中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030405

走完一圈有多遠—探討 1×1×n 之長方體面上一點出發走遍 6 面回到原出發點的最短路徑

學校名稱：彰化縣立和群國民中學

作者：	指導老師：
國二 李易修 國二 李明謙 國二 朱雨蓁	王郁茜 林彩郁

關鍵詞：最短路徑、畢氏定理

走完一圈有多遠

-探討 1×1×n 之長方體面上一點出發走遍 6 面回到原出發點的最短路徑

摘要

延續 彰化縣第 52 屆科展優等作品「**走完一圈有多遠-探討$1\times1\times1$之正立方體面上一點出發走遍 6 面回到原出發點的最短路徑**」除了找到該報告的缺漏外，更進一步地討論在$1\times1\times n$之長方體面上一點出發的情形。

我們利用 三角不等式、畢氏定理、二次函數等概念得到

1.從$1\times1\times n$長方體頂點出發，走遍六面回到原點的最短路徑長為$\begin{cases}\sqrt{2}(n+2), & 0\le n\le 2\\ 2\sqrt{n^2+4}, & n>2\end{cases}$

2.從 1×1×n 之長方體上 1×1 面上中心點出發走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{3^2+(2n+1)^2}, & n\ge 1\\ \sqrt{2}(n+2) \quad , & n\le 1\end{cases}$$

3.從$1\times1\times n$之長方體上$1\times n$面上中心點出發走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{(2n+2)^2+2^2} & ,0<n<\sqrt{2}-1\\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,\sqrt{2}-1\le n<1\\ \sqrt{3^2+(2n+1)^2} & ,1\le n<\frac{3}{2}\\ \sqrt{4^2+(2n)^2} & ,n\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$

壹、 研究動機

在第 47 屆全國科展「長方體上的螞蟻—兩點間最短路徑之最大值研究」中，賴旼華、黃曉薇、洪筱茹探討了不需走遍 6 面的情形下，找尋長方體面上彼此距離最遠的兩點。在第 52 屆彰化縣中小學科展中，林孟甫、陳韋宏進一步探討了在$1\times1\times1$之正立方體中，從一點出發，走遍 6 個面並回到原出發點的最短距離。這兩項研究題目引起了我們的興趣，我們發現在前述的研究中，其最短路徑只經過某些特定面，因此，我們考慮，如果一定得經過所有面的話，最短路徑可能為何呢？最後將研究題目訂為：「**走完一圈有多遠-探討$1\times1\times n$之長方體面上一點出發走遍 6 面回到原出發點的最短路徑**」。我們的研究題目異於上一屆的是：上一屆所探討的是$1\times1\times1$的正立方體，而我們所探討的是$1\times1\times n$的長方體。原本以為，正立方體所探討出來的結果應與長方體相差不遠，但實際深入探討後才發現，其實結果是迥然不同的。我們以出發點的位置分成三個部分來探討—長方體頂點、1×1之面上中心點與$1\times n$之面上中心點出發，開始了尋找最短路徑的研究。

貳、 研究器材

電腦、Word、Excel、Geogebra 軟體

參、 研究目的

在一個$1\times1\times n$的長方體，面上一點出發，走遍六個面的最短路徑長及路徑走法。

一、從頂點出發。

二、從1×1正方形的中心點出發。

三、從$1\times n$長方形的中心點出發。

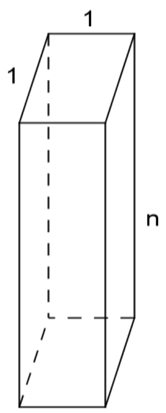


圖 1

肆、　名詞解釋

一、東面、西面、南面、北面、天面、地面：如圖 2 所示。在後續討論時，從頂點出發，是假設西、南、地面三面共點處之頂點 A 出發，而從面上中心點出發時，所指的面為南面或天面兩對角線交點 O 出發。

二、走遍：當路徑與六面的頂點或稜邊均有碰觸，則我們稱此路徑走遍六面。如圖 3。

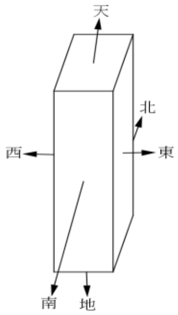


圖 2

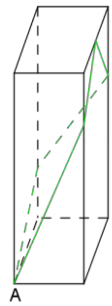


圖 3

三、走遍六面：不論是西、南、地三面共點處 A 出發，或是南面及地面的中心點 O 出發，本研究均以翠綠色線來表示走遍六面的路徑，最後回到原來的點，又為了方便描述起見，回到原來的點分別以 A' 或 O' 表示。

四、穿透：當落在某面的路徑長度不為 0，則我們稱穿透該面；反之，則不穿透該面，如圖 3 所示，A 在南、西、地三面共點處，則此路徑依序穿透南、 東、北、西四面，而不穿透天、地兩面。

五、路徑展開圖：依路徑展開所得的展開圖稱之為路徑展開圖，圖 3 的路徑展開圖為圖 4、圖 5 的路徑展開圖為圖 6。

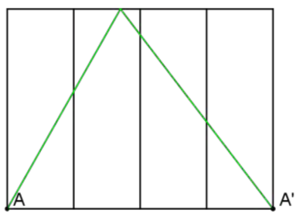


圖 4

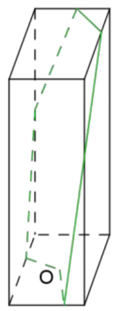


圖 5

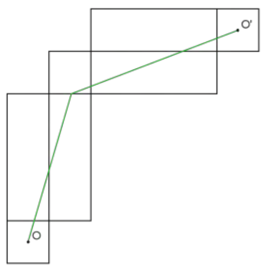


圖 6

六、 $d(A,B)$：表示在路徑展開圖中，如從起點 A 到終點 B 之最短路徑。在圖 7 中，

$d(A,B)=\overline{AC}+\overline{BC}$ ；圖 8 中， $d(A,B)=\overline{AB}$

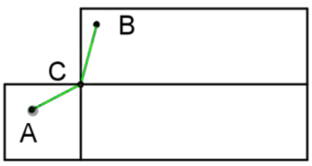


圖 7

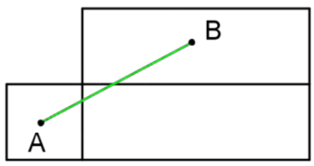


圖 8

伍、 文獻探討

在林孟甫、陳韋宏的研究成果「**走完一圈有多遠-探討 1×1×1 正立方體面上一點出發走遍 6 面回到原出發點的最短路徑**」，整篇報告中的幾個重點：

一、如何讓人相信最短路徑一定會被討論到，而不會被遺漏。

雖然也可稱為窮舉法，但這份報告利用分類的技巧來讓人相信最短路徑一定會被討論，而不會被遺漏。

(一)從三面交點 A 出發，以位於南、地、西三面共點處 A 出發的例子為例，走遍 6 個面的情形，由於頂點接觸三個面，所以只需討論路徑與其他未接觸三面討論，於是就依以下兩種分類討論：

1. 穿透天東北三面。(如圖 9)

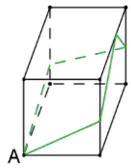


圖 9

2. 天或東或北三面其中一面未被穿透。(如圖 10)

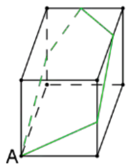


圖 10

然後再分別針對上述兩類來討論得到可能的最短路徑，如此一來，最短路徑就不會被遺漏了!

(二)從面上中心點出發，林孟甫、陳韋宏的報告中是利用呈現在其對面的路徑可能呈現的情形分類

討論，得

1.截出 1 個三角形　2.分出 2 個四邊形　3.截出 2 個三角形

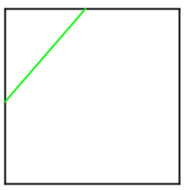


圖 11

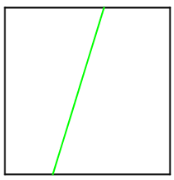


圖 12

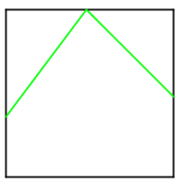


圖 13

4.截出 3 個三角形

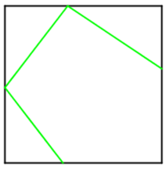


圖 14

5.截出 4 個三角形

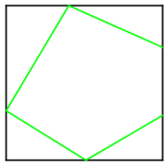


圖 15

6.只碰到 1 點。

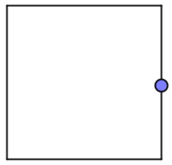


圖 16

然而，在分類的過程，林孟甫、陳韋宏在分出 2 個四邊形的分類中，似乎少了下面這兩個路徑展開圖，

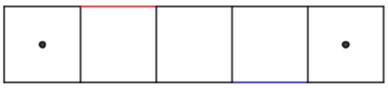


圖 17

圖 18

(右圖的路徑需碰觸到紅色及藍色邊一次，左圖的路徑則是碰觸到四條紅邊之一即可。)

不過對結果似乎並沒有毀滅性的影響，然而，為免後續討論因遺漏而造成不可挽回的失誤，我們在之後的討論除了延續其想法外，我們將其遺漏的兩個圖也併入考慮!

二、討論最短路徑的使用的數學概念與原理。

大致上，他們利用以下兩個定理來研究：

定理 1：已知：如圖 19，$\triangle ABC$ 中，內部一點 P

求證：$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$

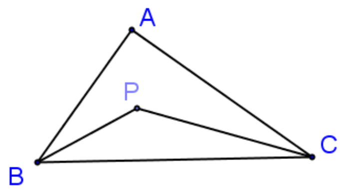


圖 19

證明：

如圖 20，延長 $\overline{BP}$ 交 $\overline{AC}$ 於一點 E

（1） 在$\triangle ABE$ 中，$\overline{AB}+\overline{AE}>\overline{BE}$

即 $\overline{AB}+\overline{AE}>\overline{BP}+\overline{PE}$ ……①

（2） 在$\triangle PEC$ 中，

$\overline{EP}+\overline{EC}>\overline{PC}$ ……②

（3） 第①式加第②式得到

$\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{EP}+\overline{EC}>\overline{BP}+\overline{PE}+\overline{PC}$

得到 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$

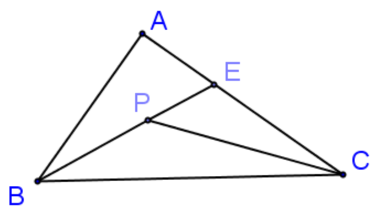


圖 20

定理 2：

如圖 21，A 、B 兩點在直線 L 的同側，如何在直線 L 取一點 R 使 $\overline{AR}+\overline{BR}$ 最短？

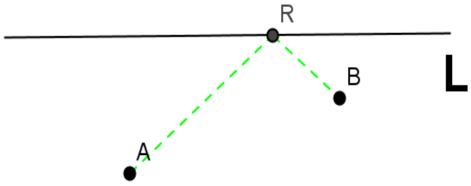


圖 21

做法：(1) 以直線 L 當對稱軸做 B 的對稱點 B'

(2) 連接 $\overline{AB'}$，交直線 L 於 R 點，. 則 $\overline{AR}+\overline{BR}$ 最短

證明:如圖 22，

(1) $\because B$ 和 B' 點是以 L 為對稱軸得到，$\therefore \overline{BR}=\overline{B'R}$

(2) 在直線 L 上任取一點 P，則 $\overline{BP}=\overline{B'P}$

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}>\overline{AB'}$

又 $\overline{AR}+\overline{BR}=\overline{AR}+\overline{B'R}=\overline{AB'}$

得到 $\overline{AP}+\overline{BP}>\overline{AR}+\overline{BR}$

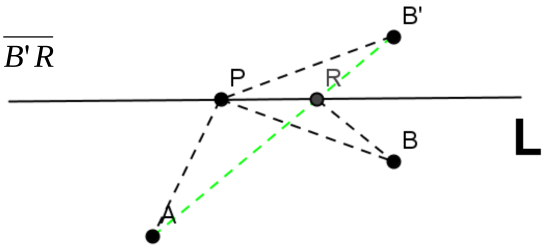


圖 22

以下，我們將分別討論 $1\times1\times n$ 的長方體，從三面交點 A 出發，以及從面上中心點 O 出發時，走遍 6 面的最短路徑長之研究過程。

陸、　研究過程與方法

一、從三面共點出發，走遍六面回到原點

我們考慮一頂點出發，走遍 6 面，回到原點的最短路徑，在此，我們也是利用分類的方式，討論得到可能呈現最短路徑的路徑展開圖。在不失一般性的情形下，我們假設從南、地、西三面共點的 A 點出發，並分成下兩種情形來討論走遍六面回到原點：

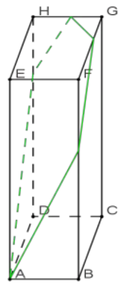


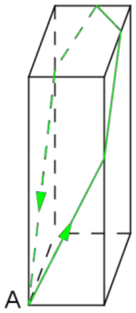
圖 23

(一)、在穿透天東北三面的情形下，如圖 23 所示，為其中一種情形，為了不遺漏所有可能的情形，我們可以依走遍 6 面的先後次序，得到以下樹狀圖：

A

- 南面
  - 東面
    - 天面 — 北面
      - 西面 — A…走法1
      - 地面 — A…走法2
    - 北面 — 天面
      - 西面 — A…走法3
      - 南面 — A…走法4
  - 天面
    - 東面 — 北面
      - 地面 — A…走法5
      - 西面 — A…走法6
    - 北面 — 東面
      - 地面 — A…走法7
      - 南面 — A…走法8
- 西面
  - 天面
    - 東面 — 北面
      - 地面 — A…走法9
      - 西面 — A…走法10
    - 北面 — 東面
      - 地面 — A…走法11
      - 南面 — A…走法12
  - 北面
    - 東面 — 天面
      - 南面 — A…走法13
      - 西面 — A…走法14
    - 天面 — 東面
      - 地面 — A…走法15
      - 南面 — A…走法16
- 地面
  - 北面
    - 東面 — 天面
      - 南面 — A…走法17
      - 西面 — A…走法18
    - 天面 — 東面
      - 南面 — A…走法19
      - 地面 — A…走法20
  - 東面
    - 北面 — 天面
      - 南面 — A…走法21
      - 西面 — A…走法22
    - 天面 — 北面
      - 地面 — A…走法23
      - 西面 — A…走法24

因為天地兩面均為1×1正方形，而東西南北四面均為$1\times n$長方形，以及A與A'表示相同點，以走法 1 為例，走法 1 代表從A點出發，依序經過南→東→天→北→西，回到A點依路徑依序展開的路徑展開圖，如圖 25。



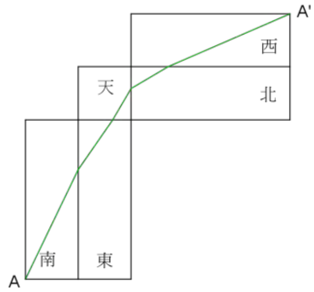
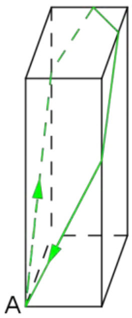


圖 24　　　　圖 25

走法 16 代表從 A 點出發，依序經過西→北→天→東→南，回到 A 點依路徑依序展開的路徑展開圖，如圖 27。



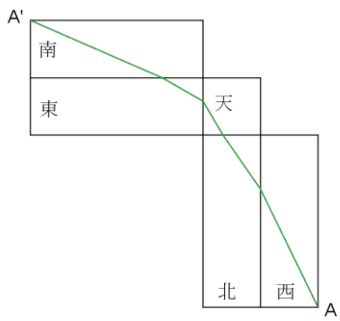


圖 26　　　　圖 27

而圖 25、27 是同一類圖形，我們針對所有的走法討論發現，上面樹狀圖所對應的展開圖可以分成 7 類，如圖 28 到圖 34 所示，其中走法 1、16 的路徑展開圖都是圖 28，且A及A'代表的都是立體圖上的A點，走法 2、15、19、24 的路徑展開圖都是圖 29，走法 3、6、12、13 的路徑展開圖都是圖 30，走法 4、8、10、14 的路徑展開圖都是圖 31。

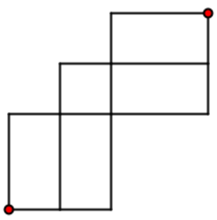


圖 28

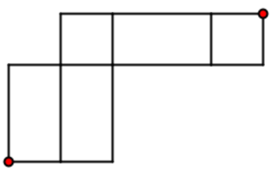


圖 29

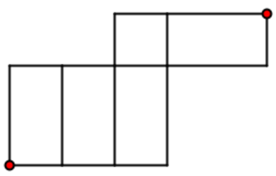


圖 30

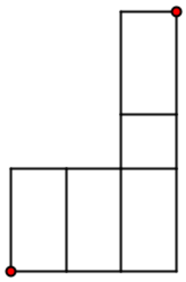


圖 31

走法 5、11、17、22 的路徑展開圖為圖 32，走法 7、9、18、21 的路徑展開圖為圖 33，走法 20、23 的路徑展開圖為圖 34。

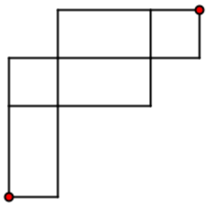


圖 32

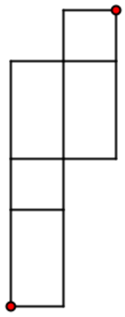


圖 33

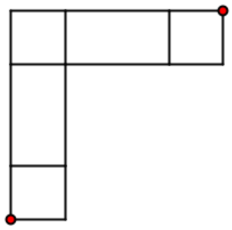
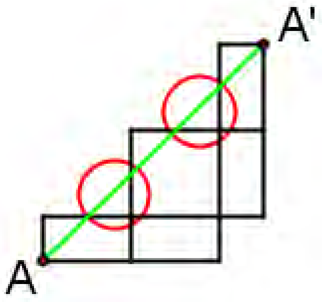


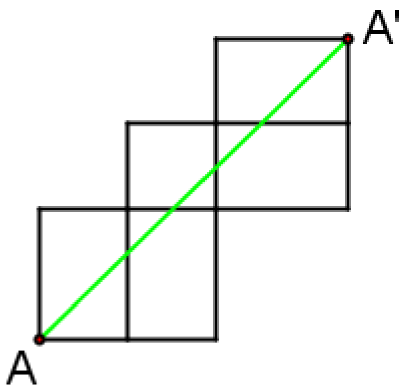
圖 34

在不同的 n 值，呈現在路徑展開圖中的最短路徑公式並不相同，如圖 36，得到的最短路徑長為 $d(A,A')=\overline{AA'}$，然而，圖 35 及圖 37 卻因拉直線會有部份路徑落於路徑展開圖的外部(如下圖中紅圈部份顯示有些路徑落在展開圖外了!)，而這樣的路徑展開圖我們稱為「不合法」，因為路徑應全程落在路徑展開圖中才行。換言之，在這樣的路徑展開圖中的路徑，在路徑展開圖中無法以直線呈現，我們必須進一步討論 n 在什麼樣的範圍內，可以拉直線？而什麼樣的範圍的 n 值，又會有什麼不一樣的最短路徑公式呢？



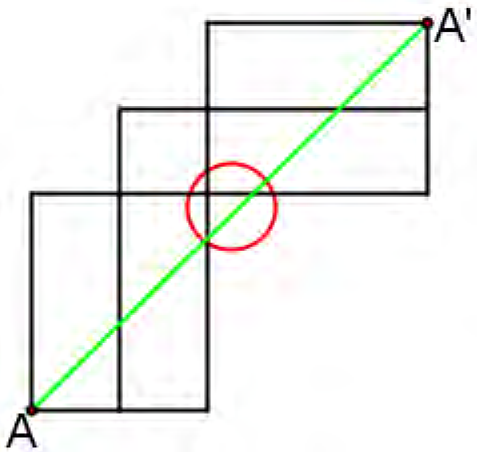
(對應圖 28)

圖 35



(對應圖 28)

圖 36

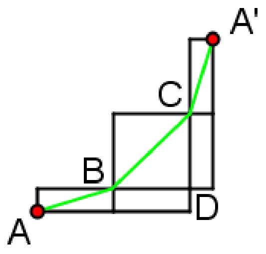


(對應圖 28)

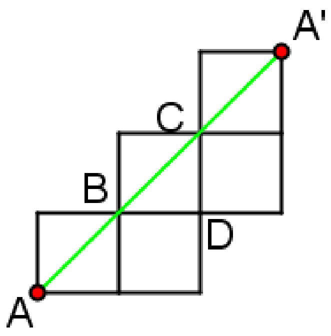
圖 37

我們利用 Geogebra 模擬，以下的五個圖，是依 n 值由小變大的過程中，呈現在圖上的最短路徑的情形。圖 38 是比較小的 n 值，其最短路徑會是三折線(如綠色部份)，依 n 值的變大而讓最短路徑可以拉成一直線(如圖 40)，再隨著 n 值的再變大最短路徑長變成兩折線(如圖 42)⋯，而圖 39 可視為從拉成三折線變成一直線時的臨界圖形(也就是說，當 n 值再小一點，圖形如圖 38，而 n 值再大一點，圖形如圖 40)，而圖 41 可視為從拉成一直線變成 2 折線的臨界圖形(也就是當 n 值小一點，圖形會像圖 40，而 n 值大一點，圖形如圖 42)。

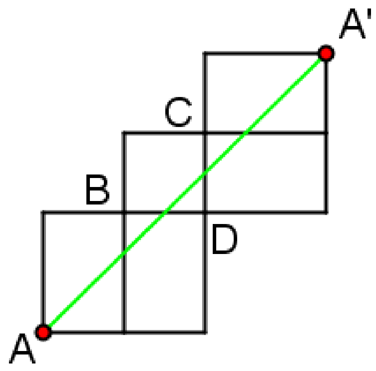
圖 39 及圖 41 是所謂的臨界圖形，此時最短路徑剛好會通過展開圖中的格點，利用 $\overline{AA'}$ 交於格點上的性質，我們可以求得此臨界圖形的 n 值。



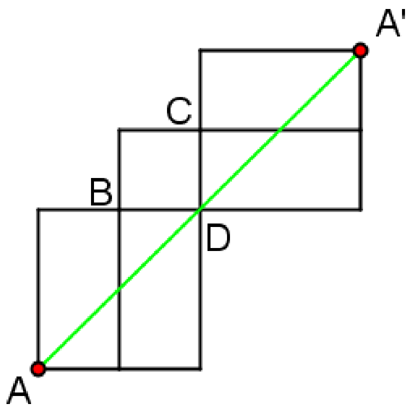
(對應圖 28)
圖 38



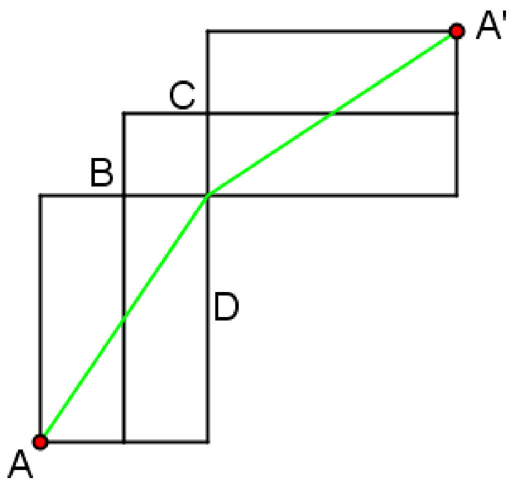
(對應圖 28)
圖 39



(對應圖 28)
圖 40



(對應圖 28)
圖 41



(對應圖 28)
圖 42

定理 1：

1. 如圖 39，若 $\overline{AA'}$ 通過格點 B,C(即展開圖中的頂點位置)，則 $n=1$；
2. 如圖 41，若 $\overline{AA'}$ 通過格點 D(即展開圖中的頂點位置)，則 $n=2$ 。

證明：

1、將圖形擺放至座標平面，依之間長度關係，可設

$A=(0,0)$

$B=(1,n)$

$C=(2,n+1)$

因為 $\overline{AA'}$ 通過 B,C 兩點，利用相似形比例概念，得到

$$\begin{cases} 1\times\dfrac{2+n}{2+n}=n \\ \\ 2\times\dfrac{2+n}{2+n}=n+1 \end{cases}$$

化簡得 $n=1$

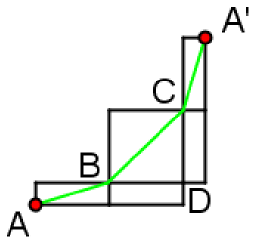
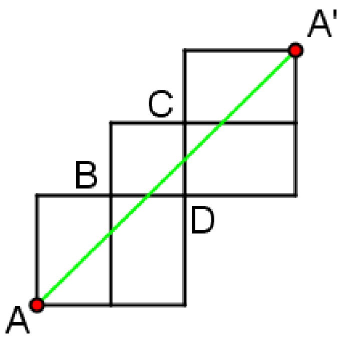
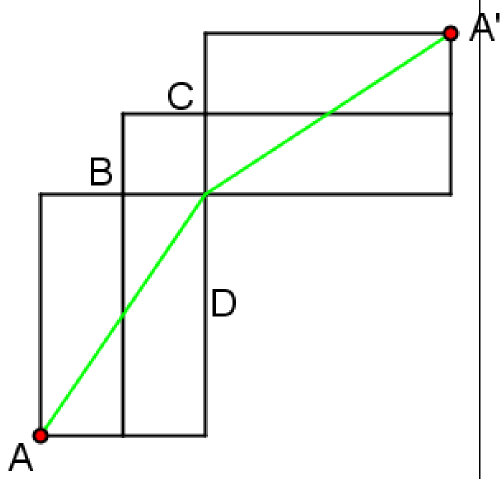
2、如圖 41，設 $A(0,0)$ ，則 $A'=(2+n,2+n)$ ， $D=(2,n)$

因為 $\overline{AA'}$ 通過 D 點，所以 $2\cdot\dfrac{n+2}{n+2}=n$ ，化簡得到 $n=2$ 。

因此，我們可以知道，當 $n<1$ 時，圖形可視為圖 38，而當 $1\le n\le 2$ ，圖形可視為圖 40，而當 $n>2$ ，圖形可視為圖 42。

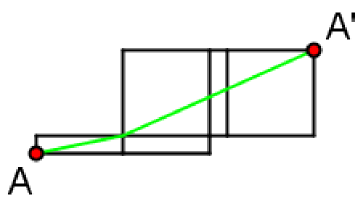
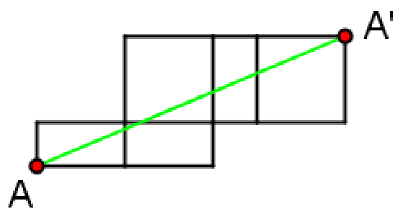
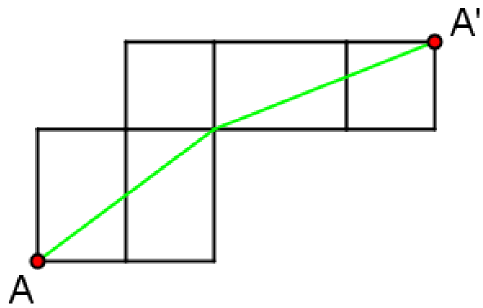
於是，我們可以進一步得到在此類展開圖中，最短路徑的公式如下：

1.對應圖 28

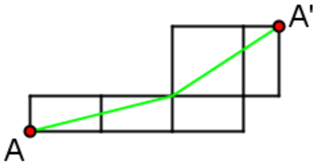
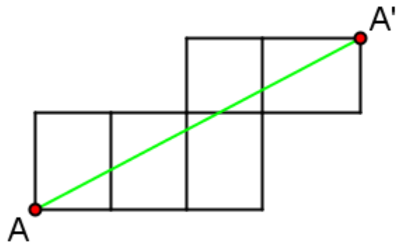
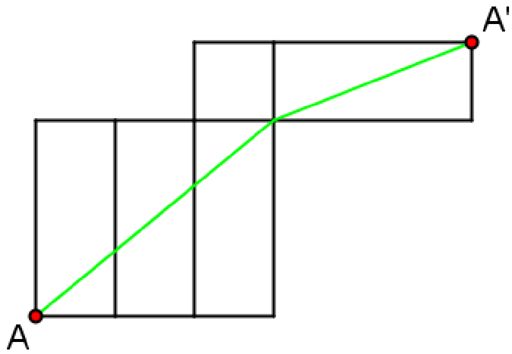
 圖 43	 圖 44	 圖 45
當 $0<n<1$ 時， $d(A,A')=2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2}$	當 $1\le n\le 2$ 時， $d(A,A')=\sqrt{2}(n+2)$	而當 $n>2$ 時， $d(A,A')=2\sqrt{n^2+2^2}$

對於其他的展開圖，仿照前述定理的方式，我們可以依序得到展開圖的最短路徑：

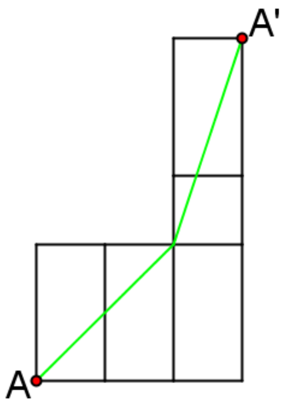
2.對應圖 29

 圖 46	 圖 47	 圖 48
$n<1+\sqrt{2}$ ， $d(A,A')=$ $\sqrt{n^2+1^2}+\sqrt{1^2+(n+2)^2}$	$-1+\sqrt{2}\le n\le 1$ $d(A,A')=$ $\sqrt{(n+3)^2+(n+1)^2}$	$n>1$ ， $d(A,A')=$ $\sqrt{n^2+2^2}+\sqrt{(n+1)^2+1^2}$

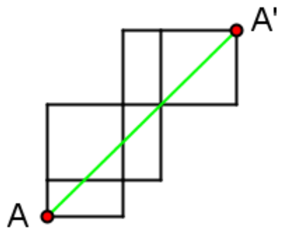
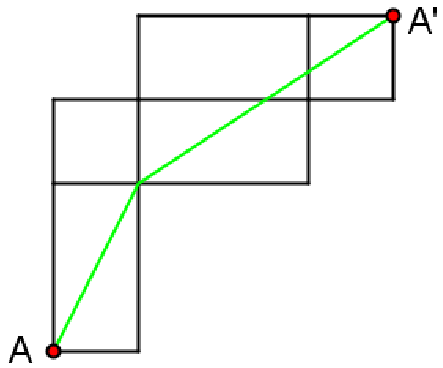
3.對應圖 30

 圖 49	 圖 50	 圖 51
$0 \le n \le 1$，$d(A,A')=$ $\sqrt{n^2+2^2}+\sqrt{(n+1)^2+1^2}$	$1 \le n \le \sqrt{3}$，$d(A,A')=$ $\sqrt{(n+3)^2+(n+1)^2}$	$n > \sqrt{3}$，$d(A,A')=$ $\sqrt{n^2+3^2}+\sqrt{n^2+1^2}$

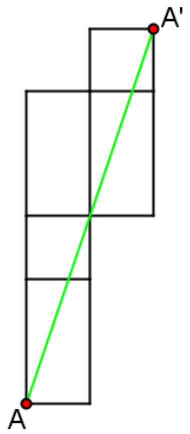
4.對應圖 31

 圖 52
對於任意的 n 值，$d(A,A')=\sqrt{n^2+2^2}+\sqrt{(n+1)^2+1^2}$

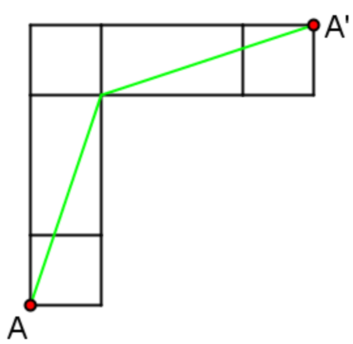
5.對應圖 32

 圖 53	 圖 54
$n \le 1$，$d(A,A') = \sqrt{(n+2)^2 + (n+2)^2}$	$n > 1$，$d(A,A') = \sqrt{n^2 + 1^2} + \sqrt{(n+1)^2 + 2^2}$

6.對應圖 33

 圖 55
對於任意的 n 值，$d(A,A') = 2\sqrt{(n+1)^2 + 1^2}$

7.對應圖 34

 圖 56
對於任意 n 值，$d(A,A') = 2\sqrt{(n+1)^2 + 1^2}$

接下來，進一步比較這些公式中，何者最短？我們將利用以下兩定理，比較出在這些展開圖中的最短路徑。

定理 2

如圖 57 所示，已知：$x+y=L$，

則 x^2+y^2 最小值=$\dfrac{L^2}{2}$ 。

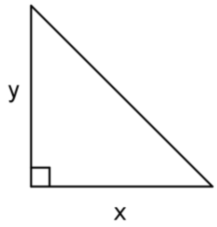


圖 57

證明

$\because x+y=L$ ，$\therefore y=L-x$，

故 x^2+y^2

$=x^2+(L\text{-}x)^2$

$=x^2+L^2-2Lx+x^2$

$=2x^2-2Lx+L^2$

$=2\left[x^2-Lx+\left(\dfrac{L}{2}\right)^2\right]+L^2-\dfrac{L^2}{2}$

$=2\left(x-\dfrac{L}{2}\right)^2+\dfrac{L^2}{2}\geq\dfrac{L^2}{2}$,

當 $x=\dfrac{L}{2}$時，$x^2+y^2=\dfrac{L^2}{2}$ 為最小值，此時 $y=\dfrac{L}{2}$ ，

同時，利用 $(L\text{-}a)^2(L+a)^2\geq L^2$ ，當 a 愈大，則 $(L\text{-}a)^2(L+a)^2$ 也愈大，
因此 $\sqrt{(n+3)^2+(n+1)^2}=\sqrt{(n+2+1)^2+(n+2-1)^2}\geq\sqrt{(n+2)^2+(n+2)^2}$ 。

定理 3

對於正數 a 、b 、c 、d ，$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{2}\cdot\dfrac{a+b+c+d}{2}$ 。

證明

$\sqrt{a^2+b^2}$ 可視為兩股分別為 a,b 的直角三角形斜邊

$\sqrt{c^2+d^2}$ 可視為兩股為 c,d 的直角三角形斜邊

在座標平面上，令 $A(0,0)$ $B(a,0)$ $C(a,b)$ $D(a+c,b)$ $E(a+c,b+d)$，如圖 58 所示：

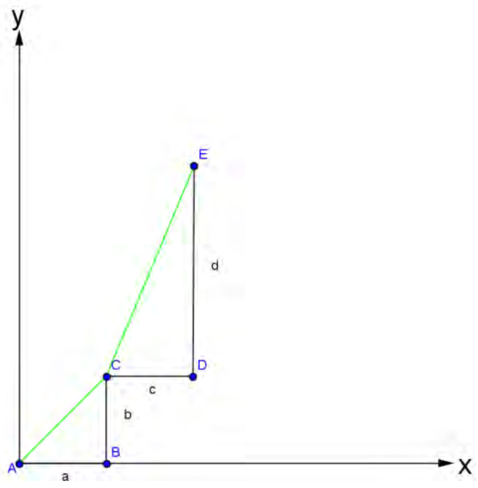


圖 58

則 $\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$　　$\overline{CE}=\sqrt{c^2+d^2}$

由定理 2 知 $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \ge \sqrt{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2}$

又由三角形不等式可得知 $\overline{AC}+\overline{CE} \ge \overline{AE}$

因此 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

故 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{2}$

有了定理 2、定理 3，即可輕鬆比較圖 43~圖 56 中的 $d(A,A') \ge \sqrt{2}(n+2)$，

且根據上述分析，我們找到的最短路徑長＝$\begin{cases}\sqrt{2}(n+2) & ,0<n\le 2\\ 2\sqrt{n^2+4} & ,n>2\end{cases}$

其相對應的路徑展開圖如圖 59 及圖 60：

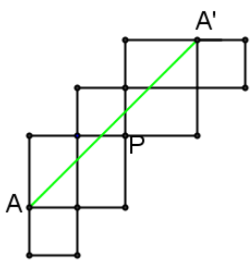


圖 59

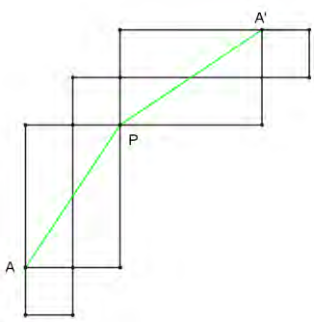


圖 60

(二)、天或東或北三面其中一面未被穿透。

首先我們探討天面不穿透的情形，以圖 61 為例，此為從 A 點出發，穿透南、東、北、西面，而路徑僅需碰觸天面的邊，所得的路徑展開圖為圖 62。

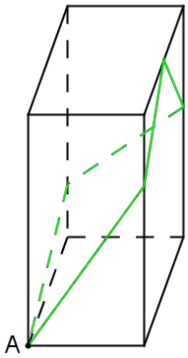


圖 61

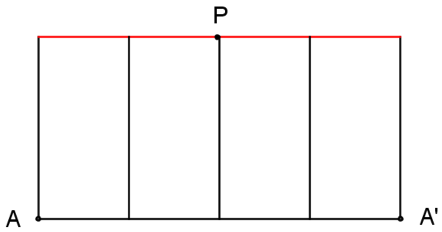


圖 62

其中，紅邊代表天面的邊，由於路徑限定碰觸紅邊，利用鏡射原理，我們可以求得在此路徑展開圖中，$d(A,A')=\overline{AP}+\overline{PA'}$。進一步我們發現，此走法與圖 60 中的最短路徑走法相同，因此，此種走法不會較短。

進一步討論其他不穿透天面或東面的路徑展開圖，我們歸納發現大概不出以下三種路徑展開圖

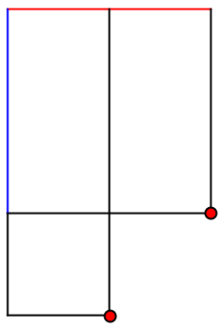


圖 63

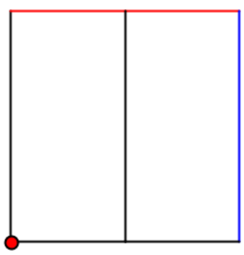


圖 64

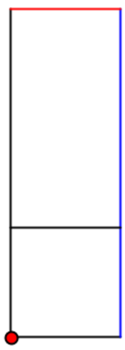


圖 65

我們可以發現在圖 63 的最短路徑與圖 48 的最短路徑相同；圖 64 的最短路徑與圖 45 的最短路徑相同；圖 65 的最短路徑與圖 56 的最短路徑相同。因此，其中一面未被穿透的情形所得的最短路徑並不會更短，因此仍維持前述結論。

二、從 1×1 面上中心出發，走遍六面走回原點

接下來，我們討論從$1\times1\times n$長方體上、1×1面上中心點出發，走遍六面回到原點最短路徑。

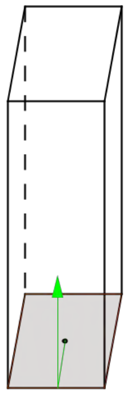


圖 66

仿照前述樹狀圖的方法，我們僅須考慮以下路徑展開圖中的最短路徑走法即可!(為保證走遍六面，紅邊、藍邊的部分是路徑必須碰到的部份)

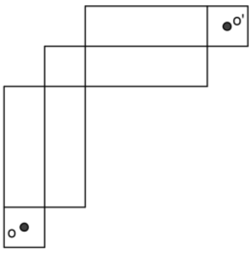


圖 67

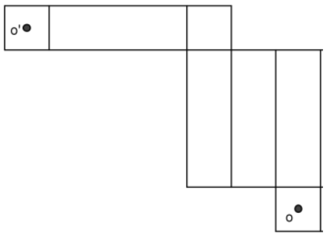


圖 68

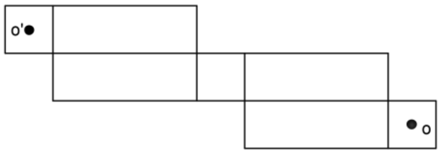


圖 69

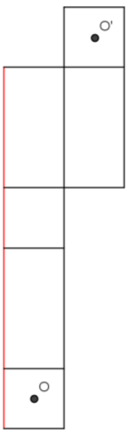


圖 70

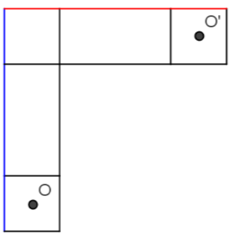


圖 71

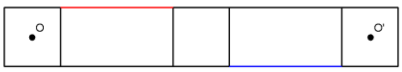


圖 72

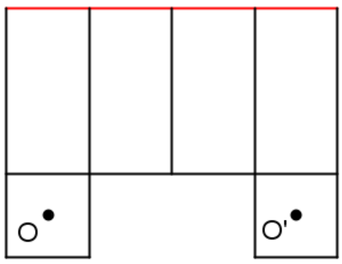
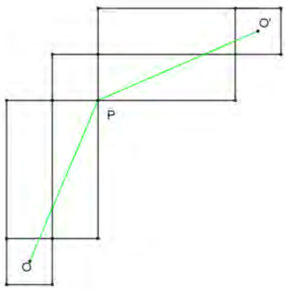
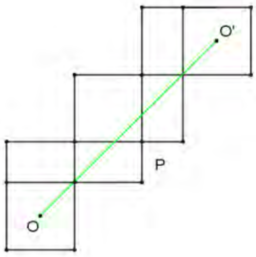


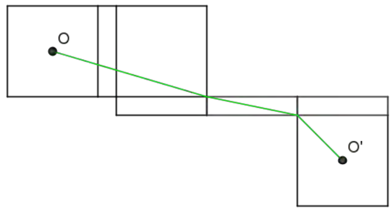
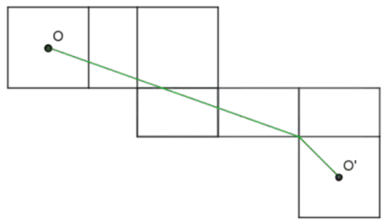
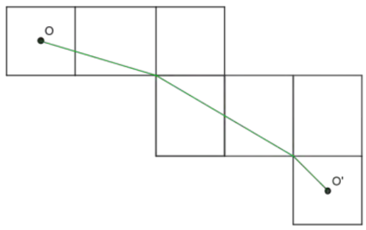
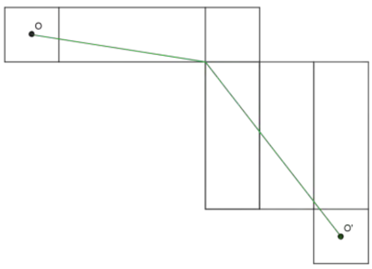
圖 73

接下來，我們進一步討論在不同的n值，其最短路徑與n的關係：

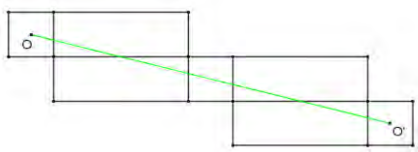
(一)、對應圖 67

 圖 74	當 $n \geq 1$ 時，$d(O,O') = 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$ 。
 圖 75	而當 $0 \leq n \leq 1$ 時，$d(O,O') = \sqrt{2}(n+2)$ 。

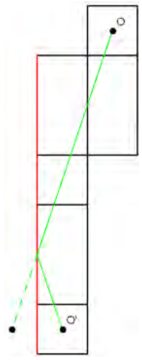
(二)、對應圖 68

 圖 76	當 $n<\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ 時，$d(O,O')=$ $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left[n+\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^2}+\sqrt{n^2+1^2}$ $+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$
 圖 77	當 $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\le n\le\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 時， $d(O,O')=\sqrt{\left(n+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$ 。
 圖 78	當 $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\le n\le 2$ 時， $d(O,O')=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{2^2+n^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$
 圖 79	當 $n>2$ 時， $d(O,O')=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

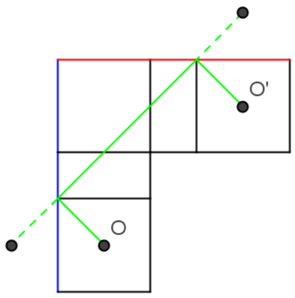
(三) 對應圖 69

 圖 80	在此展開圖中，無論 n 的範圍為何，其線段都是成立的。公式為 $\sqrt{(2n+2)^2+2^2}$

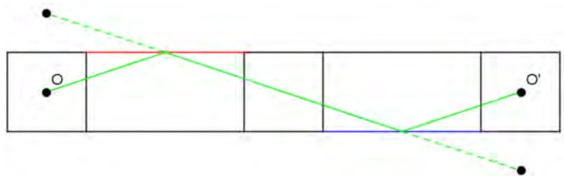
(四) 對應圖 70

 圖 81	若其鏡射後線段為一直線，則該線段便為最短距離。如圖，公式為 $\sqrt{(2n+2)^2+2^2}$ ，此公式適用於任何 >0 的 n 值。

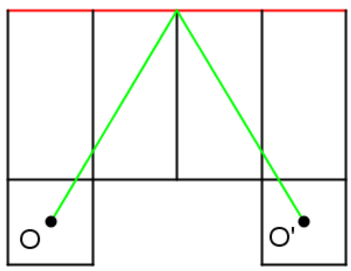
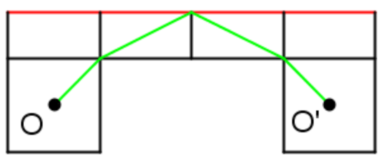
(五) 對應圖 71

 圖 82	當 $n \le 1$ 時， 最短路徑為 $d(O,O')=\sqrt{(n+2)^2+(n+2)^2}$

(六) 對應圖 72(此部份是林孟甫、陳韋宏所遺漏的部份！)

 圖 83	最短路徑為 $d(O,O')=\sqrt{(2n+2)^2+2^2}$

(七) 對應圖 73

 圖 84	當 $n \ge 1$ 時， $d(O,O')=\sqrt{(2n+1)^2+3^2}$
 圖 85	當 $n \le 1$ 時， $d(O,O')=\sqrt{2}+2\sqrt{n^2+1^2}$

接下來，我們必須討論在不同的n值，要採用何種公式才會最短？由前述定理可知，$\sqrt{2}(n+2)$會小於任何的式子，因此在$n\le 1$時，我們將用$\sqrt{2}(n+2)$。

在$n>1$時，首先我們比較$2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$及$\sqrt{(2n+2)+2^2}$。由於

$\left(2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{3^2+(2n+1)^2}\right)^2=9+4n^2+4n+1=4n^2+4n+10$，

$\left(\sqrt{(2n+2)^2+2^2}\right)^2=4n^2+8n+8$；又$(4n^2+4n+10)-(4n^2+8n+8)=2-4n<0$(當$n>1$)，因此，$\sqrt{(2n+2)^2+2^2}$不是最短路徑。

再接下來比較$2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$與$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}$及$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{2^2+n^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$。

$2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$長度可視為由$A(0,0)$點，經點$\left(\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}\right)$走至$\mathrm{C}(3,2n+1)$的直線距離，同時此種走法路徑呈一直線，而$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}$可視為由$A(0,0)$經點$\left(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)$走至$C(3,2n+1)$的距離。

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{2^2+n^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$可視為由$A(0,0)$經點$\left(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)$、點$\left(\frac{5}{2},2n+1\right)$再走至$(3,2n+1)$的距離。由於直線距離最短，所以採用公式$\sqrt{3^2+(2n+1)^2}$為最短路徑長。

因此，當$n\ge 1$時，$d(O,O')=\sqrt{3^2+(2n+1)^2}$；而$n\le 1$時，$d(O,O')=\sqrt{2}(n+2)$。
其展開路徑圖，可視為圖 86 與圖 87。

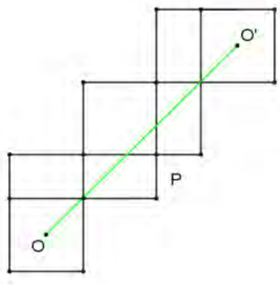


圖 86

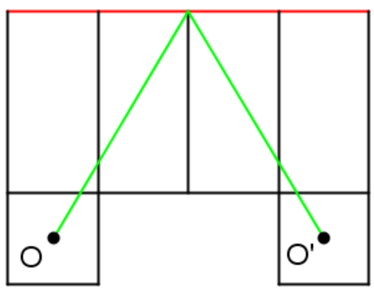


圖 87

三、從 1×n 之南面上中心點出發，走遍六面回到原點

繼續仿照前述方法，討論在$1\times1\times n$長方體，$1\times n$面上中點的情形，分別找到的展開圖及其最短路徑與n值的關係分成如下 11 類，請留意，由於要走遍 6 面，因此在某些路徑展開圖中，需接觸到紅色、藍色邊。

(一)

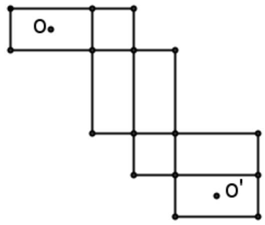


圖 88

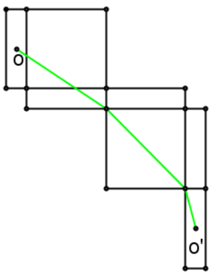


圖 88-1

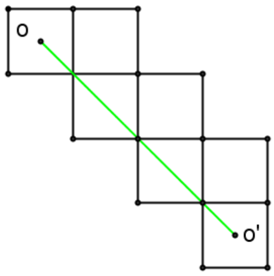


圖 88-2

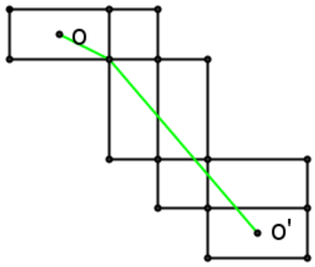


圖 88-3

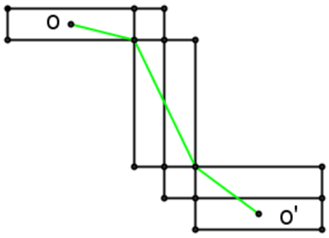


圖 88-4

$$d(O,O')=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,n<1 \quad (\text{如圖}88\text{-}1)\\ \sqrt{2}(n+2) & ,n=1 \quad (\text{如圖}88\text{-}2)\\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+2\right)^2} & ,1<n<\sqrt{6} \quad (\text{如圖}88\text{-}3)\\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}+\sqrt{n^2+2^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} & ,n>\sqrt{6} \quad (\text{如圖}88\text{-}4)\end{cases}$$

(二)

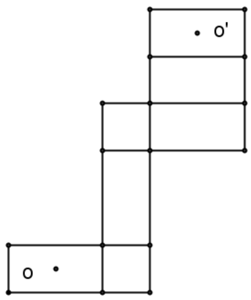


圖 89

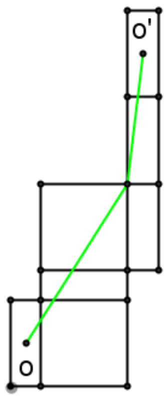


圖 89-1

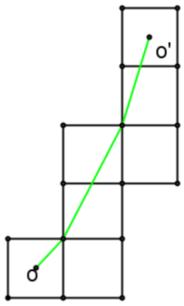


圖 89-2

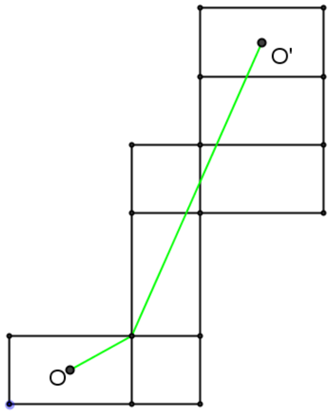


圖 89-3

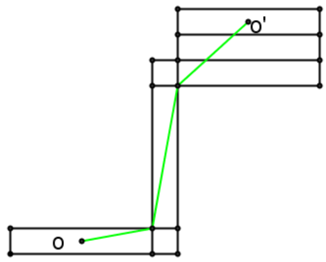


圖 89-4

$$d(O,O')=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} & ,n\le\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\text{如圖}89-1)\\ \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{(n+1)^2+1^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} & ,\frac{\sqrt{5}-1}{2}<n<\frac{\sqrt{13}-1}{2} \quad (\text{如圖}89-2)\\ \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2+\left(n+\frac{5}{2}\right)^2} & ,\frac{-1+\sqrt{13}}{2}<n<\sqrt{5} \quad (\text{如圖}89-3)\\ \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{n^2+1^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} & ,n>\sqrt{5} \quad (\text{如圖}89-4)\end{cases}$$

(三)

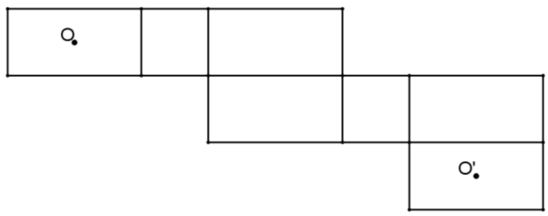


圖 90

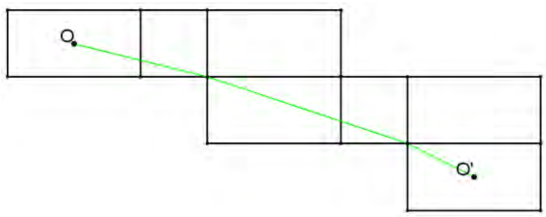


圖 90-1

$$d(O,O')=\sqrt{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{(n+1)^2+1^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}\;,n=\text{任意值} \quad (\text{如圖}90-1)$$

(四)

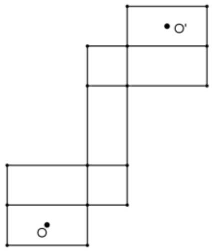


圖 91

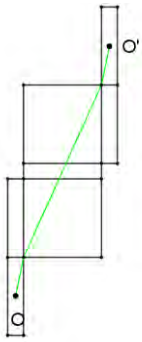


圖 91-1

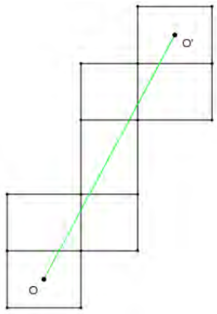


圖 91-2

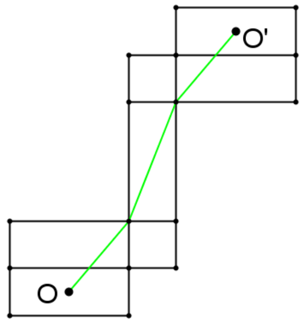


圖 91-3

$$\begin{cases} d(O,O')=\sqrt{(n+2)^2+1}+\sqrt{n^2+1^2} & ,n<\sqrt{2}-1 \quad (\text{如圖}91\text{-}1) \\ d(O,O')=\sqrt{(n+3)^2+(n+1)^2} & ,\sqrt{2}-1\le n\le\sqrt{3} \quad (\text{如圖}91\text{-}2) \\ d(O,O')=\sqrt{n^2+3^2}+\sqrt{n^2+1^2} & ,n>\sqrt{3} \quad (\text{如圖}91\text{-}3) \end{cases}$$

(五)

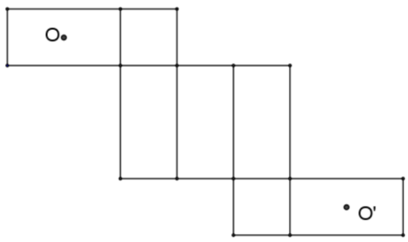


圖 92

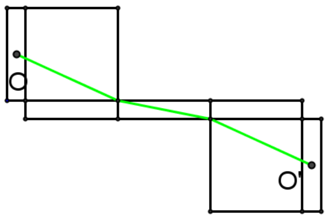


圖 92-1

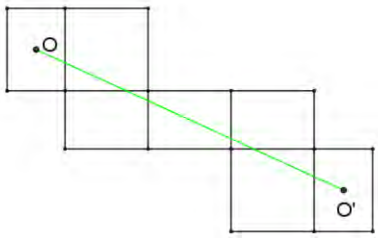


圖 92-2

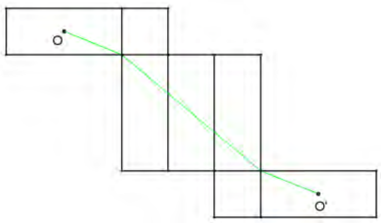


圖 92-3

$$\begin{cases} d(O,O')=\sqrt{(n+2)^2+1^2}+\sqrt{n^2+1^2} & ,n<\sqrt{2}-1 \quad (\text{如圖}92\text{-}1) \\ d(O,O')=\sqrt{(n+3)^2+(n+1)^2} & ,\sqrt{2}-1\le n\le\sqrt{3} \quad (\text{如圖}92\text{-}2) \\ d(O,O')=\sqrt{n^2+3^2}+\sqrt{n^2+1^2} & ,n>\sqrt{3} \quad (\text{如圖}92\text{-}3) \end{cases}$$

(六)

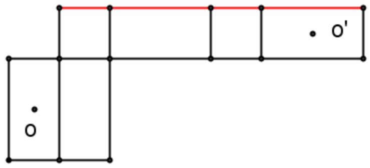


圖 93

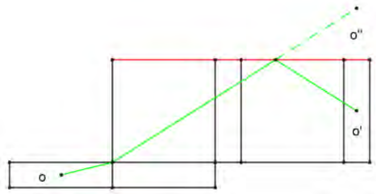


圖 93-1

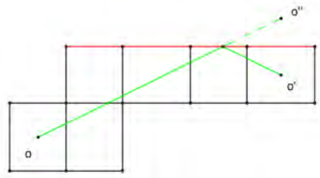


圖 93-2

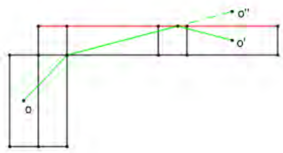


圖 93-3

$$d(O,O')=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}n+2\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} & ,n<\frac{\sqrt{13}-2}{3} \quad (\text{如圖}93\text{-}1)\\ \sqrt{\left(\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} & ,\frac{\sqrt{13}-2}{3}<n<\frac{\sqrt{28}-1}{3} \quad (\text{如圖}93\text{-}2)\\ \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}n+1\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} & ,n>\frac{\sqrt{28}-1}{3} \quad (\text{如圖}93\text{-}3)\end{cases}$$

(七)

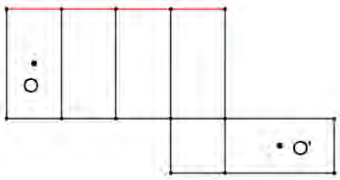


圖 94

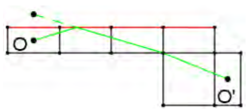


圖 94-1

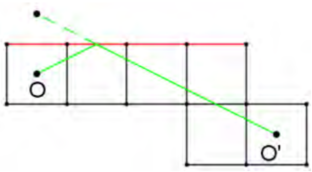


圖 94-2

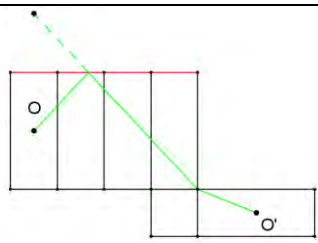


圖 94-3

$$\begin{cases}d(O,O')=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}n\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{n}{2}\right)^2} & ,n<\frac{-3+2\sqrt{6}}{3} \quad (\text{如圖}94\text{-}1)\\ d(O,O')=\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)^2} & ,\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}\le n\le\frac{\sqrt{21}}{3} \quad (\text{如圖}94\text{-}2)\\ d(O,O')=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}n\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,n>\frac{\sqrt{21}}{3} \quad (\text{如圖}94\text{-}3)\end{cases}$$

(八)

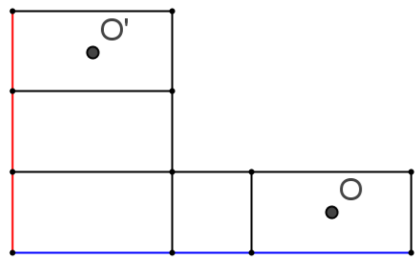


圖 95

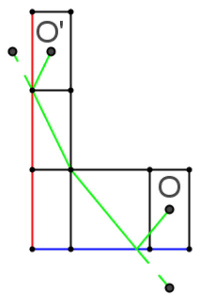


圖 95-1

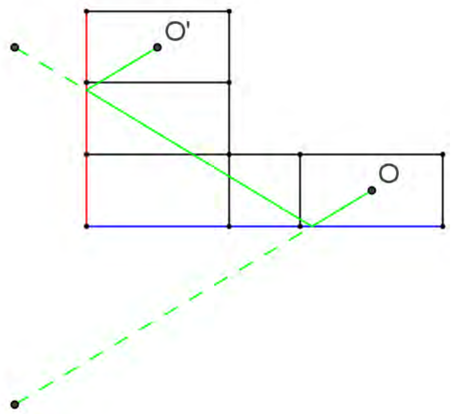


圖 95-2

$$d(O,O')=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}n\right)^2} & ,n<1 \quad (\text{如圖95-1}) \\ \sqrt{3^2+(2n+1)^2} & ,n\geq 1 \quad (\text{如圖95-2})\end{cases}$$

(九)

圖 96

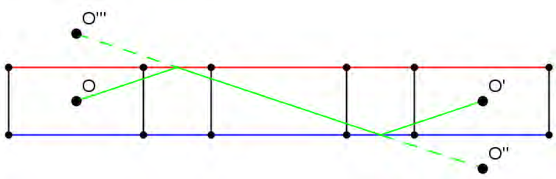


圖 96-1

$$d(O,O')=\sqrt{(2n+2)^2+2^2} \quad ,n\text{為任意值} \quad (\text{如圖96}-1)$$

(十)

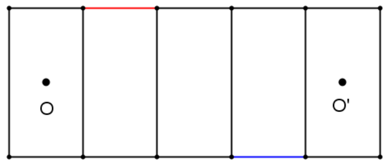


圖 97

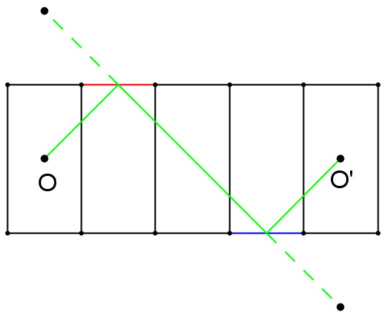


圖 97-1

$d(O,O')=\sqrt{4^2+(2n)^2}$, n 為任意值　(如圖 97-1)

(十一)

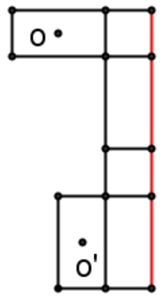


圖 98

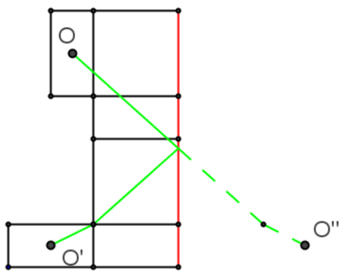


圖 98-1

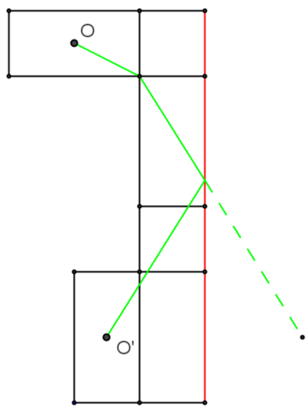


圖 98-2

$$d(O,O')=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,0<n<1 \quad (\text{如圖}98\text{-}1)\\ \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}n+1\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,n\geq 1 \quad (\text{如圖}98\text{-}2)\end{cases}$$

由於每一個展開圖的最短路徑公式複雜，我們除了運用根式運算、二次函數比較大小等方法外，我們更藉助電腦的幫忙，得到以下結論。

從$1\times1\times n$之長方體上$1\times n$面上中心點出發走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{(2n+2)^2+2^2} & ,0<n<\sqrt{2}-1 \quad (\text{如圖}96-1)\\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,\sqrt{2}-1\leq n<1 \quad (\text{如圖}98-1)\\ \sqrt{3^2+(2n+1)^2} & ,1\leq n<\frac{3}{2} \quad (\text{如圖}95-2)\\ \sqrt{4^2+(2n)^2} & ,n\geq\frac{3}{2} \quad (\text{如圖}97-1)\end{cases}$$

柒、結論

一、從$1\times1\times n$長方體頂點出發，走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{2}(n+2), & 0\le n\le 2\ (\text{如圖}99)\\ 2\sqrt{n^2+4}, & n>2\ (\text{如圖}100)\end{cases}$$

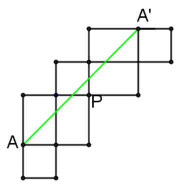


圖 99

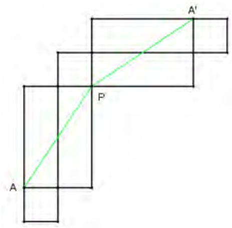


圖 100

二、從 1×1×n 之長方體上 1×1 面上中心點出發走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{3^2+(2n+1)^2}, & n\ge 1(\text{如圖}101)\\ \sqrt{2}(n+2), & n\le 1(\text{如圖}102)\end{cases}$$

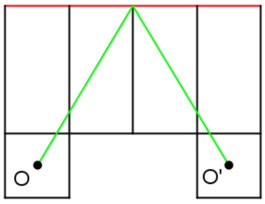


圖 101

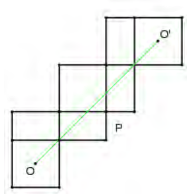


圖 102

三、從$1\times1\times n$之長方體上$1\times n$面上中心點出發走遍六面回到原點的最短路徑長為

$$\begin{cases}\sqrt{(2n+2)^2+2^2} & ,n<\sqrt{2}-1 & (\text{如圖}103)\\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} & ,\sqrt{2}-1\le n<1 & (\text{如圖}104)\\ \sqrt{3^2+(2n+1)^2} & ,1\le n<\frac{3}{2} & (\text{如圖}105)\\ \sqrt{4^2+(2n)^2} & ,n\ge\frac{3}{2} & (\text{如圖}106)\end{cases}$$

圖 103

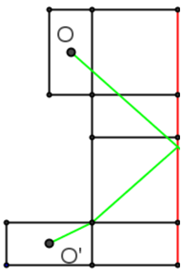


圖 104

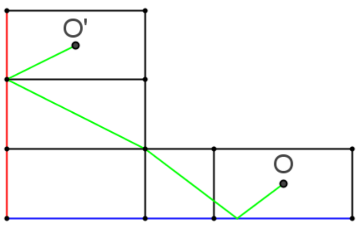


圖 105

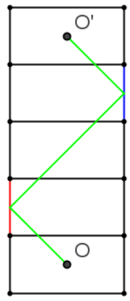


圖 106

捌、參考資料及其他

一、林孟甫、陳韋宏(101)，走完一圈有多遠-探討三邊長為1×1×1之正立方體面上一點出發走遍6面回到原出發點的最短路徑。彰化縣立和群國中，彰化縣第52屆中小學科學展覽會。

二、賴旼華、黃曉薇、洪筱茹(96)，長方體上的螞蟻。兩點間最短路徑之最大值研究，臺北市立西湖國民中學，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會(第三名)

三、左台益(101a)，國中數學第三冊，台北，南一書局。

四、左台益(101b)，國中數學第四冊，台北，南一書局。

五、左台益(101c)，國中數學第五冊，台北，南一書局。

六、陳冒海(101)，國中數學第六冊，台北，南一書局。

【評語】030405

本作品是探討如何從一個長方體(1x1xn)的一個面上點，在走遍6個面之後回到原出發點的最短路徑。這個成果引用了原來在立方體上的研究成果，以一個有創意的展開方式，進而求出正確的最短路徑長，是一個具體而且有新的貢獻的成果。美中不足的是出發點只限制在面的頂點或中點，往後的研究可考慮面上的任意點。