中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030407

平鋪圖形填數遊戲研究：鏡射交換，「翻」陳出新

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃　毅	蕭偉智
國二 黃振宇	
國二 馬譽騰	

關鍵詞：平鋪、排列組合、互補性

平鋪圖形填數遊戲研究：鏡射交換，「翻」陳出新

摘要

相較多邊形邊上的填數遊戲，本研究討論更複雜的平鋪圖形填數遊戲。我們發現所有填數遊戲都具備「互補性」，無論是數字填入內部或者是填入邊上，所以解答數量必定「對稱」。此外，填數遊戲都可用共通策略來處理：(1)以代數分析重複處的數字；(2)應用互補性，尋找一半原型即可（不需窮舉）；(3)計算原型的排列組合；(4)完成解之尋找。我們的三個填數遊戲，正三角形有 576 個解、正方形有 6112 個解、正六邊形部分，雖沒有求出所有解，但我們用 Excel VBA 程式設計介面，可供求解之用。最後，我們將單一正方形填數推廣到「複製後進行無限平鋪」，我們發現其中內部數字規律之必然性，包含配對、奇偶性、等差、交叉交換等，最後證明兩類共 12 個無限平鋪圖形。

壹、研究動機

在數學課時，我們學習到一些與填數字相關的遊戲，其中有一個題目是「十個三角形」：這個圖形是由 4 個小三角形組成 1 個大正三角形(圖 1)，再將 4 個大正三角形重疊成為圖 1，重疊後內部一共有 10 個小三角形（圖 2）。規則是：「**將數字 1 到 10 填入小三角形內，並且使所有 4 個大三角形（著色部分）數字總和相等。**」

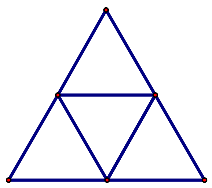
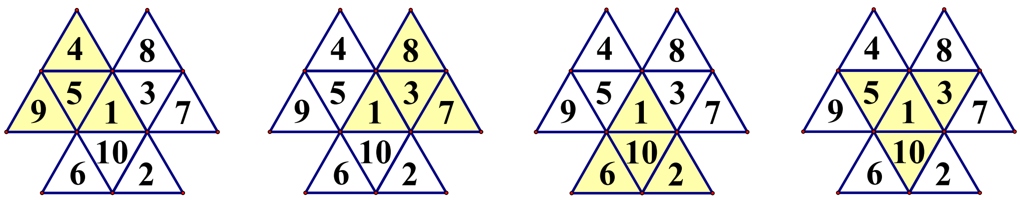


圖 1 1 個大正三角形



1+5+4+9=19　1+3+7+8=19　1+10+6+2=19　1+5+3+10=19

圖 2 環環相扣的 10 個三角形

我們曾經接觸填數字的數學遊戲，大多都是正 *n* 邊形上有 *m* 個圈圈，使這些多邊形各邊圈圈總和都相同，很顯然重複的只有頂點的一個圈圈，然而我們的 10 個三角形這個題目重疊處是「**環環相扣**」，裡頭似乎有些可交換的排列組合，但卻不是這麼容易，因此難度很高，所以激發我們挑戰的興趣！之後，我們進一步想到，可以把小三角形變化成其他的可**平鋪圖形（正則鑲嵌圖形）**，例如：正方形（圖 3）和正六邊形（圖 4）。因此，我們希望**（1）找尋 10 個三角形填數策略及所有解。（2）討論填數研究的共通性質。（3）推廣創新題目，並且應用我們發現的策略，解決新創的數學遊戲。（4）推廣無限平鋪之填數遊戲。**

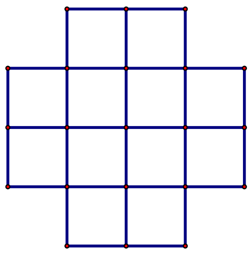


圖 3 12 個正方形（自創研究）

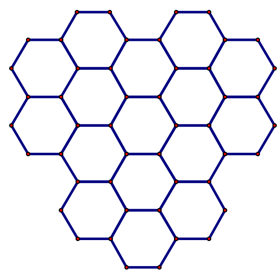
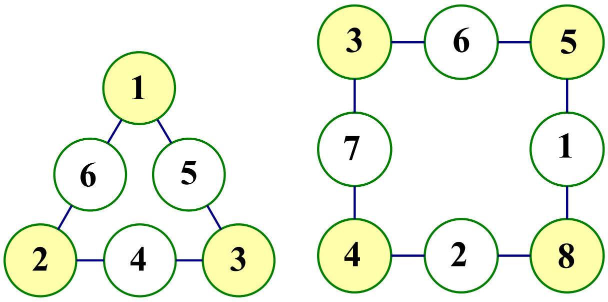


圖 4 14 個正六邊形（自創研究）

貳、文獻回顧

填數字是一個常見的數學遊戲，常見的類型是了在三角形、四邊形、五邊形、六邊形等正 *n* 邊形，該圖形的邊上放置 *m* 個圓圈，接著將 1 到 *mn* 的連續數字放入圈圈中，使得每一邊的數字總和皆相等。例如：謝涵婕與謝涵淳（2012）研究了正三角形、正方形、正五邊形及正六邊形的填數策略及解答（圖 5）；或者林昆餘（2002）研究宋朝的數學家丁東易的「九宮八卦圖」填法（圖 6）。這些研究共同特色為將數字填入多邊形邊上的圈圈，以重疊處切入分析策略找出填法幾組合數。**然而，與本研究的問題相較下，前人的研究，重複之處僅為少數圈圈，我們研究主題是由正多邊形鑲嵌而成的正則鑲嵌（Regular Tessellations）圖形，將數字填入內部，使得每一個給定大小的正多邊形之數字和相同**。



每邊和為 9　　每邊和為 14

圖 5 前人研究-多邊形邊上填數

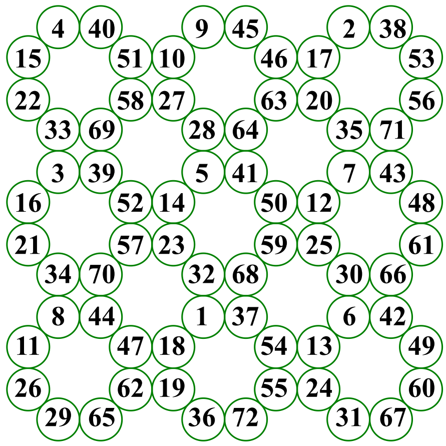


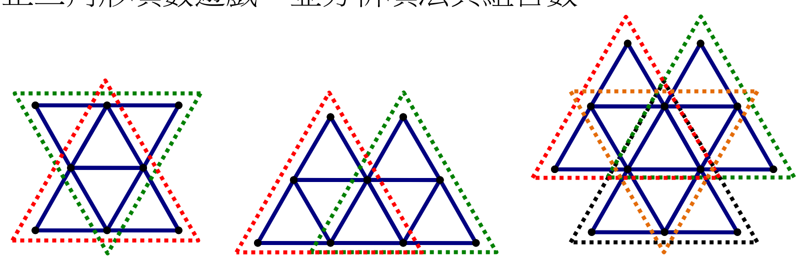
圖 6 前人研究-九宮八卦邊上填數

參、研究目的

本研究目的有下列幾項：

一、研究簡化版的 4 個小正三角形及 6、7 個小三角形的填法與組合數。

二、研究 10 個小正三角形填數遊戲，並分析填法與組合數。

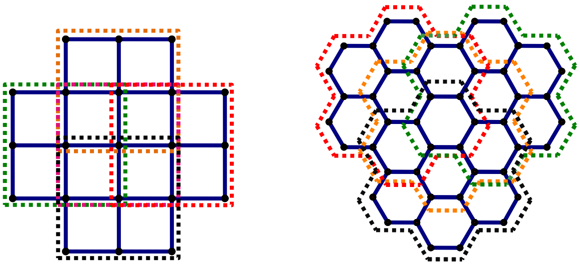


三、研究平鋪圖形填數遊戲的共同「對稱互補」性質、填數規律及策略。

四、推廣研究：自創 12 個小正方形填數遊戲，並分析填法與找出組合數。

五、推廣研究：自創 16 個小正六邊形填數遊戲，並分析填法與找出組合數。

我們考量 10 個正三角形填數圖形（上圖右三）具備環狀排列特質，所以我們創造出下面的可旋轉的正方形與正六邊形圖案，其中正方形填數由 12 個小正方形構成，正六邊形填數由 16 個小正六邊形構成。



六、推廣研究：可複製原圖形，以進行無限平鋪的填數遊戲之規律研究及其解。

肆、研究工具

一、硬體：紙、筆、電腦

二、軟體：GSP4.06 幾何繪圖軟體、Excel 2010 及 VBA 程式（Visual Basic for Applications）

伍、研究過程及結果

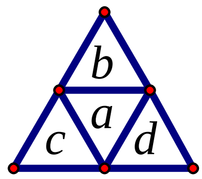
【研究一】簡化版的小正三角形填數研究

<u>1.1　4 個小正三角形（1 個大三角形）</u>

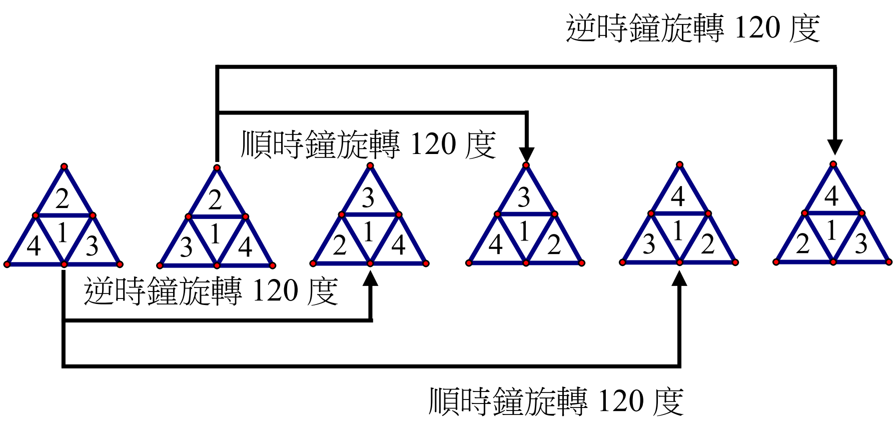
【問題分析與策略】

（1）規則：如右圖，填入數字 1 到 4。

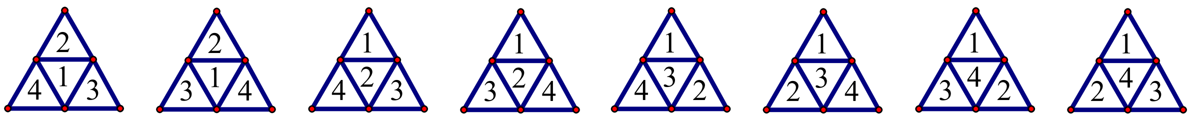
（2）分析及策略：



先考量 *a*，*a* 有 4 種可能，剩下的三個位置 *b*, *c*, *d* 有 3×2×1=6 種可能，但是我們將若旋轉後為一樣圖形視為同一種，所以若 *a* 固定不動，*b*, *c*, *d* 可旋轉 3 次，所以應該是 6÷3=2 種，下面我們舉 *a*=1 為例。因此總共 $\frac{4\times3\times2\times1}{3}=8$ 種。這個是典型「環狀排列」的問題，我們在【研究二】會使用此環狀排列策略。



【實作解題】

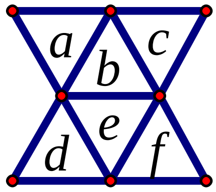


1.2　6 個小正三角形（2 個大三角形）

【問題分析與策略】

（1）規則：如右圖，填入數字 1 到 6，使兩個大三角形數字和相等。

討論重複處→尋找原型圖形→計算排列組合數→完成解之尋找



（2）重複處代數分析：

$a+b+c+e=b+d+e+f \Rightarrow a+c=d+f$

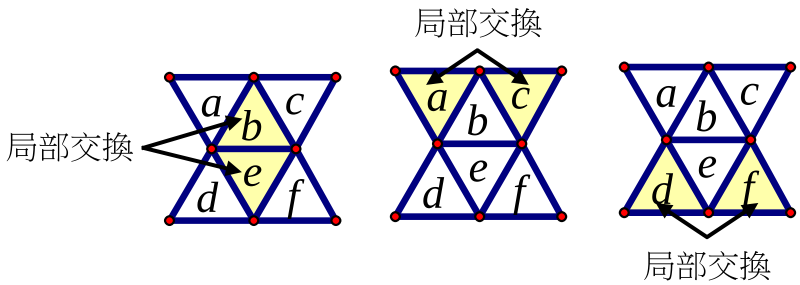
$a+2b+c+d+2e+f=(1+2+\ldots+6)+b+e=21+b+e$

每個大三角形總和等於 $\dfrac{21+b+e}{2}$

（3）填數策略：

我們從重複處(b, e)考量，$b+e$ 為奇數，(b, e) 必為一奇一偶，組合總共有 3×3=9 種。理論上，a 和 c 可以互換，d 和 f 可以互換，b 和 e 可以互換（下圖著色處表示可交換），因此共有 2×2×2=8 種，乘上之前的中心 (b, e) 的 9 個組合，理論有 9×8=72（個）。

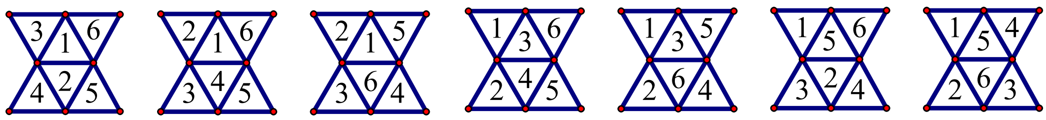
我們接著實際填入發現 $(b, e)=(4, 5)$、$(5, 4)$ 的時後無解。所以這告訴我們理論值依舊需要實際檢驗，我們後續也依照此方式進行討論。



【實作解題】

◎有 7 種原型，總和為 12, 13, 14, 15,16。

◎每個原型經由排列組合可變化出 8 種。



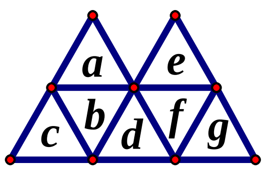
◎所有解為 7×8=56 個。

1.3　7 個小正三角形（2 個大三角形）

【問題分析與策略】

（1）規則：如右圖，填入數字 1 到 7，使兩個大三角形數字和相等。

討論重複處→尋找原型圖形→計算排列組合數→完成解之尋找



（2）重複處代數分析：

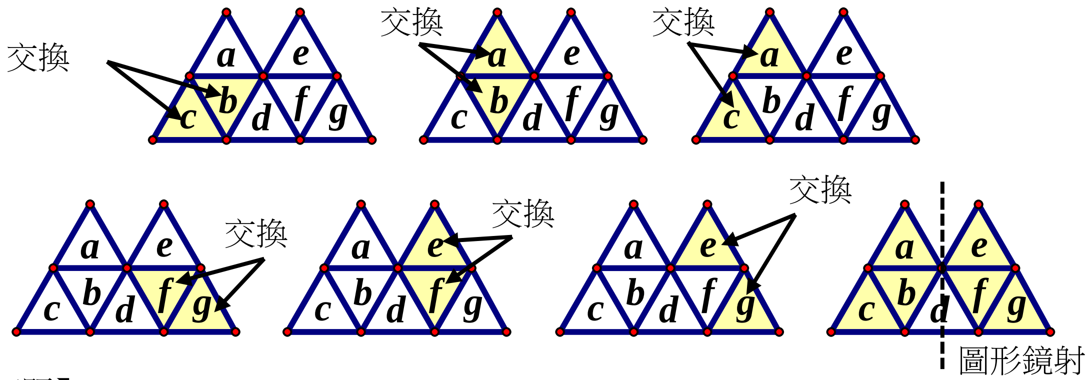
$a+b+c+d=e+f+d+g \Rightarrow a+b+c=e+f+g$

$a+b+c+2d+e+f+g=(1+2+\ldots+7)+d=28+d$

每個大三角形總和等於 $\dfrac{28+d}{2}$

（3）填數策略：

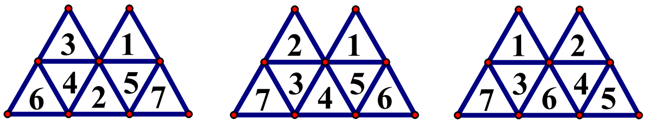
從重複處 d 考量，因為 $\dfrac{28+d}{2}\in N$ ，所以 d 必為偶數，可填入數字 2,4,6（3 種）。另外，(a,b,c) 有 3×2×1=6 種組合，(e,f,g) 有 3×2×1=6 種組合，因為圖形為線對稱圖形，所以 (a,b,c) 和 (e,f,g)可以作鏡射（下圖著色處表示可交換），所以組合數為(6×6)×2=72 種，實作得所有解為 3×(6×6)×2=216 個。



【實作解題】

◎有 3 種原型，總和為 15, 16, 17。

◎每個原型經由排列組合可變化出 72 種。

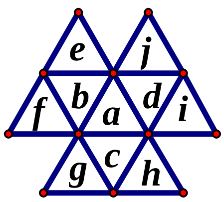


◎所有解為 3×72=216 個。

【研究二】10 個小正三角形填數研究

【問題分析與策略】

（1）規則：如右圖，填入數字 1 到 10，使四個大三角形數字和相等。



討論重複處→尋找原型圖形→計算排列組合→完成解之尋找

（2）重複處代數分析：

$(a+b+e+f)+(a+d+i+j)+(a+c+g+h)$

$=2a+(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)$

$=2a+55$

又$(a+b+e+f)=(a+d+i+j)=(a+c+g+h)$

所以 $3|2a+55$

每個大三角形總和為整數，所以 a=1, 4, 7, 10

（3）填數策略：

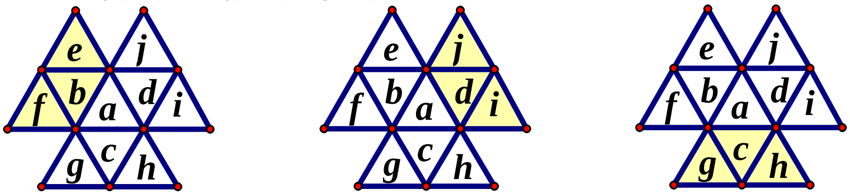
從重複處 a 考量，a=1,4,7,10，逐一討論。

三個大三角形總和為(2a+55)，a=1,4,7,10 代入，各個大正三角形的總和分別為：(2×1+55)÷3=19，(2×4+55)÷3=21，(2×7+55)÷3=23，(2×10+55)÷3=25。換句話說，扣除 a 後的三個梯形（著色部分）總和相等，$(b+e+f)=(d+i+j)=(c+g+h)$，因此

當 a=1 時，$(b+e+f)=(d+i+j)=(c+g+h)=18$

當 a=4 時，$(b+e+f)=(d+i+j)=(c+g+h)=17$

當 a=7 時，$(b+e+f)=(d+i+j)=(c+g+h)=16$
當 a=10 時，$(b+e+f)=(d+i+j)=(c+g+h)=15$



（4）原型變化討論：以**【環狀排列】**分析：

第一步：填入 a，a 為 1, 4, 7, 10

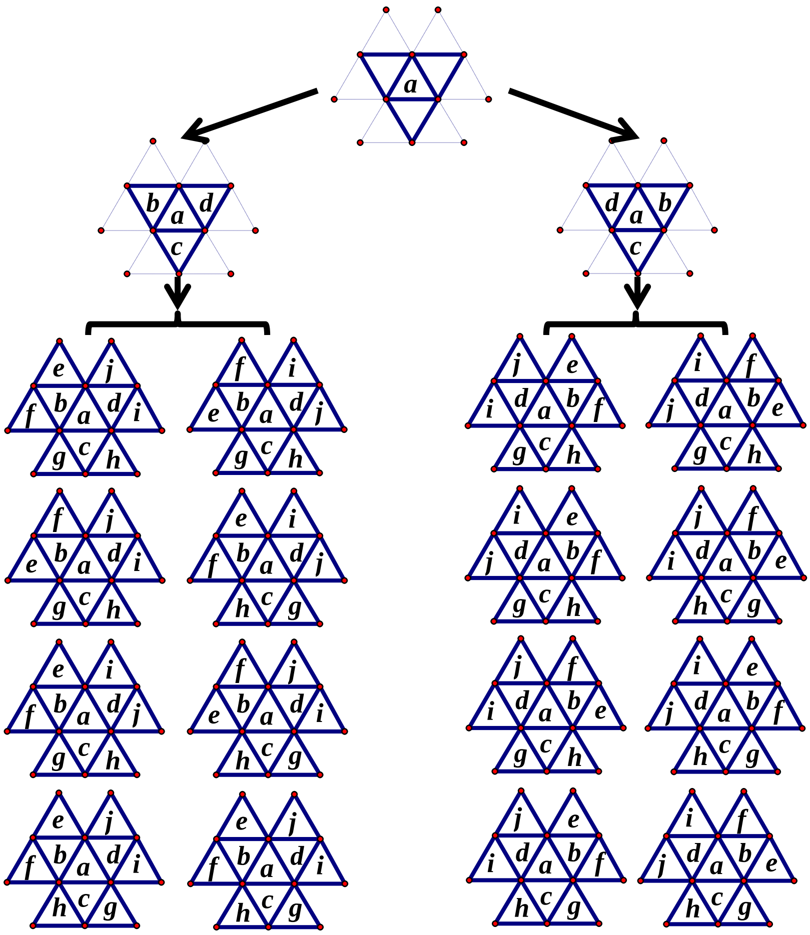
第二步：依據總和，討論(b, c, d)

a)將 b, c, d 填入中間實線三角形

b)以 a 為中心的環狀排列，有 $\dfrac{3\times2\times1}{3}=2$ 種。

第三步：(e, f)、(j, i)、(g, h)彼此交換

這三種交換策略彼此獨立，因此各自有 2×2×2=8 種，搭配第二步共 2×8=16 種。



【實作解題】

我們先從重複處 a 切入，再討論(b, e, f)環狀排列組合，最後才處理 (e, f)、(j, i)、(g, h) 的局部交換。

◎有 36 種原型，總和分別為 19, 21, 23, 25。

◎每個原型經由排列組合可變化出 16 種。

◎所有解為 36×16=576 個。

Case1 當 a=1 時，$b+e+f$=18

(b, e, f)

=(2, 6, 10)、(2, 7, 9)、(3, 5, 10)、(3, 6, 9)、(3, 7, 8)、(4, 5, 9)、(4, 6, 8)、(5, 6, 7)

Case2 當 a=4 時，$b+e+f$=17

(b, e, f)

= (1, 6, 10)、(1, 7, 9)、(2, 5, 10)、(2, 6, 9)、(2, 7, 8)、(3, 5, 9)、(3, 6, 8)

Case3 當 a=7 時，$b+e+f$=16

(b, e, f)

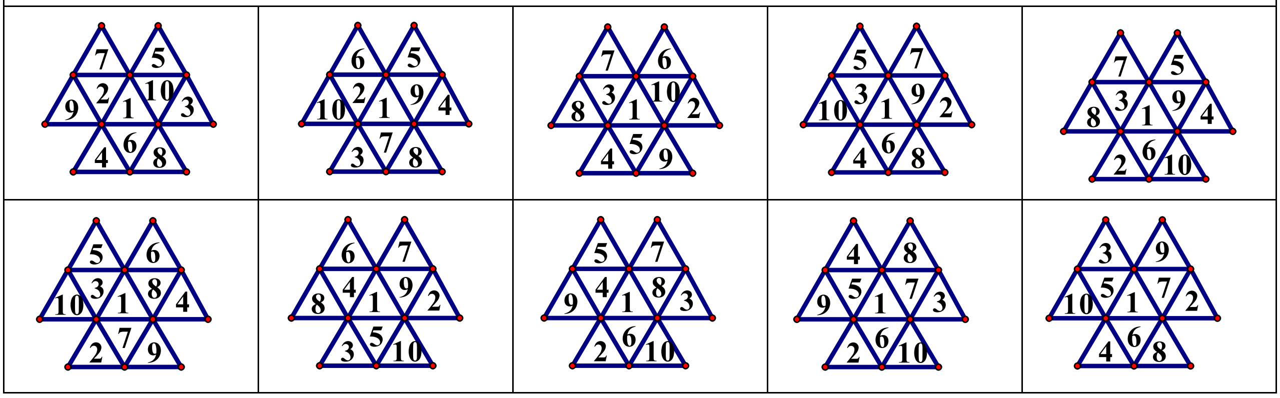
= (1, 5, 10)、(1, 6, 9)、(2, 4, 10)、(2, 5, 9)、(2, 6, 8)、(3, 4, 9)、(3, 5, 8)

Case4 當 a=10 時，$b+e+f$=15

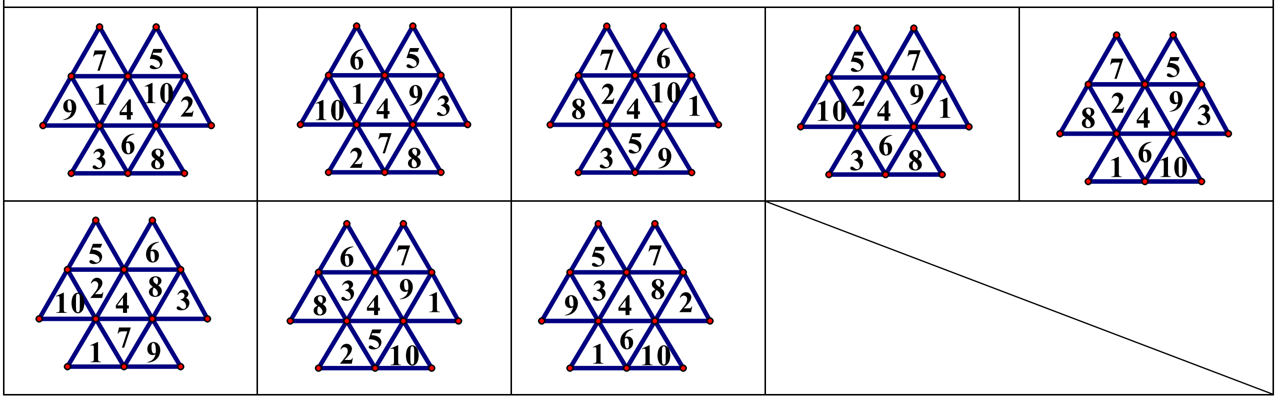
(b, e, f)

= (1, 5, 9)、(1, 6, 8)、(2, 4, 9)、(2, 5, 8)、(2, 6, 7)、(3, 4, 8)、(3, 5, 7)、(4, 5, 6)

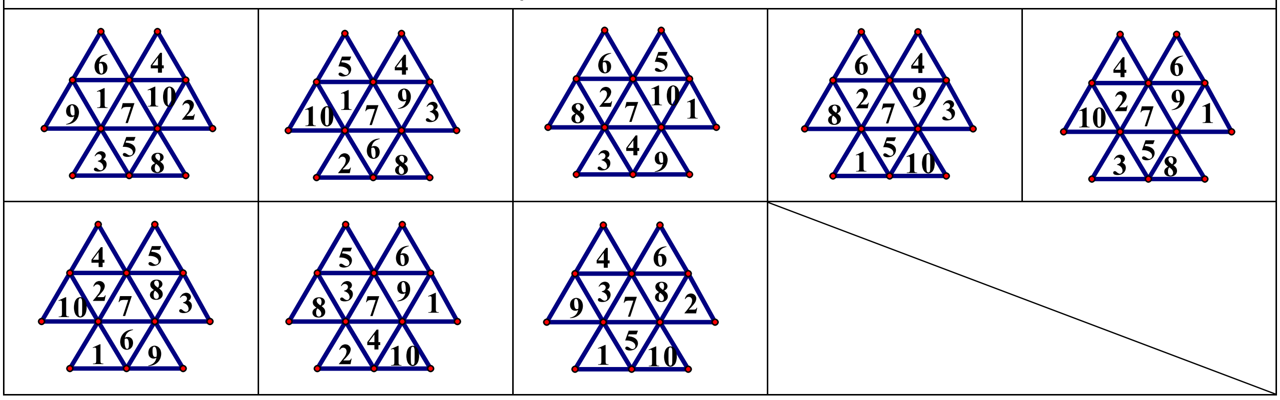
a=1 且 $b+e+f$=18（160 個解）的 10 種原型

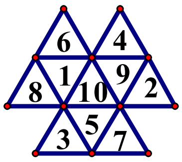
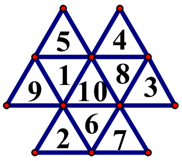
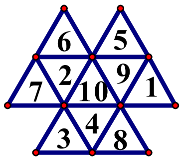
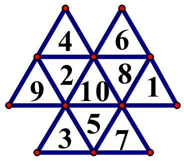
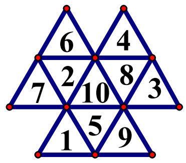
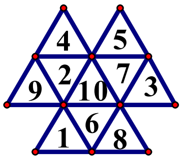
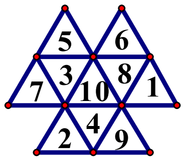
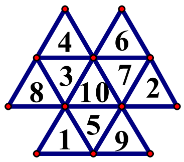
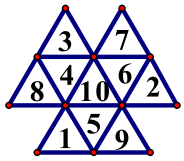
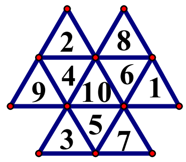


a=4 且 $b+e+f$=17（128 個解）的 8 種原型



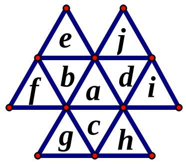
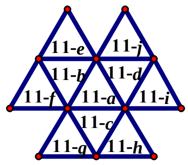
a=7 且 $b+e+f$=16（128 個解）的 8 種原型



a=10 且 $b+e+f$=15（160 個解）的 10 種原型				
				
				

【研究三】填數遊戲共同性質「對稱互補性」之研究

命題一

若		**填數成立，若且唯若**		**填數成立。**

Proof：

令 $a+b+c+d=Q$，$a+b+e+f=R$，$a+d+i+j=S$，$a+c+g+h=T$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ 為1到10的相異正整數

$\Leftrightarrow 11-a,\ 11-b,\ 11-c,\ 11-d,\ 11-e,\ 11-f,\ 11-g,\ 11-h,\ 11-i,\ 11-j$ 為1到10的相異正整數

$(\Rightarrow)$

$(11-a)+(11-b)+(11-c)+(11-d)$

$=11\times 4-Q=44-Q$

$(11-a)+(11-b)+(11-e)+(11-f)$

$=11\times 4-\mathrm{R}=44-\mathrm{R}$

$(11-a)+(11-d)+(11-i)+(11-j)$

$=11\times 4-S=44-S$

$(11-a)+(11-c)+(11-g)+(11-h)$

$=11\times 4-T=44-T$

又 $Q=R=S=T$

得 $44-Q=44-R=44-S=44-\mathrm{T}$

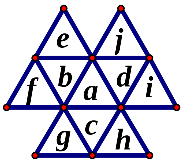
$(\Leftarrow)$

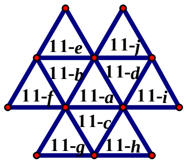
$\because\ 44-Q=44-R=44-S=44-\mathrm{T}$

$\therefore\ Q=R=S=T$

證畢。

命題二

若 

填數無解，若且唯若 

填數無解。

Proof：

依據命題一「若總和為 Sum_{tri}（Sum_{tri} 代表三角形數字和）的解成立，若且唯若存在一個總和為$(44-Sum_{tri})$的解成立（如上圖）」，可推得等價命題「若總和為 Sum_{tri} 的解不成立，若且唯若總和為$(44-Sum_{tri})$的解不成立」。（ $p\Leftrightarrow q\equiv\neg q\Leftrightarrow\neg p$ ）

證畢。

推廣：前人研究的正多邊形邊上填數遊戲是否具備解的對稱性及數字互補性？

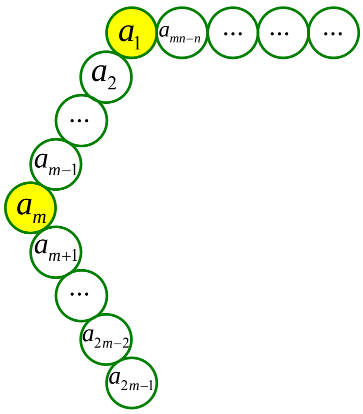
命題三

已知正 n 邊形，每邊皆有 m 個圓圈，將 1, 2, 3, …, (mn-n)個數字填入圈內。

若 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=m}^{2m-1}a_k=\sum_{k=2m-1}^{3m-2}a_k=\ldots=\Big(\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}a_k\Big)+a_1$ **，若且唯若** $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(mn-n+1-a_k)=$

$$\sum_{k=m}^{2m-1}(mn-n+1-a_k)=\ldots=\left\lfloor\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}(mn-n+1-a_k)\right\rfloor+(mn-n+1-a_1)$$

Proof：



$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,a_{mn-n}$為1到$(mn-n)$的相異正整數

$\Leftrightarrow(mn-n+1-a_1),\ (mn-n+1-a_2),\ \ldots,(mn-n+1-a_{mn-n})$

為1到$(mn-n)$的相異正整數

$(\Rightarrow)$

$$\sum_{k=1}^{m}(mn-n+1-a_k)=m^2n-mn+m-\sum_{k=1}^{m}a_k$$

$$\sum_{k=m}^{2m-1}(mn-n+1-a_k)=m^2n-mn+m-\sum_{k=m}^{2m-1}a_k$$

…

$$\left\lfloor\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}(mn-n+1-a_k)\right\rfloor+(mn-n+1-a_1)=m^2n-mn+m-\left\lfloor\Big(\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}a_k\Big)+a_1\right\rfloor$$

又 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=m}^{2m-1}a_k=\sum_{k=2m-1}^{3m-2}a_k=\ldots=\Big(\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}a_k\Big)+a_1$

得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(mn-n+1-a_k)=\sum_{k=m}^{2m-1}(mn-n+1-a_k)=\ldots=\left\lfloor\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}(mn-n+1-a_k)\right\rfloor+(mn-n+1-a_1)$

(⇐)

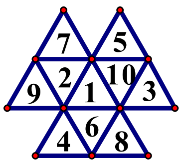
$$\because \sum_{k=1}^{m}(mn-n+1-a_k)=\sum_{k=m}^{2m-1}(mn-n+1-a_k)=\ldots=\left[\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}(mn-n+1-a_k)\right]+(mn-n+1-a_1)$$

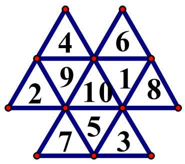
$$\Rightarrow m^2n-mn+m-\sum_{k=1}^{m}a_k=m^2n-mn+m-\sum_{k=m}^{2m-1}a_k=\ldots=m^2n-mn+m-[(\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}a_k)+a_1]$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=m}^{2m-1}a_k=\sum_{k=2m-1}^{3m-2}a_k=\ldots=(\sum_{k=mn-m-n+2}^{mn-n}a_k)+a_1$$

證畢。

依據命題一，我們發現填數遊戲的**共同規律性**：「**若找到一個總和為 Sum_{tri}（Sum_{tri}=19, 21, 23, 25）的解，若且為若存在一個總和為(44－Sum_{tri})的解，其中內部每個對應位置的數字和必為 11，數字之間具有『互補關係』**」。（Sum_{tri} 表示正三角形數字和）舉例如下：

若找到一組解 

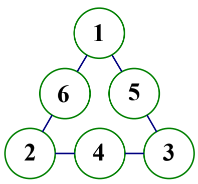
（總和 19），必存在另一組解 

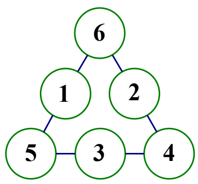
（總和 25）。

此外，命題二則說明無解時亦成立。綜合命題一與命題二，解的數量則必為 2 的倍數，例如：Sum_{tri} 為 19 的解個數必定與 Sum_{tri} 為 25 的解個數相等，因此填數遊戲的解則具備「**對稱性**」。若以函數角度來說，填數的解，具備一對一（one to one）且映成（onto）關係。

同理，這個互補與對稱的性質**可推廣到「所有的」填數遊戲**，在正方形填數遊戲中，若找到一個總和為 Sum_{sq} 的解，若且為若存在一個總和為(52－Sum_{sq})的解；正六邊形的填數遊戲中，若找到一個總和為 Sum_{hex} 的解，若且為若存在一個總和為(119－Sum_{hex})的解。（Sum_{sq} 表示正方形數字和、Sum_{hex} 表示正六邊形數字和）

此外依據命題三，我們也可以將此性質推廣到前人的研究「正多邊形邊上填數遊戲」（舉例如下）或「九宮八卦填數」。

若找到一組解 

（總和 9），必存在另一組解 

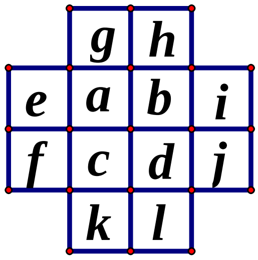
（總和 12）。

因此，「互補性」在填數研究具有高度價值，我們利用這個性質在後續研究（正方形與正六邊形），僅需計算一半的填數原型與解答即可。

【研究四】推廣自創 12 個小正方形填數研究

【問題分析與策略】

（1） 規則：如右圖，填入數字 1 到 12，使五個大正方形數字和相等。



討論重複處→應用「互補」性質尋找一半原型圖形→計算排列組合→完成解之尋找

（2）重複處代數分析：

先討論 4 個大正方形，總和為

$(e+f+c+a)+(g+h+b+a)+(b+i+j+d)+(c+d+l+k)$

$=(a+b+c+\ldots+k+l)+a+b+c+d$

$=78+a+b+c+d$

又

4 個大正方形的和必為 $4(a+b+c+d)$

得

$78+a+b+c+d=4(a+b+c+d)$

$\Rightarrow a+b+c+d=26$

其中，$a+b=k+l$, $c+d=g+h$, $a+c=i+j$, $b+d=e+f$

（3）填數策略：

我們先列出中心 a,b,c,d 四個數字，再扣除互補組合（灰色底），僅研究一半 24 組即可。

原組合	互補組合（不需求解）	原組合	互補組合（不需求解）
(1, 2, 11, 12)	(與原本相同)	(2, 5, 8, 11)	(與原本相同)
(1, 3, 10, 12)	(與原本相同)	(2, 5, 9, 10)	(11, 8, 4, 3)
(1, 4, 9, 12)	(與原本相同)	(2, 6, 7, 11)	(與原本相同)
(1, 4, 10, 11)	(12, 9, 3, 2)	(2, 6, 8, 10)	(11, 7, 5, 3)
(1, 5, 8, 12)	(與原本相同)	(2, 7, 8, 9)	(11, 6, 5, 4)
(1, 5, 9, 11)	(12, 8, 4, 2)	(3, 4, 9, 10)	(與原本相同)
(1, 6, 7, 12)	(與原本相同)	(3, 5, 8, 10)	(與原本相同)
(1, 6, 8, 11)	(12, 7, 5, 2)	(3, 6, 7, 10)	(與原本相同)
(1, 6, 9, 10)	(12, 7, 4, 3)	(3, 6, 8, 9)	(10, 7, 5, 4)
(1, 7, 8, 10)	(12, 6, 5, 3)	(4, 5, 8, 9)	(與原本相同)
(2, 3, 10, 11)	(與原本相同)	(4, 6, 7, 9)	(與原本相同)
(2, 4, 9, 11)	(與原本相同)	(5, 6, 7, 8)	(與原本相同)

（4）原型變化討論

如下圖，在相同四個數字下，中心環狀排列組合，有 $\frac{4!}{4}=6$ 個不同組合，又考量中心兩兩數字和若相同，則對應外圍數字則相同，其解之數量則相同，如：圖 A 與圖 B 外圍數字相同、圖 C 與圖 D 相同外圍數字相同、圖 E 與圖 F 相同外圍數字相同，因此我們僅需分類討論 $6\times\frac{1}{2}=3$ 種原型，最後再將數量乘以 2 即可。

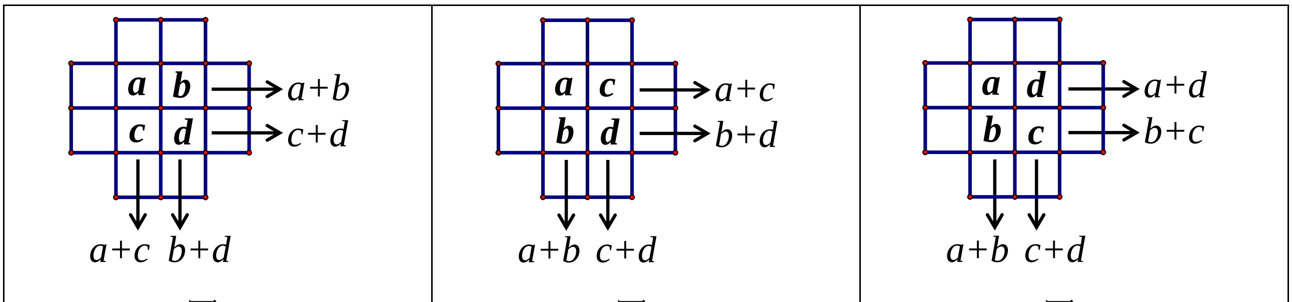
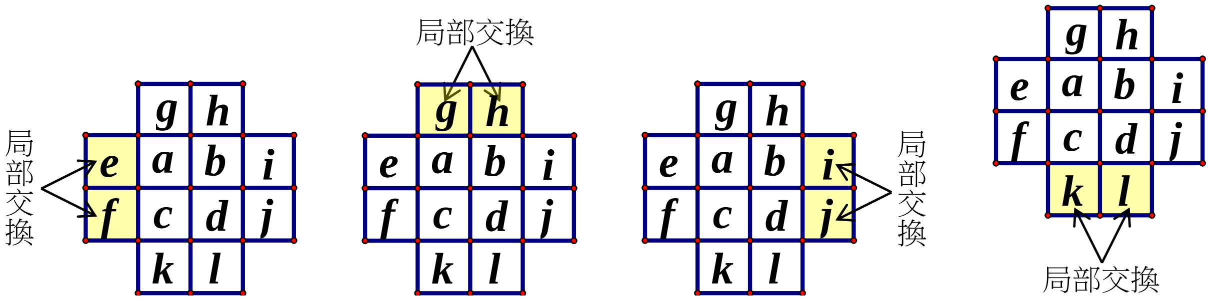


圖 A 圖 B 圖 C 圖 D 圖 E 圖 F

接著討論外圍組合，當中心固定時，*e*, *f* 可彼此交換、*g*, *h* 可彼此交換、*i*, *j* 可彼此交換、*k*, *l* 可彼此交換，可變化出 2×2×2×2=16 種。



A.無互補數字的排列組合：2×16=32 種。
B.有互補數字的排列組合：由於每個原型還有互補型，所以可變化出 32×2=64 種。

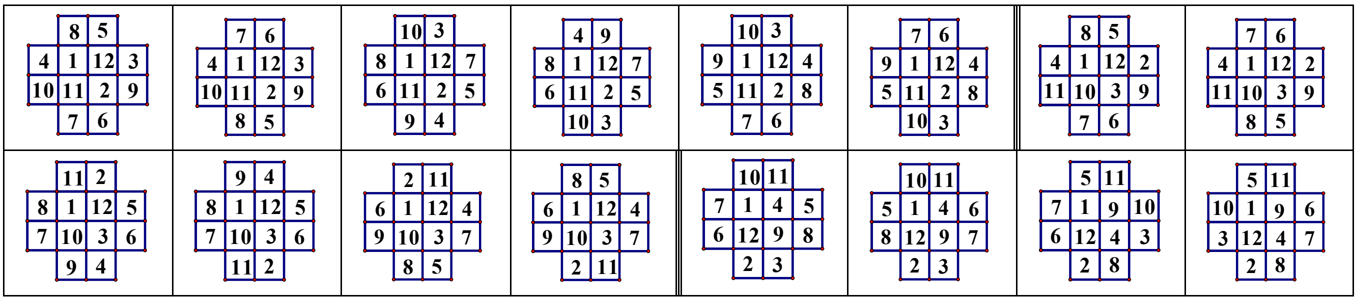
【實作解題】

◎無互補 119 種原型、無互補 36 種原型，總和為皆為 26。

◎無互補的每個原型可變化出 32 種；有互補的每個原型可變化出 64 種。

◎所有解為 119×32+36×64=6112 個。

第一類：原組合與互補組合相同（無互補）的原型有 119 個，解為 119×32＝3808 個。



10 6 8 1 9 2 5 12 4 11 7 3	10 6 2 1 9 8 11 12 4 5 7 3	11 9 10 1 5 6 7 8 12 3 4 2	11 9 3 5 1 7 10 8 12 6 2 4	11 9 6 5 1 3 7 8 12 10 2 4	3 6 4 5 12 11 9 8 1 2 10 7	3 6 11 5 12 4 2 8 1 9 10 7	2 7 4 5 12 3 9 8 1 10 6 11
2 7 3 5 12 9 10 8 1 4 6 11	11 8 3 6 1 4 10 7 12 9 2 5	11 8 9 6 1 3 4 7 12 10 2 5	10 9 8 6 1 2 5 7 12 11 4 3	10 9 11 6 1 8 2 7 12 5 4 3	10 8 9 1 7 2 4 12 6 11 3 5	10 8 11 1 7 9 2 12 6 4 3 5	9 12 6 2 3 5 8 10 11 7 1 4
9 12 6 2 3 5 7 11 10 8 1 4	9 12 5 2 3 6 8 11 10 7 1 4	6 7 5 2 11 4 9 10 3 8 1 12	1 12 5 2 11 4 9 10 3 8 6 7	1 12 6 2 11 5 8 10 3 7 4 9	4 9 6 2 11 5 8 10 3 7 1 12	8 12 3 2 4 6 10 11 9 7 1 5	8 12 6 2 4 3 7 11 9 10 1 5
5 8 3 2 11 1 12 9 4 10 6 7	6 7 3 2 11 1 12 9 4 10 5 8	1 12 5 2 11 3 10 9 4 8 6 7	6 7 5 2 11 3 10 9 4 8 1 12	1 12 7 2 11 5 8 9 4 6 3 10	1 12 5 2 11 7 6 9 4 8 3 10	9 10 4 2 5 3 12 8 11 7 1 6	7 12 6 2 5 1 10 8 11 9 3 4
9 10 1 2 5 6 12 11 8 7 3 4	9 10 6 2 5 1 7 11 8 12 3 4	7 12 4 2 5 3 9 11 8 10 1 6	7 12 3 2 5 4 10 11 8 9 1 6	3 10 7 2 11 4 9 8 5 6 1 12	1 12 7 2 11 4 9 8 5 6 3 10	1 12 7 2 11 4 9 8 5 6 3 10	4 9 6 2 11 3 10 8 5 7 1 12
6 7 4 2 11 1 12 8 5 9 3 10	3 10 4 2 11 1 12 8 5 9 6 7	8 10 1 2 6 4 12 11 7 9 3 5	8 10 4 2 6 1 9 11 7 12 3 5	3 10 8 2 11 4 9 7 6 5 1 12	1 12 8 2 11 4 9 7 6 5 3 10	4 9 5 2 11 1 12 7 6 8 3 10	3 10 5 2 11 1 12 7 6 8 4 9
7 12 6 3 4 1 8 9 10 11 2 5	8 11 2 3 4 5 12 9 10 7 1 6	7 12 2 3 4 5 11 10 9 8 1 6	7 12 5 3 4 2 8 10 9 11 1 6	8 11 1 3 4 6 12 10 9 7 2 5	8 11 6 3 4 1 7 10 9 12 2 5	6 8 1 3 9 6 12 10 4 7 5 7	6 8 6 3 9 1 7 10 4 12 2 5
2 12 6 3 9 5 7 10 4 8 1 11	2 12 5 3 9 6 8 10 4 7 1 11	6 12 4 3 5 2 11 8 10 9 1 7	7 11 4 3 5 1 9 10 8 12 2 6	7 11 1 3 5 4 12 10 8 9 2 6	6 12 2 3 5 4 11 10 8 9 1 7	6 12 4 3 5 2 9 10 8 11 1 7	4 11 1 3 8 6 12 10 5 7 2 9
4 11 6 3 8 1 7 10 5 12 2 9	6 9 2 3 8 1 11 10 5 12 4 7	6 9 1 3 8 2 12 10 5 11 4 7	5 12 2 3 6 4 11 10 7 9 1 8	5 12 4 3 6 2 9 10 7 11 1 8	8 9 2 3 6 1 11 10 7 12 4 5	8 9 1 3 6 2 12 10 7 11 4 5	5 11 1 3 7 4 12 10 6 9 2 8
5 11 4 3 7 1 9 10 6 12 2 8	4 12 5 3 7 2 8 10 6 11 1 9	4 12 2 3 7 5 11 10 6 8 1 9	7 10 2 4 5 1 12 8 9 11 3 6	7 10 1 4 5 2 12 9 8 11 3 6	7 10 2 4 5 1 11 9 8 12 3 6	6 11 3 4 5 1 10 9 8 12 2 7	6 11 1 4 5 3 12 9 8 10 2 7
3 11 1 4 8 6 12 9 5 7 2 10	3 11 6 4 8 1 7 9 5 12 2 10	2 12 3 4 8 6 10 9 5 7 1 11	2 12 6 4 8 3 7 9 5 10 1 11	5 11 3 4 6 1 12 7 9 10 2 8	5 11 3 4 6 1 10 9 7 12 2 8	5 11 1 4 6 3 12 9 7 10 2 8	5 10 1 4 7 2 12 9 6 11 3 8
5 10 2 4 7 1 11 9 6 12 3 8	3 12 2 4 7 5 11 9 6 8 1 10	3 12 5 4 7 2 8 9 6 11 1 10	4 11 2 5 6 3 12 7 8 9 1 10	3 12 4 5 6 1 10 7 8 11 2 9	4 11 1 5 6 3 12 8 7 10 2 9	4 11 3 5 6 1 10 8 7 12 2 9	3 12 2 5 6 4 11 8 7 9 1 10
3 12 4 5 6 2 9 8 7 11 1 10	2 12 3 5 7 4 10 8 6 9 1 11	2 12 4 5 7 3 9 8 6 10 1 11	3 11 1 5 7 4 12 8 6 9 2 10	3 11 4 5 7 1 9 8 6 12 2 10	4 10 1 5 7 2 12 8 6 11 3 9	4 10 2 5 7 1 11 8 6 12 3 9	

第二類：原組合與互補組合不相同的原型有 36 個，解為(36×2)×32＝2304 個。

12 9 8 1 4 5 7 10 11 6 2 3	8 6 3 1 11 2 12 10 4 9 7 5	12 2 6 1 11 3 9 10 4 8 7 5	12 2 8 1 11 6 7 10 4 5 3 9	12 9 5 4 1 6 7 10 11 8 3 2	3 7 4 5 11 2 8 9 1 12 10 6	3 7 10 5 11 8 2 9 1 6 12 4	12 7 10 6 1 9 2 8 11 5 3 4
10 9 5 6 1 2 7 8 11 12 3 4	12 7 9 6 1 4 3 8 11 10 2 5	3 9 12 8 6 7 5 1 11 2 10 4	3 9 10 8 6 5 7 1 11 4 12 2	8 11 4 1 6 3 12 9 10 7 2 5	7 12 5 1 6 2 11 9 10 8 3 4	8 11 3 1 6 4 12 10 9 7 2 5	7 12 4 1 6 3 11 10 9 8 2 5
5 11 3 1 9 4 12 10 6 7 2 8	6 12 4 1 7 2 11 10 8 9 3 5	3 12 6 1 10 4 11 8 7 5 2 9	4 11 5 1 10 3 12 8 7 6 2 9	8 11 3 2 5 4 12 9 10 7 1 6	7 12 4 2 5 3 11 9 10 8 1 6	7 12 3 2 5 4 11 10 9 8 1 6	7 12 6 2 5 1 8 10 9 11 3 4
6 8 3 2 10 4 12 9 5 7 1 11	7 11 4 2 6 1 12 8 10 9 3 5	5 9 4 2 10 3 12 8 6 7 1 11	3 11 4 2 10 1 12 8 6 9 5 7	5 12 4 2 7 1 11 9 8 10 3 6	6 11 3 2 7 1 12 9 8 10 4 5	5 11 3 2 8 1 12 9 7 10 4 6	5 12 4 3 6 1 11 8 9 10 2 7
7 10 2 3 6 1 12 9 8 11 4 5	5 12 4 3 6 1 10 9 8 11 2 7	5 10 2 3 8 1 12 9 6 11 4 7	4 11 2 3 8 5 12 9 6 7 1 10				

【研究五】推廣自創 16 個小正六邊形填數研究

【問題分析與策略】

（1）規則：如右圖，填入數字 1 到 16，使四個大正六邊形數字和相等。

（2）重複處代數分析：

討論 3 個大正六邊形，總和為

$(a+b+c+g+h+i+j)+(a+c+d+e+k+l+m)+(a+e+f+g+n+o+p)$

$=(a+b+c+\ldots+o+p)+2a+c+e+g$

$=136+2a+c+e+g$

所以 $3 \mid 136+2a+c+e+g$

又

$2a+c+e+g$ 最小值為 11（2x1+2+3+4）

最大值為 74（2x16+15+14+13）

所以

$2a+c+e+g=11+3s$..........................式(1)

其中，$s=0, 1,\ldots, 21$

討論 4 個大正六邊形，總和為

$(a+b+c+g+h+i+j)+(a+c+d+e+k+l+m)+(a+e+f+g+n+o+p)$

$+(a+b+c+d+e+f+g)$

$=136+3a+2c+2e+2g+b+d+f$

$\Rightarrow 136+3a+2c+2e+2g+b+d+f=4(a+b+c+d+e+f+g)$

$\Rightarrow a+2(c+e+g)+3(b+d+f)=136$..........................式(2)

式(1)與式(2)得：$\begin{cases} 2a+c+e+g=11+3s \\ a+2(c+e+g)+3(b+d+f)=136 \end{cases}$

$\Rightarrow 3a+3(c+e+g)+3(b+d+f)=147+3s$

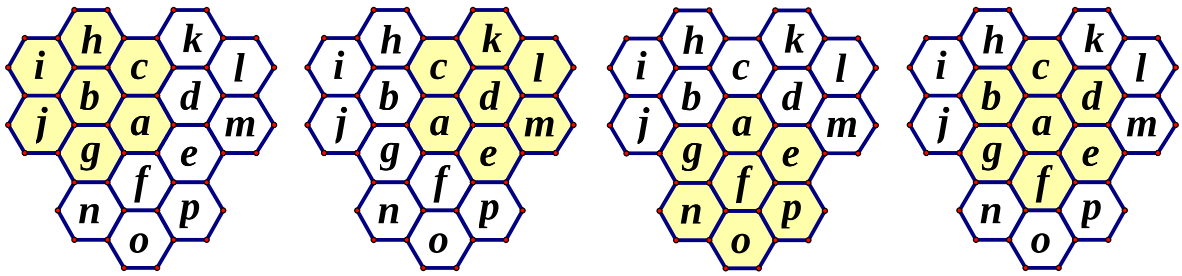
$\Rightarrow a+c+e+g+b+d+f=49+s$

其中，s=0, 1,…, 21

於是，我們得到兩個關係式：

$$\begin{cases} \mathbf{2a+c+e+g=11+3s} \\ \mathbf{a+b+c+d+e+f+g=49+s\ ,\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 21} \end{cases}$$

也就是得到中心正六邊形的總和。



（3）原型變化討論：

我們得到兩個關係式，當決定總和後，可透過四步驟來填數：

第一步：填入 a

第二步：填入 c, e, g

第三步：填入 b, d, f

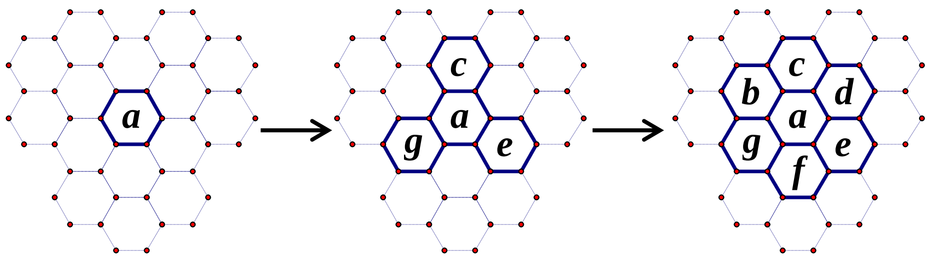
第四步：將剩下的九個數字分成三組，使得 $(h+i+j)=(d+e+f)$ 且 $(k+l+m)=(b+g+f)$ 且 $(n+o+p)=(b+c+d)$。

$$\begin{cases} 2a+c+e+g=11+3s \\ a+b+c+d+e+f+g=49+s\ ,\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 21 \end{cases}$$

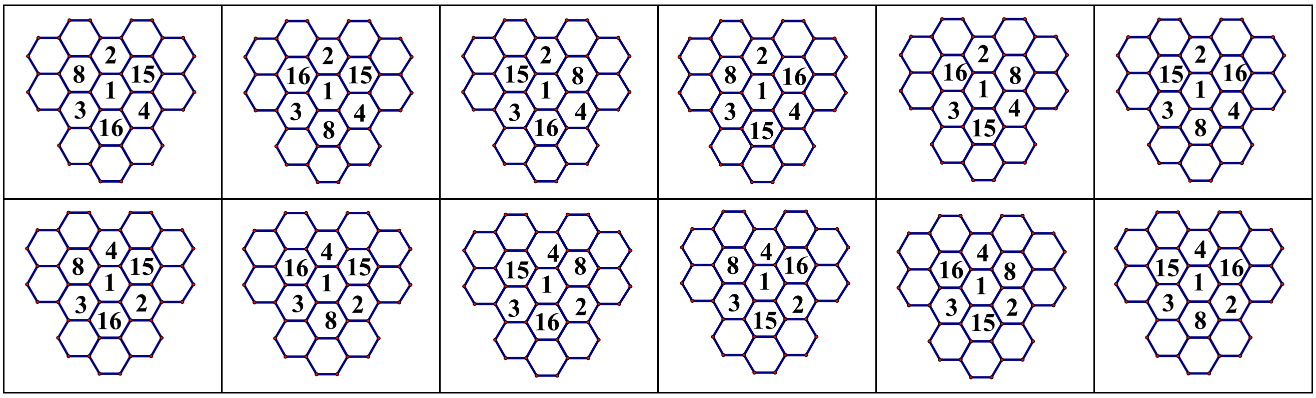
A.以下討論$\boxed{\text{中心七個變數}}$ a , b, c, d, e, f, g 的變化情形：

(a)當 $(c+e+g)\neq(b+d+f)$時

列式：$1\times 3!\times 3!\div 3=12$ 種（**除以 3 表示環狀排列的重複部分**）

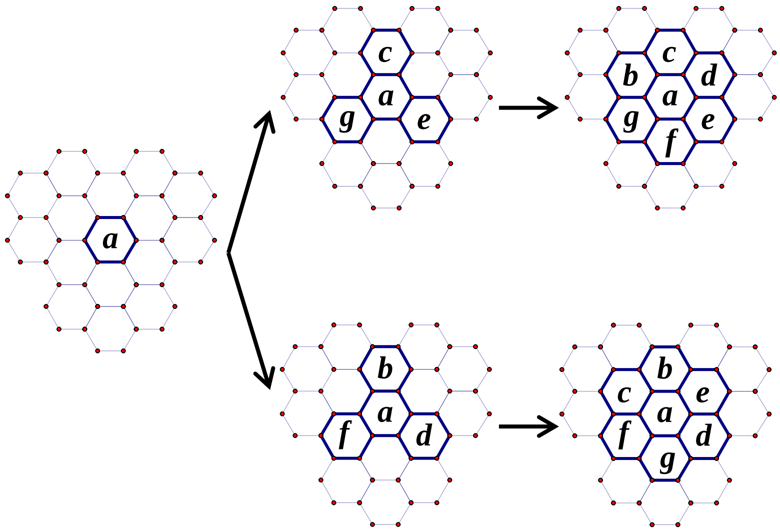


例如：總和為 49（ $s=0$ ）、$a=1$ 、$c+e+g=9$ 、$b+d+f=39$，有以下 12 種。



(b)當$(c+e+g)=(b+d+f)$時

列式：$(1\times 3!\times 3!\div 3)\times 2=24$種（除以 3 表示環狀排列的重複部分）



假設$(c+e+g)=(b+d+f)$

$$\begin{cases}2a+c+e+g=11+3s\ldots(1)\\ a+b+c+d+e+f+g=49+s\ldots(2)\end{cases}$$

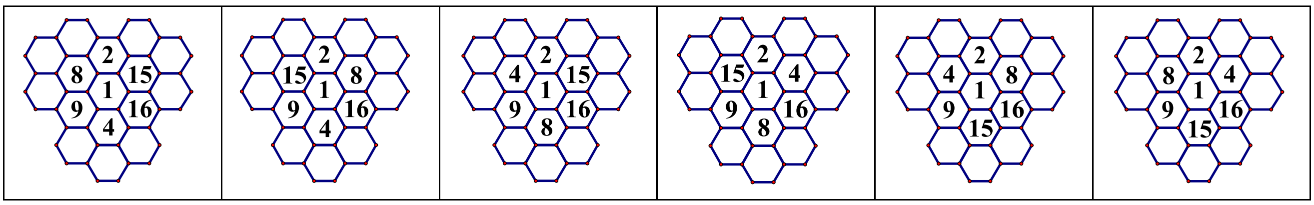
從(1)知$c+e+g=11+3s-2a$ 代入(2)

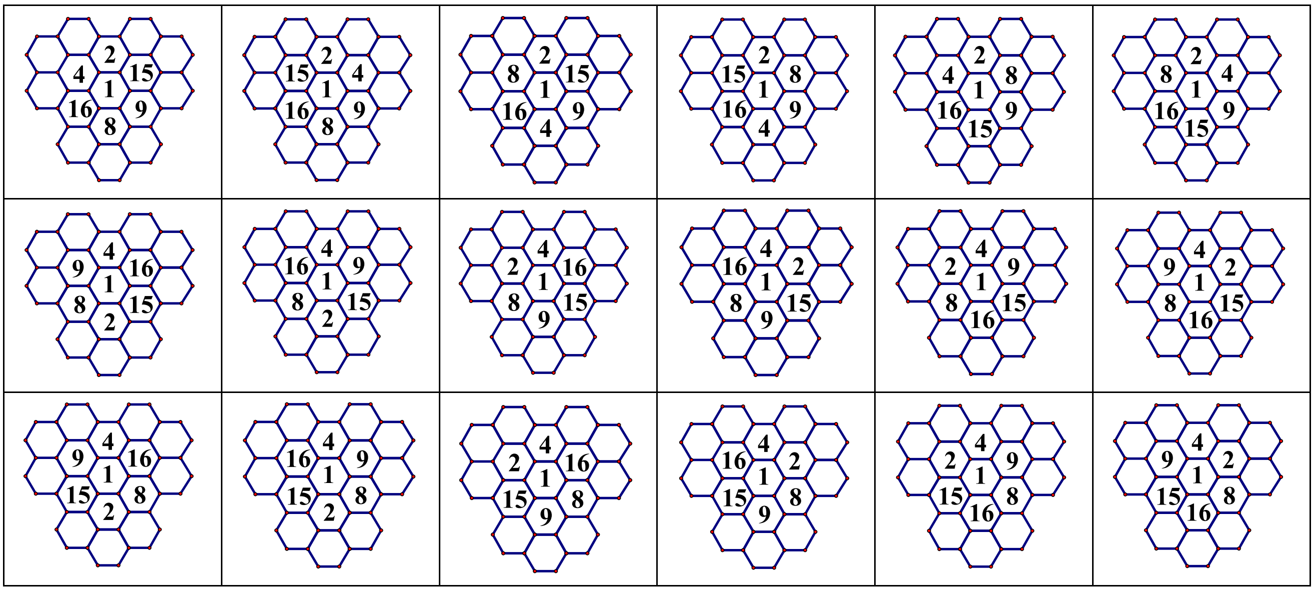
得 $a+2(c+e+g)=22+6s-3a=49+s$

$\Rightarrow 3a-5s=-27$

$(a,\ s)=(1,\ 6),\ (6,\ 9),\ (11,\ 12),\ (16,\ 15)$

例如：總和為 55（$s=6$）、$a=1$、$c+e+g=27$、$b+d+f=27$，有以下 24 種。





B.以下討論$\boxed{\text{外圍九個變數}}$ $h, i, j, k, l, m, n, o, p$ 的變化情形：

若前七個變數 a , b, c, d, e, f, g 確定後，後面九個變數填入，使得

$$\begin{cases} h+i+j=d+e+f \\ k+l+m=b+g+f \\ n+o+p=b+c+d \end{cases}$$

若外圍九變數成立後，由於 h, i, j 可兩兩互換、k, l, m 可兩兩互換、n, o, p 可兩兩互換，所以共有 3!×3!×3!=216 個組合。

【實作解題】

一、中心七個變數實作

由於前七個變數的解超過 30 萬個，人工計算過於麻煩，我們直接將 a, b, c, d, e, f, g, h 變數的條件及關係式寫成 VBA (Visual Basic for Applications) 程式語法，搭配 Office Excel 2010 試算表進行估算 $s=0,\ 1,\ 2,...,\ 21$（一個正六邊形總和為 $49,\ 50,\ 51,...,\ 70$）之情形。

$$\begin{cases} 2a+c+e+g=11+3s \\ a+b+c+d+e+f+g=49+s \end{cases},\ s=0,\ 1,\ 2,...,\ 21$$

我們利用前面討論原型的鏡射之組合，當 $(c+e+g)\neq(b+d+f)$ 時，為 12 種；當 $(c+e+g)=(b+d+f)$ 時，為 24 種，又因電腦無法處理環狀排列，因此程式跑出來的組合數一定為 12×3=36 的倍數，我們依此做檢驗。我們利用互補性只需處理 s=0, 1, 2,...,10，結果如下表，中心七個變數類型有 26,114 個，可產生出 319,824 種，但是這些原型不一定都可以成功，還需要透過下面的外圍九個變數的程式檢驗。

s	單一正六邊形總和	電腦組合數 (A)	排除環狀排列 (B)=(A)÷3	中心七變數類型 (C1)=(B)÷12 (C2)=(B)÷24
0 (21)	49 (70)	252	84	7(C1)
1 (20)	50 (69)	2016	672	56(C1)

2 (19)	51 (68)	5796	1932	161(C1)
3 (18)	52 (67)	13428	4476	373(C1)
4 (17)	53 (66)	25524	8508	709(C1)
5 (16)	54 (65)	40932	13644	1137(C1)
6 (15)	55 (64)	45756	15252	1271(C1)
		10440	3480	145(C2)
7 (14)	56 (63)	72036	24012	2001(C1)
8 (13)	57 (62)	82944	27648	2304(C1)
9 (12)	58 (61)	80892	26964	2247(C1)
		8928	2976	124(C2)
10 (11)	59 (60)	90792	30264	2522(C1)

二、外圍九個變數實作

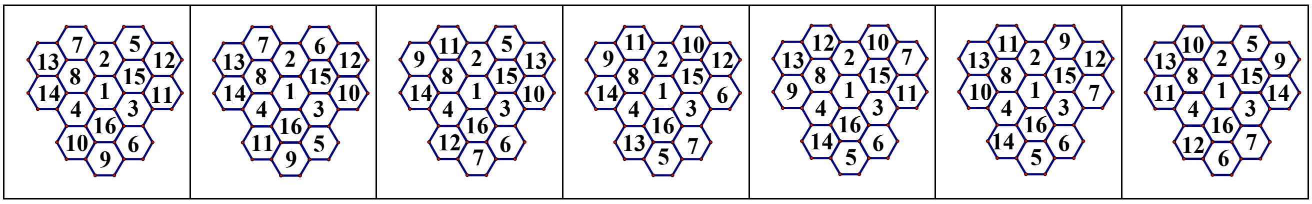
處理完前七個變數後，接著我們處理後面九個變數，舉例而言：一個正六邊形總和為 49 的中心七變數類型有 7 種，下面取一種為例。

$$a = 1 \ and \ (c,\ e,\ g) = (2,\ 3,\ 4) \ and \ (b,\ d,\ f) = (8,\ 15,\ 16)$$

剩下的數字為 5、6、7、9、10、11、12、13、14，我們以 VBA (Visual Basic for Applications) 程式語法，將這九個數字進行直線排列（9！=362880）並且只列出符合填數規則的解（下面的聯立方程式），再於 Excel 設計按鈕介面，只將符合規則的解答及數量列出。

$$\begin{cases} h + i + j = d + e + f \\ k + l + m = b + g + f \\ n + o + p = b + c + d \end{cases}$$

最後，中心為 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g) = (1,\ 8, 2, 15, 3, 16, 4)$ 的原型搭配外圍九變數，程式解共有 1512 種組合（1512÷216=7）。（下面每個圖形的外圍九變數可交換變化）



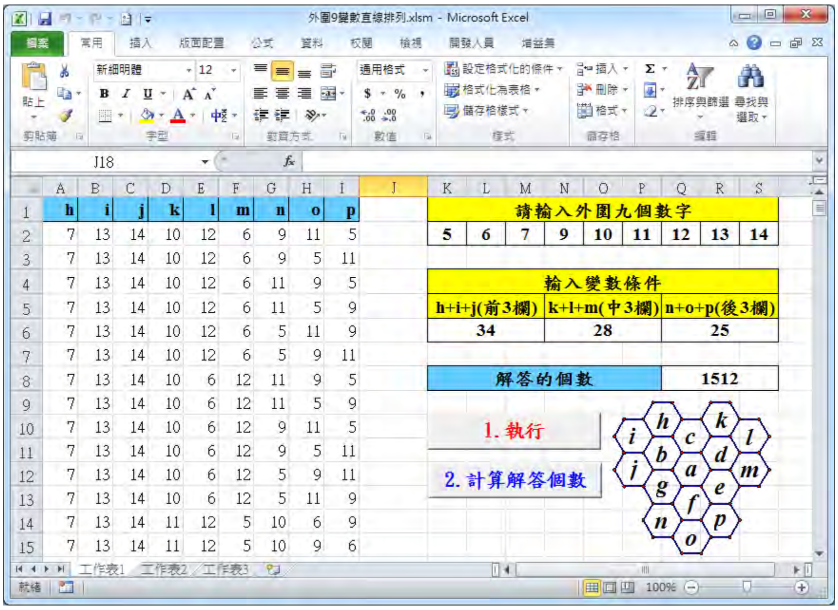
※中心七變數求解 VBA 語法

```
Function Unequal(ParamArray Nums() As
Variant) As Integer
Dim intI1 As Integer, intI2 As Integer, l As
Integer, u As Integer
l = LBound(Nums())
u = UBound(Nums())
If u - l < 1 Then
```

※外圍九變數求解 VBA 語法

```
Dim PT As Range
Sub outCome(myVal() As Variant, L As Long)
Dim i As Long
   If L > 0 Then
If myVal(0) + myVal(1) + myVal(2) =
ActiveSheet.Range("K6") Then
If myVal(3) + myVal(4) + myVal(5) =
```

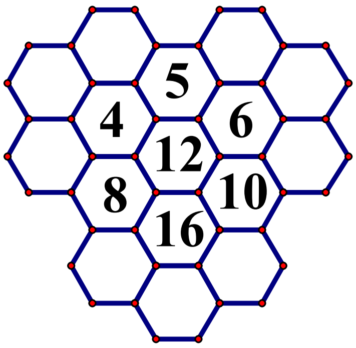
Unequal = 3
Exit Function
End If
For intI1 =1 To u - 1
For intI2 = intI1 + 1 To u
If Nums(intI1) = Nums(intI2) Then
Unequal = 0
Exit Function
End If
Next
Next
Unequal = 1
End Function
 	
Sub hexagonhive ()
For a = 1 To 16
For b = 1 To 16
For c = 1 To 16
For d = 1 To 16
For e = 1 To 16
For f = 1 To 16
g = 49 - a - b - c - d - e – f
Dim ue As Integer, str As String
ue = Unequal(a, b, c, d, e, f, g)
If ue = 1 And g > 0 And g < 17 And 2 * a + c + e + g = 11 Then
t = t + 1
Cells(t, 1) = a: Cells(t, 2) = b: Cells(t, 3) = c:
Cells(t, 4) = d: Cells(t, 5) = e: Cells(t, 6) = f:
Cells(t, 7) = g
End If
Next f, e, d, c, b, a
End Sub
	ActiveSheet.Range("N6") Then
	    For i = 0 To L - 1
	        PT.Offset(0, i) = myVal(i)
	    Next
	    Set PT = PT.Offset(1, 0)
	End If
	End Sub
	Sub ToPermut(myVal() As Variant, S As Long, K As Long)
	  Dim i As Long
	  If S = K - 1 Then
	    outCome myVal, K
	  Else
	    For i = S To K - 1
	        Dim tmp As Variant
	        tmp = myVal(i)
	        myVal(i) = myVal(S)
	        myVal(S) = tmp
	        ToPermut myVal, S + 1, K
	        myVal(S) = myVal(i)
	        myVal(i) = tmp
	    Next
	  End If
	End Sub
	Sub PermutMain()
	  Dim theVal() As Variant
	  Set PT = ActiveSheet.Range("a2")
	  PT.Worksheet.
	Range("a2:i362881").Cells.Clear
	  theVal = Array(ActiveSheet.Range("K2"),
	ActiveSheet.Range("L2"),
	ActiveSheet.Range("M2"),
	ActiveSheet.Range("N2"),
	ActiveSheet.Range("O2"),
	ActiveSheet.Range("P2"),
	ActiveSheet.Range("Q2"),
	ActiveSheet.Range("R2"),
	ActiveSheet.Range("S2"))
	  ToPermut theVal, 0, UBound(theVal) + 1
	End Sub

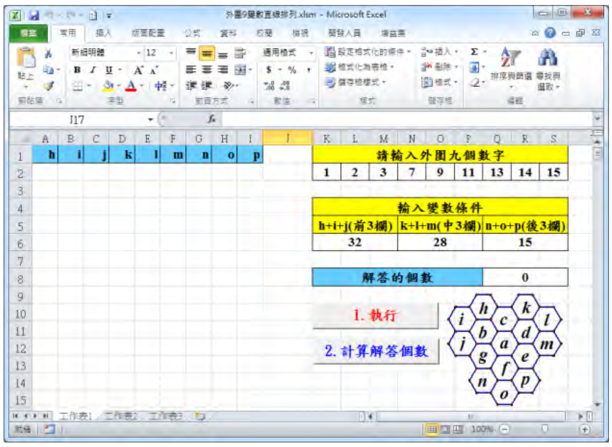


外圍九個變數求解的 Excel 介面

三、無解的圖形

中心為 $(a, b, c, d, e, f, g) = (12, 4, 5, 6, 10, 16, 8)$ 的原型，再用程式檢驗外圍九變數（1, 2, 3, 7, 9, 11, 13, 14, 15），結果發現無解，顯示找出中心七個變數的解後，仍需要驗證後面九個變數是否有解，但是由於中心七個變數組合數量高達 319,824 個，就不一一驗證，但我們提供的外圍九個變數 Excel 檔可作為後續檢驗的工具。





【研究六】推廣研究：可無限平鋪的填數遊戲

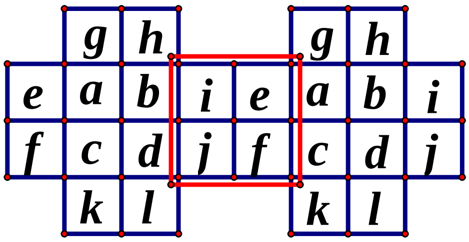
我們前面研究只針對單一的正三角形、正方形、正六邊形填數圖形進行討論，但這些圖形，只有單一正方形填數具有可以進行平移或旋轉後平鋪之可能。因此接下來，**我們推廣填數研究**：「**將單一正方形填數進行複製後，並且進行無限平鋪**」。

命題四

任一正方形填數圖形，必可複製左右（上下）平移拼接平鋪。

Proof：

如圖，已知 $a+b+c+d=26$



$\because a+c+e+f=a+c+b+d$

$\therefore e+f=b+d$

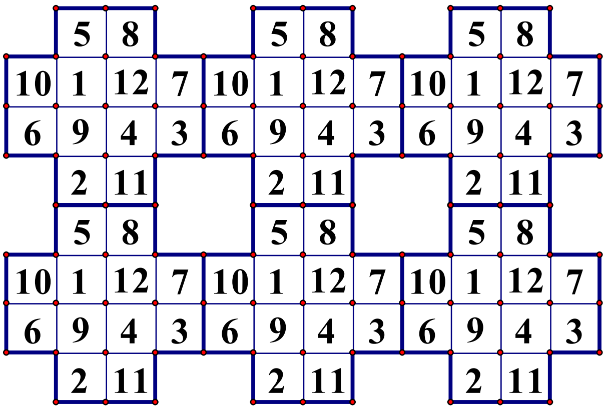
同理，$a+c=i+j$

$2.i+j+e+f=a+c+b+d=26$

證畢。

【初步構想平鋪(不合格)】

依據命題四，我們可以將研究四找出的任一個解，做下圖的平鋪組合，但是缺點在於中間必定有正方形的空格。於是我們再進行改良，目標讓平鋪圖形沒有空格。



不合格的平鋪

【改良版平鋪圖形(自身圖形＋旋轉 180 度後圖形)】

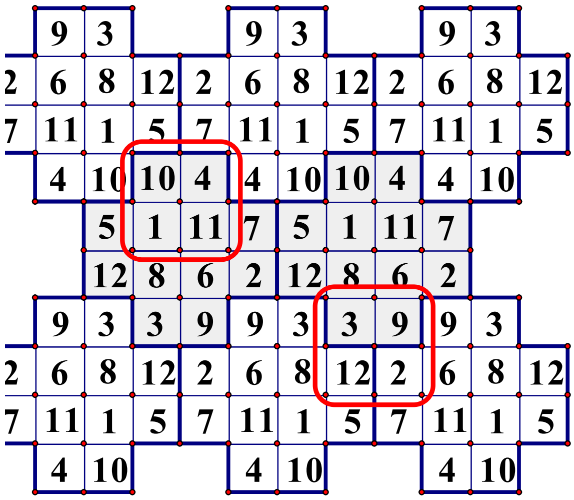
我們在研究中，偶然發現僅有少數的某些正方形填數，可以**透過自身複製，再搭配旋轉 180 度的圖形，鋪滿整個平面**，其中任選四個小正方形的數字和皆為 26（如下圖）。規律有三項：

（1）白色與灰色的正方形，兩者為旋轉 180 度關係。

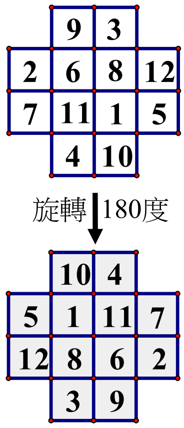
（2）橫列都是一樣的圖形複製拼接鑲嵌而填數成立（依據命題四）。

（3）每個數字出現的次數皆相同。

圖形中的數字極具規律，我們好奇這些規律是偶然？還是必然？

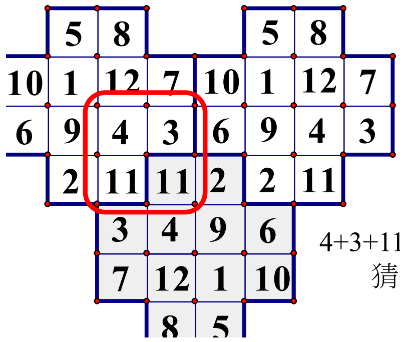


可無限平鋪成功例子



猜想：任意正方形填數經由 180 度旋轉後，是否可以平鋪？

我們隨機挑選一個正方形填數，經由複製、旋轉後平鋪，發現中間紅色框框的數字和為 4+3+11+11=29，不符合每四個正方形之和要為 26 的條件。因此，任意單一正方形填數並非皆可經由「複製、旋轉」之步驟進行平鋪。



$4+3+11+11=29\neq 26$
猜想錯誤

【第一類：自身圖形＋旋轉 180 度圖形，可無限平鋪的數字規律研究】

我們取前面成功平鋪圖形的局部來討論，並且補成 4x4 的方陣。我們發現「**三個重要規律**」：

A_3	A_3	A_4	A_4
B_5	B_1	B_2	B_6
A_5	A_1	A_2	A_6
B_3	B_3	B_4	B_4

（1）內部兩兩數字和可分為兩組：

$B_1+B_2=B_3+B_4=B_5+B_6$ 且 $A_1+A_2=A_3+A_4=A_5+A_6$

，其中圖中任意四個小正方形的內部數字和皆為 26。

9	9	3	3
2	6	8	12
7	11	1	5
4	4	10	10

（2）4x4 方陣的四個角落數字和相鄰內部的數字相同。

$2A_3+B_1+B_5=26$、$2A_4+B_2+B_6=26$、

$2B_3+A_1+A_5=26$、$2B_4+A_2+A_6=26$

換句話說，(B_1+B_5)必為偶數、(B_2+B_6)必為偶數

(A_1+A_5)必為偶數、(A_2+A_6)必為偶數

（3）$2A_3+B_5+B_1=B_5+B_1+A_1+A_5=26$

$\Rightarrow 2A_3=A_1+A_5 \Rightarrow$ A_1, A_3, A_5 成等差數列

同理，A_2, A_4, A_6 成等差數列、B_1, B_3, B_5 成等差數列、

B_2, B_4, B_6 成等差數列

接著，<u>我們證明符合前面規律的圖形，一定可以進行複製無限平鋪</u>。左右拼接已從命題四得到證明。所以，只需要檢查 4 個上下接合的紅色框框之數字和是否為 26 即可。

命題五

如圖，若 $B_1+B_2+A_1+A_2=26$ 且 $A_1+A_2=A_3+A_4=A_5+A_6$ 且 $B_1+B_2=B_3+B_4=B_5+B_6$ 且 $2A_3+B_1+B_5=26$ 且 $2A_4+B_2+B_6=26$ 且 $2B_3+A_1+B_5=26$ 且 $2B_4+A_2+A_6=26$，則 $A_5+A_6+B_3+B_4=26$ 且 $A_3+A_4+B_5+B_6=26$。

Proof：

1.$\because A_5+A_6=A_1+A_2$

$\therefore A_5+A_6+B_3+B_4=A_1+A_2+B_3+B_4$

又 $A_1+A_2+B_3+B_4=26$

得 $A_5+A_6+B_3+B_4=26$

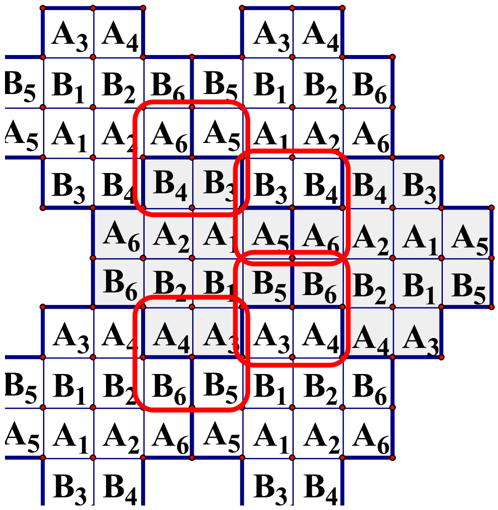
2.$\because B_5+B_6=B_1+B_2$

$\therefore A_3+A_4+B_5+B_6=A_3+A_4+B_1+B_2$

又 $A_3+A_4+B_1+B_2=26$

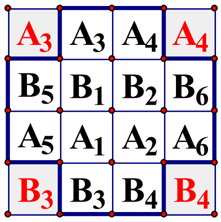
得 $A_3+A_4+B_5+B_6=26$

證畢。



依據規律，尋找其他可無限平鋪的圖形的解

由於 $A_1+A_2=A_3+A_4=A_5+A_6$、$B_1+B_2=B_3+B_4=B_5+B_6$ 且 $A_1+A_2+B_1+B_2=26$，所以我們先將數字分為 A、B 兩大組，其中，A+B 為 26。A 或 B 中必須要有 3 組數字皆為不重複的數對。我們整理成下表：



$A_1+A_2=7$	(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)
$B_1+B_2=19$	(7, 12)、(8, 11)、(9, 10)
$A_1+A_2=8$	(1, 7)、(2, 6)、(3, 5)
$B_1+B_2=18$	(6, 12)、(7, 11)、(8, 10)
$A_1+A_2=9$	(1, 8)、(2, 7)、(3, 6)、(4, 5)
$B_1+B_2=17$	(5, 12)、(6, 11)、(7, 10)、(8, 9)
$A_1+A_2=10$	(1, 9)、(2, 8)、(3, 7)、(4, 6)
$B_1+B_2=16$	(4, 12)、(5, 11)、(6, 10)、(7, 9)
$A_1+A_2=11$	(1, 10)、(2, 9)、(3, 8)、(4, 7)、(5, 6)
$B_1+B_2=15$	(3, 12)、(4, 11)、(5, 10)、(6, 9)、(7, 8)
$A_1+A_2=12$	(1, 11)、(2, 10)、(3, 9)、(4, 8)、(5, 7)
$B_1+B_2=14$	(2, 12)、(3, 11)、(4, 10)、(5, 9)、(6, 8)
$A_1+A_2=13$	(1, 12)、(2, 11)、(3, 10)、(4, 9)、(5, 8)、(6, 7)
$B_1+B_2=13$	(1, 12)、(2, 11)、(3, 10)、(4, 9)、(5, 8)、(6, 7)

我們舉「和為 7、和為 19」作填數步驟說明，其餘則提供我們找到的解答。我們定義(A_5, A_1, A_2, A_6)、(B_5, B_1, B_2, B_6)的局部左右互換視為同一種圖形，**最後發現有 6 個可複製之平鋪正方形**（本身圖形＋旋轉 180 度之圖形鑲嵌平鋪）。

A_3	A_3	A_4	A_4
B_5	B_1	B_2	B_6
A_5	A_1	A_2	A_6
B_3	B_3	B_4	B_4

單一圖形可複製平鋪之結構

第一步：選出第一組數對（和為 7）(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)；
第二組數對（和為 19）(7, 12)、(8, 11)、(9, 10)

第二步：先填 A，因為 A_3 與 A_4 是等差中項，所以可得填(2, 5)或(3, 4)

第三步：討論剩下數字

Case1 A_3 與 A_4 填入(2, 5)時，$B_3=(26-1-3)\div 2=11$，同理 $B_4=8$，
則 $(B_5, B_1, B_2, B_6)=(10, 12, 7, 9)$或$(12, 10, 9, 7)$，
同理，$(A_5, A_1, A_2, A_6)=(3, 1, 6, 4)$或$(1, 3, 4, 6)$，
但我們將此四個圖形看成一種。

2	2	5	5
B_5	B_1	B_2	B_6
1	3	4	6
B_3	B_3	B_4	B_4

2	2	5	5
B_5	B_1	B_2	B_6
1	3	4	6
11	11	8	8

2	2	5	5
10	12	7	9
1	3	4	6
11	11	8	8

2	2	5	5
12	10	9	7
1	3	4	6
11	11	8	8

2	2	5	5
12	10	9	7
3	1	6	4
11	11	8	8

2	2	5	5
10	12	7	9
3	1	6	4
11	11	8	8

Case2 A_3 與 A_4 填入(3, 4)時，$B_3=(26-1-5)\div 2=10$，同理 $B_4=9$，
則 $(B_5, B_1, B_2, B_6)=(8, 12, 7, 11)$或$(12, 8, 11, 7)$，
同理，$(A_5, A_1, A_2, A_6)=(1, 5, 2, 6)$或$(5, 1, 6, 2)$，
我們將此四個圖形看成一種。

3	3	4	4
B_5	B_1	B_2	B_6
1	5	2	6
B_3	B_3	B_4	B_4

3	3	4	4
B_5	B_1	B_2	B_6
1	5	2	6
10	10	9	9

3	3	4	4
8	12	7	11
1	5	2	6
10	10	9	9

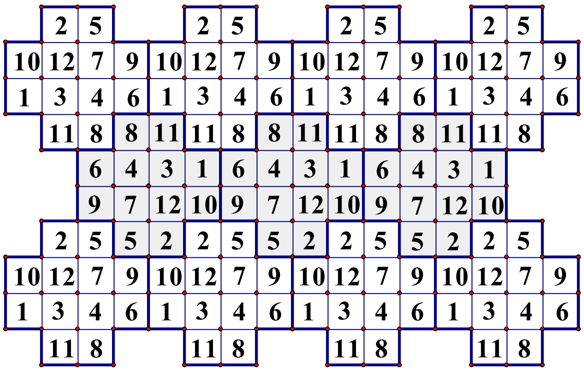
3	3	4	4
12	8	11	7
1	5	2	6
10	10	9	9

3	3	4	4
12	8	11	7
5	1	6	2
10	10	9	9

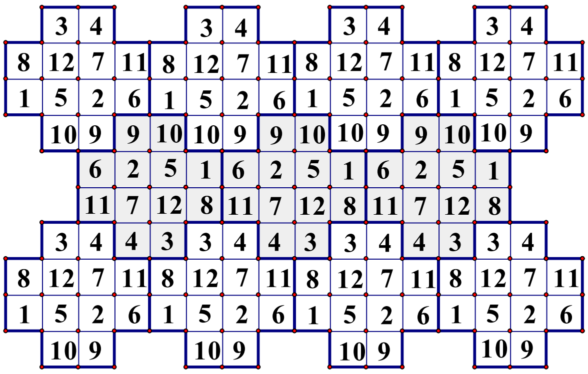
3	3	4	4
8	12	7	11
5	1	6	2
10	10	9	9

自身圖形＋旋轉 180 度圖形，可無限平鋪的解：6 種圖形

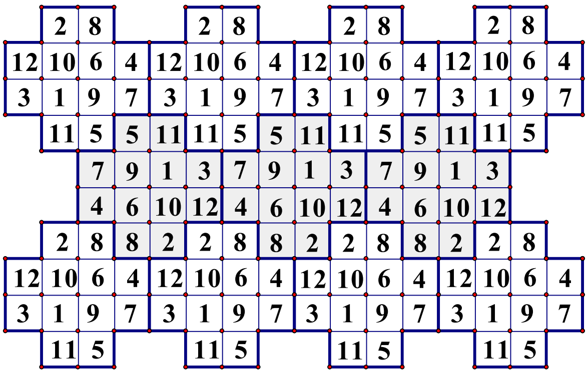
$A_1+A_2=7$ 且 $B_1+B_2=19$



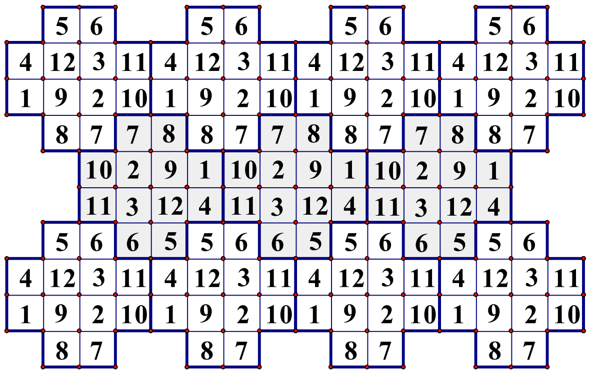
$A_1+A_2=7$ 且 $B_1+B_2=19$



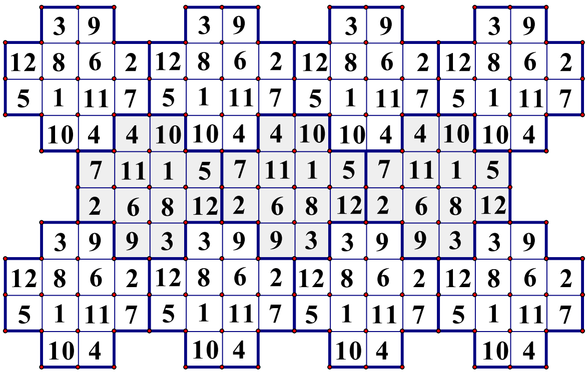
$A_1+A_2=10$ 且 $B_1+B_2=16$



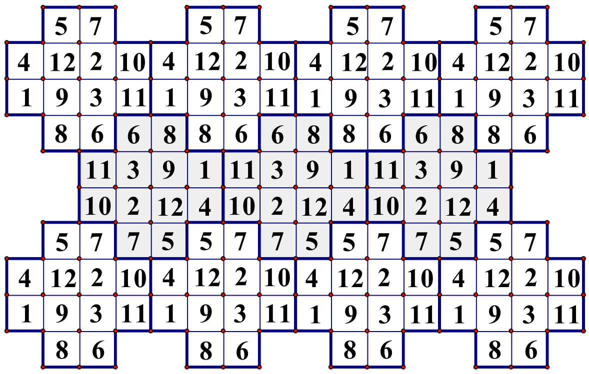
$A_1+A_2=11$ 且 $B_1+B_2=15$



$A_1+A_2=12$ 且 $B_1+B_2=14$

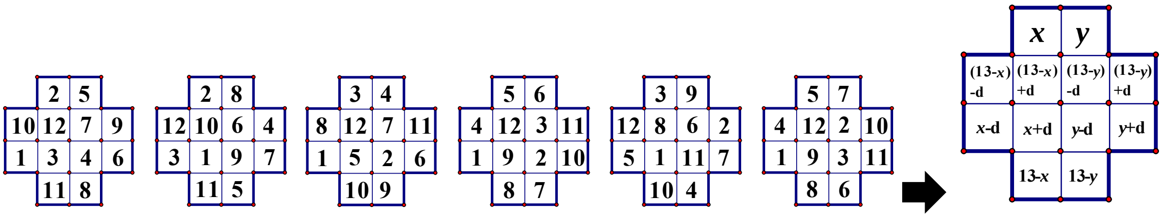


$A_1+A_2=12$ 且 $B_1+B_2=14$

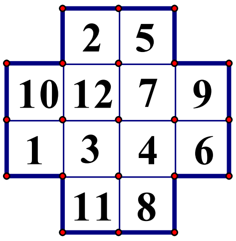
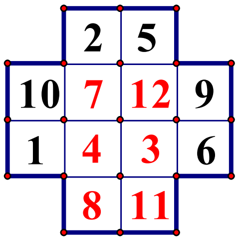
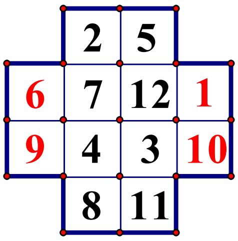
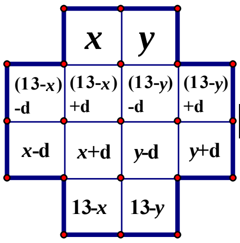
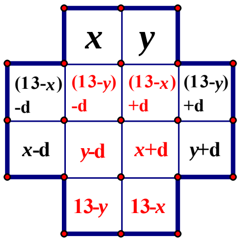
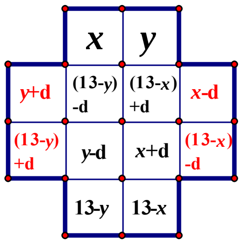


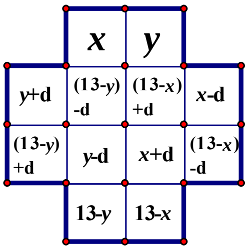
【第二類：自身圖形即可無限平鋪的解】

針對第一類找出的六種單一正方形填數，**將其內部數字進行有規律的左右、交叉交換後**，則可製造出「自身圖形即可無限平鋪的解」，下面表格提供一般化證明的對照步驟。首先，第一類的 6 個基本圖形都可以表示成下面這種型態：

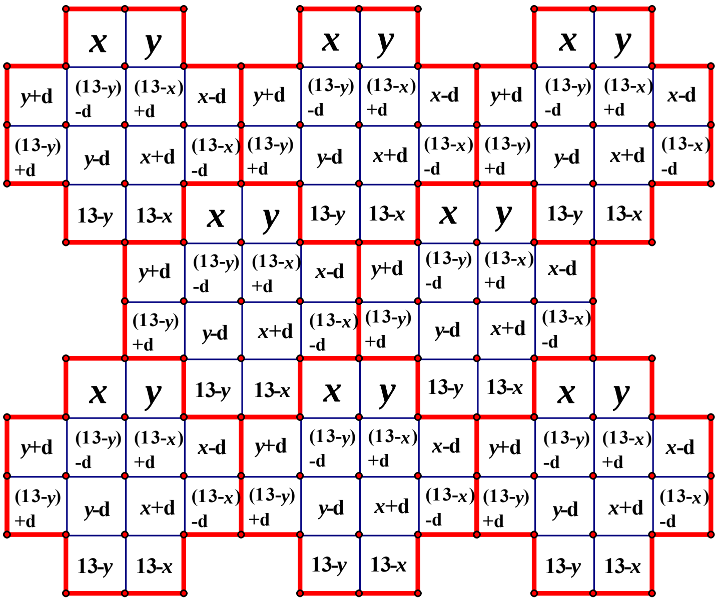


第二，我們將原本的圖形進行左右互換、交叉互換生成新的圖形。新的圖形則可以進行無限平鋪，一般化證明過程如下：

	原本圖形	<u>步驟一：左右互換</u> 12 與 7 互換 3 與 4 互換 11 與 8 互換	<u>步驟二：交叉互換</u> 10 與 6 互換 1 與 9 互換
舉例			
一般化			

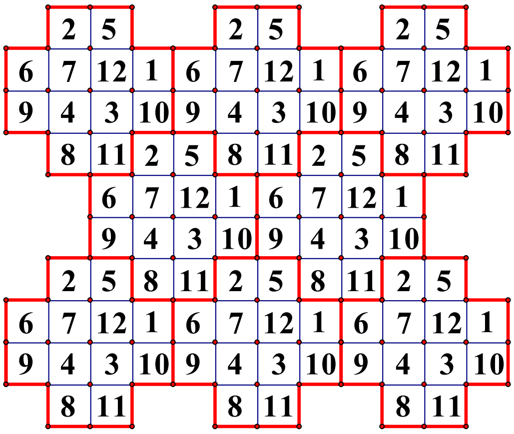


自身圖形無限平鋪

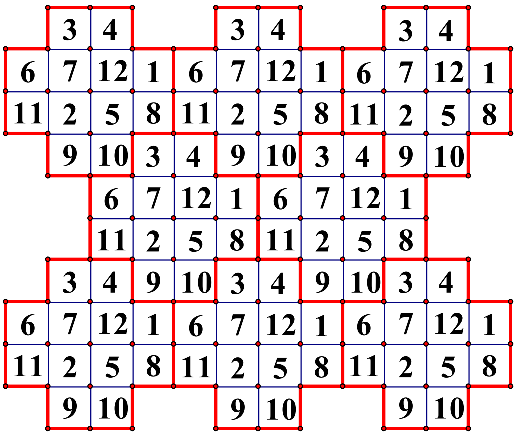


自身圖形即可無限平鋪的解：6 種圖形

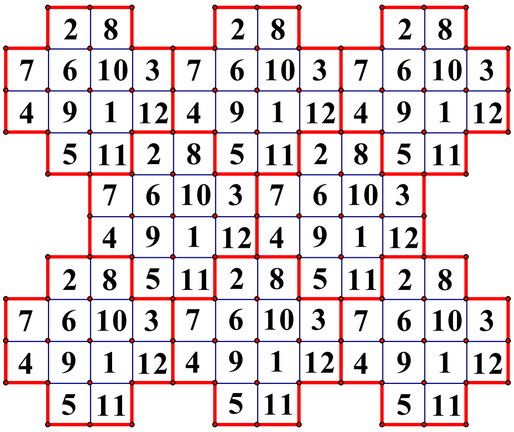
總和 7 且總和 19



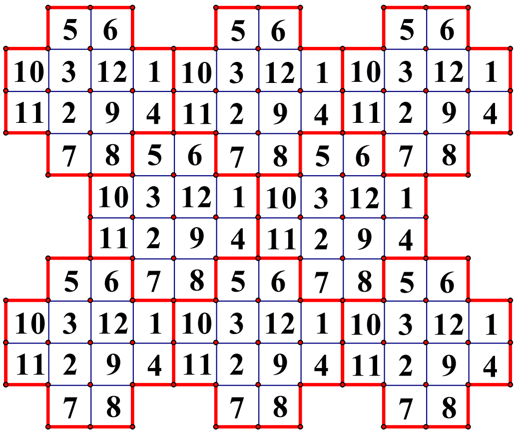
總和 7 且總和 19



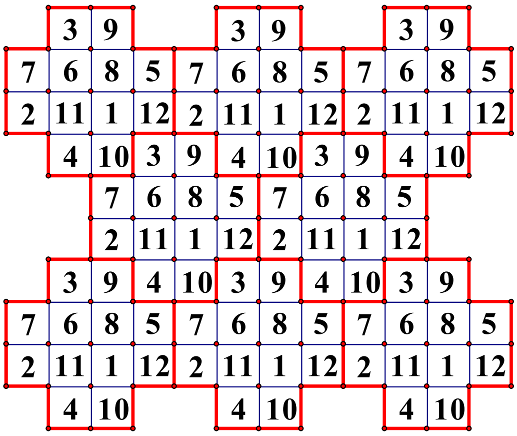
總和 10 且總和 16



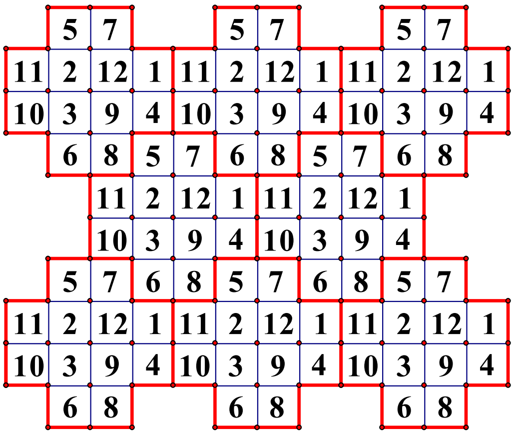
總和 11 且總和 15



總和 12 且總和 14



總和 12 且總和 14



陸、結論

一、平鋪圖形填數共通策略

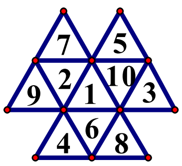
我們研究較複雜的平鋪圖形填數遊戲（正三角形、正方形、正六邊形），研究發現填數遊戲都可用共通的策略與步驟來處理：（1）先以代數分析重複處的數字並列出關係式；（2）應用互補性，只需尋找一半原型圖形（不需窮舉）；（3）以幾何「鏡射」、「局部交換」、「環狀排列」等策略，計算原型的排列組合數；（4）完成解之尋找。

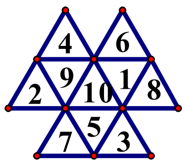
本研究的三個填數遊戲，正三角形填數的總和為 19, 21, 23, 25，共 576 個解、正方形填數的總和為 26，共 6112 個解，針對正六邊形，總和為 49, 50, 51, …, 70，我們雖沒有求出所有解，但我們用 Excel VBA 程式設計介面，可供求解之用。

二、推廣研究：所有填數遊戲之數字互補性及解答數量對稱性

依據命題一，我們發現填數遊戲的共同規律「互補性」，以正三角形填數來說：

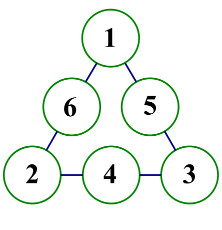
「若找到一個總和為 Sum_{tri}（19, 21, 23, 25）的解，若且為若存在一個總和為($44-\text{Sum}_{tri}$)的解，其中內部每個對應位置的數字和必為 11，數字之間具有『互補關係』，解的數量必為 2 的倍數。」（Sum_{tri} 表示正三角形數字和）

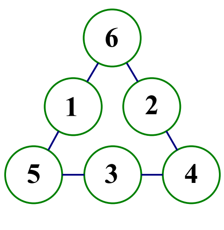
若找到一組解 

（總和 19），必存在另一組解 

（總和 25）。

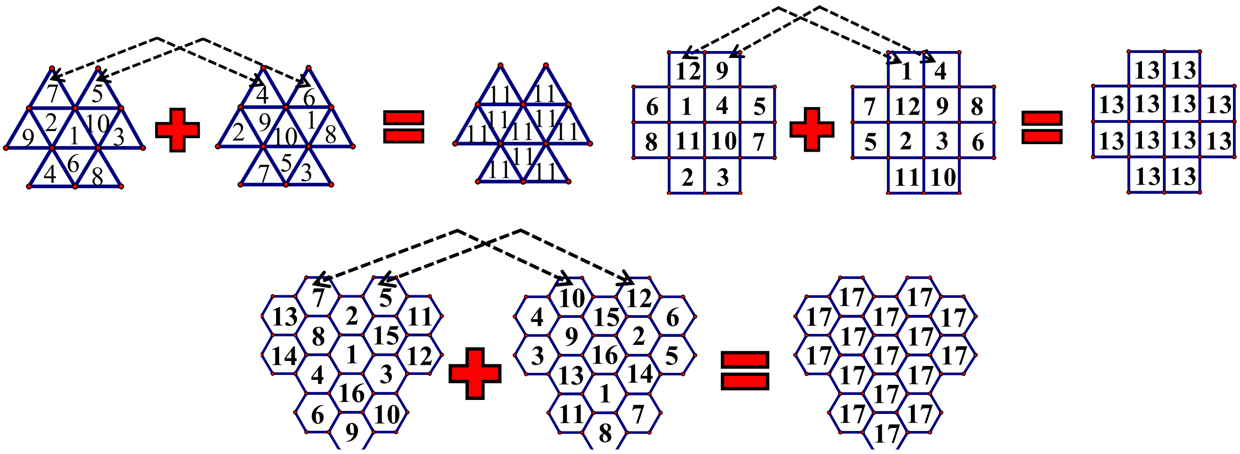
同理，這個**互補與對稱的性質可推廣到「所有的」填數遊戲**，在正方形填數遊戲中，若找到一個總和為 Sum_{sq} 的解（Sum_{sq}=26），若且為若存在一個總和為（$52-\text{Sum}_{sq}$）的解；正六邊形的填數遊戲中，若找到一個總和為 Sum_{hex} 的解（Sum_{hex}=49,50,51,…,70），若且為若存在一個總和為（$119-\text{Sum}_{hex}$）的解，其中內部每個對應位置的數字和必為定值（Sum_{sq} 表示正方形數字和、Sum_{hex} 表示正六邊形數字和）。我們也可以將此性質推廣到前人的研究「正多邊形邊上填數遊戲」（舉例如下）或「九宮八卦填數」。

若找到一組解 

（總和 9），必存在另一組解 

（總和 12）。

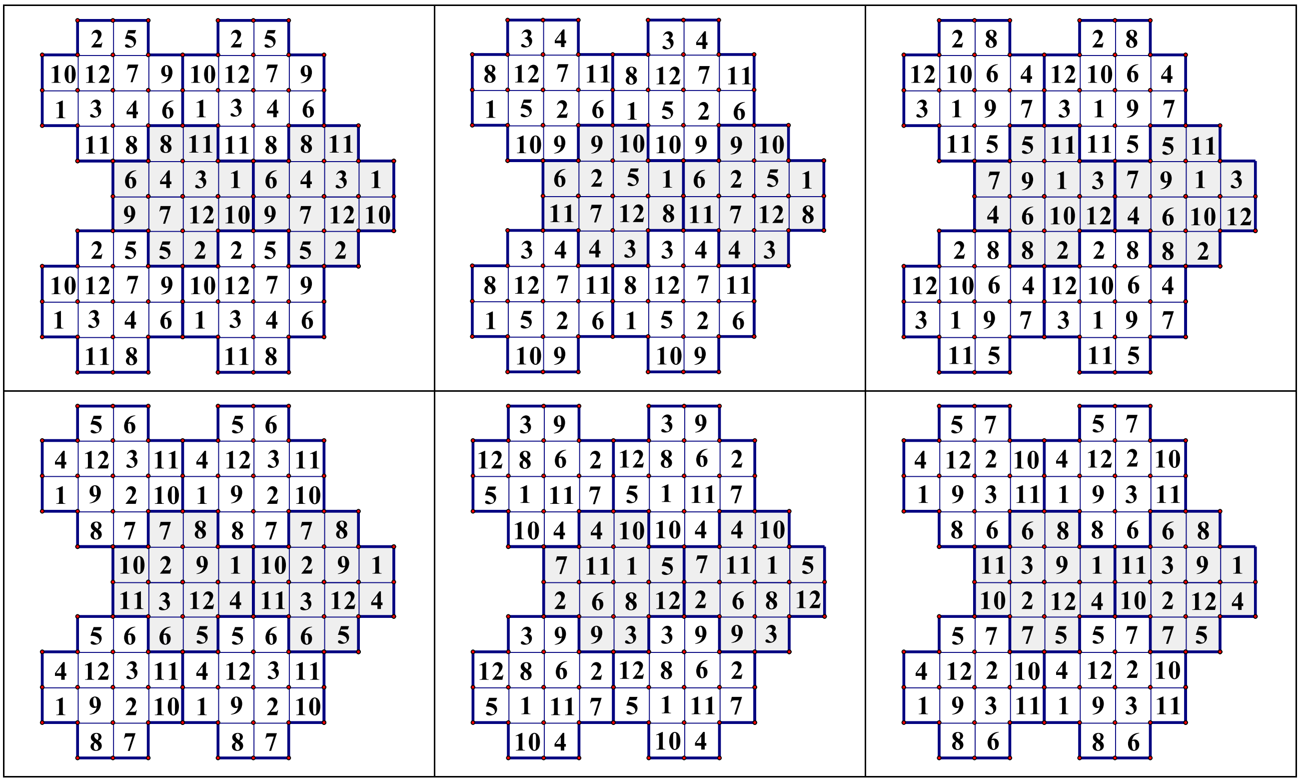
因此，「互補性」在填數研究具有高度價值，因為僅需計算一半的填數原型與解答即可。



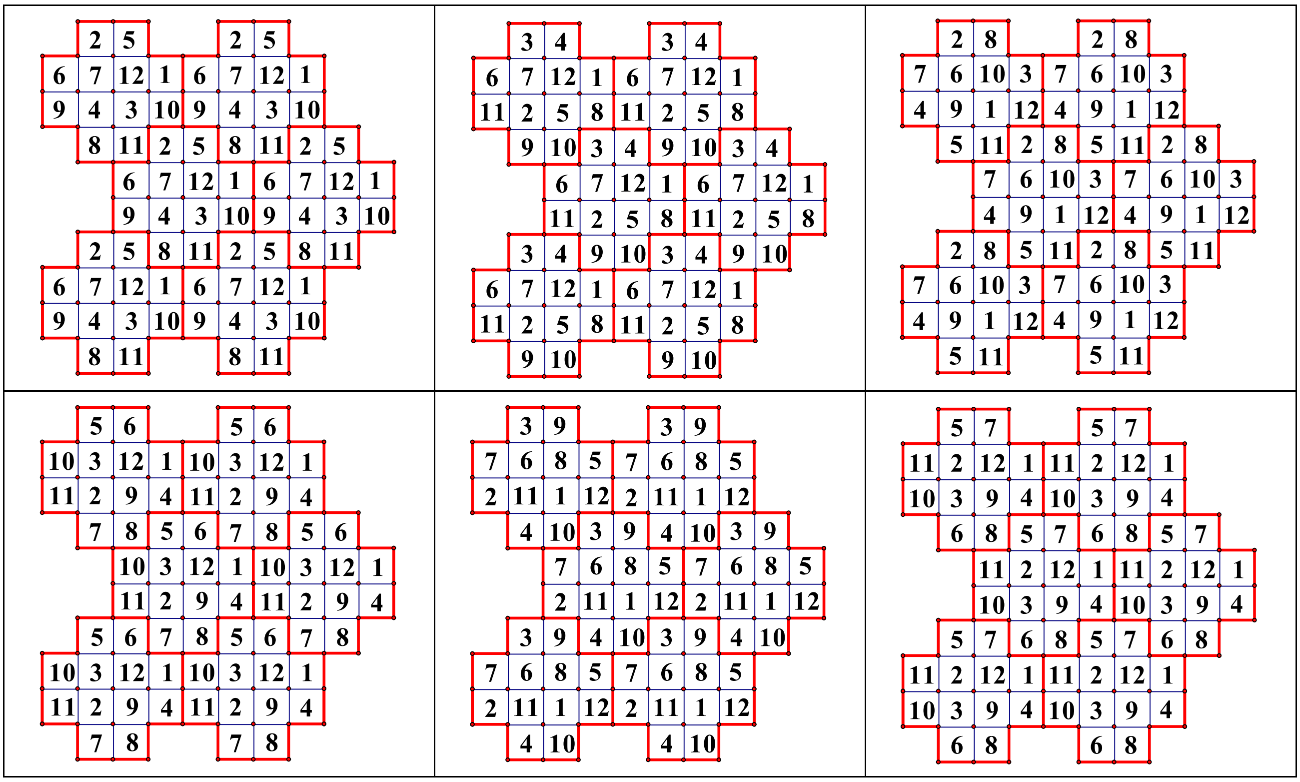
三、推廣研究：複製原圖形，進行無限平鋪的填數遊戲

我們將單一正方形填數推廣到「複製後進行無限平鋪」（平面中任選 4 個小正方形所組成的正方形數字和都為 26），依據命題四及命題五的證明，我們發現有兩個類型：

第一類型「**自身圖形＋旋轉 180 度後圖形**」，我們找出其中內部數字規律之必然性：（1）數字 1 到 12 兩兩配對，三組的數字和一樣，例如：總和 7 有(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)與總和 19 有(7, 12)、(8, 11)、(9, 10)；（2）內部數字有四組等差數列；（3）補成 4x4 方陣後的四個角落數字和相鄰內部的數字相同。依據此規律，我們依序填數實作，可得 6 個可平鋪的圖形如下（灰色部分表示旋轉 180 度之圖形）：



第二類型「**自身圖形即可無限平鋪**」，我們將第一類型的六個單一圖形的內部數字進行「左右交換」、「交叉交換」後，產生 6 個新的圖形，這些圖形就可以以自身圖形進行無限平鋪，最後，我們也進行一般化的證明。



柒、未來展望

本研究中的正三角形、正方形、正六邊形的單一圖形，限於我們目前創造的單一正三角形填數，無法複製自身圖形鑲嵌而平鋪，而單一正六邊形填數之解過於龐多，所以本研究只先討論單一正方形直接複製無限平鋪的情形。因此，未來我們可以再設計新的單一正三角形及正六邊形可進行無限平鋪的圖案，並且繼續研究正三角形正六邊形的無限平鋪之數字規律，完整解決「正則鑲嵌圖形填數」的無限平鋪問題。

捌、生活應用

我們發現許多步道地磚常是正則鑲嵌圖形或半正則鑲嵌圖形，上頭通常是素面的，若能應用我們的研究發現，將地磚上刻上數字變成「數字地磚」，讓固定範圍大小的數字和皆相等，例如：本研究發現的 12 種正方形平鋪圖形，這樣可讓生活添加數學之美。

玖、參考資料

康軒文教（2013）。**國民中學數學（第二冊）：ch.1 二元一次方程式**。臺北：康軒。

康軒文教（2013）。**國民中學數學（第四冊）：ch.2 幾何圖形**。臺北：康軒。

crdotlin 在 Excel VBA 的學習經驗分享園地。網站：http://blog.xuite.net/crdotlin/excel

CSDN 論壇 Office 開發/ VBA。網站：http://bbs.csdn.net/forums/OfficeDevelopment

謝涵婕、謝涵淳（2012）。**填填圈-從數字和與重覆部份討論每邊和相等問題**。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會，國小組數學科作品。

林昆餘（2002）。**九宮八卦**。中華民國第 42 屆中小學科學展覽會，高中組數學科作品。

【評語】030407

1. 作品說明順暢，團隊合作良好。

2. 主題內容與國中教材連結適切。

3. 對主題討論思考邏輯清楚，條理分明。

4. 所用數學理論簡易。

5. 主題內容未見創新。