中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030406

少年「π」的奇幻旅程--不對稱切割之內外夾擊

學校名稱：高雄市立三民國民中學

作者：	指導老師：
國二 王冠萬	黃昭勳 蔡震珊

關鍵詞：不對稱切割、加權校正法、圓周率

摘要

自古以來，幾何法求圓周率，由於太執著於把圓或角度做等分，都會面臨開根號與無理數的問題。本文第一階段，改以不對稱切割來避開無理數。先定義有理數r和角度θ的映射函數T，發展出另類分割圓周的簡易方法，讓圓的外切與內接多邊形邊長都呈現為≤ 1之最簡正有理數，並計算初步之π值。第二階段，則藉由外切與內接多邊形對圓面積的逼近探討，來導出一個大幅提高π值精確度的加權校正公式。第三階段，更是結合前兩階段之理論，進一步推演出計算簡易的π值逼近定理：$\pi = 4\times\sum_{t=1}^{2^{k-1}}\frac{r_{(k,t)}}{3}(2+\frac{1}{1+r_{(k,t)}^2})$與更嚴謹的$\pi$值夾擊定理：

$4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\frac{3r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2}) < \pi < 4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\frac{r_{(k,n)}\times(3+r_{(k,n)}^2)}{3+2r_{(k,n)}^2})$。最後的第四階段，以全新視野來統整梅欽公式與梅欽類公式自 1704 年以來之理論系統，並在與arctan展開式相互印證後，又得出一系列全新的π值計算公式：$\pi = 4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\frac{12r_{(k,n)}+5r_{(k,n)}^3)}{12+9r_{(k,n)}^2+r_{(k,n)}^4})$。

壹、 研究動機與文獻探討

求π值，在數學中一向是個古老但卻一直很迷人的題目。

攤開歷史，會發現這條路上歷來名家輩出，窮畢生之力於此道者亦不乏其人。小學時看過阿基米德的內接多邊形法，國中之後也學到了劉徽的割圓術，並聽說祖沖之更進一步運用了劉徽的「割圓術」及他無比的耐性與堅持，算到內接 24576 邊形，求得 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$。有位數學家名叫魯道爾夫萬科倫（Ludolph Van Ceulen，1540－1610 年），他是使用幾何法的最後幾人之一，他在三十歲（1570年）開始計算圓周率的值，到1596年，他採用阿基米德的方法，計算到「正」60×2^{33}邊形，得出準確至20個小數位的π值——26年算了20位，平均1年不到1位；直至他臨終的一年（1610 年），他不厭其煩的計算繁複的乘法、除法和平方根，最後計算到「正」2^{62}邊形，得出了35個小數位的π值——在一生中算了40年，只得到35位。這種對稱性的角度切割，確實提供古人一個計算π值的方法，然而效率似乎不佳。當時很佩服數學家對數學的熱情，但繼而一想，當我們做一件事會需要「無比的耐性與堅持」時，似乎應該考慮：有沒有別的方法？

只要曾試著去走過這些數學家以幾何法求π值的道路，就會知道問題出在開根號——我們被開根號的無理數困住了兩千多年。古代的數學家很執著於用「等分」來分割一個圓，這就免不了要用到畢氏定理與開根號，接下來就容易遇到無理數。有鑑於此，本研究另闢蹊徑，採用『角平分線斜率r』來替代原有的角度系統，並發展出『不對稱切割法』，以使分割後的多邊形邊長能維持方便計算的有理數型態，這就會讓切割過程的計算變得格外容易了。我希望讓一切過程都變成有理數，不但都可實際作圖，而且容易計算，全部的技巧也僅用國中程度的數學就能解決，相信這會是走出開根號迷宮的一把鑰匙。

其次，科學需要觀察與推理。擲錢幣次數一多，正反面出現比率會接近1:1；擲骰子次數一多，統計每面出現的機率會接近6分之1。這都是觀察與推理的結果。若透過每次的切割，證出「內接多邊形」與「外切多邊形」和「所有扇形面積和」的差的比值，會趨於一定值，那是不是可以提前預測在無限多次分割後，最終兩邊相遇的那個面積落點？很幸運地，本研究證實了這個假設，並根據這個推論發展出『加權校正法』。

貳、 研究目的

推論方向

內容說明

一、角平分線斜率r與角度對應的探討

有理數r：賦予通式解內m、n在幾何上的意義。

角度切割：證明不對稱切割下，斜率有理數r的計算公式。

二、不對稱切割法

π值衍生逼近理論：透過有理數r與角度θ的對應關係，證明π值有理逼近計算法。

不對稱切割法：單位圓中，角平分線斜率總和可逼近半圓周長π，切割越細越精準。角度切割有多種方法，本文設計兩種切法：

簡單切割之單母角：$\angle A_1$切成$\angle A_2+\angle R_2$，易有規律性。

多角切割之多母角：$\angle A_1$切成$n\angle A_2+\angle R_2$，分割速度快。

三、加權校正法

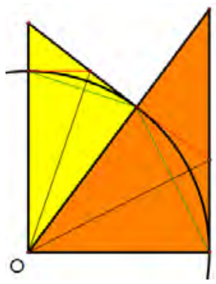
外切內接多邊形與圓面積差比：討論圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，並導出圓面積校正的**加權比例常數**。

不對稱切割＋加權校正法：單位圓中，角平分線斜率總和可逼近圓面積π。將常數代入，以校正π值。

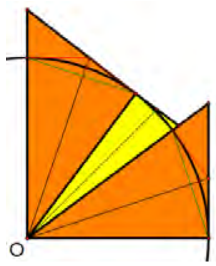
π值比較：以上述各類方法所求得之π值，來討論其逼近速度。

單母角&多母角

單母角：90°角為例，切出一個比較大的母角(橙色)與一個比較小的餘角(黃色)。



多母角：90°角切出二($n=2$)個比較大的母角(橙色)與一個比較小的餘角(黃色)。

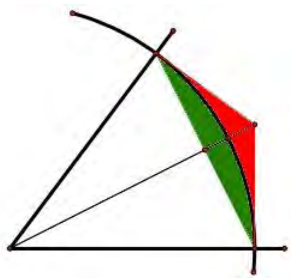


四、π值代數式

以級數和逼近π值，證明切割＋校正的逼近與夾擊定理。

加權比例常數

即紅綠色面積比值。當扇形角度越小時，紅綠色面積比越趨近$1:2$。



五、縱貫古今——幾何、分析一路通

討論傳統幾何法的計算量，與劉徽「割圓術」的π值誤差區間。

發展不對稱切割之分析法計算理論與公式。

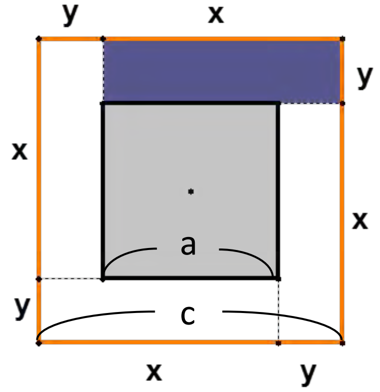
參、 研究過程及內容

一、角平分線斜率 r 與角度對應的探討

（一)、有理數 r ：賦予通式解內 m 、n 在幾何上的意義。

不對稱切割理論，是架構在直角△通式解中 (m,n) 比值的幾何意義與直角△互餘兩角之角平分線斜率的對應關係。

> **定理一**
> **給定一組畢氏數 a、b、c，滿足 $(a,b)=1$，$a^2+b^2=c^2$。**
> **設 b 為偶數，則必存在互質的兩正整數 m 、n，**
> **使得 $(a,b,c)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$。**



圖(一)

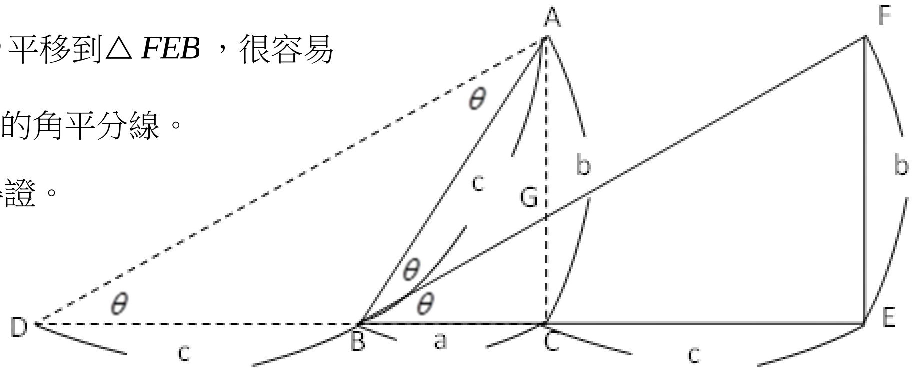
本文巧妙利用圖(一)邊長為 $a(=x-y)$ 之小正方形加上四塊長方形＝邊長為 $c(=x+y)$ 之大正方形的圖示關係，結合 $(a,b)=1$ 的條件，就會自然得到 x 、y 都是完全平方數的解。

> **定理二**
>
> **給定一組畢氏數，滿足 $a^2+b^2=c^2$，其中 $(a,b)=1$，b 為偶數，若 $(a,b,c)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$ 則滿足通式解之正整數 m、n 分別為 m=$\sqrt{\dfrac{c+a}{2}}$，n=$\sqrt{\dfrac{c-a}{2}}$ 。**

> **定理三**
> **已知△ABC 為互質之畢氏△，$(a,b)=1$，且 a 為奇數，b 為偶數，若 $(a,b,c)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$，**
>
> **則　$\angle ABC$ 之角平分線的斜率，$\dfrac{n}{m}$ 之 m 、n 分別為 $m=\sqrt{\dfrac{c+a}{2}}$ ，$n=\sqrt{\dfrac{c-a}{2}}$ …①**
>
> **$\angle BAC$ 之角平分線的斜率，$\dfrac{n'}{m'}$ 之 m' 、n' 分別為 $m'=\sqrt{c+b}$ ，$n'=\sqrt{c-b}$ …②**

如圖(二)，將△ACD 平移到△FEB ，很容易就看出 $\overline{BF}$ 是 $\angle ABC$ 的角平分線。

將各項數據帶入即得證。



圖(二)

由定理三可得知「給定一互質邊的畢氏△，其二銳角之角平分線之斜率必為有理數」。此結論相當有用，舉一些常見的畢氏△計算其銳角與所對應的有理數 r 整理如下(令 b 為偶數)：

表(一)

銳角 / 邊長 (a,b,c) / 有理數 $r=\frac{n}{m}$	θ_1 $m=\sqrt{\frac{c+a}{2}}$ $n=\sqrt{\frac{c-a}{2}}$	θ_2 $m=\sqrt{c+b}$ $n=\sqrt{c-b}$
(3,4,5)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
(5,12,13)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
(15,8,17)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$
(7,24,25)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$

觀察表(一)，我們發現：給定一組畢氏數 $(3,4,5)$，有二個有理數 r，$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$，分別為互餘兩銳角 θ_1、θ_2 之角平分線斜率 $(\theta_1+\theta_2=90°)$，且 $90°$ 之角平分線斜率 $=1$。再觀察 $(5,12,13)$，亦有二個有理數 r，$\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$，與之對應。在 $(3,4,5)$ 的例子中，不失一般性，令 θ_1 角平分線斜率 $r_{\theta_1}=\frac{1}{2}$，θ_2 角平分線斜率 $r_{\theta_2}=\frac{1}{3}$，$\theta=\theta_1+\theta_2$，得所對應的角平分線斜率卻是 $1>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。$\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$ 的情況亦同。至此，我們發現，**當一個角度被分割後，其角平分線斜率的和會變小。**這個觀察，引導本文發展出以外切多邊形來逼近 π 值的方法——**不對稱切割法**。

為簡化往後理論推導所使用的符號，當 $\angle C=\angle A+\angle B$ 所對應的有理數分別為 r_A、r_B、r_C 時，我們將 r_A、r_B、r_C 計算後的斜率變化紀錄為：$\angle r_C \to \angle r_A + \angle r_B$。

$$\boxed{\text{例如：} \angle 1 \to \angle\frac{1}{2}+\angle\frac{1}{3}}$$

（二）、角度切割

定理四：「和角」角平分線斜率計算定理

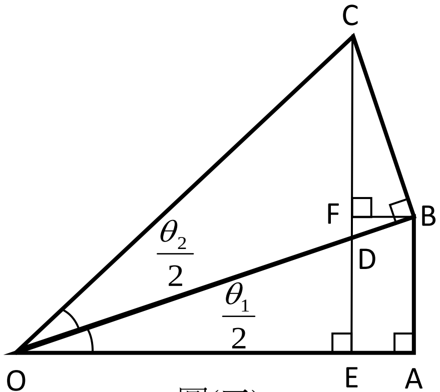
令 θ_1 **、** θ_2 **為畢氏△之內角度數，取** $\frac{\theta_1}{2}$ **、** $\frac{\theta_2}{2}$ **作直角△，**

如圖(三)，分別為 ΔAOB **與** ΔBOC **，**

$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ **所形成的直角三角形為** ΔEOC **，**

令 $r_{\theta_1}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$ **，** $r_{\theta_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$ **，** $r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{\overline{EC}}{\overline{OE}}$ **，**

則 $r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$ **，且** $r_{\theta_1+\theta_2}>r_{\theta_1}+r_{\theta_2}$ **。**



圖(三)

由定理四可知：**當一個角度被分割後，其角平分線斜率的和會變小。**

此外，我們還要發展角度相減的公式，可在往後的定理推演上扮演重要角色。

定理五：「差角」角平分線斜率計算定理

令 $\angle A$ **之角平分線斜率為** r_A **，** $\angle B$ **之角平分線斜率為** r_B **，** $\angle C$ **之角平分線斜率為** r_C **，**

若 $\angle A=\angle B+\angle C$ **，則** $r_C=\frac{r_A-r_B}{1+r_Ar_B}$ **…①；**

當 $r_A=\frac{n}{m}$ **，** $r_B=\frac{n'}{m'}$ **時，** $r_C=\frac{m'n-mn'}{mm'+nn'}$ **…②**

而定理五也蘊含了重要的「有理」性質，陳述如下。

定理六：不對稱切割「有理」性質

令 $\angle A$ **之角平分線斜率為** r_A **，** $\angle B$ **之角平分線斜率為** r_B **，** $\angle C$ **之角平分線斜率為** r_C **，**

且 $\angle A=\angle B+\angle C$ **，若** r_A **、** r_B **為有理數，則** r_C **亦為有理數。**

觀察 $r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$ 與 $r_C=\frac{r_A-r_B}{1+r_Ar_B}$ 這兩個公式，可以發現，原始母角不一定要擺在等式的左邊；**只需要更動加減符號，就能讓原始母角落在等式的右邊。方法就是，當母角要擺在等式的右邊時，右邊其他較小的** r **值就要變成負號，而左邊的** r **值則維持正號。**這個發現，對於之後發展出來的**多角切割** $(P.12)$ 有極大的用處。

二、不對稱切割法

（一）、π 值衍生逼近理論

由定理三可知：給定一互質畢氏△的內角θ，必存在一最簡分數$\frac{n}{m}$ $(m,n\in N)$與之對應。

那反過來，給定一小於1的最簡分數$\frac{n}{m}$ $(m,n\in N)$，也必找得到一畢氏△的內角與之對應嗎？

預備定理一

令 $W=\{\frac{n}{m}\mid m\ge n$ **，且** m **、** $n\in N$ **，** $(m,n)=1\}$ **，**

$\Omega=\{r\mid r$ **為互質邊之畢氏△銳角角平分線斜率**$\}$**，則** $W=\Omega$

利用通式解與斜率、角度的關係，即可得證。

在此得到一個結論：「給定$r\le 1$，則必存在$\theta\le 90$與之對應。」將此對應關係表示為

$T:r\to\theta$，而此對應函數T為$1-1$的對應，因此其反函數必存在，並且以$T^{-1}:\theta\to r$表示。

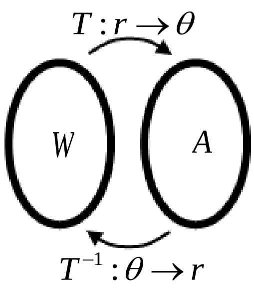
預備定理二

令$W=\{r\mid r=\frac{n}{m}$**，**$m\ge n$**，**$(m,n)=1$**，且**m**、**$n\in N\}$**，**

$A=\{\theta\mid\theta\le 90$**，**$\theta$**為畢氏△內角度數的數值**$\}$**，**

則$\forall\theta\in A$**，必存在**$\theta_i,\theta_j\in A$**，使得**$\theta=\theta_i+\theta_j$**，**

且$\frac{\theta}{360}\times\pi<T^{-1}(\theta_i)+T^{-1}(\theta_j)<T^{-1}(\theta)$ **。**



圖(四)

由定理四之$r_{\theta_1+\theta_2}>r_{\theta_1}+r_{\theta_2}$，可得$T^{-1}(\theta)>T^{-1}(\theta_i)+T^{-1}(\theta_j)$。在單位圓上，斜率有外切多邊形邊長之特性；再利用與弧長之關係，即可得證。

定理七：外切多邊形π值逼近理論

任取$\theta\in A$**，滿足**$\theta=\frac{360}{d}$**，**$d\ge 4$**，**$d\in N$**；則存在一遞減數列**$\{S_k\}$**，使得**$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{\pi}{d}$ **。**

其中 $S_k=\sum_{t=1}^{n}T^{-1}(\theta_{(k,t)})$ **，** $t=1,2,3,\ldots,n$ **。**

實例：　取$\theta=90°\Rightarrow\frac{\pi}{4}<T^{-1}(\theta_1)+T^{-1}(\theta_2)<1$，其中$\theta_1+\theta_2=90°$，令$S_1=T^{-1}(\theta_1)+T^{-1}(\theta_2)$。

取$\theta_1=\theta_3+\theta_4\Rightarrow\frac{\pi}{4}<T^{-1}(\theta_2)+T^{-1}(\theta_3)+T^{-1}(\theta_4)<T^{-1}(\theta_1)+T^{-1}(\theta_2)<1$。

依此類推，即可得一遞減數列$\{S_k\}$，且$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{\pi}{4}$，其中$T^{-1}(\theta_k)\in Q$，$\forall k$。

（二）、不對稱切割

預備定理三

$\forall\ r\in W$，**則必存在** $r_i,r_j\in W$，**使得** $T(r)=T(r_i)+T(r_j)$。**其中** r_i、$r_j<r$。

預備定理三，給了我們一個計算 π 值實際可行的方法，其巧妙之處在於我們完全由「有理數」著手，而可以忽略其所對應的角度 θ，即可快速簡便地發展 π 值的計算理論。陳述如下：

定理八：外切多邊形 π 值逼近計算方法

$\forall\ r\in W$，$T(r)\to\theta\in A$，**滿足** $\theta=\dfrac{360}{d}$，$d\geq 4$；**則存在一遞減數列** $\{S_k\}$，**使得**

$\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\dfrac{\pi}{d}$。**其中** $S_k=\sum\limits_{t=1}^{n}T^{-1}(\theta_{(k,t)})=\sum\limits_{t=1}^{n}r_{(k,t)}$，$t=1,2,3,\ldots,n$。

定理八是將定理六化為具體可行的一種計算理論，由定理八亦可知道可以找到無限多種逼近 π 值的數列。

舉例說明定理八的運算：

取 $r=1$，$T(1)=90°$，故得 $d=4$，令以 $r=1$ 出發

$step1$：給定 $r=1$，取 $r_1=\dfrac{1}{2}\to$計算出 $r_2=\dfrac{1}{3}$，$4S_2=4\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})=3.3333333333\ldots$

$step2$：給定 $r_1=\dfrac{1}{2}$，取 $r_3=\dfrac{1}{3}\to$計算出 $r_4=\dfrac{1}{7}$，$4S_3=4\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7})=3.2380952381\ldots$

$step3$：給定 $r_2=\dfrac{1}{3}$，取 $r_5=\dfrac{1}{4}\to$計算出 $r_6=\dfrac{1}{13}$，$4S_4=4\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{13})=3.2124542125\ldots$

若在上述的 $step3$ 中做出更改，

$step3$：給定 $r_2=\dfrac{1}{3}$，取 $r_5=\dfrac{1}{5}\to$計算出 $r_6=\dfrac{1}{8}$，$4S_4=4\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8})=3.2047619048\ldots$

當然也可做如此更動，

$step3$：給定 $r_2,r_3=\dfrac{1}{3}$，取 $r_5,r_6=\dfrac{1}{4}\to$計算出 $r_7,r_8=\dfrac{1}{13}$，

$$4S_4=4\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13})=3.1868131868\ldots$$

依此類推，可以得到各種不同的拆解法。雖然 k 與 n 的值都會越來越大，但在不同切割方法之下(一切為二、或三、或四…等等)，每種方法所得到的 n 都不會一樣，所以 k 與 n 之關聯性，隨切割方法不同而不同。

由於本文的最終目的是改良 π 值的計算效率，因此，接下來會嘗試設計各種不同的拆解法，並比較其效率。

1、　簡單不對稱切割：每代只切出一個比較大的角與一個比較小的角。

(1). 單位分數斜率單母角切割法：只取單位分數來當斜率，較大角稱為母角。

> **定理九：不對稱切割之單位分數斜率單母角切割法**
>
> **取** $I=\{a_n \mid a_n=\dfrac{1}{n}, n=1,2,3,\ldots\}$ **，則集合** I **為單位分數調和數列所成的集合。**
>
> **若依有序的方式依次給定** a_n **並取** a_{n+1} **，則** $\angle a_n \to \angle a_{n+1}+\angle a_{n(n+1)+1}$ **。**

由定理五之②，m'、n、n' 都以1代入即得證。

依定理九舉例，如圖(五)：

$\angle 1$　第一代

$\angle\frac{1}{2}$　$\angle\frac{1}{3}$　第二代計算 2 次

$\angle\frac{1}{3}$　$\angle\frac{1}{7}$　$\angle\frac{1}{4}$　$\angle\frac{1}{13}$　第三代計算 4 次

$\angle\frac{1}{4}$　$\angle\frac{1}{13}$　$\angle\frac{1}{8}$　$\angle\frac{1}{57}$　$\angle\frac{1}{5}$　$\angle\frac{1}{21}$　$\angle\frac{1}{14}$　$\angle\frac{1}{183}$　第四代計算 8 次

仔細觀察，$\angle\frac{1}{3}$、$\angle\frac{1}{4}$、$\angle\frac{1}{13}$ 都重複出現，可集中計算。於是把過程整理如下，表(二)：

第幾代	r 值(角平分線斜率，$P.8$ 的定義)	π 近似值(面積)
1	$\angle 1$　$\angle 1$ 即 $\frac{1}{m_1}$，分割出第二代 $\frac{1}{m_1+1}$ 的 $\angle\frac{1}{2}$，以及餘角 $\frac{1}{3}$	4
2	$\angle\frac{1}{2}+\boxed{\angle\frac{1}{3}}$　$\angle\frac{1}{3}$ 即 $\frac{1}{m_1(m_1+1)+1}=\frac{1}{1(1+1)+1}=\frac{1}{3}$	3.3333333333
3	$\angle\frac{1}{3}\times 2+\boxed{\angle\frac{1}{7}}$	3.2380952381
4	$\angle\frac{1}{4}\times 2+\angle\frac{1}{7}+\angle\frac{1}{13}\times 2$	3.1868131868
5	$\angle\frac{1}{5}\times 2+\angle\frac{1}{7}+\angle\frac{1}{13}\times 2+\angle\frac{1}{21}\times 2$	3.1677655678
6	$\angle\frac{1}{6}\times 2+\angle\frac{1}{7}+\angle\frac{1}{13}\times 2+\angle\frac{1}{21}\times 2+\angle\frac{1}{31}\times 2$	3.1591634172
7	$\angle\frac{1}{7}\times 3+\angle\frac{1}{13}\times 2+\angle\frac{1}{21}\times 2+\angle\frac{1}{31}\times 2+\angle\frac{1}{43}\times 2$	3.1547337384
8	$\angle\frac{1}{8}\times 3+\angle\frac{1}{13}\times 2+\angle\frac{1}{21}\times 2+\angle\frac{1}{31}\times 2+\angle\frac{1}{43}\times 2+\angle\frac{1}{57}\times 3$	3.1509743399

說明：

單母角：這是使用外切不對稱多邊形來逼近圓周率的其中一種方法。r 值最左邊底色為淺黃色的角度，就是最大的角，將其命名為**母角**，為倒數呈等差為1的調和數列，剩下右邊所有的角度都是被切下來的各代**餘角**。圖(四)計算繁瑣，重新規畫後**餘角遲早會併入母角，所以每代只要一次計算——分割最大的母角即可**，計算上相當簡潔。由於分割之前後代母角數量為1:1，故稱**單母角**。本文設定為**單位分數**，是單母角的其中一種切割法。

餘角併入母角：第 2 代切出來的餘角 $\frac{1}{3}$ ，在第 3 代加入了母角的行列，所以母角數量成為 2；第 3 代切出來的餘角 $\frac{1}{7}$，在第 7 代加入了母角的行列，所以到第 7 代時母角數量成為 3。此外，由於第 3 代母角數量成為 2，連帶著第 3 代被切下來的餘角 $\frac{1}{13}$ 數量也成為 2；相同地，第 7 代母角數量增加為 3，所以也使得第 7 代被切下來的餘角 $\frac{1}{57}$ 數量也成為 3。

運算實例：舉第 7 代為例，本來由第 6 代由 2 個 $\frac{1}{6}$ 母角，切出了 2 個第 7 代的母角 $\frac{1}{7}$ 與 2 個第 7 代的餘角 $\frac{1}{43}$ ，但是母角又因為併入第 3 代餘角，也是 $\frac{1}{7}$ ，而變成了 3 個。所以第 7 代總共有 3 個母角 $\frac{1}{7}$ ，加上 2 個第 4 代餘角 $\frac{1}{13}$ 、2 個第 5 代餘角 $\frac{1}{21}$ 、2 個第 6 代餘角 $\frac{1}{31}$ 、以及 2 的第 7 代餘角 $\frac{1}{43}$。而這些分數的加總，即角平分線斜率的總和，再 $\times 4$，就是 3.1547337384 。

(2). 母角、餘角數量計算法

觀察前 8 代的餘角數量，與併入母角時，母角的數量，列表如表(三)：

第幾代	餘角分母	數量	餘角併入母角時，該母角的數量－－條列	累計數
1				
2	3	1	1+1	2
3	7	1	1+(1*2)	3
4	13	2	1+(1*2)+(2*1)	5
5	21	2	1+(1*2)+(2*2)	7
6	31	2	1+(1*2)+(2*3)	9
7	43	2	1+(1*2)+(2*4)	11
8	57	3	1+(1*2)+(2*4)+(3*1)	14

說明：

第 2 代切下來的餘角$\frac{1}{3}$，其分母為 3，數量為 1，當被再併入第 3 代母角$\frac{1}{3}$時，第 3 代母角的數量就變成$1+1=2$。

第 3 代切下來的餘角$\frac{1}{7}$，其分母為 7，數量為 1，當被再併入第 7 代母角$\frac{1}{7}$時，第 7 代母角的數量，加上之前$\frac{1}{3}$的數量，就變成$1+(1\times 2)=3$。

也由於第 7 代母角的數量增為 3，所以第 8 代被切出來的餘角$\frac{1}{57}$的數量就增加為 3。而它在第 57 代併入母角$\frac{1}{57}$時，該母角數量就增加為$1+(1\times 2)+(2\times 4)+(3\times 1)=14$。對於第 7 代而言，本文將這個14命名為**累計數**。**累計數**是一個在單母角中為了求π值所得到的新數列。

(3). 用累計數將「單母角外切多邊形邊長的π近似值」進行代數化

定理十：單母角π值展開式

令離第K代最近的前面一個併入母角的餘角分母為$t\times(t-1)+1$，離第t代最近的前面一個併入母角的餘角分母為$s\times(s-1)+1$，第s代累計數為N_s，第t代累計數為N_t。

則第K代π近似值＝

$$4\times((\frac{1}{K}\times N_t)+(\frac{1}{t\times(t+1)+1}\times N_s)+(\frac{1}{(t+1)\times(t+2)+1}\times N_s)+\cdots$$

$$+(\frac{1}{s\times(s+1)\times(s\times(s+1)+1)+1}\times N_s)+(\frac{1}{(s\times(s+1)+1)\times(s\times(s+1)+2)+1}\times N_{s+1})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{t\times(t-1)\times(t\times(t-1)+1)+1}\times N_{t-1})+(\frac{1}{(t\times(t-1)+1)\times(t\times(t-1)+2)+1}\times N_t)+\cdots$$

$$+(\frac{1}{K\times(K-1)+1}\times N_t))$$

證明：N_s、N_t是累計數，累計數是一個在單母角中為了求π值所得到的新數列，方便我們做高位的運算。

2、多角不對稱切割：一次切成多(≥ 3)角之不對稱切割法。

(1). 多角切割理論

定理十一：不對稱切割之多角切割理論

母角 $r=\dfrac{1個r_n的總和-任取3個r_n相乘的總和+任取5個r_n相乘的總和-\cdots}{1-任取2個r_n相乘的總和+任取4個r_n相乘的總和-任取6個r_n相乘的總和+\cdots}$

證明：已知r的加法公式$r_{1+2}=\dfrac{r_1+r_2}{1-r_1r_2}\cdots$①，令$r_1=\dfrac{r_3+r_4}{1-r_3r_4}$代入①：

得$r_{2+3+4}=\dfrac{r_2+r_3+r_4-r_2r_3r_4}{1-r_2r_3-r_2r_4-r_3r_4}\cdots$②；　再令$r_2=\dfrac{r_5+r_6}{1-r_5r_6}$代入②：

得$r_{3+4+5+6}=\dfrac{r_3+r_4+r_5+r_6-r_3r_4r_5-r_3r_4r_6-r_3r_5r_6-r_4r_5r_6}{1-r_3r_4-r_3r_5-r_3r_6-r_4r_5-r_4r_6-r_5r_6+r_3r_4r_5r_6}\cdots$③；

∴歸納其規律性為，原母角r若要切成n個角，就可用如下具有規律性的等式來表示：

母角$r=\dfrac{1個r_n的總和-任取3個r_n相乘的總和+任取5個r_n相乘的總和-\cdots}{1-任取2個r_n相乘的總和+任取4個r_n相乘的總和-任取6個r_n相乘的總和+\cdots}$

若$n=2$，則計算只到「任取2個r_n相乘的總和」，不必計算到3個r_n以後，其餘依此類推。

在本文中，僅就公式②與公式③來做示範與討論，其餘可自行代入定理十一依此類推。

(2). 多角切割之多母角：二等分母角+一餘角&三等分母角+一餘角

定理十二

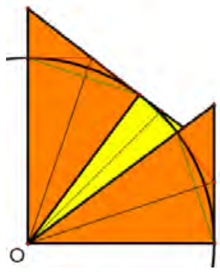
令原母角$r_o=\dfrac{n_o}{m_o}$**，第二代母角**$r=\dfrac{n}{m}$**，餘角**$r_r=\dfrac{n_r}{m_r}$**，所有的**m**、**n**都是自然數，且** $n_o=1$、$n=1$。

則　當$r=\dfrac{n}{m}$**為二等分母角，且餘角**r_r**值為最小時，**$m=2m_o+1\cdots$❶

當$r=\dfrac{n}{m}$**為三等分母角，且餘角**r_r**值為最小時，**$m=3m_o+1\cdots$❷

證明：若想切出兩個較大的相等的角，加上一個餘角：

以角平分線斜率$=1$(即90°角)為例，如圖(六)。



圖(六)

由②可推得，當$m\leq 2m_o$時，分子將出現負數，矛盾；

∴二等分角的m值必須$>2m_o$。

∵若希望餘角r_r能越小，則二等分角r必須越大，則m必須越小。

∴**當**$m=2m_o+1$**時，餘角**r_r**值為最小**。以$P.6$的方法，**更動加減符號**後，將$m=2m_o+1$代入，

得 $r_r=\dfrac{m_o}{2m_o^{\ 3}+2m_o^{\ 2}+2m_o+1}>0\cdots④$，同理，由③可推得，當 $m\le 3m_o$ 時，分子將出現負數，矛盾；∴三等分角的 m 值必須 $>3m_o$ 。

∵若希望餘角 r_r 能越小，則三等分角 r 必須越大，則 m 必須越小。

∴當 $m=3m_o+1$ 時，餘角 r_r 值為最小。

令 $m=3m_o+1$，代回**更動加減號**後的原式，得 $r_r=\dfrac{9m_o^{\ 2}-2m_o-2}{27m_o^{\ 4}+27m_o^{\ 3}+27m_o^{\ 2}+16m_o+2}>0\cdots⑤$

以二等分母角+一餘角，利用本頁的公式④來演算後列表，如表(四)：

第幾代	r 值(角平分線斜率， $P.5$ 的定義)	π 近似值
1	$\angle 1$	4
2	$\angle\frac{1}{3}\times 2+\boxed{\angle\frac{1}{7}}$ 將 $m_o=1$ 代入 $\frac{m_o}{2m_o^{\ 3}+2m_o^{\ 2}+2m_o+1}$，即可得 $\angle\frac{1}{7}$	3.2380952381
3	$\angle\frac{1}{7}\times 5+\angle\frac{3}{79}\times 2$	3.1609403255
4	$\angle\frac{1}{15}\times 10+\boxed{\angle\frac{3}{79}}\times 2+\angle\frac{7}{799}\times 5$	3.1456831588
5	$\angle\frac{1}{31}\times 22+\angle\frac{7}{1226}\times 2+\angle\frac{7}{799}\times 5+\angle\frac{15}{7231}\times 10$	3.1425817748
6	$\angle\frac{1}{63}\times 44+\angle\frac{7}{1226}\times 2+\boxed{\angle\frac{7}{799}}\times 5+\angle\frac{15}{7231}\times 10+\angle\frac{31}{61567}\times 22$	3.1418323425
7	$\angle\frac{1}{127}\times 93+\boxed{\angle\frac{7}{1226}}\times 2+\angle\frac{9}{10148}\times 5+\angle\frac{15}{7231}\times 10+\angle\frac{31}{61567}\times 22$ $+\angle\frac{63}{508159}\times 44$	3.1416538108
8	$\angle\frac{1}{255}\times 188+\angle\frac{559}{312637}\times 2+\angle\frac{9}{10148}\times 5+\angle\frac{15}{7231}\times 10$ $+\angle\frac{31}{61567}\times 22+\angle\frac{63}{508159}\times 44+\angle\frac{127}{4129279}\times 93$	3.1416079136

說明：兩等分角使用的是分母約為等比的切割，逼近速度果然比使用分母呈等差的表(二)快得多了。第 2 代的餘角 $\angle\frac{1}{7}$ 直接併入第 3 代的母角，但是第 4 代的餘角 $\angle\frac{3}{79}$ 就必須切割成 $\angle\frac{1}{31}$ 與 $\angle\frac{7}{1226}$ ，然後以 $\angle\frac{1}{31}$ 併入第 5 代的母角，留下 $\angle\frac{7}{1226}$ ；然後 $\angle\frac{7}{1226}$ 在第 7 代時又要再切割一次，以 $\angle\frac{1}{255}$ 併入第 8 代的母角，留下餘角 $\angle\frac{559}{312637}$ 。第 6 代的 $\angle\frac{7}{799}$ 也是類推。

表(四)逼近速度明顯表(二)更快。

以三等分母角+一餘角，利用 $P.13$ 的公式⑤來演算後列表，如表(五)：

第幾代	r 值(角平分線斜率， $P.5$ 的定義)	π 近似值
1	$\angle 1$	4
2	$\angle\frac{1}{4}\times 3+\angle\frac{5}{99}$ 將 $m_o=1$ 代入 $\frac{9m_o^{\ 2}-2m_o-2}{27m_o^{\ 4}+27m_o^{\ 3}+27m_o^{\ 2}+16m_o+2}$，即可得 $\angle\frac{5}{99}$	3.2020202020
3	$\angle\frac{1}{13}\times 9+\boxed{\angle\frac{5}{99}}+\angle\frac{134}{9138}\times 3$	3.1472194545
4	$\angle\frac{1}{40}\times 29+\angle\frac{75}{158701}+\boxed{\angle\frac{134}{9138}\times 3}+\angle\frac{1493}{835239}\times 9$	3.1422092739
5	$\angle\frac{1}{121}\times 90+\angle\frac{75}{158701}+\boxed{\angle\frac{7076}{1105832}\times 3}+\angle\frac{1493}{835239}\times 9$ $+\angle\frac{14318}{70891842}\times 29$	3.1416615046
6	$\angle\frac{1}{364}\times 276+\angle\frac{75}{158701}+\angle\frac{132488924}{146522362168}\times 3+\angle\frac{1493}{835239}\times 9$ $+\angle\frac{14318}{70891842}\times 29+\angle\frac{131525}{5835919179}\times 90$	3.1416003558

說明：值得注意的是，$\angle\frac{5}{99}=\angle\frac{1}{40}\times 2+\angle\frac{75}{158701}$，一口氣切出了兩個母角。

$\angle\frac{7076}{1105832}$ 的情況也一樣。

第 6 代切割出來的多邊形邊數為 $(276+1+3+9+29+90)\times 4=1632$。

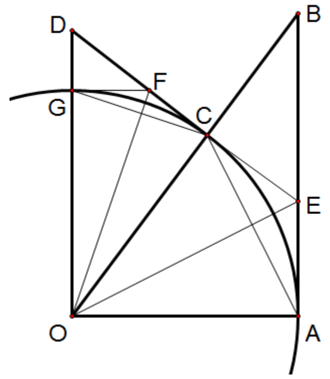
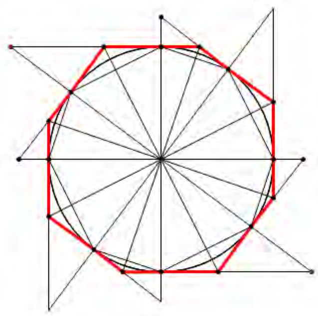
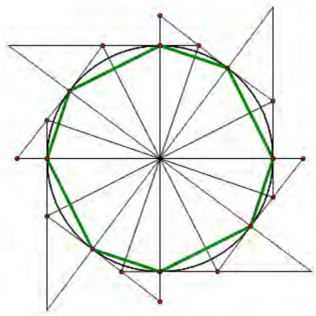
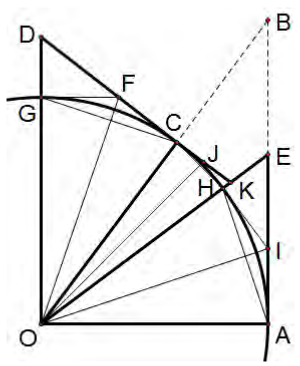
本文至此，已經發展出以有理數的角平分線斜率來分割角度的『不對稱切割法』，並做了把一個斜率一次切成兩個、三個、四個的好幾代示範。若想一次做更多的切割，則代入 $P.12$ 的**定理十一**就可推演出來。

這是以不對稱外切多邊形面積來逼近 π 值的作法，有理數計算效率明顯高於開根號。

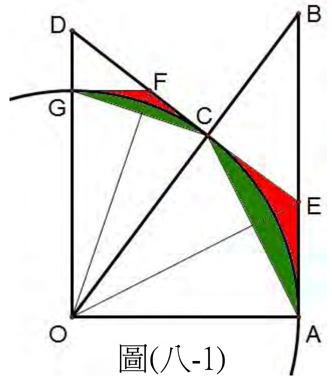
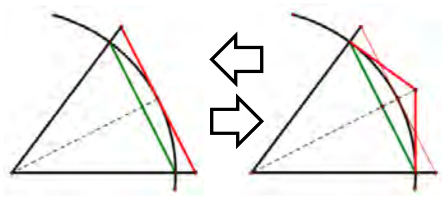
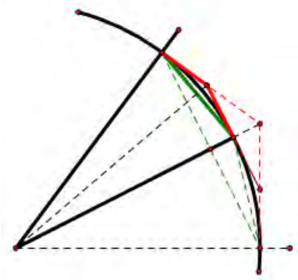
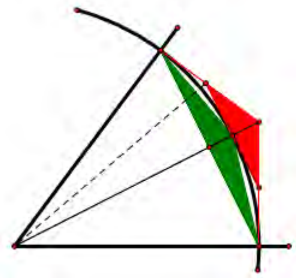
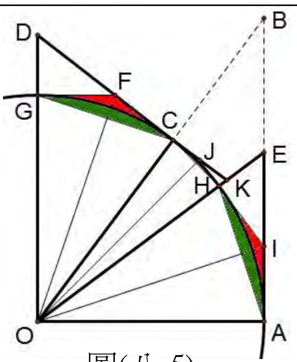
下個單元－－將研究以外切多邊形配合內接多邊形來運算，以發展出效率極高的『加權校正法』。

三、加權校正法——以外切內接多邊形面積，配合**加權比例常數**來求π值的方法

回顧上個單元，以**多邊形邊長**來求π值的操作邏輯，用表格來說明，如表(六)：

第一次切割	如圖(七-1)，以兩個比例為(3,4,5)的相似畢氏三角形的兩個銳角，即可將90°角分割為不等的兩部分，即$\angle AOB$與$\angle COD$，由表(一)可知，其r值各為$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$。作角平分線來等分這兩個角，就會發現：$\overline{AE}+\overline{CE}<\overline{AB}$，$\overline{CF}+\overline{FG}<\overline{CD}$(其中$\overline{AE}=\overline{CE}$，$\overline{CF}=\overline{GF}$)故$2\overline{AE}+2\overline{CF}<\overline{AB}+\overline{CD}$，所以透過數次不對稱切割後，斜率和(有理數$r$)會更逼近弧長。	 圖(七-1)
計算π值	將這90°角的圖形複製到其他象限，就可得到如圖(七-2)以△AOE之類的外切△外邊構成的外切多邊形(紅線)；與如圖(七-3)以△AOC之類的內接△外邊構成的內接多邊形(綠線)。可用這兩種多邊形來夾擊半圓周長π。當設定半徑$\overline{OA}=1$時，半圓周長$=\pi$，依斜率計算，$\overline{AE}=\frac{1}{2}$，$\overline{CF}=\frac{1}{3}$，紅線多邊形半周長$=4\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=3.333...$；綠線多邊形半周長依此類推。**本文於目的二僅做外切紅線示範，但捨棄內接綠線，因為在單位圓中，當外切單一分量為r時，內接單一分量將成為$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$，易出現無理數。若改用面積就不會。**	 圖(七-2)  圖(七-3)
第二次切割—遞迴	由定理四、五、六，可得到以有理數來切割角度的方法。已知$\angle 1\rightarrow\angle\frac{1}{2}+\angle\frac{1}{3}$，以相同方法可得$\angle\frac{1}{2}\rightarrow\angle\frac{1}{3}+\angle\frac{1}{7}$。即，$\angle AOB\ (r=\frac{1}{2})$可分割成另外兩個$r$值各為$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{7}$的$\angle AOE$與$\angle COK$角，如圖(七-4)。可得到更逼近$\pi$值的級數和。	 圖(七-4)

在**單位圓**上，**半圓周長**＝π，**面積**＝π，爰此，本章節要發展由**面積**出發之**校正方法**，表(七)：

構想	當可以計算出圖(八-1)的紅綠色面積比時，只要先得出外切箏形 $OAEC, OCFG$ 與內接△ OAC, OCG 的面積，再加權計算，就可得到更精確的扇形面積。其中 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$ 是角平分線。	 圖(八-1)
	圖(八-2)左圖外切△與內接△形狀相似；右圖外切部分是圖(八-1)的箏形。箏形與外切△都各可分割成兩個小△，∵左右兩圖的四個小△是全等的，∴箏形與外切△面積相等。本文使用右邊箏形來做推算。	 圖(八-2)
公式推演	將圖(八-2)左圖做更進一步的角平分線分割，外切與內接多邊形就會變成如圖(八-3)的紅綠色實線部分。若與上一代外切與內接多邊形比較，就會發現經過再一次的角平分線分割，外切箏形減少如圖(八-4)的紅色面積，內接△則增加綠色面積。若求得： 1. 圖(八-4)的紅、綠色面積。 2. 第二代角平分線的斜率 r 值。 則可輕易以遞迴來逼近圖(八-1)的紅、綠色面積。	 圖(八-3)  圖(八-4)
實際運用	事實上，為了方便計算，過程中對分母做了一些約簡，使得該紅綠面積的比值在 r 值越小時會越精確。配合第二單元的不對稱切割，來快速切割出更小的**有限項** r 值，如圖(八-5)，再加上**加權校正法**的校正，就可以得到更精確的 π 值。	 圖(八-5)

(一)、外切內接多邊形與圓面積之差比：討論圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，並導出圓面積校正公式。

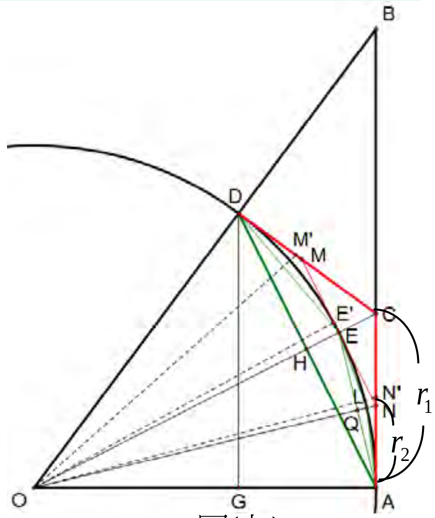
預備定理四：面積差縮小定理

如圖(九)，在圓心為 O 之單位圓上取箏形 $ACOD$，令 $\overline{OC}$ 之斜率為 $r_1=\frac{n}{m}$；(1). 若 $\overline{OC}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\angle AOD$、$\angle AOE$ 的角平分線。則：$\triangle AOD$ 其面積為 $\frac{mn}{m^2+n^2}\cdots$①

$\overline{ON}$ 之斜率 $r_2=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}+m}\cdots$②；當 $r_1=\frac{n}{m}$ 夠小時，$\triangle EAN$ 面積約為 $\frac{1}{8}\triangle DAC\cdots$③；

(2). 若 $\overline{ON'}$、$\overline{OM'}$ 分別為 $\angle AOE'$、$\angle EOD'$ 的角平分線，$\overline{AN'}=\frac{r_1}{2}$，則 $AODE'-\triangle AOD$ 之面積為 $\frac{2r_1^3}{4+5r_1^2+r_1^4}\cdots$④，且箏形 $AODC-(AOE'N'+E'ODM')=\frac{r_1^3}{4+2r_1^2}\cdots$⑤

利用$\triangle AOB$與$\triangle GOD$的相似，就可以得出$\overline{DG}$的高與內接$\triangle AOD$的面積…①。角平分線特性，即可得出$r_2\cdots$②。再利用相似形的證明可得出差值的縮小…③。將$\angle r\to\angle\frac{r}{2}+\angle\frac{r}{2+r^2}$簡單切割之算式代入面積計算，即可得④，此為內接△之擴大，同理可證外切箏形之面積縮小值⑤。於$P.15$所提**若改用面積就不會**出現無理數，在預備定理四之①獲得證實。

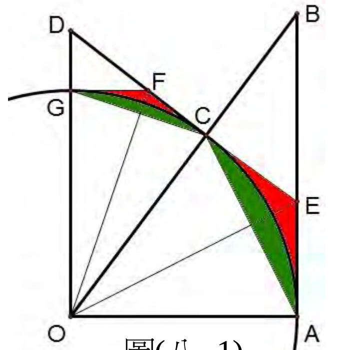


圖(九)

預備定理五：誤差趨近定理&誤差夾擊定理(一)

如圖(八-1)，令 $S=$ 箏形面積和，$T=$ 頂點在圓心之等腰△面積和，$R=$ 扇形面積和；則 $\frac{1}{2}<\frac{(S-R)}{(R-T)}<\frac{1+r^2}{2}\cdots$①

且當 r 值越小時；$\frac{(S-R)}{(R-T)}\to\frac{1}{2}\cdots$②



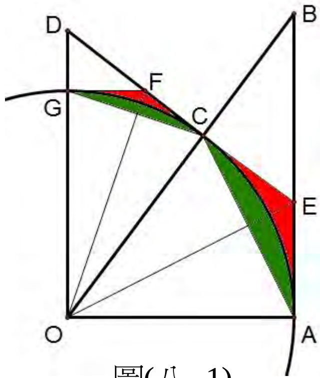
圖(八-1)

將預備定理四的②代回r_1與①遞迴，就可得到每分割一代，S與T對R的面積逼近比率。當分割多次後m、n差距太大時，n可忽略，即易求其累計的極限值，可求得當角度非常小時，圖(八-1)紅綠比約為$1:2$，其比值$\frac{1}{2}$即為**加權比例常數**。

m、n差距太大時，亦即當r值越小時，其差比$\dfrac{S-R}{R-T}$會往**加權比例常數**$\dfrac{1}{2}$收斂，而且再經過推演，還可以把誤差區間限制在僅僅$\dfrac{r^2}{2}$的範圍內。若以預備定理四之④⑤代入，也可輕易得$\dfrac{(S-R)}{(R-T)} \approx \dfrac{(1+r^2)(4+r^2)}{2(4+2r^2)}$，一樣可以很容易導出①、②。預備定理之④⑤，是最基本的簡單切割法，誤差範圍也約為$\dfrac{r^2}{2}$，若代入$\angle r \to \angle\dfrac{r}{3}\times 2+\angle\dfrac{3r-r^3}{9+5r^2}$之類的多母角切割法，**加權比例常數**雖仍是收斂至$\dfrac{1}{2}$，但誤差區間更窄。**本文僅就簡單切割法來作示範，餘依此類推。**

預備定理六：誤差夾擊定理(二)

如圖(八-1)，令$S=$箏形面積和，$T=$內接△面積和，$R=$扇形面積和；則$\dfrac{1+r^2}{2+r^2}<\dfrac{(S-R)}{(R-T)}<\dfrac{1+r^2}{2}$。



圖(八-1)

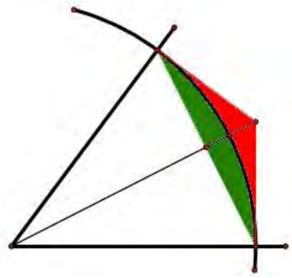
$(S-R):(R-T)$可化簡為$(1+r^2):(\sqrt{1+r^2}+1)$，利用$\sqrt{1+r^2}>1$的特性，就可巧妙再將下限又往上提高一點點。

定理十三：加權校正法之扇形面積夾擊定理

如圖(十)，在單位圓上，令外切箏形面積為S，內接△面積為T，扇形面積為R；則

$$\frac{2S+(1+r^2)T}{3+r^2}<R<\frac{(2+r^2)\times S+(1+r^2)\times T}{3+2r^2}\cdots①$$

若$r\to 0$時，$R\to\dfrac{2S+T}{3}$ $\cdots②$


圖(十)

由預備定理六，可得①；再以$r\to 0$代入①，可得②。

由①，再配合**箏形面積**$S=\dfrac{n}{m}$，以及預備定理四之①**內接△面積**$T=\dfrac{mn}{m^2+n^2}$，可得

加權校正上限法：$\pi = 4\times\sum(\dfrac{n}{m}\times\dfrac{2+r^2}{3+2r^2}+\dfrac{mn}{m^2+n^2}\times\dfrac{1+r^2}{3+2r^2}) = 4\times\sum\dfrac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$

加權校正下限法：$\pi = 4\times\sum(\dfrac{n}{m}\times\dfrac{2}{3+r^2}+\dfrac{mn}{m^2+n^2}\times\dfrac{1+r^2}{3+r^2}) = 4\times\sum\dfrac{3r}{3+r^2}$

由②可得**加權校正逼近法**：$\pi = 4\times\sum(\dfrac{n}{m}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{mn}{m^2+n^2}\times\dfrac{1}{3}) = 4\times\sum\dfrac{r}{3}(2+\dfrac{1}{1+r^2})$

以這些算式，可得下一頁的定理十四。

（二）、不對稱切割+加權校正法

1. π 值校正——將加權校正法實際代入各類不對稱切割法，以校正 π 值

定理十四

單位圓中，令 $r=\frac{n}{m}$ 為經不對稱切割後之扇形角平分線斜率，則

外切多邊形面積法： $\pi = 4\times\sum\frac{n}{m} = 4\times\sum r$

內接多邊形面積法： $\pi = 4\times\sum\frac{mn}{m^2+n^2} = 4\times\sum\frac{r}{1+r^2}$

加權校正上限法： $\pi = 4\times\sum(\frac{n}{m}\times\frac{2+r^2}{3+2r^2}+\frac{mn}{m^2+n^2}\times\frac{1+r^2}{3+2r^2}) = 4\times\sum\frac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$

加權校正下限法： $\pi = 4\times\sum(\frac{n}{m}\times\frac{2}{3+r^2}+\frac{mn}{m^2+n^2}\times\frac{1+r^2}{3+r^2}) = 4\times\sum\frac{3r}{3+r^2}$

內接多邊形面積法＜下限法＜π 值＜上限法＜加權校正逼近法＜外切多邊形面積法

證明：由定理八、預備定理四、定理十三，即可得諸列算式。

2. 單母角不對稱切割法：表(八)

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.3333333333	2.8000000000	3.1444991790	3.1318681319
3	3.2380952381	2.9600000000	3.1423061240	3.1389961390
4	3.1868131868	3.0541176471	3.1417690886	3.1409244694
5	3.1677655678	3.0903167421	3.1416547376	3.1413528169
6	3.1591634172	3.1069487587	3.1416211453	3.1414814006
7	3.1547337384	3.1155974074	3.1416089684	3.1415285959
8	3.1509743399	3.1229820227	3.1416012898	3.1415585914
…	……			
48	3.1417717527	3.1412345360	3.1415926581	3.1415926357
49	3.1417638022	3.1412504302	3.1415926577	3.1415926372
50	3.1417564749	3.1412650788	3.1415926574	3.1415926385
誤差	0.0001638213	-0.0003275748	0.0000000038	-0.0000000151

說明：最後一列是每欄的第 50 代數字與 3.1415926536 的差值，可看成誤差值。

由表(八)可知，經過 50 代分割，未經過校正的外切或內接三角形求出的圓周率逼近值已能準確到小數點以下第 3 位。使用加權校正還可以達到小數點以下第 7 位。

內接的面積的差值-0.0003275748 其絕對值約為外切 0.0001638213 的 2 倍，這與預備定理五的證明——加權比例常數會往 $\frac{1}{2}$ 收斂——的推算完全符合。

3. 多母角不對稱切割法

同樣可以用表(四)的三等分母角+一餘角的資料，進行進一步運算出表(九)：

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.2380952381	2.9600000000	3.1423061240	3.1389961390
3	3.1609403255	3.1033600000	3.1416189773	3.1414893433
4	3.1456831588	3.1334328326	3.1415938369	3.1415879399
5	3.1425817748	3.1396156393	3.1415927219	3.1415923806
6	3.1418323425	3.1411133471	3.1415926576	3.1415926377
7	3.1416538108	3.1414703438	3.1415926538	3.1415926526
8	3.1416079136	3.1415621339	3.1415926536	3.1415926535
誤差	0.0000152600	-0.0000305197	0.0000000000	-0.0000000001

說明：最後一列是每欄的第 8 代數字與 3.1415926536 的差值。

表(九)第 6 代的逼近值就已經介於表(九)的第 49、50 代之間，而第 8 代甚至精確度已經達小數點以下第 9 位，若計算總演算次數七次，幾乎是每演算一次就往小數點後推 1 位多。可見一次切多角的等分法，比一次只切下一角的方法速度快很多。

再以表(五)的三等分母角+一餘角的資料，加以推算得表(十)：

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.2020202020	3.0250356198	3.1418487253	3.1406240898
3	3.1472194545	3.1303780367	3.1415948345	3.1415839782
4	3.1422092739	3.1403598689	3.1415926789	3.1415925522
5	3.1416615046	3.1414549571	3.1415926539	3.1415926523
6	3.1416003558	3.1415772491	3.1415926536	3.1415926536
誤差	0.0000077022	-0.0000154045	0.0000000000	0.0000000000

說明：最後一列是每欄的第 6 代數字與 3.1415926536 的差值。若計算到小數點以下第 14 位，則上限與下限的誤差數字為 0.00000000000386 與-0.00000000001541。

經過觀察，外切多邊形面積的精確度高於內接，加權校正上限的精確度也高於下限。

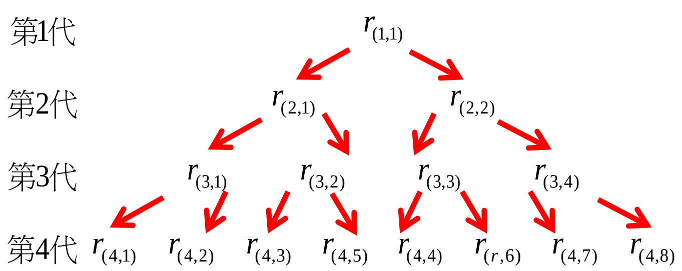
四、π 值代數式——以有限項有理數和來表示 π 近似值

定理十五：π 值逼近定理

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，k 為切割的世代數，

若 $k \to \infty$，則 $\pi = \ 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)}}{3}(2 + \frac{1}{1 + r_{(k,t)}^2})$

證明：如圖(十一)，利用定理十四即可得證。



圖(十一)

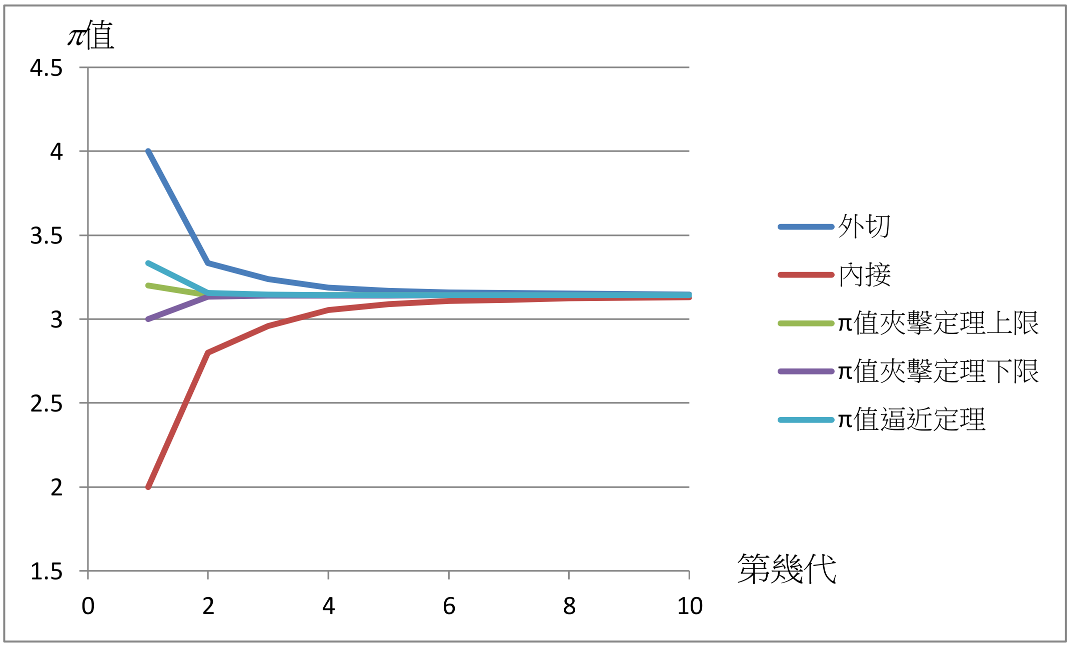
定理十六：π 值夾擊定理

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，

第 k 代 π 值區間為 $4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{3r_{(k,n)}}{3 + r_{(k,n)}^2}) < \pi < 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,n)} \times (3 + r_{(k,n)}^2)}{3 + 2r_{(k,n)}^2})$

證明：如圖(十一)，利用定理十四即可得證。

π 值收斂圖：茲將不對稱切割研究之各種逼近法收斂情況圖示如下，圖(十二)



以單母角不對稱切割為例，前十代數值用 *Excel* 製作出的 *xy* 散佈圖。

由夾擊定理與逼近定理，來對照外切與內接的曲線，就可以很明顯感覺到**加權校正法**的威力。

五、縱貫古今——幾何、分析一路通

(一). π 值的計算歷史：表(十一)

(1).實驗時期「周三徑一」	在阿基米德以前，π 值的測定依靠實物測量。
(2).幾何法時期「反覆割圓」	以正多邊形找尋 π 值。
(3).分析法時期「無窮級數」	以無限項級數之和或乘積的表達式來求 π 值。
(4).電腦時代「自動化計算」	以舊版或改良版的無窮級數，交給電腦自動計算。

本文的方法，根據這種分類應該屬於第(2)期的幾何法。不同的是，本文跳脫等分切割的想法，改採**「不對稱有理切割」**的方式來逼近 π 值，而且還加上了獨創的**「加權校正法」**。

(二). 不對稱切割與幾何法效率比較：

1. 等分切割法之無理數 V.S.不對稱切割法之有理數：

阿基米德(Archimedes，287BC － 212BC)用內接外切正 96 邊形得 π 介於 $3\frac{1}{7} \sim 3\frac{10}{71}$ 之間。

劉徽(263 年)只用內接多邊形的「割圓術」計算到正 3072 邊形面積得 $\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416$ 。

祖沖之(466 年)以劉徽的方法，計算到內接正 24576 邊形，得出 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 以及密率 $\frac{355}{133}$ 。

荷蘭**魯道爾夫萬科倫**(Ludolph Van Ceulen， 1540 - 1610 年) 算了 40 年計算到正 2^{62} 邊形，得出了 35 個小數位的 π 值。

以上為較知名的幾何法時期的成就，共同的特點就是都採用等分切割，就會遇到開根號。

用韋達(Francois Viète)公式來表現半徑為 1 之圓內接正 $2^n\,(n = 2,3,4,5\ldots)$ 邊形的面積 S_{2^n} ：

$$S_4 = 2 \;,\; S_8 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \;,\; S_{16} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \;,\; S_{16} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

S_8 開了一次根號，S_{16} 開了兩次根號，S_{32} 開了三次根號。依此類推，S_{2^n} 將會開 $n-2$ 個根號。

若要把精確度往下再推進一位，所有前面曾開過的根號，都還要同步再繼續算下去…這是很龐大的計算量。祖沖之已經算到 $24576 = 3 \times 2^{13}$ 邊形，只能準確到小數點以下第七位，**等分切割的效率會被開根號完全侵蝕掉。**以本文的三等分母角來算，五次推算就能準確到第五位，加上加權校正法還能準確到第十位，而且總共也只分割成 1632 邊形而已，效率明顯高多了。

2. 劉徽「割圓術」V.S.加權比例常數：

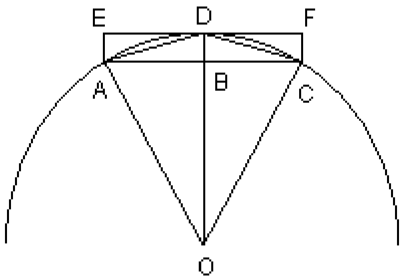
割圓術的誤差：劉徽注意到可以用『出入相補』的面積逼近法，以圖(十三)來做計算，

原始外切內接的面積差：$\frac{n}{m}-\frac{mn}{m^2+n^2}\approx\frac{n^3}{m^3}\cdots$①；

再一次分割內接所增加的面積$\approx\frac{n^3}{2m^3}$(即$\triangle ACD$)$\cdots$②

以②為基礎，割圓術再往外增加的面積$\approx\frac{n^3}{2m^3}$，

$\therefore\triangle AOC$之外總共增加了$\approx\frac{n^3}{m^3}$(即長方形$ACFE$)$\cdots$③

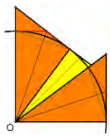


圖(十三)

由②、③可知，**割圓術估計圓面積**應介於內接多邊形加上$\frac{n^3}{m^3}$與加上$\frac{n^3}{2m^3}$之間，若取中間值則為$(\frac{n^3}{2m^3}+\frac{n^3}{m^3})\times\frac{1}{2}=\frac{3n^3}{4m^3}=\frac{3}{4}\times$原始外切內接的面積差；事實上劉徽只留下模糊的$\pi$值區間，他一直沒真正算出該值的落點，以至於無法有效縮小誤差範圍。

而本文**加權比例常數**，以內接為基準，與圓面積之差$\approx\left(\dfrac{\frac{n^3}{2m^3}}{\frac{n^3}{2m^3}+\frac{n^3}{4m^3}}\right)\times\frac{n^3}{m^3}=\frac{2n^3}{3m^3}=\frac{2}{3}\times$原始外切內接的面積差。觀察所有外切、內接的數據，再與已知圓周率做比較，**可以知道$\frac{2}{3}$才是正解。**

(三). 發展不對稱切數值分析法之計算公式



1. 反函數徑度量累積法：

英國的**格里哥利**(James Gregory)在 1671 年：

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

德國的**萊布尼茲**(Gottfried Leibniz)也在 1674 年提出$x=1$的多項式：

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

文獻回顧到此，赫然發現這兩位數學家可能已幫本文之不對稱切割法，開啟一道踏入以無窮級數之分析法來結合電腦自動化計算π值之大門。

萊布尼茲的$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$即為本文$P.10$(表二)的第一代角平分線斜率1之反函數$(\arctan)$所對應的徑度量$\frac{\pi}{4}$的交錯級數和。在此觀點下，$P.10$的每一代都可以對應

一個分析法的π值計算式：表(十二)

第幾代	單母角不對稱切割之斜率和	$\frac{\pi}{4}$的反函數表示法
1	$\angle 1$	$\frac{\pi}{4}=\arctan 1$
2	$\angle\frac{1}{2}+\angle\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$
3	$\angle\frac{1}{3}\times 2+\angle\frac{1}{7}$	$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$
…	…	…

上表是採用單母角不對稱切割所得到之一系列的π值計算公式。

然而反函數展開式的表現法，在結合$P.12$「定理十一：不對稱切割多角切割理論」所得到的成果可以得到效率更高的展開式。如：二母角不對稱切割法：表(十三)

第幾代	二母角不對稱切割之斜率和	$\frac{\pi}{4}$的反函數表示法	備註
1	$\angle 1$	$\frac{\pi}{4}=\arctan 1$	
2	$\angle\frac{1}{3}\times 2+\angle\frac{1}{7}$	$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$	
3	$\angle\frac{1}{7}\times 5+\angle\frac{3}{79}\times 2$	$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{79}$	**尤拉**提出之展開式
…	…	…	

利用三母角不對稱切割法，同樣也可得出相對應$\frac{\pi}{4}$反函數的展示法。

利用定理十一，計算到四母角切割$r_r=\frac{r_o-4r+4r^3-6r^2r_o+r^4r_o}{1+4rr_o-6r^2+r^4-4r^3r_o}$，並取$r_o=1$，$r=\frac{1}{5}$代入，可得$r_r=-\frac{1}{239}$，即$\frac{\pi}{4}\to\angle\frac{1}{5}\times 4-\angle\frac{1}{239}$。該展開式，即為$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$，此為英國**梅欽**(Machin，1680 – 1751 年)在 **1706 年**所提出的**梅欽公式**。

在文獻中，我們還找到下列**梅欽類公式(Machin-like formula)**：

高野喜久雄(Kikuo Takano) 1982 年提出的：

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{49}+32\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}+12\arctan\frac{1}{110443}$$

黃見利(Hwang Chien-Lih) 2003 年提出的：

$$\frac{\pi}{4}=183\arctan\frac{1}{239}+32\arctan\frac{1}{1023}-68\arctan\frac{1}{5832}+12\arctan\frac{1}{113021}$$

$$-100\arctan\frac{1}{6826318}-12\arctan\frac{1}{33366019650}+12\arctan\frac{1}{43599522992503626068}$$

茲將本章節的心得整理如下：

(1). $\arctan\frac{1}{239}$ 似乎不斷出現在這類公式中，可能類梅欽公式的尋找有困難，所以只能依賴既有的公式繼續推演。**依本研究的心得，善用不對稱切割之多角切割理論來重複組合使用，除了上述的公式都可推算出來之外，還可自行設計完全不同的公式。**

(2). **梅欽類公式(Machin-like formula)的效率探討：**
這類公式，都可以歸結到 $P.29$ 的 π 值比較(2)、(3)：任兩公式互相比較，只要最大的母角越小、以及被切割出來的角的數量越多，就會越準確。檢視效率的簡單方法為**——將各項視為斜率，加總後$\times 4$，再與 π 值比較，即可分出高低。**

依此法排序：梅欽＜尤拉＜高野＜黃＜ $P.13$ 二母角的第八代＜ $P.14$ 三母角的第六代

事實上，本研究的不對稱切割法，可以設計出任何一種效率更高的梅欽類公式。

(3). **不對稱切割之斜率展開式具有類似古埃及分數之特性：**
這些梅欽類公式的設計者，似乎喜歡把 arctan 設計成**單位分數**的展開式。那麼是否所有有理數的角平分線斜率，都可以設計成單位分數的斜率和呢？

定理十七：不對稱切割之單位分數切割理論與展開式

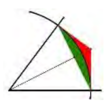
令第 k 代 $\angle A_k=\angle B_k+\angle C_k$，$\angle A_k$、$\angle B_k$、$\angle C_k$ 之角平分線斜率各為 $r_{A_k}=\frac{n_{A_k}}{m_{A_k}}$、$r_{B_k}=\frac{1}{m_{B_k}}$、$r_{C_k}=\frac{n_{C_k}}{m_{C_k}}$，$\angle C_k=\angle A_{k+1}$；$\{m_{A_k},n_{A_k},m_{B_k},m_{C_k},n_{C_k},k\}\subset N$，$(m_{A_k},n_{A_k})=1$，$(m_{C_k},n_{C_k})=1$；

若 $\frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}<m_{B_k}<1+\frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$，**則** n_{C_k} **為一遞減且收斂至**1**之數列…①**

若 $n_{C_t}=1$，**則** $\angle\frac{n_{A_1}}{m_{A_1}}\to\angle\frac{1}{m_{B_1}}+\angle\frac{1}{m_{B_2}}+\angle\frac{1}{m_{B_3}}\ldots+\angle\frac{1}{m_{B_t}}+\angle\frac{1}{m_{C_t}}$ **…②**

證明：利用 $\frac{n_{C_{k+1}}}{n_{C_k}}<1$ 的方式即可證①，再證②；$\because\frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}<m_{B_k}<1+\frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$，$\therefore m_{B_k}$ 僅有一組解。

2. 不對稱切割單一累積分量的精確度：



瑞士的**尤拉**(Euler，1707 - 1783 年）在 1755 年(參考資料六)：

$$\arctan x=\frac{x}{1+x^2}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\ldots\right)$$

尤拉這一個級數中的每一項都是正數，換句話說，取 S_n =多項式前 n 項的和，則 S_n 為一遞增數列， n 取越大，所得到的多項式和就會越接近此斜率所對應到的徑度量。以下，取一個經過切割後很小很小的斜率 r 值，將它代入尤拉的多項式中，並用不對稱切割之上下限去估計尤拉多項式要取幾項，其所對應的徑度量才會落入不對稱切割之上下限中。

給定斜率 $r<1$， S_n 為尤拉多項式前 n 項的和。

由 π 值夾擊定理： $\frac{3r}{3+r^2}<\arctan r<\frac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$ ，令 $p_1=\frac{3r}{3+r^2}$ ， $q_1=\frac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$ ；

p_2, q_2 為以 $\angle r \to \angle\frac{r}{2} + \angle\frac{r}{2+r^2}$ 代入原式之值， p_3, q_3 為以 $\angle r \to \angle\frac{r}{3} \times 2 + \angle\frac{3r - r^3}{9+5r^2}$ 代入原式之值；將夾擊定理的上下限，與**尤拉**的多項式比較，得：

$$\frac{r}{1+r^2}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)\right) < \frac{3r}{3+r^2} < \frac{r}{1+r^2}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^2\right) < \frac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$$

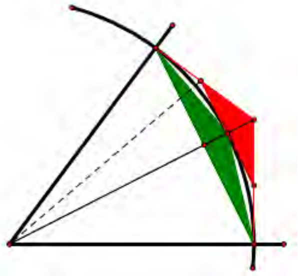
多項式前二項和 S_2 ＜ π 值夾擊定理下限＜多項式前三項和 S_3 ＜ π 值夾擊定理上限

同理，可計算得： p_2(簡單不對稱切割)＜ S_3 ＜ p_3(多母角切割)＜ $\arctan r$ ，故得證。

S_3 與 p_2 非常接近，相差約在 $\frac{47r^5}{360}$ ，與 p_3 距離較遠，相差約為 $\frac{19r^3}{243}$ 。

3. 使用不對稱切割來推演出全新的加權校正法之可能性

本文的加權校正法源自於對右圖紅綠色面積之探討，使用角平分線作圖後，以圖(十四)的面積紅綠色面積比，來類推圖(十五)的面積比。承預備定理五、預備定理六之討論，圖(十四)的紅綠色面積比：



圖(十四)

紅：綠 $=(1+r^2):(\sqrt{1+r^2}+1)\cdots$① $(P.18)$

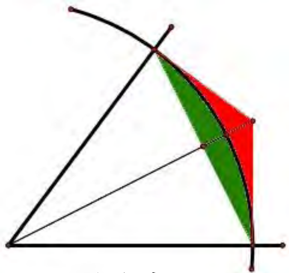
使用簡單不對稱切割 $\angle r \to \angle\frac{r}{2} + \angle\frac{r}{2+r^2}$ ，當 r 極小時可得：

紅：綠 $\approx (1+r^2)\times(4+r^2):2\times(4+2r^2)\cdots$② $(P.18)$

將①、②化為比值，互減；並令 $r^2 = 2k + k^2$ 代入，可得：

$$\frac{1+r^2}{\sqrt{1+r^2}+1} - \frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2\times(4+2r^2)} = \frac{1+r^2}{2+k} - \frac{(1+r^2)(4+2k+k^2)}{8+8k+4k^2}$$

$$= \frac{(1+r^2)(8+8k+4k^2-(2+k)(4+2k+k^2))}{(2+k)(8+8k+4k^2)} = \frac{-k^3(1+r^2)}{(2+k)(8+8k+4k^2)}\cdots③$$



圖(十五)

兩式之差相當接近，可成為一個新的逼近方法。

由②推得新逼近方法： $\pi = 4\times\sum\frac{12r+5r^3}{12+9r^2+r^4}$ ；

透過下列定理十八，可得 $p_1 < p_2 < S_3 < p_{1new} < p_3 < p_{2new} < q_3$ ，證實精確度大幅提高。

定理十八： π 值新逼近定理——簡單不對稱切割導出之新加權校正法
若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值為

$$\pi = 4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\left(\frac{12r_{(k,n)}+5r_{(k,n)}^3}{12+9r_{(k,n)}^2+r_{(k,n)}^4}\right)$$

將不對稱切割導入加權校正法，猶如做了無限次切割一般，效率提高非常多。

∴不對稱切割可以發展出全新的加權校正法，潛力無窮；在此僅示範簡單切割，餘依此類推。

肆、 研究成果

綜合整個研究，我們得到下述新的定理：

定理六： 令$\angle A$之角平分線斜率為r_A，$\angle B$之角平分線斜率為r_B，$\angle C$之角平分線斜率為r_C，若$\angle A=\angle B+\angle C$，且$r_A$、$r_B$為有理數，則$r_C$亦為有理數。

定理七： 任取$\theta\in A$，滿足$\theta=\dfrac{360}{d}$，$d\geq 4$；

則存在一遞減數列$\{S_k\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\dfrac{\pi}{d}$。其中$S_k=\sum\limits_{t=1}^{n}T^{-1}(\theta_{(k,t)})$，$t=1,2,3,\ldots,n$。

定理八： $\forall\ r\in Q$，$T(r)\to\theta\in A$，滿足$\theta=\dfrac{360}{d}$，$d\geq 4$；則存在一遞減數列$\{S_k\}$，使得

$\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\dfrac{\pi}{d}$。其中$S_k=\sum\limits_{t=1}^{n}T^{-1}(\theta_{(k,t)})=\sum\limits_{t=1}^{n}r_{(k,t)}$，$t=1,2,3,\ldots,n$。

定理九： 取$I=\{a_n \mid a_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,3,\ldots\}$，則集合$I$為單位分數調和數列所成的集合。

若依有序的方式依次給定a_n，並取a_{n+1}，則$\angle a_n\to\angle a_{n+1}+\angle a_{n(n+1)+1}$。。

定理十： 令離第K代最近的前面一個併入母角的餘角分母為$t\times(t-1)+1$，

離第t代最近的前面一個併入母角的餘角分母為$s\times(s-1)+1$，

第s代累計數為N_s，第t代累計數為N_t，則第K代π近似值=

$$4\times((\frac{1}{K}\times N_t)+(\frac{1}{t\times(t+1)+1}\times N_s)+(\frac{1}{(t+1)\times(t+2)+1}\times N_s)+\cdots$$

$$+(\frac{1}{s\times(s+1)\times(s\times(s+1)+1)+1}\times N_s)+(\frac{1}{(s\times(s+1)+1)\times(s\times(s+1)+2)+1}\times N_{s+1})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{t\times(t-1)\times(t\times(t-1)+1)+1}\times N_{t-1})+(\frac{1}{(t\times(t-1)+1)\times(t\times(t-1)+2)+1}\times N_t)+\cdots$$

$$+(\frac{1}{K\times(K-1)+1}\times N_t))$$

定理十一：

$$母角\ r=\frac{1個r_n的總和-任取3個r_n相乘的總和+任取5個r_n相乘的總和-\cdots}{1-任取2個r_n相乘的總和+任取4個r_n相乘的總和-任取6個r_n相乘的總和+\cdots}$$

定理十二： 令原母角$r_o=\dfrac{n_o}{m_o}$，第二代母角$r=\dfrac{n}{m}$，餘角$r_r=\dfrac{n_r}{m_r}$，所有的m、n都是自然數，

且$n_o=1$、$n=1$。則 當$r=\dfrac{n}{m}$為二等分母角，且餘角r_r值為最小時，$m=2m_o+1\cdots$❶

當$r=\dfrac{n}{m}$為三等分母角，且餘角r_r值為最小時，$m=3m_o+1\cdots$❷

定理十三： 如圖(十)，在單位圓上，令外切箏形面積為S，內接△面積為T，扇形面積為R；

則$\dfrac{2S+(1+r^2)T}{3+r^2}<R<\dfrac{(2+r^2)\times S+(1+r^2)\times T}{3+2r^2}\cdots$①

若$r\to 0$時，$R\to\dfrac{2S+T}{3}\cdots$②

定理十四： 單位圓中，令$r=\dfrac{n}{m}$為經不對稱切割後之扇形角平分線斜率，則

外切多邊形面積法：$\pi=4\times\sum r$；內接多邊形面積法：$\pi=4\times\sum\dfrac{r}{1+r^2}$

加權校正上限法：$\pi=4\times\sum\dfrac{r\times(3+r^2)}{3+2r^2}$；加權校正下限法：$\pi=4\times\sum\dfrac{3r}{3+r^2}$

內接多邊形面積法＜下限法＜π值＜上限法＜加權校正逼近法＜外切多邊形面積法

定理十五： 如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，k為切割的世代數，若

$k\to\infty$，則$\pi=4\times\sum_{t=1}^{2^{k-1}}\dfrac{r_{(k,t)}}{3}(2+\dfrac{1}{1+r_{(k,t)}^2})$

定理十六： 如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第k

代π值區間為$4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\dfrac{3r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2})<\pi<4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\dfrac{r_{(k,n)}\times(3+r_{(k,n)}^2)}{3+2r_{(k,n)}^2})$

定理十七： 令第k代$\angle A_k=\angle B_k+\angle C_k$，$\angle A_k$、$\angle B_k$、$\angle C_k$之角平分線斜率各為$r_{A_k}=\dfrac{n_{A_k}}{m_{A_k}}$、

$r_{B_k}=\dfrac{1}{m_{B_k}}$、$r_{C_k}=\dfrac{n_{C_k}}{m_{C_k}}$，$\angle C_k=\angle A_{k+1}$；$\{m_{A_k},n_{A_k},m_{B_k},m_{C_k},n_{C_k},k\}\subset N$，$(m_{A_k},n_{A_k})=1$，

$(m_{C_k},n_{C_k})=1$；　若$\dfrac{m_{A_k}}{n_{A_k}}<m_{B_k}<1+\dfrac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$，則$n_{C_k}$為一遞減且收斂至1之數列⋯①

若$n_{C_t}=1$，則$\angle\dfrac{n_{A_1}}{m_{A_1}}\to\angle\dfrac{1}{m_{B_1}}+\angle\dfrac{1}{m_{B_2}}+\angle\dfrac{1}{m_{B_3}}...+\angle\dfrac{1}{m_{B_t}}+\angle\dfrac{1}{m_{C_t}}\cdots$②

定理十八： 若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第k代π值為

$$\pi=4\times\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(\frac{12r_{(k,n)}+5r_{(k,n)}^3}{12+9r_{(k,n)}^2+r_{(k,n)}^4})$$

伍、 討論

一、 不對稱切割法比較——比較本文各類切割所求得的π值，來討論其逼近速度。

比較表(二)、表(四)、表(五)、表(八)、表(九)、表(十)，可得表(十四)：

(1). 餘角控制在最小時，單次分割數越大，逼近就越快，精確度就越高		
(2). 當母角角度相同時，角的分割數量越大，精確度越高		
(3). 當角的分割數量相同時，母角越小者，精確度越高		
(4). 加上**加權校正法**可提高的精確度，約比只用外切法**增加一倍的位數** ——外切單位分量為r，加權校正的誤差區間為$\frac{r^2}{2}$，$\therefore$位數增加一倍。		
(5). 效率比較	單母角	餘角可併入母角，每代運算次數最精簡。
	多母角	切割速度快。

本文所舉的簡單切割、多角切割、單母角與多母角切割，都是特定設計的切割法。以不同設計的切割法來切割，將出現不同的逼近數速度。

二、 與傳統幾何法、分析法比較

不對稱切割 vs 傳統幾何法；加權比例常數 vs 劉徽割圓術，得知：

(1). 有理數的計算方便性與效率高於無理數。
(2). 割圓術的π值區間不如加權校正法精準，比例也不如加權比例常數所算的正確。

不對稱切割法，與梅欽公式比較後，得知：

(1). 不對稱切割法可以說明梅欽公式所代表的幾何意義。
(2). $P.12$的定理十一，已經說明了這類公式的設計原則，所以藉由不對稱切割法，就可以設計出任何一款效率更高的梅欽類公式。
(3). 不對稱切割所使用的有理數斜率可化為單位分數斜率和的展開式，有類似古埃及分數的特性——定理十七的推演，證實本文理論系統的發展性高於現有梅欽類系統。

加權校正法，與$\arctan x$級數比較後，得知：

(1). 加權校正法是加上極限概念的幾何方法——其實分析法與幾何法是殊途同歸的。
(2). 加權校正法的上下限誤差區間有自我校正的功能，是個不錯的設計。
(3). 尤拉多項式$\arctan x$累加前三項的S_3精確度，會略高於母角與餘角接近等分的簡單切割p_2，但仍不及接近等分的多母角p_3——可見多母角+加權校正下限法效率確實相當不錯。
(4). 加權校正法可由不對稱切割導出，相當於做了無限次的不對稱切割，發展潛力雄厚。

陸、結論

本研究的不對稱切割法之理論系統，已涵蓋自 1706 年以來的梅欽公式與所有的類梅欽公式，而其在幾何上的直觀效果、靈活性、與發展性猶更勝之。加權校正法發現的加權比例常數$\frac{1}{2}$非常實用，大幅地提高了不對稱切割法的效率——本研究通篇追求的首要精神，就是效率。

柒、參考資料

一、艾力克斯•貝洛斯Alex Bellos著，胡守仁譯，數字奇航，初版，台北市，時報文化，頁117~145：第四章「π的故事」，2012年。

二、袁小明，數學誕生的故事，三版，台北市，九章出版社，頁95~103：「圓周率的身世」，2002年。

三、徐祥，2007年，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組數學科第三名『海倫家族三代同堂大蒐秘』，頁3。

四、張幼賢，國中二上數學課本，初版，翰林，頁94，畢氏定理，2012年。

五、楊媛甯，2006年，95年度國中學生獨立研究數學類成果發表第一名『直角三角形上子母關係研究與推展』，頁17~19。

六、余文卿，『關於圓周率π』。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_13_3_05/index.html

七、維基百科，『圓周率』。http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%93%E5%91%A8%E7%8E%87

八、數學資料庫，『圓周率π的歷史』。http://db.math.ust.hk/articles/history_pi/c_history_pi.htm

九、Alan 的部落格，『圓周率π的計算歷程』。
http://tw.myblog.yahoo.com/jw!ILShB2OQFQUwo8mH9P6MjsZNB2U-/article?mid=345

十、Wikipedia，Machin-like formula，http://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula

感言

不對稱切割加上加權校正法，事實上就是先以幾何方法求得初步的數據，再以代數方法校正。發展這套方法，就國中數學所學，已經足夠，剩下的就是需要巧思。本文一開始只是由一個對畢氏數與有理數的偶然想法開始推演，沒想到到後來竟然快走進高等數學的領域，這真的是一趟奇妙的旅程！2011 年的新聞，日本圓周率達人近藤茂把π值推進到小數點以下第十兆位，在這種世界紀錄之前，本文的成就顯得相當地渺小。當然，追求那麼高位數的π值似乎已經不具實用價值，但我覺得那不一定是為了實用，因為科學的精神除了實事求是與精益求精之外，還會再加上一點科學人的浪漫－－也就是這種浪漫情懷帶領我走上這趟追求π的奇妙旅程。感謝師長的指導，父母的支持，以及這一路上幫助過我的人。

【評語】030406

本作品研究以有理數來逼近圓周率 π，這方面研究已多，本作品與別人不同的是用畢氏數所對應角內接、外切多邊形面積經加權校正後來逼近，非常有創意，而且相當完整。唯一可惜的是沒有作 complexity 的研究，而且沒有與現有的逼近方法做比較。但以國中生來講，能做到這個地步，已相當不錯。