中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

大自然的數學遊戲

—蟻獅『做圓』、『做錐』挖挖挖

學校名稱：南投縣立宏仁國民中學

作者：	指導老師：
國一　楊曉涵	李季篤
國一　謝維元	林志隆
國二　余冠篁	

關鍵詞：圓錐、扇形、弓形

摘　　要

本研究主要是探討蟻獅巢穴的數學秘密，經觀察蟻獅建造巢穴的目的有二：（1） 做『圓錐巢穴』是為捕食、（2） 建造『圓形蛹室』是為成長蛻變。我們計算了十個樣本，發現蟻獅所築圓錐巢穴之坡度大約介於49°~63°之間，利用勾股定理$a^2+b^2=c^2$算出巢穴斜邊長在1.25～4.85cm 間，另外不同大小體長蟻獅建造出來的巢穴底圓半徑、深度、體積與圓錐體曲面面積，相關係數分別是 0.62、0.4、0.53、0.56，證實上述項目彼此間有顯著線性相關，而有利於蟻獅捕捉到獵物。在球體蛹室半徑、體積、蛹室的面積等與體長間，相關係數是 0.99、0.88、0.95，且有高度線性相關，代表蟻獅幼蟲可以在蛹室內安全無慮下蛻變成長。

壹、　研究動機

小時候聽爸媽講故事時，聽到了蟻獅這種生物，就對這類昆蟲抱有強烈的好奇心，因此在我們再三追問之下，知道了蟻獅是爸媽小時候的童年樂趣。升上國中之後，有一次在校園內散步，發現了一個個圓錐狀的小坑，依稀又回想起爸媽曾經為我們說的故事，更明白這小坑是蟻獅的巢穴，透過這個發現，我們開始研究起蟻獅的真面目。剛開始我們是研究蟻獅的自然生態，但當觀察蟻獅巢穴時，我們突然靈機一動，想到：既然巢穴是圓錐形，那我們能不能將蟻獅生態和數學進行結合呢?憑著這分靈感，我們開始研究蟻獅築巢過程中型體的奧妙、蟻獅巢穴角度與捕食間的關係、蟻獅化蛹後球體蛹室的幾何世界、蟻獅體長及其蛹室和巢穴的相關系數…。跟隨著蟻獅的腳印，我們一步一步的踏入蟻獅及其一生的數學奇幻之旅。

貳、研究目的

生物數學遊戲---探討蟻獅巢穴及蛹室內的幾何奧妙

（一）關於巢穴遊戲

遊戲 1---觀察蟻獅的圓錐體巢穴與模型製作

遊戲 2---蟻獅巢穴的製作三階段及圓錐體的探討

遊戲 3---蟻獅的圓錐體上扇形的面積演算

遊戲 4---生物數學合科教材教具製作

遊戲 5---探討蟻獅圓錐巢穴捕食的數學意義

（二）關於蛹室遊戲

遊戲 6---蟻獅建造球體蛹室

遊戲 7---蟻獅蛹室之弓形之探討

遊戲 8---蟻獅體長、巢穴、蛹室間的相關係數

參、研究器材與設備

實驗項次	實驗項目	實驗器材
一	蒐集資料	1.電腦　2.Adobe Acrobat Reader
二	捕捉蟻獅的方法	1.毛線 2.筷子 3.照相機 4.吸管 5.湯匙 6.鑷子 7.樹枝
		1.大盆子 2.厚紙板 3.三種沙網，分別為 0.5mm、2mm、5mm4.沙土　5.標籤　6.筆
三	製作蟻獅的巢穴與面積探討	1.布料棉布 2.縫針 3.縫線 4.魔鬼氈 5.拉鍊 6.剪刀 7.圓規 8.尺 9.筷子毛線 10.照相機 11.蠟燭 12.打火機 13.石膏粉 14.水 15.電腦 16.Microsoft Office Word 2007　17.GSP幾何畫板

肆、研究過程與方法

（一）生物數學遊戲 1---觀察蟻獅的圓錐體巢穴與模型製作

研究想法：

乍看之下，蟻獅凹凹洞洞的小巢穴很像圓錐狀，所以我們利用了目測觀察及使用蠟燭、石膏、洋菜粉等三種不同材質，來製作蟻獅的圓錐模型，來證明蟻獅巢穴為一個圓錐體形狀。

【方法一、目測觀察】：

1. 戶外目測：分別在學校、學校附近溪流的河床上去尋找蟻獅的巢穴，找到後，利用眼睛觀察判斷巢穴的形狀，拍下照片做成結果資料。
2. 實驗室目測：將戶外採集到的蟻獅，放置高 12cm，寬 50cm 的盆子內，觀察蟻獅築巢後巢穴的形狀，拍下照片作成結果資料。

【方法一結果】：

圖 1 校園石柱下蟻獅圓錐狀巢穴

圖 2 廢棄水管旁的圓錐狀巢穴

圖 3 溪谷邊圓錐狀巢穴

圖 4 飼養盆內圓錐狀巢穴

【方法二、巢穴模型的製作】:

我們分別使用蠟燭、石膏、洋菜粉等三種不同材質,來製作蟻獅的圓錐模型,其步驟如下:

① 蠟燭巢穴:選定一個蟻獅巢穴,先將蟻獅釣出來,用火將蠟燭燒至融化,將溶液倒入蟻獅空巢,待其冷卻,取出巢穴模型。

② 石膏巢穴:選定一個蟻獅巢穴,先將蟻獅釣出來,將石膏粉以 1:1 的比例加水,調成石膏液,慢慢地倒入蟻獅空巢,經過 2 小時凝固後取出巢穴模型。

③ 洋菜巢穴:將洋菜凍煮成液膠狀,將洋菜膠倒入蟻獅的空巢,經過 2 小時凝固後取出巢穴模型。

圖 5 將校園內的蟻獅釣出來

圖 6 將溪谷沙地上的蟻獅釣出來

【方法二結果】:

1. 蠟燭、石膏、洋菜三種材質都可以製作巢穴,但是蠟燭太過費時,而且容易將巢穴周圍泥土吸附,造成巢穴過大。洋菜剛形成時形狀不錯,但是過了幾天水分蒸發,巢穴萎縮、破裂。石膏製作簡單,不會變形、不會失水份,可以製作蟻獅巢穴模型。
2. 上述三種材質製作出來的巢穴都呈現圓錐形狀。

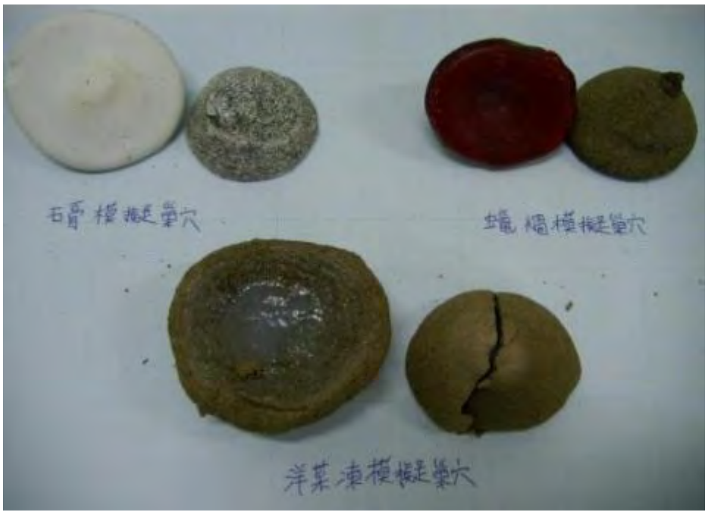


圖 7 三種不同材質製作出來圓錐巢穴

圖 8 三種不同材質圓錐巢穴的比較

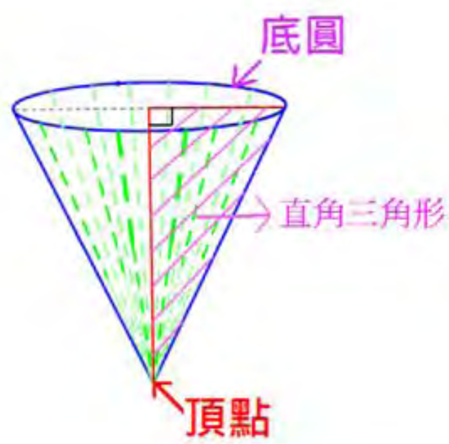


圖 9 蟻獅巢穴模擬立體圖

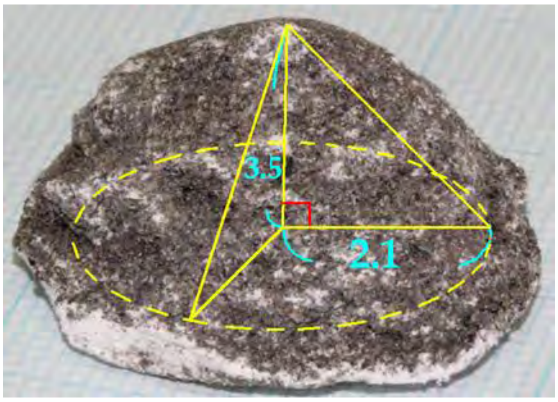


圖 10 石膏剖面圓錐圖

研究一小結論：

經由目測及模型製作等兩種方法得知，蟻獅所築的巢穴與圓錐體極為相似。

（二）生物數學遊戲 2—『蟻獅巢穴的製作三階段及圓錐體的探討』：

研究想法：

根據研究一的結果，可證實蟻獅巢穴形狀呈現圓錐狀，接下來我們想要瞭解蟻獅幼蟲築巢的過程，是如何在沙地裡將建造出圓錐狀的巢穴？我們全程拍攝蟻獅建造過程，並將整個過程中折解成三個階段，利用數學圖形的概念歸納整理，分別是圓柱→截頂圓錐→圓錐等階段。再以 GSP 軟體描繪、模擬出圖形，並以定理公式，求出蟻獅巢穴的面積與表面積。**此實驗以一隻體長 1.0cm 的蟻獅築巢為例。**

1. 蟻獅建造巢穴三階段：

第一階段：蟻獅製作圓柱體

① 蟻獅製作圓柱之過程

當蟻獅一接觸到沙地的時候，會依體長的大小，製作出比自己身體大 2.7 倍的圓直徑，詳細觀察，這不只是一個圓，更是一個圓柱，依照圓柱體的定義，以$\overline{AB}$為旋轉軸，其餘三條邊旋轉 360°所形成的面，圍成一個旋轉體即稱為圓柱。以右圖為例，$\overline{AB}$為圓柱的軸，$\overline{AB}$的長度為圓柱的高（h），所有跟$\overline{AB}$平行的線段為圓柱的母線，$\overline{BC}$和$\overline{AD}$為半徑 r，旋轉形成的兩個圓為圓柱的底面，$\overline{CD}$旋轉形成的曲面為圓柱的側面。

於是我們用尺量了蟻獅剛建造的圓，其的深度（h）$1.3cm$，底圓半徑（r）為$1.5cm$，因此斷定這是一個小型圓柱體。

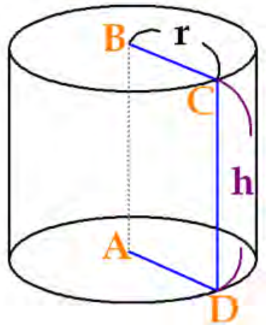


圖 11

② 蟻獅圓柱體的模擬與演算：

依照蟻獅在沙地上建造的圓柱，使用 GSP 軟體，描繪出立體模擬圖，並以圓柱體體積公式：$r^2 \times \pi \times$ 柱高(h)求出體積，再以底圓面積+曲面面積的方式：（$r^2 \times \pi \times 2$）＋（$r \times 2 \times \pi \times$ 柱高(h)）求出表面積，演算如下：

圖 12 蟻獅在沙地劃上一個圓

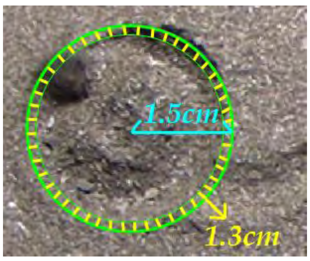


圖 13 測出半徑 1.5cm、深度 1.3cm

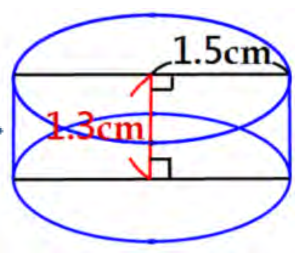


圖 14 蟻獅建造圓柱模擬圖

利用所測得的數據，深度$1.3cm$，底圓半徑$1.5cm$，代入公式中，可得：

$$\text{圓柱體積} = 1.5 \times 1.5 \times \pi \times 1.3$$
$$= 2.925\pi$$

$$\text{圓柱表面積} = 2 \times 1.5 \times 1.5 \times \pi + 2 \times 1.5 \times 1.3 \times \pi$$
$$= 4.5\pi + 3.9\pi$$
$$= 8.4\pi$$

第二階段：蟻獅製作截頂圓錐

①蟻獅製作截頂圓錐之過程

從上一個階段得知，蟻獅製作巢穴，剛開始會先製作出圓柱形，接下來以此形狀為基準，蟻獅開始向下挖掘，其結果，巢穴越挖越深，圓柱垂直的兩邊向巢內漸漸傾斜，而形成一個上面大圓、下面小圓，這形狀很像是被截了頂的圓錐體，名為截頂圓錐。

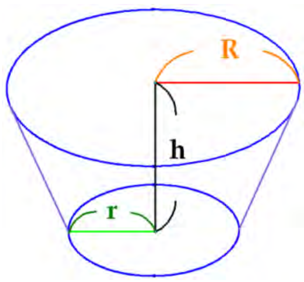


圖 15

截頂圓錐依定義上來說其實算是一個圓錐，只是平行的底面切掉一個小圓錐，因此取名為截頂圓錐。

② 蟻獅截頂圓錐的模擬與演算：

假設下底的圓形半徑為r，上底的半徑為 R，截頂圓錐高（深度）為h，其體積為$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$，再使用 GSP 軟體，描繪出立體模擬圖，以截頂圓錐公式，求出蟻獅第二階段巢穴的體積。

圖 16 蟻獅挖出上下兩個大小圓

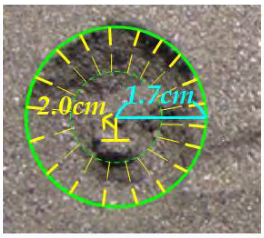


圖 17 測出半徑 1.7 cm 深度 2.0 cm

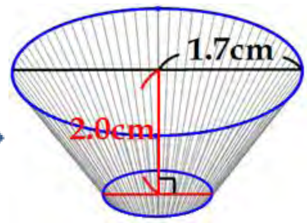


圖 18 蟻獅建造截頂圓錐模擬圖

利用所測得的數據，深度$2.0cm$，R$= 1.7cm$，$r = 0.6$cm代入公式中，可得：

$$\text{截頂圓錐體積} = \frac{1}{3} \times 2\pi(0.6^2 + 0.6 \times 1.7 + 1.7)$$

$$= \frac{1}{3} \times 2\pi(3.08)$$

$$= 1.781\pi$$

第三階段：蟻獅製作圓錐（巢穴完成）

① 從上述兩個階段得知，蟻獅在沙地內挖掘，從圓柱到了截頂圓錐體，形狀是越來越像圓錐體，蟻獅接著不斷向下開挖，將截頂圓錐體下方之小圓，由圓形形狀挖成尖端狀，最後形成圓錐體之頂點，我們認為蟻獅幼蟲挖出的巢穴是一個圓錐體，比較圓錐體的定義，明白這是一個直角三角形圍繞其中一條直角邊，沿邊旋轉一周所得到的立體狀，圓形的面稱為底面，尖端稱為頂點，而直角三角形的斜邊稱為圓錐的母線，運用公式：假設r為底圓半徑、h為底高、A 是圓錐總面積、A_ℓ是圓錐曲面面積、A_r是底圓面積、V 是圓錐體積、π是圓周率，利用勾股定理：$a^2+b^2=c^2$（直角三角形其兩股平方和等於斜邊平方），求出圓錐巢穴的斜邊長，我們使用圓錐體公式如下：

V（圓錐體積）：$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

A（圓錐總面積）$= A_r + A_\ell = \pi r^2 + \pi r\ell$

ℓ（圓錐斜邊長）$=\sqrt{r^2+h^2}$

② 蟻獅圓錐體的模擬與演算：

使用尺測量蟻獅完成圓錐巢穴後的底圓半徑（r）與深度（h），再使用 GSP 軟體，描繪出立體圖，以圓錐定理公式，求出蟻獅完成巢穴的體積、面積、斜邊長。

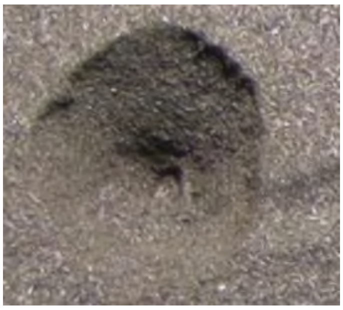


圖 19 剛完成的圓錐狀巢穴

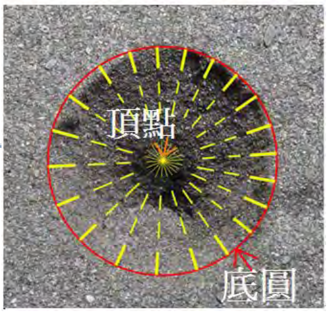


圖 20 標示出底圓與頂點

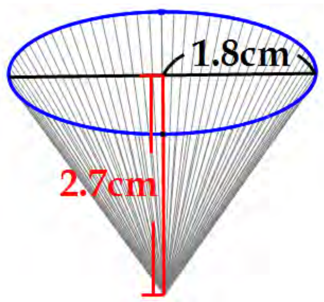


圖 21 蟻獅巢穴模擬圖

利用我們所得的數據，深度$2.7cm$，半徑$1.8cm$，代入公式中，可得：

蟻獅圓錐體體積 $=\frac{1}{3}\times 1.8^2\pi\times 2.7$

$= 2.916\pi\ cm^3$

蟻獅圓錐體表面積$= 1.8^2\pi + 1.8\times 3.244\pi$

$\fallingdotseq 3.24\pi + 5.84\pi$

$\fallingdotseq 9.08\pi\ cm^2$

圓錐斜邊（ℓ）$=\sqrt{1.8^2+2.7^2}\fallingdotseq 3.244\ cm$

③ **演算十隻蟻獅巢穴斜邊長、體積、表面積：**

由於每隻蟻獅體型大小不一(圖 22)，而觀察到的巢穴也是有大、有小，但其形狀都呈現圓錐狀，因此我們隨機以十隻體型大小不一樣的蟻獅為樣本，量出蟻獅的體長，以及所製造出來的巢穴直徑、深度，算出體積、表面積。

圖 22　體型大小不一的蟻獅

定理一結果：

1. 深度$2.7cm$，半徑$1.8cm$大的蟻獅巢穴，體積約為2.916π cm^3、表面積約為 8.73π cm^2、斜邊長為 3.244 cm。
2. 計算出十個巢穴斜邊長 1.25～4.85cm，巢穴體積 0.19π～10.08π　cm^3，表面積 1.5π～20.9π cm^2

（三）生物數學遊戲 3－『蟻獅的圓錐體上扇形的面積演算』：

實驗想法：

研究一我們確定了蟻獅的巢穴形狀為圓錐狀，因此我們使用 GSP 繪圖軟體模擬出圓錐展開圖，發現與老師黑板上所畫的展開圖示一樣，圓錐是由一個圓形及一個扇形所組成的，且扇形面積也是蟻獅的捕食面積，所以我們將計算出巢穴展開扇形的面積。

定理二：扇形定義與演算

關於扇形，通常指的是一個圓的上面被兩條半徑（r）和半徑（r）所截取的一段弧形，所圍成的圖形，因為形狀長得像一把扇子，而稱為扇形。以圖（23）為例隨意以$\mathbf{C_1}$、$\mathbf{C_2}$兩點各連直線到圓心 **O**，形成兩半徑r，兩半徑間所夾圓心角為α，將$\mathbf{C_1}$與$\mathbf{C_2}$沿著外圓相連形成一段弧長（劣弧），所構成的圖形為$\mathbf{A_1}$扇形。同樣兩半徑和另一側的優弧，所構成的圖形則為$\mathbf{A_2}$扇形。

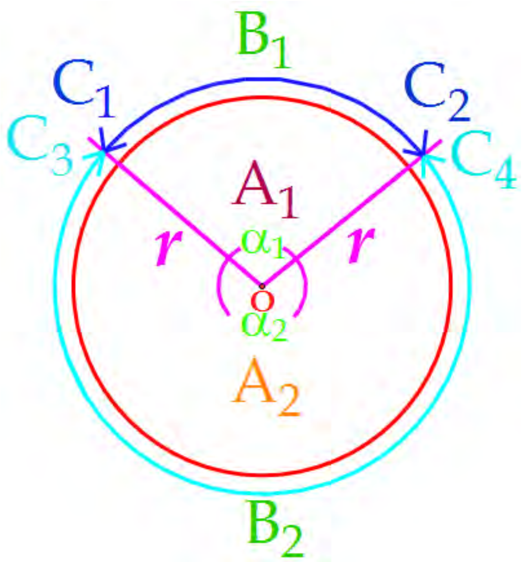


圖 23 扇形模擬圖

1. 扇形面積公式為：$\pi r^2 \times \frac{\alpha}{360°}$

2. 扇形弧長公式為：$2\pi r \times \frac{\alpha}{360°}$

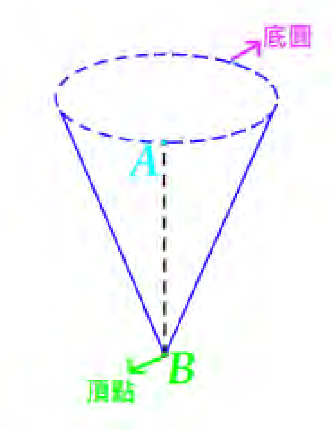
但由於我們演算之扇形為圓錐曲面，因此我們所使用半徑(r)改為斜邊長(ℓ)，則

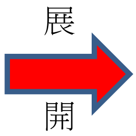
扇形面積＝$\pi \ell^2 \times \frac{\alpha}{360°}$

扇形弧長＝$2\pi \ell \times \frac{\alpha}{360°}$。

3. 模擬圓錐展開的扇形圖：

我們模擬畫出一個圓錐狀巢穴，標示出頂點與底圓，由 $\boldsymbol{B}$ 點至 A 點直線切開切開，再沿底圓圓周劃開，並將圖形展開，即形成含一圓形及一扇形的圓錐展開圖。





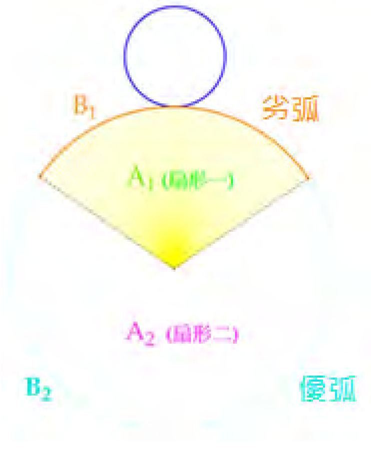


圖 24 模擬圓錐圖　　　　圖 25 展開後的扇形模擬圖

4. 根據上述的定理公式與展開圖，我們有了不一樣的想法，發現其實還有另一個公式也可以計算圓錐展開之扇形面積。首先我們利用圓錐體所展開的扇形，先假設圓錐的斜高為 l（圖 26），X_1到X_2之間形成一個弧長等於圓錐底圓的周長即

$$2\pi l \times \frac{\alpha}{360°} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \alpha = 360° \times \frac{r}{\ell}$$

再將此公式帶入扇形面積公式

$$扇形面積 = \pi\ell^2 \times \frac{\alpha}{360°}$$

$$= \pi\ell^2 \times \frac{360° \times \frac{r}{\ell}}{360°}$$

$$= \pi\ell^2 \times \frac{r}{\ell}$$

$= \pi \times r \times \ell$（此為圓錐展開扇形面積公式）

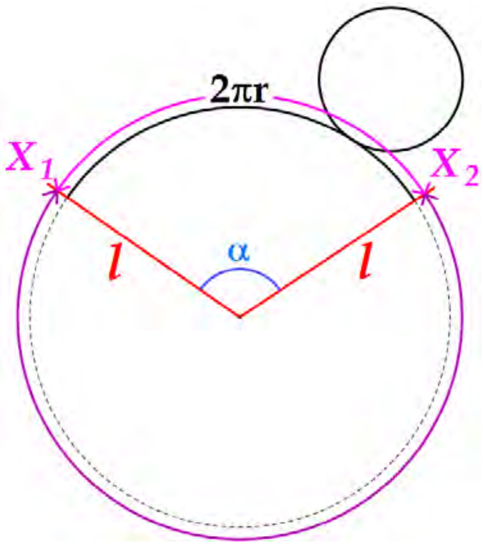


圖 26

5. 求證圓錐巢穴扇形的測量與計算：

根據研究一蟻獅最後所完成的圓錐體巢穴為例，我們用尺量出底圓半徑為 2.1cm，並利用公式 $r(\text{半徑}) \div \ell(\text{斜高}) \times 360°$，計算出$\alpha$為 185°，並使用勾股定理算出斜邊長為 4.08cm，再依研究二蟻獅最後所完成的圓錐體巢穴，使用 GSP 繪圖軟體模擬出蟻獅巢穴曲面展開圖(圖 27)，最後利用公式求出A 扇形、b 弧長，演算過程如下：

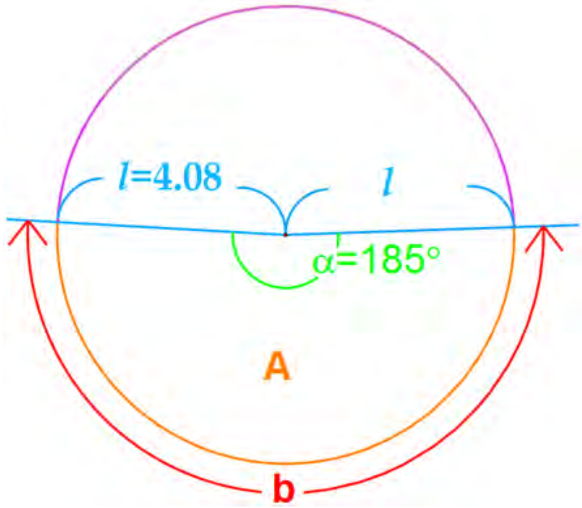


圖 27 模擬出蟻獅巢穴曲面展開圖

定理二結果：

當 A 的 ℓ為4.08 cm，α為185°時

扇形面積 $A = \pi\ell^2 \times \frac{\alpha}{360°}$

$$= 4.08^2\pi \times \frac{185°}{360°}$$

$$\fallingdotseq 9.55\pi\ cm^2$$

扇形弧長$b = 2\pi\ell \times \frac{\alpha}{360°}$

$$= 2\pi \times 4.08 \times \frac{185°}{360°}$$

$$\fallingdotseq 4.19\pi\ cm$$

（四）生物數學遊戲４－『生物數學合科教材教具製作』：

研究想法：

以往數學課上到圓錐這個單元時，我們看到老師會在黑板上畫出平面的圓錐圖講解，當時的感覺是這種黑板的圖解教學方式對我們來說，較為乏味了一點，但經過此研究，我們有了一個想法，想製作出一組看的到、摸的到，影音（生物影片）、立體圓錐（數學）合科教材，這不僅可以讓數學老師帶著走，上課時可以融入一些生物的元素，更可以增加我們學生的學習興趣。

1. 生物影片教材製作：

（1）將體長 1.0cm 蟻獅，放入小於 0.5mm 的沙土中，觀察蟻獅如何進入沙土中，及建造巢穴的過程。

（2）全程用攝影機連續拍攝 24 小時，直到蟻獅巢穴完成，先將影片剪輯成照片檔，再剪接影片之畫格，濃縮成 2 分鐘的影片，最後呈現蟻獅快速完成建造巢穴的過程。

圖 28　1.0 公分的蟻獅

圖 29 將蟻獅放入沙地上

圖 30　蟻獅開始鑽入沙地內

圖 31　身體完全埋入沙地裡

圖 32 向前開始噴沙移動

圖 33　爬出一小段痕跡路線

圖 34　繼續向前移動痕跡越來越長

圖 35　蟻獅轉彎，路徑出現一條弧線狀

圖 36 繞了一圈形成一個圓

圖 37 蟻獅進入圓的中心

圖 38 將圓中心內的沙向外噴出

圖 39 圓心外圍越來越深

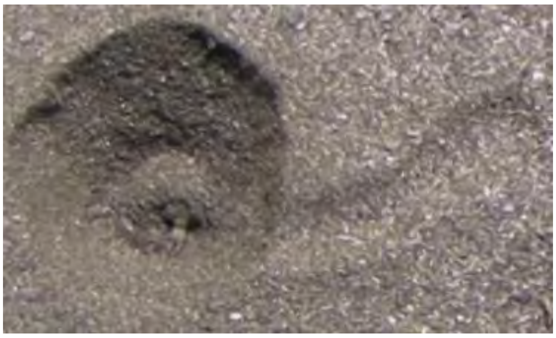


圖 40 露出身體休息

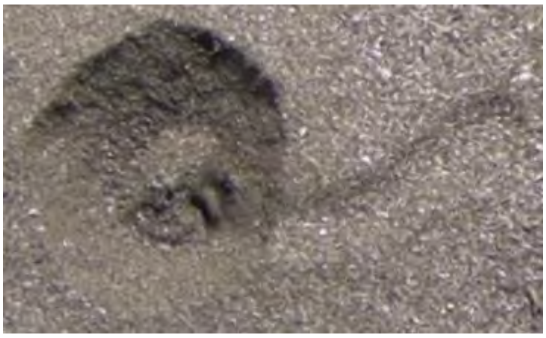


圖 41 繼續將中間餘沙挖離

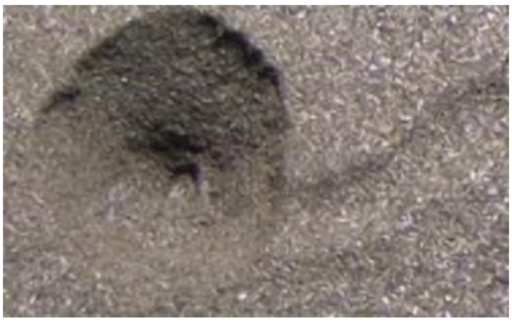


圖 42 完成後的巢穴呈現出圓錐狀

【影片小結】：

1. 我們發現蟻獅會在沙地上挖出一個圓錐形狀的巢穴。
2. 根據蟻獅挖沙的痕跡與建造巢穴的過程做數學意義的相關探討。

2. 數學圓錐立體模型製作：

（1）依生物數學遊戲 3 得知，圓錐體展開後，是由扇形和圓形組成。因此我們利用圓規在帆布上畫出約 240 度、半徑約 20 公分的扇形，再畫出一個直徑約 24 公分的圓形，並將其剪下。

（2）將拉鍊打開，把分岔兩邊的拉鍊分別延著圓形和扇形的弧形線縫合固定，同時確定拉鍊可以順暢拉合。

（3）在扇形的開口處黏上魔鬼氈，當拉鍊一旦拉合時，魔鬼氈就會黏合，而形成一個蟻獅圓錐立體巢穴模型。

圖 43 畫上圓

圖 44 貼上魔鬼氈

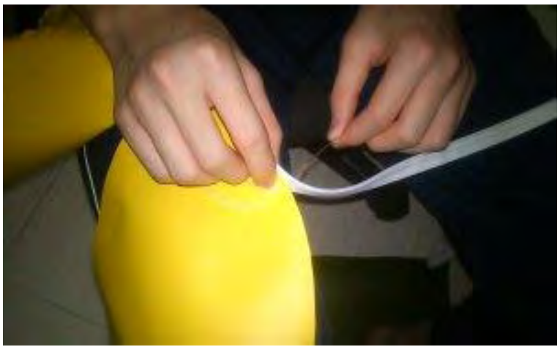


圖 45 進行針線縫合

圖 46 完成圓錐展開後的扇形模型

圖 47 我們製作的立體圓錐巢穴

圖 48 隨時可以製作出來的立體圓錐巢穴

【製作結果與示範】:

1. 上課前：播放編輯整理過的 2 分鐘蟻獅完成巢穴影片，讓學生認識蟻獅建造圓錐巢穴過程。
2. 上課中：依照數學圓錐立體模型製作順序，每位學生可以製作一個立體圓錐模型。

（五）生物數學遊戲５－『探討蟻獅圓錐巢穴捕食的數學意義』：

（1）求證蟻獅巢穴的坡度與捕食間關係

研究想法：

根據上述 3 個生物數學遊戲，知道蟻獅會製作圓錐巢穴，並且發現這巢穴的深度會越來越深且半徑越來越大，只要獵物走進巢穴時，就會滑落到巢穴底部，蟻獅就會達到捕食的目的，因此我們想藉由蟻獅建造圓錐巢穴過程，整理出與數學相關的意義，進而佐證巢穴與捕食有所關連。

圖 49 螞蟻掉入巢穴

圖 50 蟻獅夾住螞蟻

圖 51 將螞蟻拖入巢穴內吸食

1. 觀察螞蟻滑落巢穴的情況，我們認為巢穴的坡度大小是決定螞蟻落入巢穴內的關鍵，所以我們利用數學的演算，試圖求出蟻獅巢穴的坡度。所謂坡度是指通過圓錐頂點（Z 點）水平線與直角ΔXYZ，斜邊$\overline{XZ}$之夾角為θ_2（圖 52）。
2. 求出巢穴坡度（ θ_2）：

   利用三角函數: $\tan\theta_1 = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}}$、$\tan^{-1}\left(\frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}}\right) = \theta_1$，再根據平行線性質（圖 52），$L_1$、$L_2$互相平行，則$\theta_1 = \theta_2$(內錯角相等)，即可求出巢穴坡度（ θ_2）。

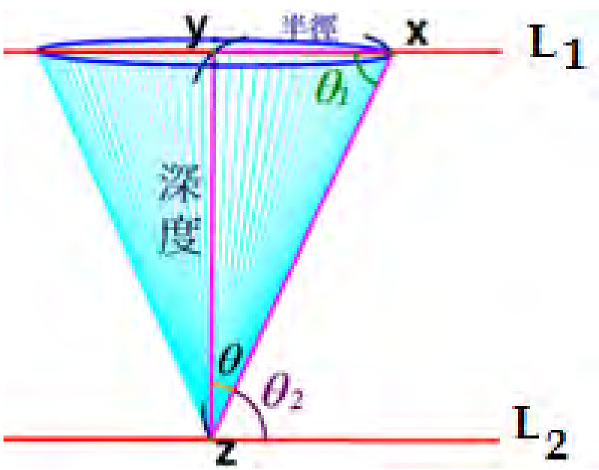


圖 52

3. 求出巢穴斜坡長度($\overline{xz}$)：

根據勾股定理，在一直角三角形內兩股平方和等於斜邊平方，其公式為：

$\overline{xy}^2 + \overline{yz}^2 = \overline{xz}^2$，

∴ 巢穴斜邊長$\overline{xz} = \sqrt{\overline{xy}^2 + \overline{yz}^2}$

4. 求證蟻獅巢穴的坡度（ θ_2 ）與斜坡長度($\overline{xz}$)：

首先我們將蟻獅所製作的圓錐巢穴劃分為圓柱、挖掘中、圓錐體三等分，以最終完成的圓錐體為主，分別量出高（2.7cm）與直徑（3.6cm），再使用 GSP 軟體畫出巢穴的模擬圖（圖 53），利用反三角函數定理計算，當$\overline{yz}$為 2.7cm， $\overline{xy}$ 為 1.8cm 時帶入$\tan^{-1}(\frac{\overline{yz}}{\overline{xy}})$，求出$\theta_1$

$\Rightarrow \tan^{-1}(\frac{2.7}{1.8}) \fallingdotseq 57°$（此為$\theta_1$）

∵ θ_1與θ_2之間為內錯角關係

∴ $\theta_1 = \theta_2$

$\Rightarrow \theta_2 = 57°$

∵ 因為$\overline{yz} \perp$ 於 L_2是一個直角關係，

∴ $\theta_2 = 57°$

$\Rightarrow \theta = 90° - 57°$

$= 33°$

又$\overline{yz}$ 為 2.7cm， $\overline{xy}$ 為 1.8cm

$\Rightarrow \overline{xz} = \sqrt{2.7^2 + 1.8^2}$

∴ 巢穴斜邊長 $\overline{xz} = 3.24$ cm

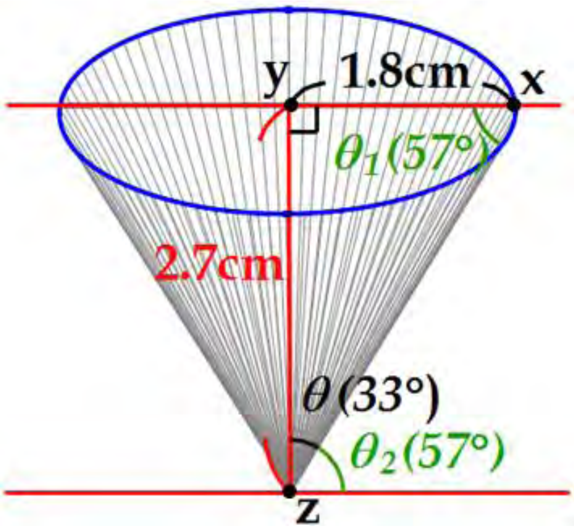


圖 53

結果：

以上述一隻 1.0cm 所挖掘出來的直徑 3.6cm、高 2.7cm 的蟻獅巢穴，

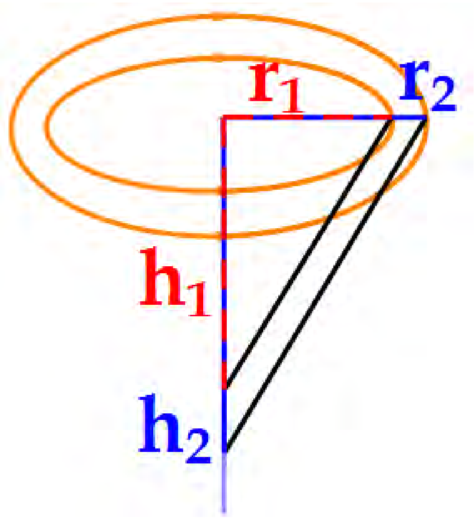
巢穴的坡度 $\theta_2 = 57°$

斜邊長($\overline{xz}$) = 3.24 cm

5. 演算十個不同大小的蟻獅巢穴，找出圓錐巢穴坡度與斜邊長。

【推論】:

經由上述的生物數學遊戲與演算所推得的圓錐巢穴角度大約落於 49°~63° 之間，我們推測若蟻獅所築巢穴坡度(斜度)相同或者差距不大，則只要可以確認蟻獅巢穴的底圓半徑，便可以大約推算出巢穴的深度(如圖 54)。當斜度差不多，巢穴底圓半徑越大，則深度越深；巢穴底圓越小，故深度越淺。



$r_1 < r_2$；若斜度差不多

半徑越大,則挖的越深

$h_1 < h_2$

圖 54

生物數學遊戲四結果:

1. 利用反三角函數方式，我們算出了十個圓錐巢穴的坡度，發現蟻獅巢穴坡度約在49°～63°之間，在此範圍之內，有利於蟻獅捕捉獵物。
2. 利用 勾股定理$a^2 + b^2 = c^2$（$\overline{xz} = \sqrt{\overline{xy}^2 + \overline{yz}^2}$）算出十個圓錐巢穴的斜邊長在約落於『1.25～4.85cm』間。
3. 我們推測蟻獅建造巢穴在上述範圍之內，獵物較容易掉入巢穴，有助於獵捕獵物。

（六）生物數學遊戲 6 －『蟻獅建造球體蛹室』：

研究想法：

蟻獅成長的過程分為卵期 → 幼蟲期 → 蛹期 → 成蟲期等四個階段，經過我們觀察，蟻獅幼蟲要進入第三階段【蛹期】之前，會為自己建造一個堅固的蛹室，幼蟲就會待在蛹室內進行化蛹蛻變，我們發現，蟻獅所建造出來的蛹室呈現出一顆圓球狀，藉由此球體蛹室的保護，我們想瞭解蛹室在數學上的意義，以及延伸出來的其他數學相關幾何圖形。

圖 55 蟻獅所建造的球體蛹室

1. 球體蛹室：

定義：球體是一個立體圖形，當半圓以直徑為旋轉軸，旋轉所成的曲面叫做球面，所以由球面去圍成的幾何體就稱為球體。假設r為半徑，球體的體積為：

$\frac{4}{3}\pi r^3$、表面積為$4\pi r^2$。

蛹室球體演算：

以鐵尺測量 12 粒蛹室，直徑分別是 0.8～1.0 cm，代入公式中求出蛹室球體的體積是 $0.09\pi\ cm^3 \sim 0.17\pi\ cm^3$，表面積$0.64\pi\ cm^2 \sim 1.0\pi\ cm^2$

圖 56 直徑約 1cm 蛹室

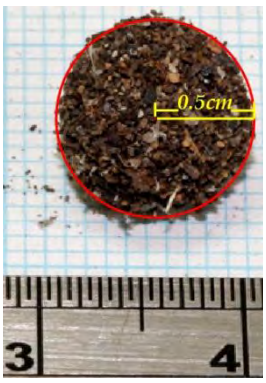


圖 57 半經約為 0.5cm

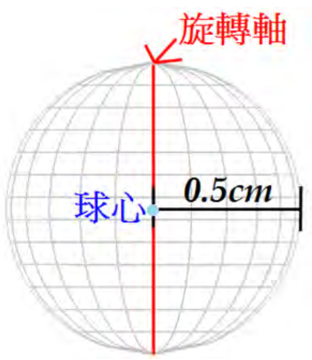


圖 58 模擬的圓球體蛹室

（七）生物數學遊戲７－『蟻獅蛹室之弓形探討』：

研究想法：

在進行蛹室球體研究過程，我們發現蟻獅幼蟲會待在球體蛹室的截面裡，此時若用一條弦將其所在位置進行分割，便會形成弓形，因此，我們想藉由探討弓形，來研究蟻獅在蛹室截面裡所佔的面積大小。

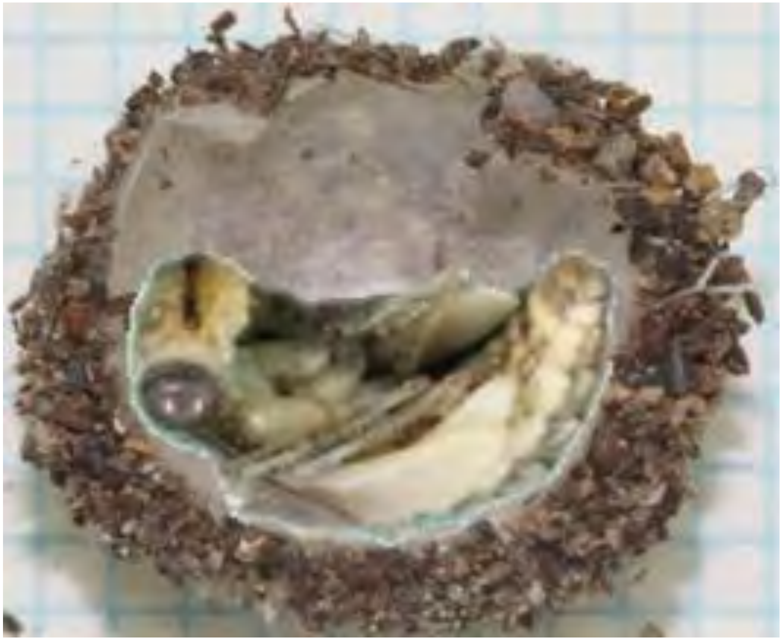


圖 59 蟻獅蛹體在蛹室內

1. 弓形定義：

利用圓上面的一條弦，把圓分割成兩個部份，這兩個部份形狀長得像”弓”，所以稱為弓形。較大面積的那一部份又稱為”優弓形”，較小的部份稱為”劣弓形”。以圖（60）為例：根據兩半徑所圍出之扇形，在扇形內部連接$\overline{c_1c_2}$ 的弦為S，形成弓形。**因此將圓劃分兩部份，小面積為A_1屬於劣弓形，大面積為A_2屬於優弓形。**

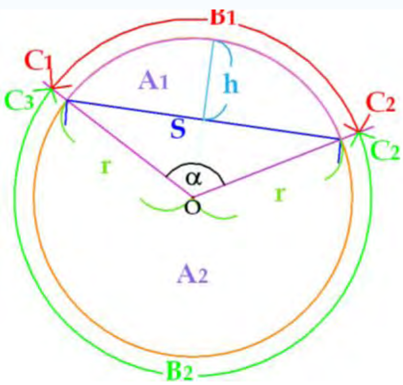


圖 60

2. 弓形公式的推導：

（1）弓形角度的推導

因為我們能測量到的數據只有弦長，因此我們使用弦長的公式進行反推出 α 的算式：

弓形弦長（S）公式，圖 61、62：

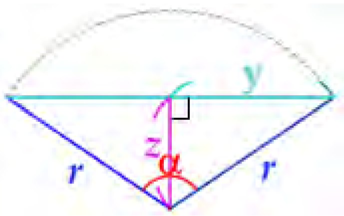


圖 61

$\because s = 2r \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Longrightarrow s = 2y$

且 $y = r \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Longrightarrow \frac{y}{r} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\therefore \alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$

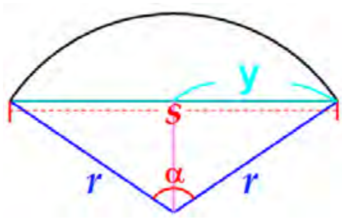


圖 62

推演出α算式之後，便可開始演算弓形面積，我們一樣使用推導的方式，推演出弓形面積公式的演算過程。

（2）弓形的高度（h）公式，圖 63：

$\frac{z}{r} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Longrightarrow z = r \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

將 $z = r \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$代入 $h = r - z$，如右圖

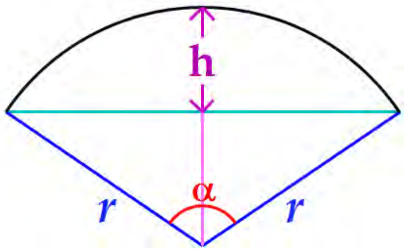


圖 63

$\Longrightarrow h = r - \left[r \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

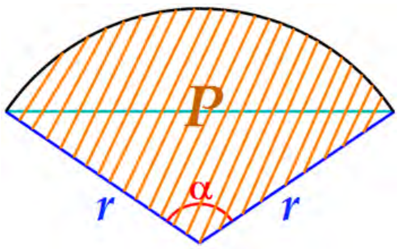


圖 64

（3）弓形面積（A）公式的推導：

因弓形面積是由一個扇形剪掉一個三角形的面積，所以我們先算出三角形面積：

先由『正弦二倍角公式』:

$\sin 2\alpha = 2(\sin\alpha) \times (\cos\alpha)$

$\Longrightarrow \sin\alpha = 2\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

再代入三角形公式：

底× 高 $\times \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left[2 \times r \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \times \left[r \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \times \frac{1}{2}$

$= r^2 \times \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha$（如圖 64、65、66）

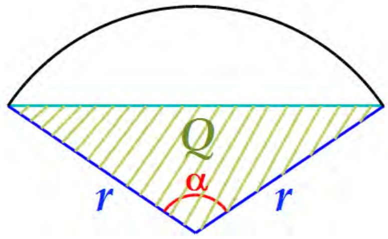


圖 65

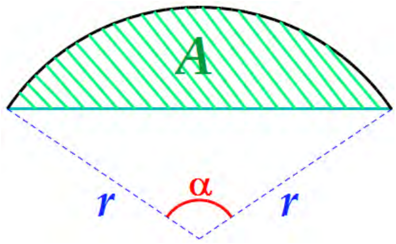


圖 66

弓形面積（A）＝扇形面積減去三角形面積

$= \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha$

（4）求證蟻獅蛹室內蛹的弓形面積：

① 首先將圓形蛹室用美工刀切割打開，得知蟻獅幼蟲會吐出絲線形成一個白色、平滑、柔軟的內部，蟻獅就在這裡面進行化蛹的蛻變。

② 使用鐵尺量出蛹室的半徑（r）、弦長（S），利用$2\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$求出α 角度，再利用 GSP 軟體畫出弓形、在利用$r^2\pi \times \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin\alpha$ 求出弓形面積，為蛹體在蛹室內化蛹的空間。

③ 演算操作過程如下：

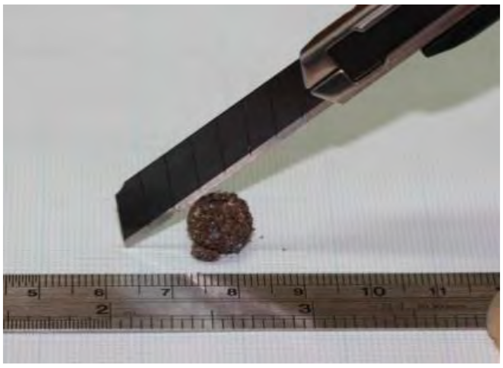


圖 67 使用美工刀將蛹室切開

圖 68 切開後的蛹室

角度α求證：

$\because \alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$

$= 2\sin^{-1}\left(\frac{0.375}{0.4}\right)$

$= 140°$

$\therefore 360° - 140° = 220°$（因為蛹室裡面的蛹體大小會超過圓形蛹室的圓心，由此我們證明它是一個優弓形，故上述算出的α 角度屬於劣弓形角度，還需以360°減去，才得到優弓形之α 角度）

而弓形 XbY（圖 69）面積為：

$r^2\pi \times \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin\alpha$

$= 0.4^2\pi \times \frac{220°}{360°} - \frac{1}{2} \times 0.4^2 \times \sin(220°)$

$\fallingdotseq 0.098\pi + 0.0512$

$\fallingdotseq 0.359(cm^2)$（即為蛹體在蛹室截面裡所佔面積）

圖 69 在蛹室上標示出弓形

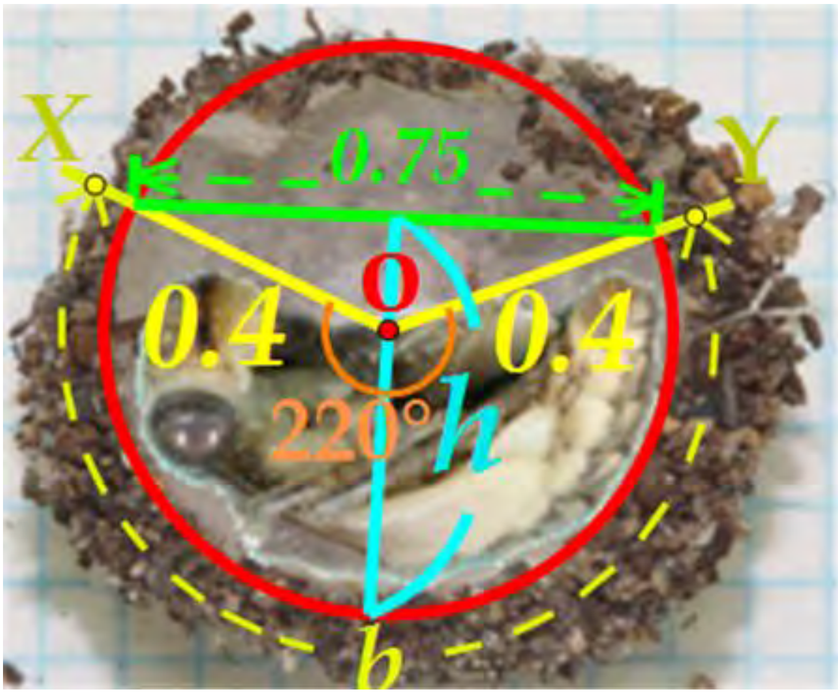


圖 70 測量出蛹室的半徑、弦長

（八）生物數學遊戲８－『蟻獅體長、巢穴、蛹室間的相關係數』

『求證蟻獅體長及巢穴間的相關性』：

實驗想法：

根據上述所有的實驗和觀察，我們看到即使每一個巢穴的大小雖然不一，但是都能夠精準的達到捕食的目的，因此我們推測這些大小不一的圓錐巢穴的體積、面積以及蛹室的體積、面積等等彼此間，可能都與蟻獅本身身體的體長大小有極大的關聯，因此我們藉由相關係數的分析，試圖來找出蟻獅體長以及巢穴之間的相關性。

1. 分析的軟體：

   我們利用 SPSS 統計軟體來分析蟻獅體長(x)與各項數據(y)的相關性，演算公式如下：

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}}$$

2. 計算出來的相關系數以下列三種數據來分析：

（1）當計算出的相關系數$|r| = 1$時，表示兩變數為完全線性相關

（2）當計算出的相關系數$r = 0$時，表示兩變數間無線性相關關係

（3）當 $0<|r|<1$ 時，表示兩變數間存在一定程度的線性相關，又細分下列三種分析：

① 當計算出的相關系數 $|r| < 0.4$為低度線性相關

② 當計算出的相關系數 $0.4 \leq |r| < 0.7$為顯著線性相關

③ 當計算出的相關系數 $0.7 \leq |r| < 1$為高度線性相關。

3. 蟻獅體長與圓錐巢穴底圓半徑的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，巢穴底圓半徑為 y，x̄為蟻獅體長變數的平均值，ȳ為底圓半徑變數的平均值，代入公式後，求出蟻獅體長與圓錐巢穴底圓半徑相關係數為 0.62，證實蟻獅與所築圓錐巢穴的底圓半徑間呈現顯著線性相關。

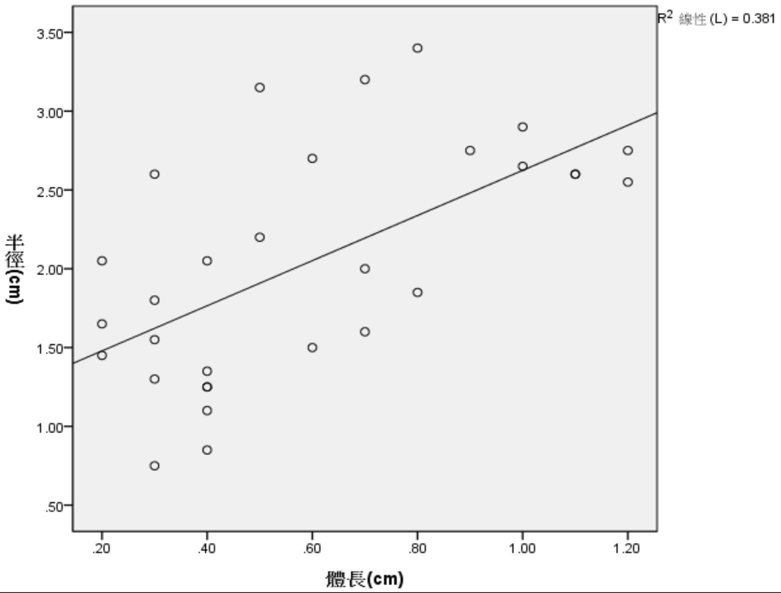


圖 71 蟻獅體長與圓錐巢穴底圓半徑的相對分佈圖

4. 蟻獅體長與圓錐巢穴深度的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，圓錐巢穴深度為 y，x̄為蟻獅體長變數的平均值，ȳ為圓錐巢穴深度變數的平均值,代入公式求出蟻獅體長與圓錐巢穴深度相關系數是 0.4，證實蟻獅與所築圓錐巢穴深度之間呈現顯著線性相關。

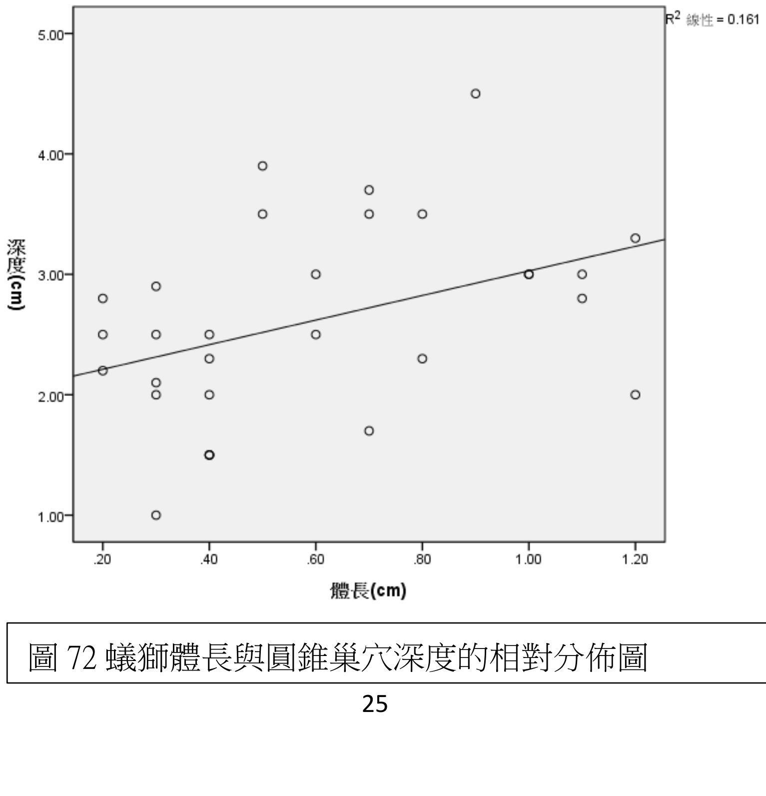


圖 72 蟻獅體長與圓錐巢穴深度的相對分佈圖

5. 蟻獅體長與圓錐體體積的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，圓錐巢穴體積為 y，$\bar{x}$為蟻獅體長變數的平均值，$\bar{y}$為圓錐巢穴體積變數的平均值，代入公式求出蟻獅體長與圓錐體體積之相關係數為 0.53，證實蟻獅與所築圓錐體巢穴體積**呈現顯著線性相關**。

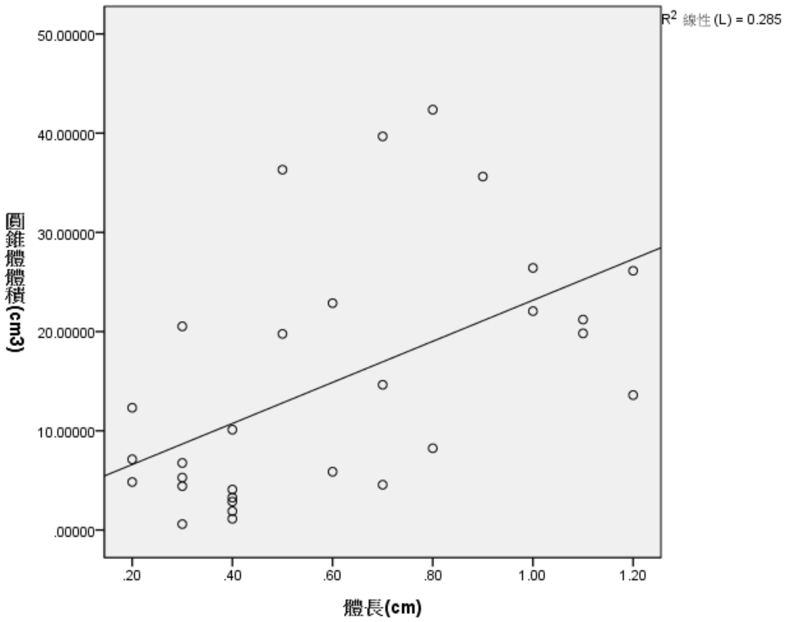


圖 73 蟻獅體長與圓錐體體積的相對分佈圖

6. 蟻獅體長與圓錐體曲面面積的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，圓錐體曲面面積為 y，$\bar{x}$為蟻獅體長變數的平均值，$\bar{y}$為圓錐體曲面面積變數的平均值，代入公式求出蟻獅與所築圓錐體巢穴曲面面積之相關係數為 0.56，證實蟻獅與圓錐體巢穴曲面面積**呈現顯著線性相關**。

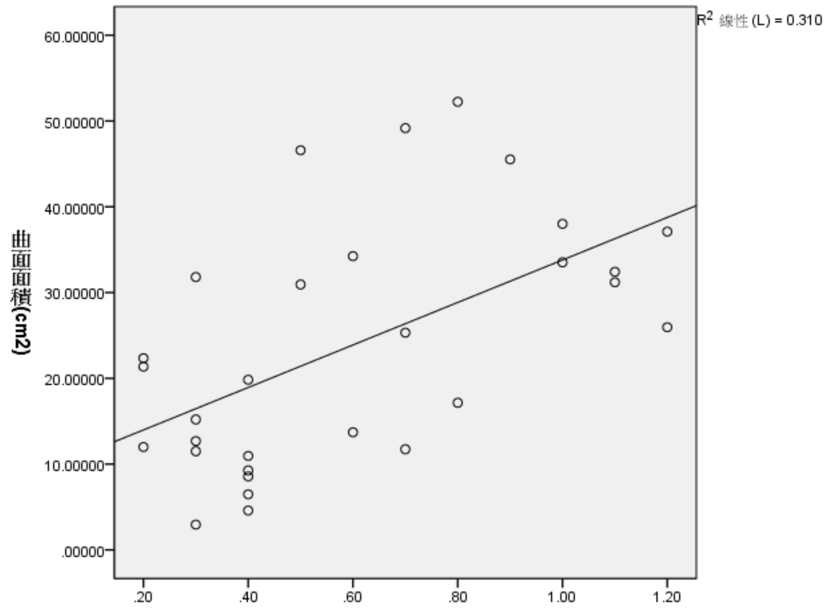


圖 74 蟻獅體長與圓錐體曲面面積的相對分佈圖

7. 蟻獅體長與球體蛹室半徑的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，球體蛹室半徑為 y，x̄為蟻獅體長變數的平均值，ȳ為球體蛹室半徑變數的平均值，代入公式求出蟻獅體長與球體蛹室半徑之相關係數是 0.99，證實蟻獅與球體蛹室半徑之間**呈現高度線性相關**。

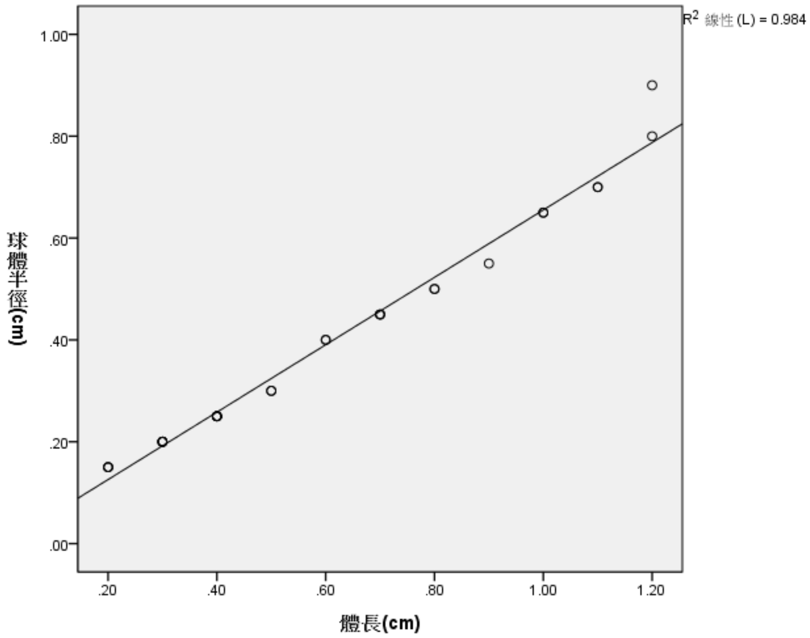


圖 75 蟻獅體長與球體蛹室半徑的相對分佈圖

8. 蟻獅體長與球體蛹室體積的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，球體蛹室體積為 y，x̄為蟻獅體長變數的平均值，ȳ為球體蛹室體積變數的平均值，代入公式求出蟻獅體長與球體蛹室體積之間相關係數是 0.88，證實蟻獅與球體蛹室體積**呈現高度線性相關**。

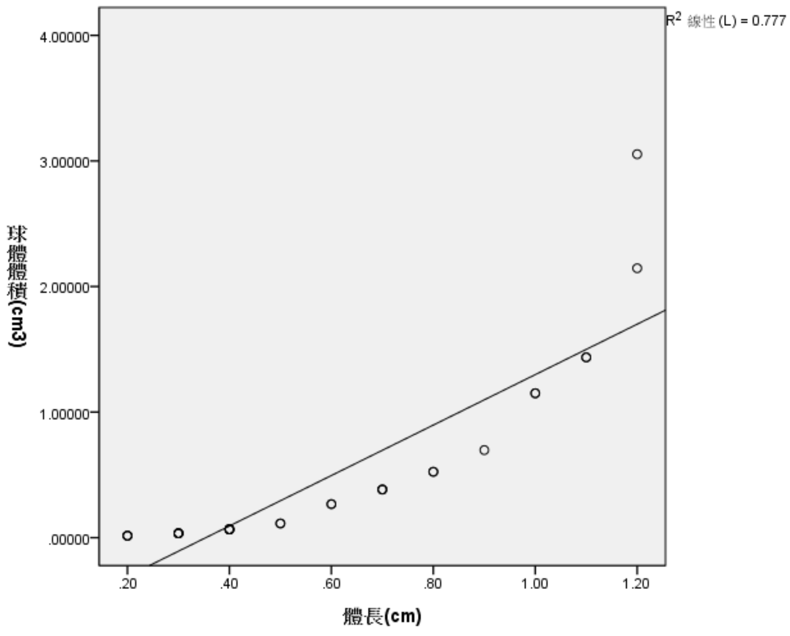


圖 76 蟻獅體長與球體蛹室體積的相對分佈圖

9. 蟻獅體長與球體蛹室面積的相關係數：

假設蟻獅體長為 x，球體蛹室面積為 y，$\bar{x}$為蟻獅體長變數的平均值，$\bar{y}$為球體蛹室面積變數的平均值，代入公式求出蟻獅體長與球體蛹室面積之相關係數是 0.95，證實蟻獅體長與球體蛹室面積**呈現高度線性相關**。

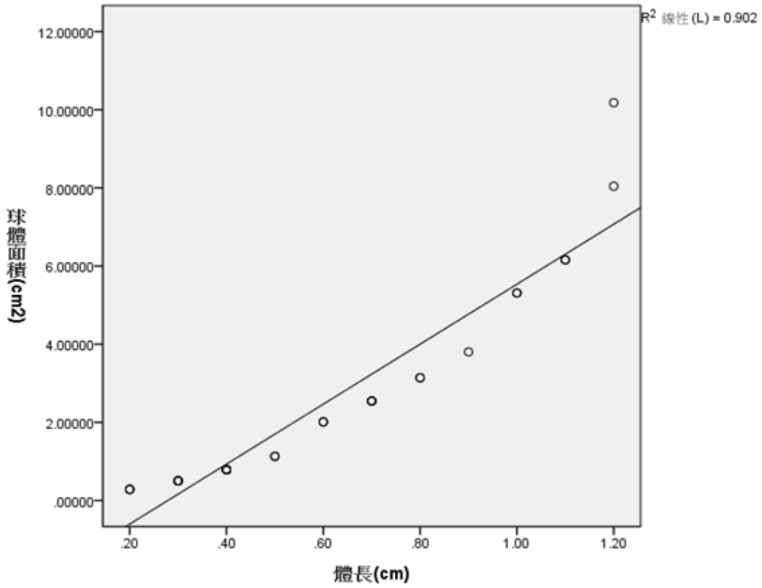


圖 77 蟻獅體長與球體蛹室面積的相對分佈圖

伍、結果與討論

1. 大師與本研究的結合：

數學大師史都華在書中曾經預測，二十一世紀最有進展的科學領域必將是『生物數學』，可預期見到數學概念及類型的爆增。本研究正因此書來的靈感，**以生物的行為作為題材**，依據蟻獅這類生物所建造的巢穴為方向，**用數學的概念**，求證蟻獅建造巢穴的規律。因此從實驗一觀察研究的結果，證實『蟻獅所築的巢穴都呈現出圓錐體』。

2. 生物與數學的結合遊戲：

（1）生物數學遊戲 1－

蟻獅建造巢穴過程分為圓柱體→ 截頂圓錐體→最後形成圓錐體形狀巢穴。

（2）生物數學遊戲 2－

可以利用蟻獅的圓錐體，運算扇形的面積、弧長公式如下。

扇形面積＝$\pi\ell^2 \times \frac{\alpha}{360°}$

扇形弧長＝$2\pi\ell \times \frac{\alpha}{360°}$

（3）生物數學遊戲 3－

完成一組生物數學合科教材教具製作，讓我們上一堂可看、可聽、可操作的圓錐數學課。

（4）生物數學遊戲 4－

證明蟻獅建造巢穴的目的是為了捕食與躲藏，以十個圓錐巢穴為樣本，算出發現蟻獅巢穴坡度約在『49°～63°』之間，再利用『勾股定理：$a^2 + b^2 = c^2$』，計算出圓錐巢穴的斜邊長為『1.25～4.85cm』，所以蟻獅所建造的巢穴，其坡度與斜邊長上述數據範圍之內，有利於蟻獅捕捉獵物。

（5）生物數學遊戲 5－『蟻獅建造球體蛹室』：

以鐵尺測量 12 粒蛹室，直徑分別是 0.8～1.0 cm，代入公式中求出球體蛹室的體積是 $0.09\pi\ cm^3 \sim 0.17\pi\ cm^3$，表面積$0.64\pi\ cm^2 \sim 1.0\pi\ cm^2$

（6） 生物數學遊戲 6－藉由蟻獅蛹體形狀，推導出

弓形弦長（S= $2r \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$）、

$\alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$、

弓形的高度$h = r - \left[r \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$、

弓形面積（A）$= \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha$

找出蛹體在蛹室內化蛹的空間。

5. 求證蟻獅體長及巢穴間的相關性』：

（1）蟻獅體長與圓錐巢穴底圓半徑間相關係數是 0.62，證實蟻獅與所築圓錐巢穴的底圓半徑間有顯著線性相關。

（2）蟻獅體長與圓錐巢穴深度間相關係數是 0.4，證實蟻獅與所築圓錐巢穴深度有顯著線性相關。

（3）蟻獅體長與圓錐體體積間相關係數為 0.53，證實蟻獅與所築圓錐體巢穴體積有顯著線性相關。

（4）蟻獅體長與圓錐體曲面面積間相關係數為 0.56，證實蟻獅與圓錐體巢穴曲面面積間有顯著線性相關。

（5）蟻獅體長與球體蛹室半徑間相關係數是 0.99，證實蟻獅與球體蛹室半徑之間有高度線性相關。

（6）蟻獅體長與球體蛹室體積間相關係數是 0.88，證實蟻獅與球體蛹室體積有高度線性相關。

（7）蟻獅體長與球體蛹室面積間相關係數是 0.95，證實蟻獅體長與球體蛹室面積有高度線性相關。

6. 總結：

（1） 蟻獅幼蟲建造巢穴的目的有二：
①做『圓錐巢穴』是為捕食、②建造『圓形蛹室』是為成長蛻變。

（2） 不同大小體長的蟻獅建造出來的巢穴底圓半徑、深度、體積與圓錐體曲面面積，相關係數介在$0.4 \leq |r| < 0.7$，有顯著線性相關，這有利於蟻獅捕捉到獵物。

（3） 不同球體蛹室半徑、蛹室體積、蛹室的面積等與體長間的相關係數介在$0.7 \leq |r| < 1$，屬於高度線性相關，代表蟻獅幼蟲在蛹室內的蛻變成長是安全無慮的。

陸、參考資料

1. 史都華 大自然的數學遊戲（第三版) 台北市 天下文化出版 2012
2. 數學編輯小組 國中數學解讀手冊 台北市 五南出板社 2011
3. 林曉芳 SPSS 統計學之應用 台北市 鼎茂圖書出版股份有限公司 2011
4. 小林吹代 用看得學數學 新店市 世茂出版有限公司 2009
5. 蔡聰明 數學的發現趣談 台北市 三民書局 2008
6. 史都華 生物世界的數學遊戲 台北市 天下文化出版 2007
7. 王永建 生物數學趣談 新竹市 凡異出版社 2004
8. 朱耀沂 黑道昆蟲記(上) 台北市 玉山出版社 2003
9. 廖智安 台灣昆蟲記 大樹文化事業有限公司 1999

【評語】030404

1. 作品說明順暢，團隊合作良好。
2. 主題內容與國中教材連結適切，並與大自然生物相關，具鄉土性。
3. 觀察細膩，所用數學理論簡易。
4. 主題內容未見創新。
5. 線性相關之討論宜採用自己觀察紀錄之數據。