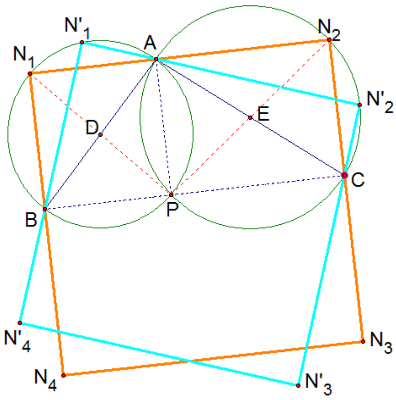
(四) 通過已知三點之正n邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形。

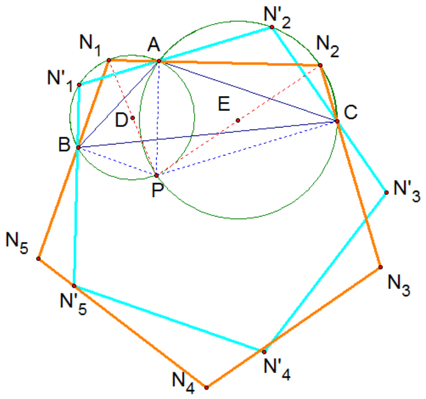


研究二：過已知三點之正多邊形最大值

通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解，則存在通過其之最大正n邊形。

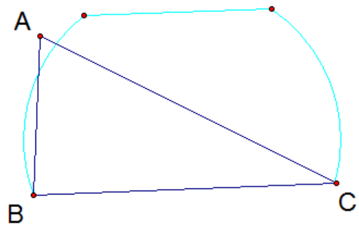




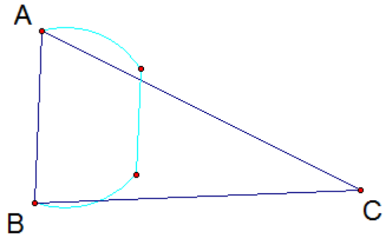


研究三：過已知三點之正多邊形有解、無解的判別

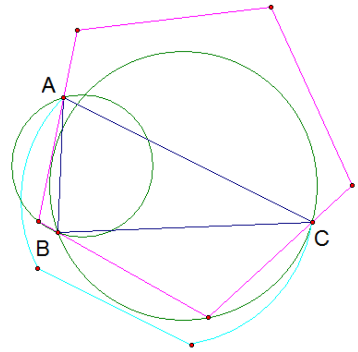
利用移動點所形成的限制區域，可作為通過已知三點之正 n 邊形為「恰有一解、無解、無限多組解」的判別。其中，通過已知三點之正三角形必有無限多組解。



（A當移動點，無解）



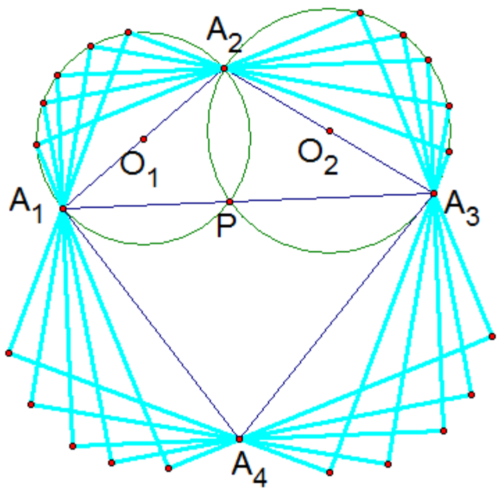
（C當移動點，無解）

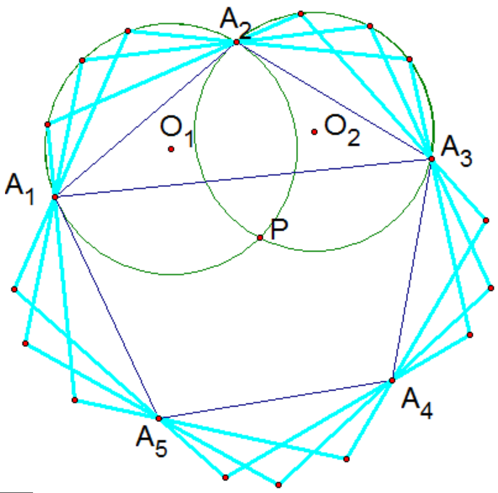


（B當移動點，無限）

研究四：過已知n點之正n邊形性質探討

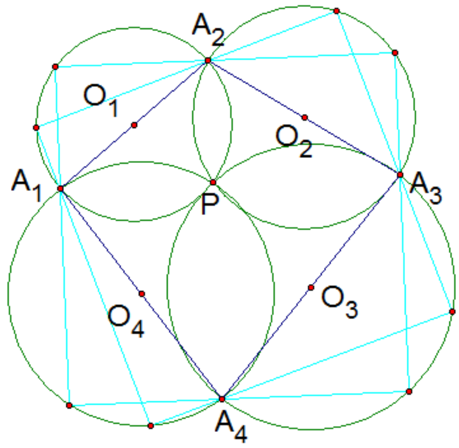
通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解，這些正n邊形除了會通過點A_1、A_2、A_3外，也都會交於點A_4、A_5、…、A_n這n−3個點。

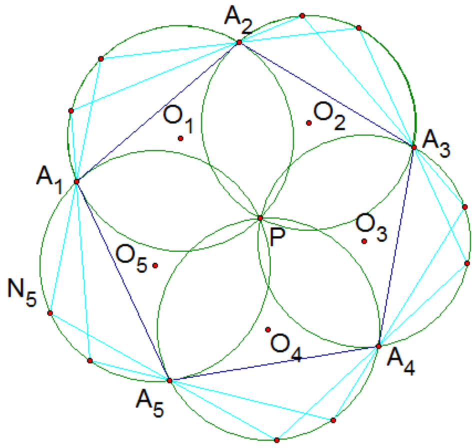




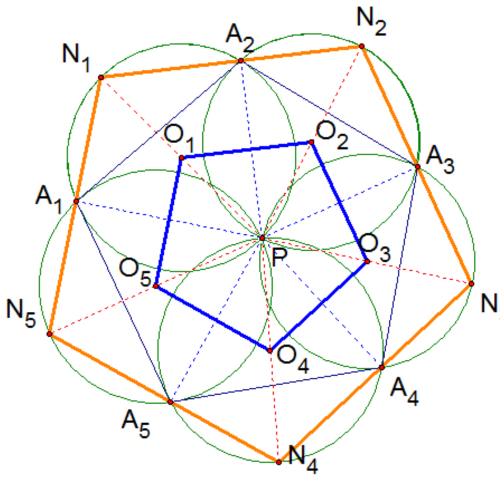
研究五：費馬點、內、外拿破崙三角形之推廣及性質

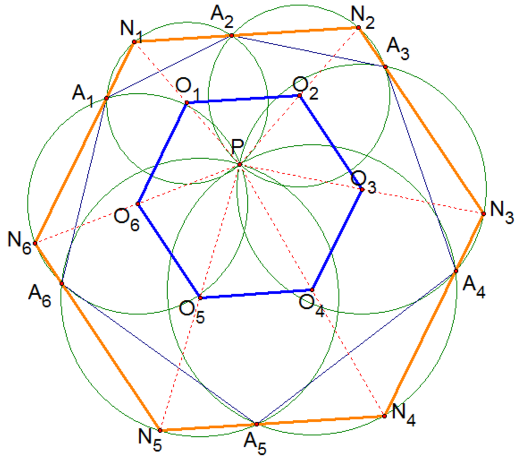
(一) 通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解，則廣義費馬點即為下圖之P點。



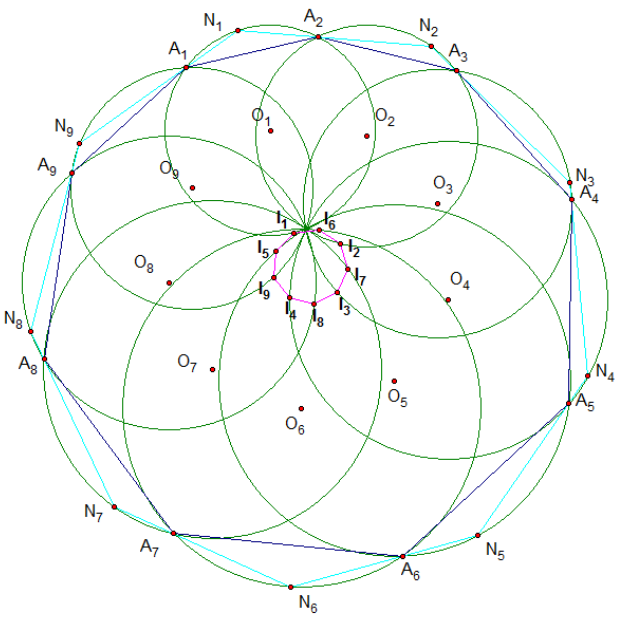


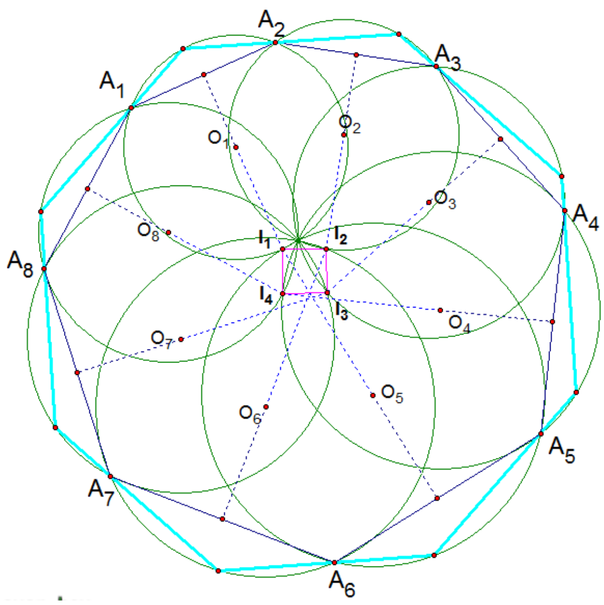
(二) 如圖，通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解，則存在外拿破崙多邊形$O_1O_2\ldots O_n$。





(三) 如圖，通過已知三點之正n邊形若是有無限多組解，則存在內拿破崙多邊形$I_1I_2\ldots I_n$(當n為奇數）或內拿破崙多邊形$I_1I_2\ldots I_{\frac{n}{2}}$（當n為偶數）。





研究六：利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過n點之正n邊形的方法

綜合**研究三、四、五**，可得簡化作n邊形$A_1A_2\ldots A_n$及過其之正n邊形、n邊形$A_1A_2\ldots A_n$之費馬點、內（外）拿破崙多邊形的作法。

柒、未來展望

一、探討有解、無解與過已知n點之正n邊形的外心在其軌跡上限制的關係。

二、改變條件，希望能夠找出更多作過已知點之正多邊形的方法，例如：三點不必都在通過其之正多邊形的相鄰邊上，或是兩點在同一邊上等相關研究。

捌、參考資料

一、 黃家禮（95），幾何明珠，九章出版社。

二、 H.S.M.考克瑟特、S.L.格雷策，幾何學的新探索，凡異出版社。

三、 全國科展第51屆高中數學組「你泥中有我，我泥中有你」。

【評語】030408

- 本文主要分為兩部分：(1) 過已知3點之正n邊形性質之探討；(2) n邊形之廣義費馬點，拿破崙多邊形之性質研究，並藉此簡化作〝過n點之正n邊形〞的方法，題材新穎，思路清晰，證明完整值得肯定。

- 展示板內容宜簡化，突顯重點，簡報時礙於時間限制亦應化繁為簡，這樣更佳。