中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030403

莫利三角形的孿生兄弟

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 張辰煜 國二 廖彥鈞 國二 王詩媛	林耀南 吳建昀

關鍵詞：莫利三角形、孿生莫利三角形、

旁一旁莫利正三角形

莫利三角形的孿生兄弟

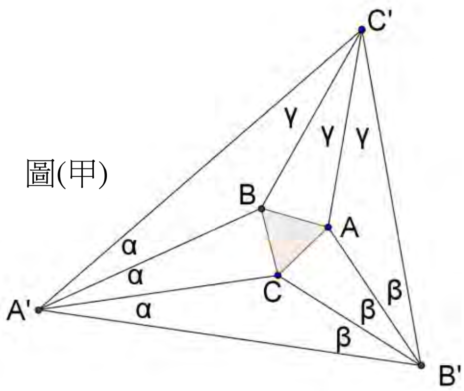
摘要

你知道嗎?我們隨手畫出的莫利△其實不一定是莫利△本尊而是它的孿生兄弟，眾所周知吾人無法用尺規作圖直接操作莫利三角形，本文使用尺規作圖由內而外揭開了它的面紗，使用尺規作圖畫出所有的莫利直系家族，更進一步的畫出他的孿生兄弟家族。一般的莫利△包含一個內莫利正△、一個外莫利正△及三個旁莫利正△，本文利用尺規作圖又找到了他對應的孿生兄弟內莫利正△、外莫利正△及旁莫利正△。前人亦曾從不同方向間接使用尺規去作圖，但他們只能觀察莫利原生家族，反觀本文指定一正△當內莫利正△，用尺規作圖反向操作出一組原生莫利家族及其對應的另一組孿生家族，過程中利用到的輔助圓具有神奇的功能，它將隱藏一百多年(1899~2013)的"莫利完整家族"發掘出來，這個輔助圓也讓我們了解誰是本尊誰是分身。

壹、 研究動機

學過尺規作圖單元後，隨堂測驗要求畫出三角形的三內角平分線並觀察那三條平分線是否會相交於同一點。同學們七嘴八舌的吵了一陣子，此時老師又問，若將各內角三等分，觀察兩鄰角同一側的三等分線交點，如圖(甲)A、B、C，組成何種幾何圖形?同學們不知怎麼將內角三等分，只能隨手畫畫，那個圖形看起來像個正△，為甚麼會是這樣呢?老師鼓勵我們想一想、試一試。

圖(甲)



貳、 研究目的

一、莫利三角形的尺規逆向作圖法探討

二、原生莫利家族及孿生莫利家族存在性探討

三、兩家族成員邊長的關係式探討

四、平面上以一固定正△為內莫利的尺規作圖中，探討起點 P 的有效落點範圍

參、 文獻探討

一、莫雷角三分線定理

在歐幾里得幾何中，莫雷角三分線定理（Morley's theorem）說明對所有的三角形，其三個內角作角三分線，靠近公共邊三分線的三個交點，是一個等邊三角形。此定理由法蘭克·莫雷在 1899

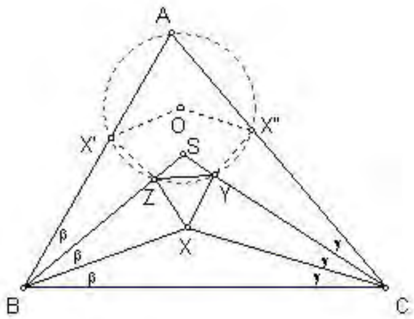
年發現。對外角作外角三分線，也會有類似的性質，可以再作出 4 個等邊三角形。此定理有趣的地方是我們沒辦法用尺規作圖作出各內角的三等分線，並進而得出內部的正三角形，因為已經證明出尺規作圖無法作出三等分角，但卻能出現這麼神奇的結果。

二、莫利三角形的證明

如圖(乙)，設△ABC 的∠A=3α,∠B=3β,∠C=3γ與$\overline{BC}$相鄰的兩條三等分分角線交於 X，∠B 和∠C 的另兩條三等分分角線交於 S，則 X 為△SBC 的內心，從而 XS 平分∠BSC 在 SX 兩側分別作∠SXZ=∠SXY=30°且 Z、Y 分別在$\overline{BS}$、$\overline{CS}$上則△SXZ 全等於△SXY 所以$\overline{XZ}=\overline{XY}$
又∠ZXY=60°，故△XYZ 為正三角形。接下來要證$\overrightarrow{AZ}$、$\overrightarrow{AY}$三等分∠A，分別在$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CA}$取$\overline{BX'}=\overline{BX}$，$\overline{CX''}=\overline{CX}$，則△BZX'全等於△BZX，從而$\overline{ZX'}=\overline{ZX}=\overline{ZY}$，同理有$\overline{YX''}=\overline{ZY}$，所以$\overline{X'Z}=\overline{ZY}=\overline{YX''}$

∠X'ZY=360°-2∠BZX-60°
=360°-2(∠S/2+30°)-60°
=240°-∠S
=240°-(180°-2β-2γ)
=60°+2($\beta+\gamma$)
=60°+2(60°-α)
=180°-2α

圖(乙)



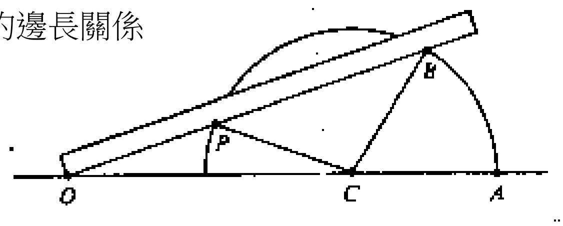
同理∠ZYX"=180°-2α，作 X'ZY 的外接圓 O 由對稱性知 X"也在圓 O 上，亦證明圓心角∠X'OZ=∠ZOY=∠YOX"=2α，故∠X'OX"=6α，又因為∠A=3α，故 A 也在圓 O 上，又弦 X'Z=ZY=YX"，得$\overrightarrow{AZ}$、$\overrightarrow{AY}$為∠A 的三等分線，故得證。

三、中國數學家<u>梁卷明</u>針對莫利△研究成果

他們可以間接的利用尺規作圖畫出莫利△，進而發現母△三內角、三外角及三外角剩餘角共 18 條分角線，共有 108 個交點，共構成或衍生出 54 個莫利正△，且已列出某些莫利△的邊長關係式

四、任意角度的三等分

<u>阿基米德</u>除了直尺、圓規之外，多加了另一作圖工具”木棒”，才能將任意角三等分，如圖(丙)。另有利用機械作圖也能將任意角三等分，或用摺紙法理論上三等分任一角，但總結上文，只利用直尺和圓規要直接三等分各內角而畫出莫利三角形是不可能的。又到目前為止沒有任何數學研究報告探討莫利△的孿生家族及這些正△之間的邊長關係



圖(丙)

肆、 研究過程或方法

一、在觀察研究動機及文獻探討中的莫利三角形之後，我們發現若單純只使用直尺及圓規是不可能畫出一般三角形的莫利三角形，這莫利三角形似乎隱藏著非常多的秘密，等待我們去發掘，因此若無法使用尺規作圖法去研究它，必會讓人有種不踏實的感覺，也因為如此，這莫利三角形自從被發現後到今天一直都還是那個樣，只是一個美麗的圖案，頂多陸續被多找出幾個正△而已，我們想要進一步的去瞭解它。一開始我們夢想我們能利用尺規作圖將一角三等分，也確實花了好多時間操作並查了很多資料，但文獻裡說那是不可能的，我們的夢想破碎了。還好有一天愛上網 online 聯合作戰的組長說從外面圍攻無法突破時，何不找個縫隙鑽進內部再往外倒攻出來呢?真是一語驚醒夢中人，我們何不畫個正三角形，再倒畫出外面的母三角形呢?

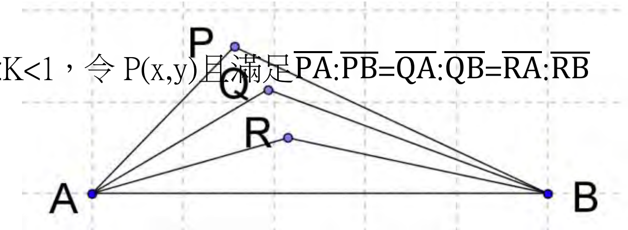
二、預備定理

> 如圖(1)，到平面上兩定點 A、B 等比例距離的所有點共圓或成一直線

為了了解這個性質，我們分別利用代數平面坐標及幾何尺規作圖兩工具去窺視

(一)、平面坐標解析法:

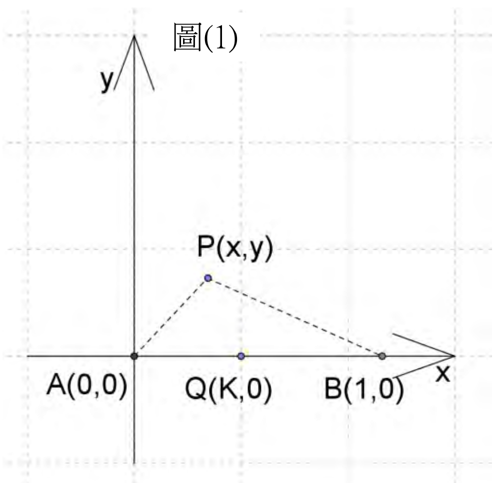
已知:如圖(2)平面座標上 A(0,0)、B(1,0)、Q(K,0)，0<K<1，令 P(x,y)且滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{QA}:\overline{QB}=\overline{RA}:\overline{RB}$



求証:P、Q、R 共圓或成一直線

證明:由$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{QA}:\overline{QB}$

得 $\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-1)^2+y^2}$=k:(1-k)左右平方



圖(1)

$(x^2+y^2):(x-1)^2+y^2=k^2:(1-k)^2$

$(x^2+y^2):(x^2+y^2-2x+1)=k^2:(k^2-2k+1)$

利用分比運算得

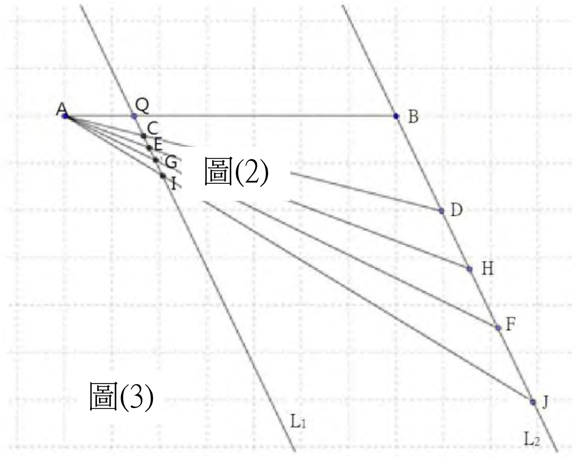
$(x^2+y^2):(-2x+1)=k^2:(-2k+1)$

展開得

$(-2k+1)x^2+(-2k+1)y^2=-2k^2x+k^2$

整理成圓錐曲線方程式

$(-2k+1)x^2+0xy+(-2k+1)y^2+2k^2x+0y-k^2=0$ ----①



當 K= $\frac{1}{2}$時，此圓錐曲線退化成一直線$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$，

即直線 x= $\frac{1}{2}$

當 K≠ $\frac{1}{2}$時上網查得圓錐曲線判別公式，如下

在二元二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 中若 A=C 且 B=0 且 $D^2+E^2-4F>0$ 則必為圓

現觀察①式發現

A=C=(-2K+1)且 B=0 且 $D^2+E^2-4F=(2k^2)^2+0^2-4(-k^2)=4k^4+4k^4$ 必大於 0

故諸 P 點的軌跡為一個圓，或退化成一直線。

(二)、尺規作圖法

已知: 令 Q 為$\overline{AB}$上任一定點、Q≠A、Q≠B、P_1、P_2、P_3……在平面上

求作: 做出諸 P 點的軌跡，使$\overline{P_iA}$: $\overline{P_iB}$=$\overline{QA}$:$\overline{QB}$，i=1、2、3……(其中$\overline{P_iA}$: $\overline{P_iB} \neq 1:1$)

作法:已知$\overline{AB}$，Q 在$\overline{AB}$上，如圖(3)，分別過 Q，B 作直線 L_1，L_2且 L_1//L_2，再過 A 點，任作異於$\overleftrightarrow{AB}$的直線，各交 L_1，L_2於 C，D，E，F，G，H，I，J，......等。

此時$\overline{AC}$:$\overline{CD}$=$\overline{AE}$:$\overline{EF}$=$\overline{AG}$:$\overline{GH}$=$\overline{AI}$:$\overline{IJ}$=$\overline{AQ}$:$\overline{QB}$ (即為之前圖(2)中的 K:(1-K))

接下來我們要將這些比例線段畫到如圖(4)同樣的$\overline{AB}$上，尺規操作敘述如下:

(1)分別以 A，B 為圓心，$\overline{AC}$，$\overline{CD}$為半徑，畫弧，設兩弧交於 P_1。

(2)分別以 A，B 為圓心，$\overline{AE}$，$\overline{EH}$為半徑，畫弧，設兩弧 交於 P_2。

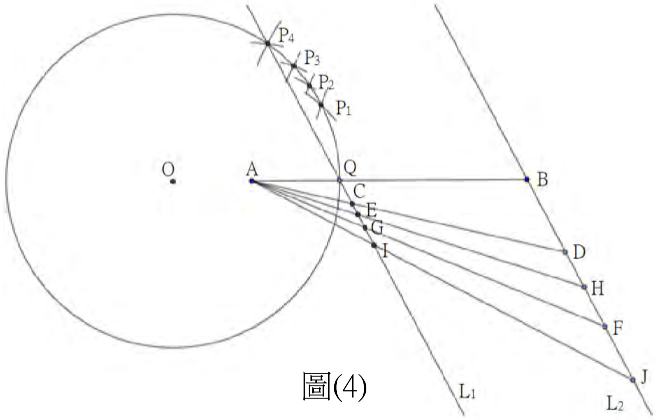
(3)分別以 A，B 為圓心，$\overline{AG}$，$\overline{GF}$為半徑，畫弧，設兩弧交於 P_3。

(4)同樣的分別以 A，B 為圓心，$\overline{AI}$，$\overline{IJ}$為半徑，畫弧，設兩弧交於 P_4。

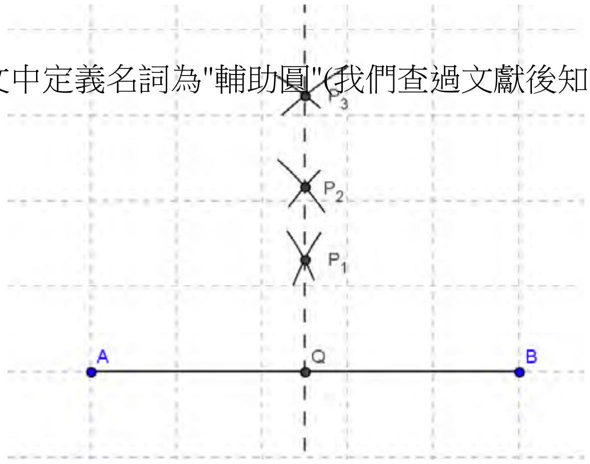
(5)因 P_1，P_2，P_3，P_4會共圓，所以可以作出圓 O，則圓心 O 即為所求。

(6)當 Q 恰好是$\overline{AB}$的中點時，如圖(5)，諸 P 點成一直線，此直線恰為$\overline{AB}$的中垂線

討論:過程中 P_1、P_2、P_3、P_4……所形成的圓，後文中定義名詞為"輔助圓"(我們查過文獻後知道此圓又叫阿波羅圓)，其圓心 O 在$\overleftrightarrow{AB}$上



圖(4)



圖(5)

三、瞭解預備定理後，可以從內部的正△ABC 利用尺規作圖，逆畫出外部的母莫利△A′B′C′

定理一

> 任意指定一個正△ABC 及外側一適當點 C'，必可利用尺規作圖畫出其外部對應的一個母莫利△A'B'C'(不必靠其他工具或摺紙法)

作圖方法敘述如下:

已知: 正△ABC 及外側一點 C' 求作:做出對應的一個母莫利△A'B'C'

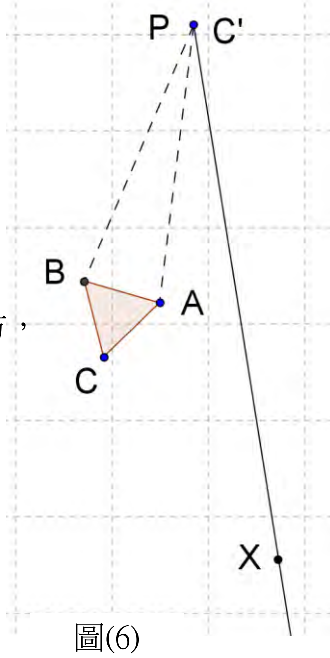
作法:

(1)上文中取適當的點 C'的意思是先取在距正△邊$\overline{AB}$遠一點的大約正上方，

後文稱此 C′點即為 P 點，如圖(6)

(2)連$\overline{C'B}$、$\overline{C'A}$

(3)在外側作∠XC'A=∠AC'B，也在另一側作∠ZC'B=∠AC'B，如圖(7)



圖(6)

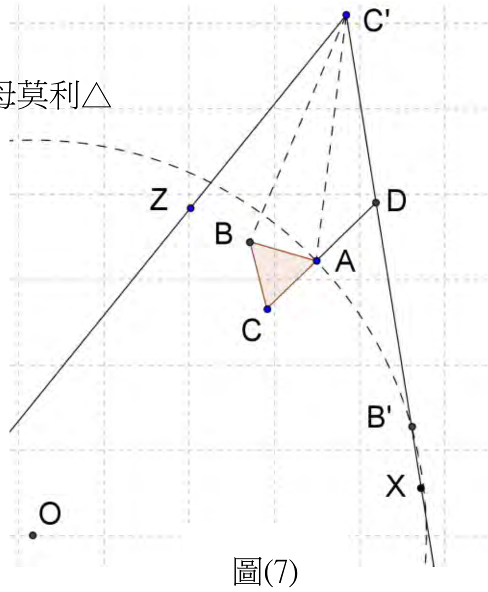
(4)延長$\overrightarrow{CA}$交$\overrightarrow{C'X}$於 D

(5)利用預備定理，對 C、D 兩定點依$\overline{CA}$:$\overline{AD}$的比例，做出輔助圓 O，設圓 O 交$\overrightarrow{C'X}$於 B'

(6)如圖(7)，連$\overline{B'A}$、$\overline{B'C}$

(7)作∠YB'C=∠AB'C，設$\overrightarrow{B'Y}$和$\overrightarrow{C'Z}$交於 A'

(8)連$\overline{A'B}$、$\overline{A'C}$，則△A'B'C'即為正△ABC 對應的一個母莫利△



圖(7)

證明: 如圖(8)

(1)延長$\overrightarrow{C'B}$及$\overrightarrow{B'C}$，設相交於 S

(2)由作圖知 A 點必為△SB'C'的內心

(3)連$\overline{SA}$，得知$\overline{SA}$平分∠BSC

(4)在△SBA 和△SCA 中

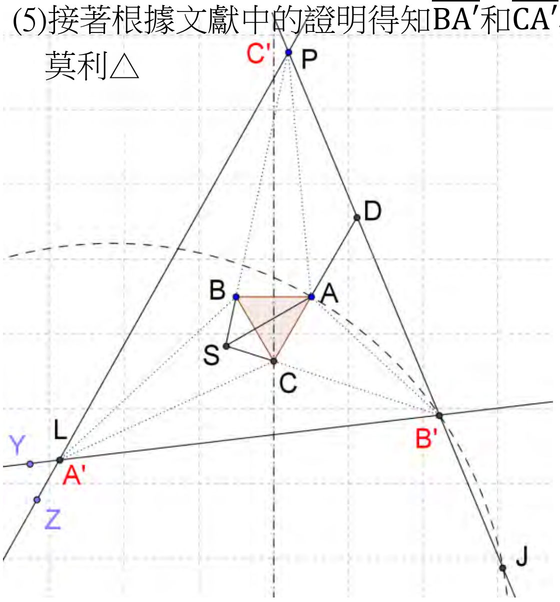
∵$\overline{BA}$=$\overline{CA}$、$\overline{SA}$=$\overline{SA}$、∠BSA=∠CSA

∴△SBA 和△SCA 有 SSA 兩△對應關係，SSA 雖然不能保證兩△全等，但這兩△卻是有關係的，由文獻中的證明知道這兩個△必會全等，故可推知接下來會發生兩種情況

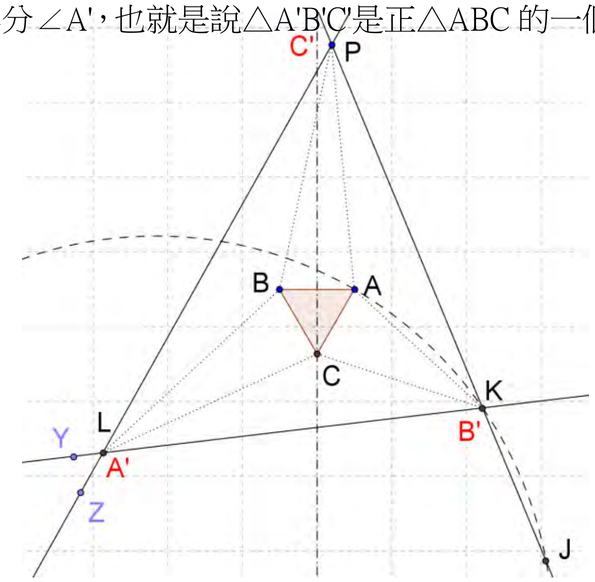
①△SBA≅△SCA 而∠SBA=∠SCA$\neq 90°$，此時∠SAB=∠SAC$= 60° \div 2 = 30°$，接續(5)

②△SBA≅△SCA 而∠SBA=∠SCA$= 90°$此時又要強迫$\overline{B'A}$和$\overline{B'C}$三等分∠B′，則輔助圓上必存在另一可能的 B′點，這在後文中“孿生莫利△”會探討

(5)接著根據文獻中的證明得知$\overline{BA'}$和$\overline{CA'}$必三等分∠A'，也就是說△A'B'C'是正△ABC 的一個母莫利△



圖(8)



圖(9)

四、莫利另一孿生母△的發現

在圖(8)中，我們發現輔助圓與$\overrightarrow{C'X}$經常有兩個交點 K、J，如圖(9)，想想看，若由 K 點(即圖

(8)的 B′點)可畫出母莫利△B′A′C′，則由 J 點會畫出什麼與莫利相關的△呢?如圖(10)，從 J 點同樣可畫出$\overline{JA}$、$\overline{JC}$三等分∠J(即另一個新的∠B′)但此時的正△ABC 偏移成正△AB_1C_1，進一步的也找到它對應的母△且此△必為直角△

尺規作圖步驟如下:

(1)、連$\overline{JA}$、$\overline{JC}$，並延長$\overline{JC}$，交$\overleftrightarrow{C'B}$於 S′

(2)、分別過 A 點，作$\overline{AB_1} \perp \overleftrightarrow{C'S'}$、$\overline{AC_1} \perp \overleftrightarrow{JS'}$

(3)、連$\overline{B_1C_1}$，則△AB_1C_1 為另一內莫利正△(其對應的母莫利△為△JMP)即為所求

證明:

(1)、作∠MJC=∠CJA 交$\overrightarrow{C'Z}$於 M

(2)、在△C′JS′中，A 為其內心，且$\overline{AB_1} \perp \overline{C'S'}$、$\overline{AC_1} \perp \overline{JS'}$得$\overline{AB_1} = \overline{AC_1}$(分角線性質)，而觀察在△$AB_1S'$與△$AC_1S'$中

∵$\overline{AB_1}$=$\overline{AC_1}$、$\overline{AS'}$= $\overline{AS'}$、∠$AS'B_1$=∠AC_1S'，得知符合上文中②的條件

∴△AB_1S' ≅△AC_1S'，又如同①的情況∠$S'AB_1$=∠$S'AC_1$=30°

∴∠C′S′J=∠$AS'B_1$+∠AC_1S'=60°+60°=120°

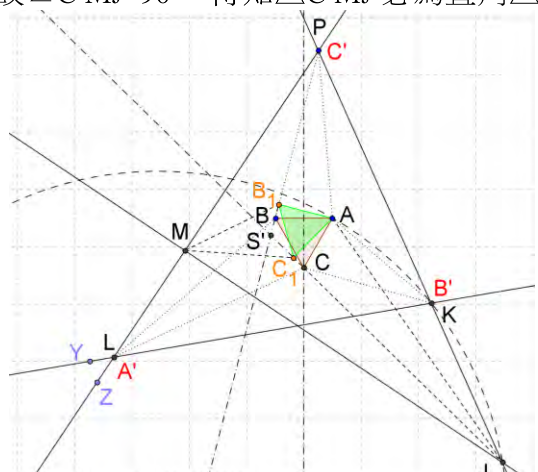
(3)、在△C′S′J 中　　∵∠C′S′J=120°

故∠S′C′J+∠S′JC′=180°-120°=60°

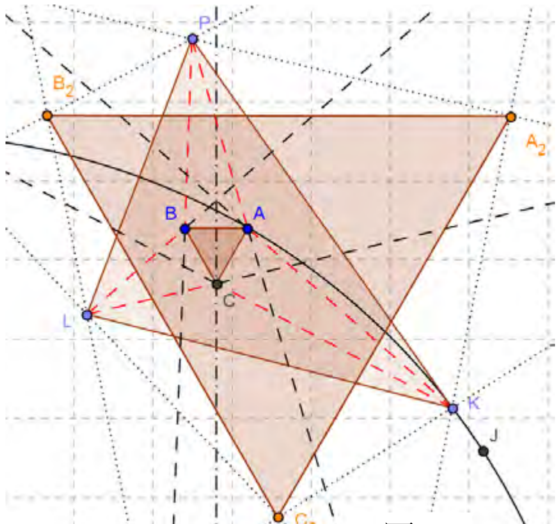
∴∠AC′J+∠AJC′=60°/2=30°

∴∠MC′J+∠MJC′=30°*3=90°

故∠C′MJ=90°，得知△C′MJ 必為直角△



圖(10)



圖(11)

討論: 由證明中推得，若 K 點造成的內莫利是使用 SSA，但第三內角不是直角而全等，則 J 點造成的內莫利必使用 SSA 但第三內角成直角而全等，K 與 J 點可互換，故△AB_1C_1的母莫利三角形恆為直角三角形，進而得到下面定理二

推得定理二

任意指定一個正△ABC 及外側一適當 P 點(按本文尺規作圖法操作)，其輔助圓和母△邊線一般來說有兩個交點，文中稱為 K、J，若從 K 點作出△ABC 的母莫利△KPL，則從 J 點作出△$\mathbf{AB_1C_1}$的母莫利△JPM(可互換)，兩者中至少有一個是直角△，且當 K 與 J 重合時，△ABC 和△$\mathbf{AB_1C_1}$必重合，此時兩個母莫利△皆為直角△。

五、關於正△ABC 的母莫利△KPL 的外莫利及旁莫利正△作法探討

我們定義一開始的正△ABC 為母莫利△KPL 的內莫利正△，緊接著在母莫利△KPL 的外角三等分線上，依同規則取分角線交點可得一個對應的外莫利正△，作圖過程敘述如下:

(一)外莫利正△作法

已知: 正△ABC 及其母△KPL　　求作: 作出外莫利正△

作法:　(圖 11)

1、作∠APA_2=60°
2、作∠AKA_2=60°，設兩線交於 A_2
3、作∠CKC_2=60°
4、作∠CLC_2=60°，設兩線交於 C_2
5、作∠BLB_2=60°
6、作∠BPB_2=60°，設兩線交於 B_2
7、將 A_2、B_2、C_2 連起，即得外莫利正△$A_2B_2C_2$

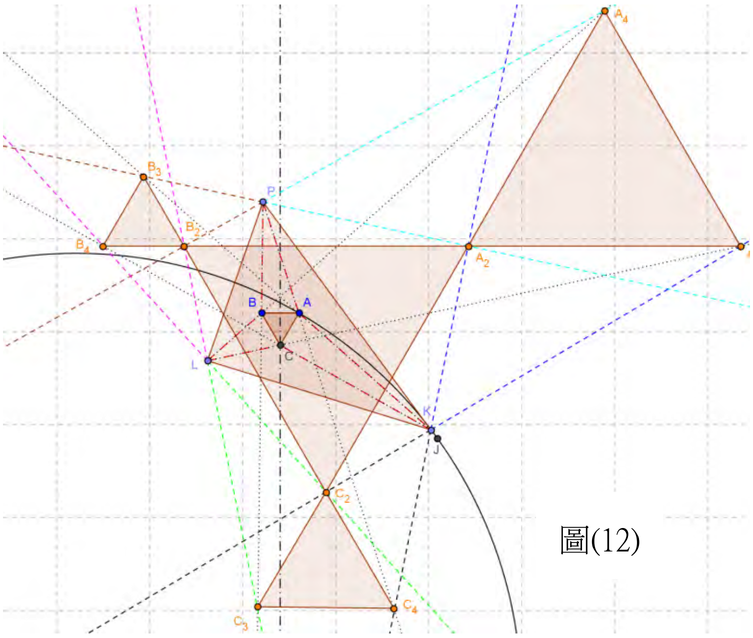
又考慮母△KPL 的兩外角及另一內角的三等分線的交點，則可得到旁莫利正△，共可找到三個旁莫利△，作法敘述如下:

(二) 旁莫利正△作法

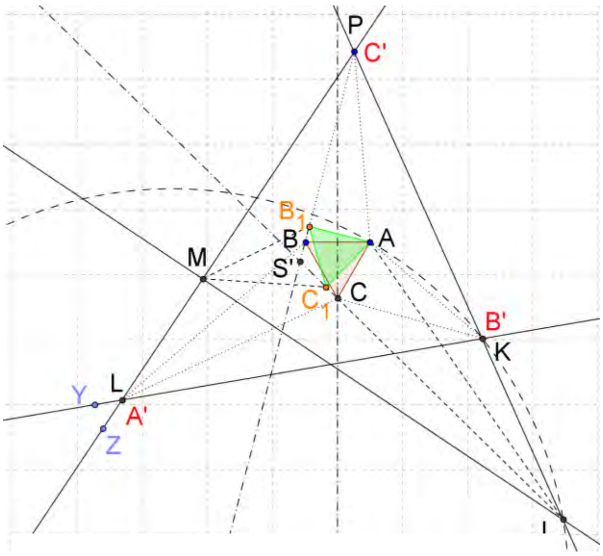
已知: 正△ABC 及其母△KPL　　求作: 作出旁莫利正△

作法:　(圖 12)

1、分別延長$\overleftrightarrow{KA}$、$\overleftrightarrow{PA_2}$，設兩線交於 B_3
2、分別延長$\overleftrightarrow{CK}$、$\overleftrightarrow{LC_2}$，設兩線交於 B_4
3、連 B_2、B_3、B_4，形成一個旁莫利正△$B_2B_3B_4$
4、同理，可得出另外兩個旁莫利正△，正△$A_2A_3A_4$、正△$C_2C_3C_4$



圖(12)



圖(13)內莫利正△ABC 及正△AB_1C_1

六、由攣生兄弟正△AB_1C_1開始，同樣可利用尺規作圖畫出全部攣生家族

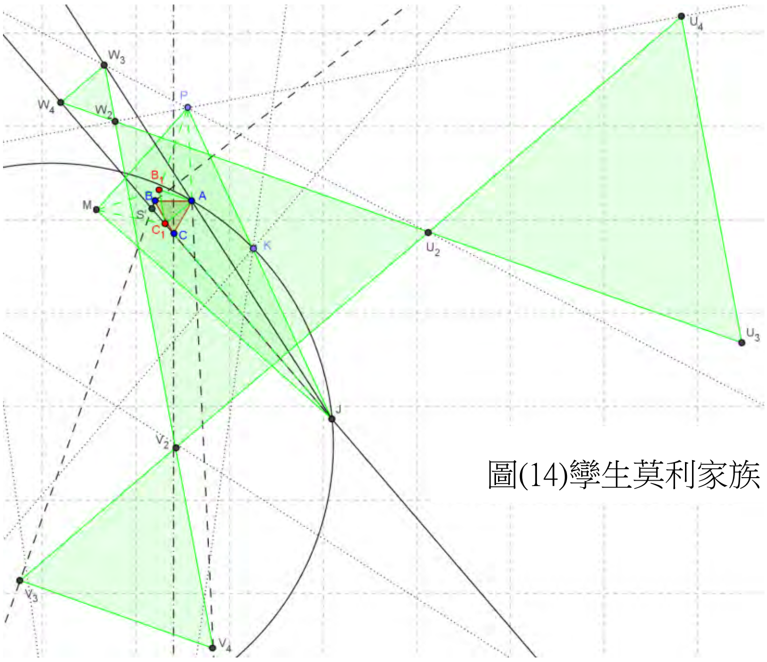
(一)、在定理一及定理二的敘述過程中，我們發現輔助圓在一般情況下和母△的一邊$\overleftrightarrow{C'X}$都有兩個交點(K 和 J 點)，只是有時候這兩點會重合，分別從 K 和 J 點各可找到各自的母△，明顯的這兩個母△是相關的，我們可以說它們是攣生兄弟，後文中會探討內莫利正△ABC 及正△AB_1C_1的位置偏角角度關係式，在此我們想先將此攣生兄弟的家族一一發掘出來，敘述如下:

1、如圖(13)，正△AB_1C_1為正△ABC 的攣生內莫利△，且△JPM 為其對應的母△

2、如圖(14)，由母△JPM 可畫出對應的攣生外莫利正△$U_2V_2W_2$及攣生旁莫利正△$U_2U_3U_4$、正△$V_2V_3V_4$及正△$W_2W_3W_4$整個家族

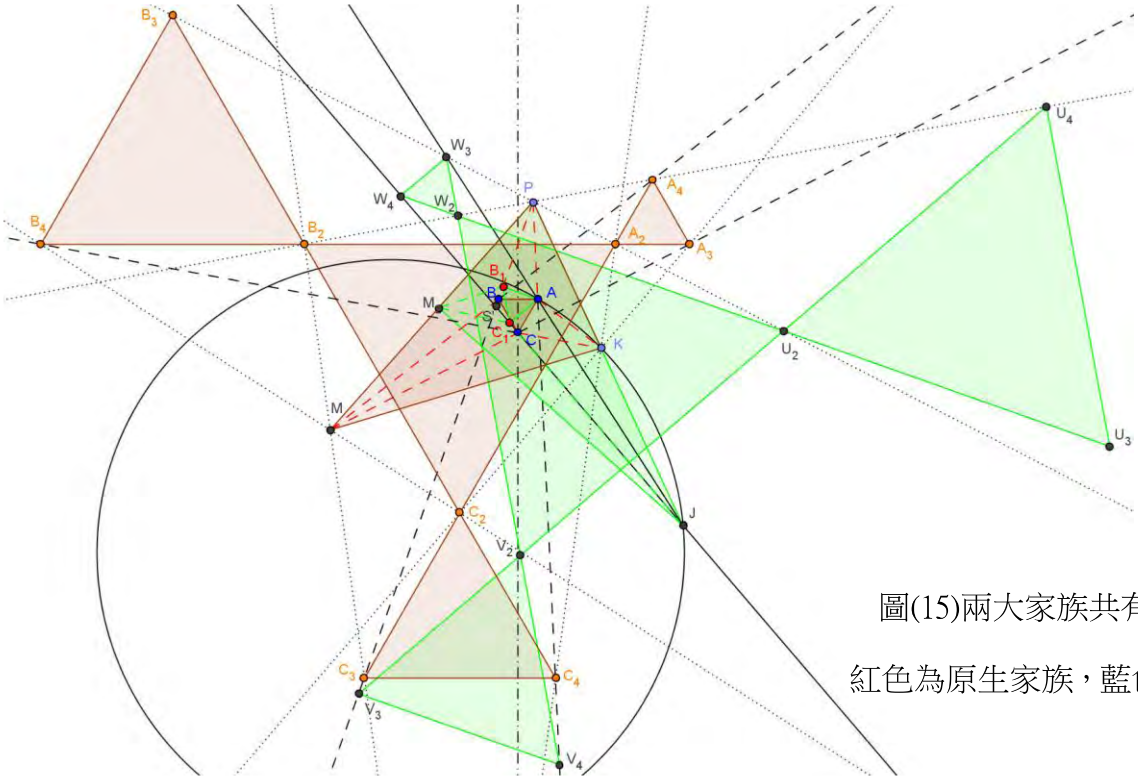
(二)、攣生的莫利三角形家族和原生莫利三角形家族圖形比較

1、尺規作圖操作出攣生莫利家族



圖(14)攣生莫利家族

2、合併觀察此兩大家族



圖(15)兩大家族共有 10 個成員

紅色為原生家族，藍色為孿生家族

推得定理三

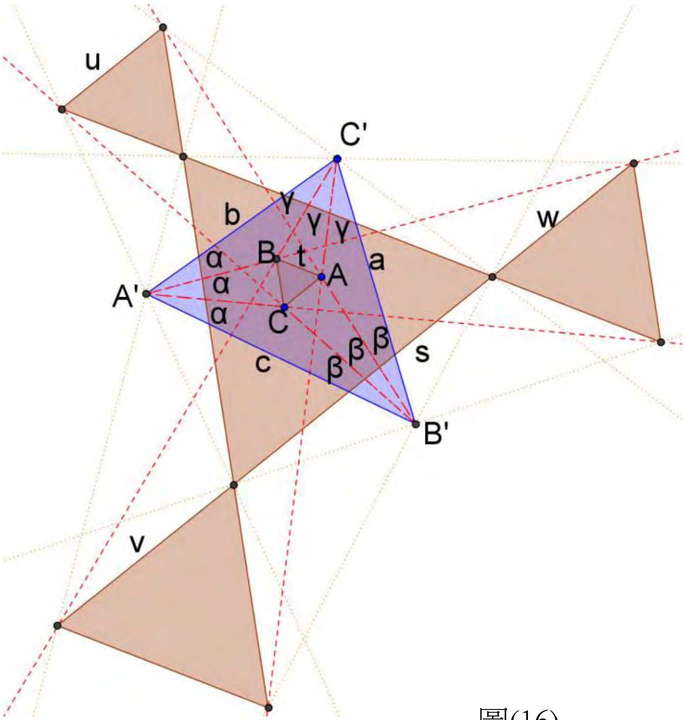
由上文的作圖過程中，對於任意正△ABC，我們可以找到對應的母△及外莫利△、旁莫利△，更進一步的可做出正△ABC 的孿生家族成員正△AB_1C_1及其對應的母△和外莫利△、旁莫利△，也就是說透過輔助圓可一對一找到孿生家族

註:這正△的數量不是本文的重點，因為就原生家族而言，全世界已找到 54 個正△，若加計本文的孿生家族正△進去，整個正△數量就翻倍了

七、原生莫利內、外、旁正△的邊長關係式探討

名詞定義：s＝外莫利正△的邊長、 t＝內莫利正△的邊長、u、v、w＝旁莫利正△各自的邊長、設原生母△$A'B'C'$的三邊長各自為$\overline{B'C'}$＝a，$\overline{A'B'}$＝c，$\overline{A'C'}$＝b、孿生母△ABC 的三邊長定義對應相同，如圖(16)

已知母△$A'B'C'$中，$\angle A'=3\alpha$，$\angle B'=3\beta$，$\angle C'=3\gamma$，且內莫利正△為△ABC，又輔助圓與母△的一邊延長線有兩個交點 K、J，其中 K 表示原生母△$A'B'C'$中的一頂點，J 表示對應孿生兄弟母△中的一頂點，且其內莫利正△為△AB_1C_1，則 s、t、u、v、w 之間有如下文中的關係式。(其中 u、v、w 各自對應 β、γ、α 三內角)



圖(16)

(一)、原生莫利△，s、t、u、v、w 的來源說明

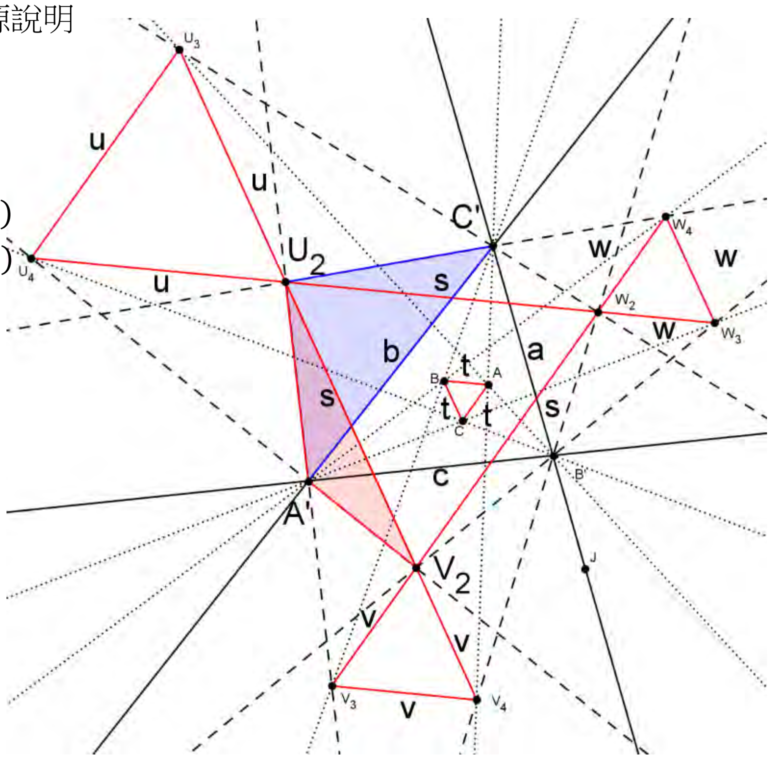
1、s 的來源 圖(17)，利用正弦定律

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\sin(120+\alpha)} = \dfrac{\overline{A'U_2}}{\sin\beta} & (\triangle\, V_2A'U_2) \\ \dfrac{\overline{A'U_2}}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{b}{\sin(60+\alpha+\gamma)} & (\triangle\, U_2A'C') \end{cases}$$

經化簡得

$$\mathrm{S} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(120+\alpha)\cdot b}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\gamma+60)}$$

$$= \frac{\sin(60-\gamma)\cdot\cos(30+\alpha)\cdot b}{\sin\beta\cdot\sin(60+\beta)}$$



圖(17)

2、t 的來源 圖(18)

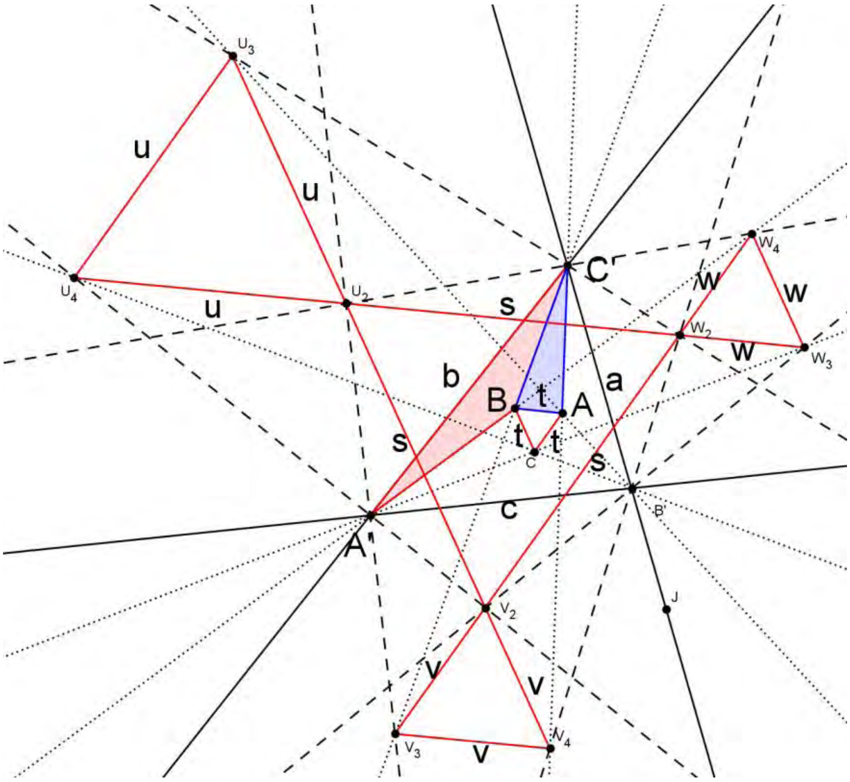
$$\begin{cases} \dfrac{t}{\sin\gamma} = \dfrac{\overline{BC'}}{\sin(60+\beta)} & (\triangle\, C'AB) \\ \dfrac{\overline{BC'}}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(120+\beta)} & (\triangle\, C'BA') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{t}{\sin\gamma} = \dfrac{\overline{AC'}}{\sin(60+\alpha)} \\ \dfrac{\overline{AC'}}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin(120+\alpha)} \end{cases}$$

經化簡得

$$t = \frac{\sin\alpha\sin\gamma\, b}{\sin(120+\beta)\sin(60+\beta)}$$

$$t = \frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\sin(120+\alpha)}$$



圖(18)

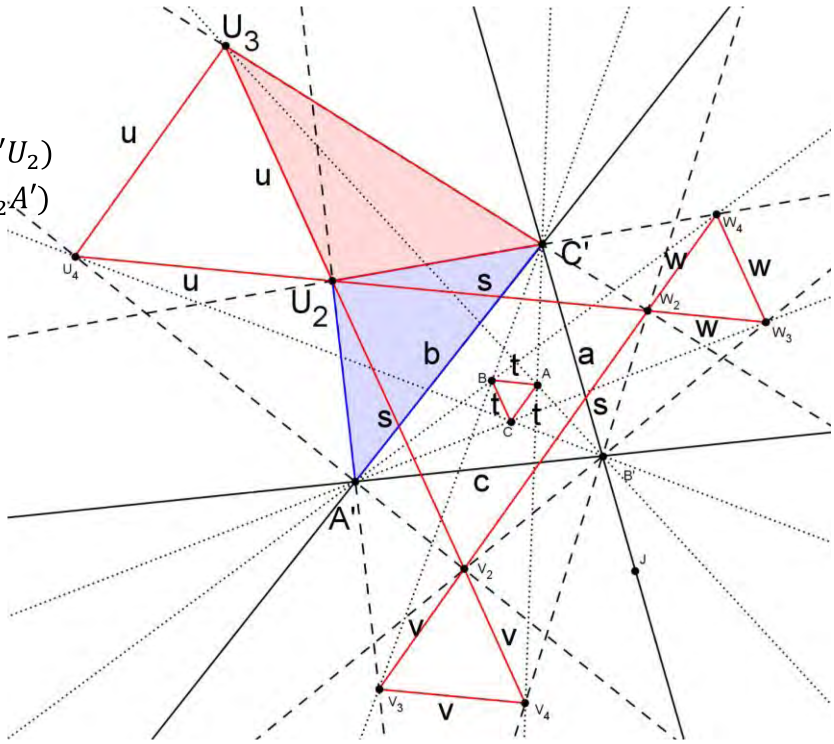
3、u 的來源 圖(19)

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{\overline{C'U_2}}{\sin\gamma} & (\triangle\, U_3C'U_2) \\ \dfrac{\overline{C'U_2}}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{b}{\sin(60+\alpha+\gamma)} & (\triangle\, C'U_2A') \end{cases}$$

經化簡得

$$U = \frac{\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot b}{\sin(60+\beta)\cdot\sin(120+\beta)}$$

$$= \frac{\sin(60-\alpha)\cdot\sin(60-\gamma)\cdot b}{\sin(60+\beta)\cdot\cos(30+\beta)}$$



圖(19)

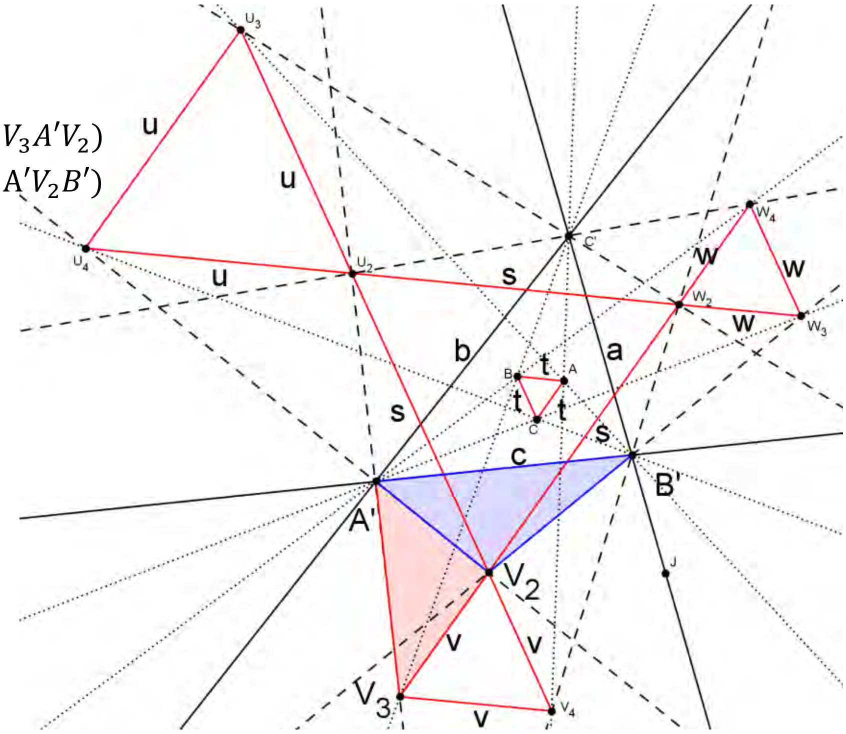
4、v 的來源 圖(20)

$$\begin{cases} \dfrac{V}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{\overline{A'V_2}}{\sin(60-\gamma)} & (\triangle\, V_3A'V_2) \\ \dfrac{\overline{A'V_2}}{\sin(\alpha+\gamma)} = \dfrac{c}{\sin(60+\alpha+\beta)} & (\triangle\, \mathrm{A}'V_2B') \end{cases}$$

經化簡得

$$\mathrm{V} = \frac{\sin(\gamma+\alpha)\cdot\sin(\gamma+\beta)\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\sin(120+\gamma)}$$

$$= \frac{\sin(60-\beta)\cdot\sin(60-\alpha)\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\cos(30+\gamma)}$$



圖(20)

5、w 的來源 圖(21)

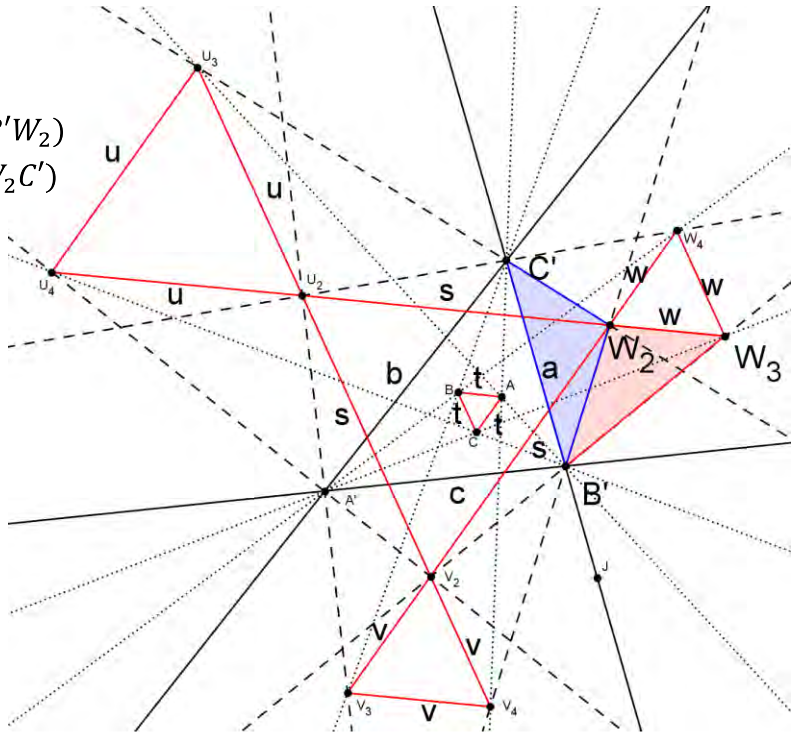
$$\begin{cases} \dfrac{w}{\sin(\alpha+\gamma)} = \dfrac{\overline{B'W_2}}{\sin(60-\alpha)} & (\triangle\, W_3B'W_2) \\ \dfrac{\overline{B'W_2}}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{a}{\sin(60+\beta+\gamma)} & (\triangle\, \mathrm{B}'W_2C') \end{cases}$$

經化簡得

$$\mathrm{W} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\sin(120+\alpha)}$$

$$= \frac{\sin(60-\gamma)\cdot\sin(60-\beta)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\cos(30+\alpha)}$$

$$= \frac{\cos(30+\gamma)\cdot\sin(60-\beta)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\cos(30+\alpha)}$$



圖(21)

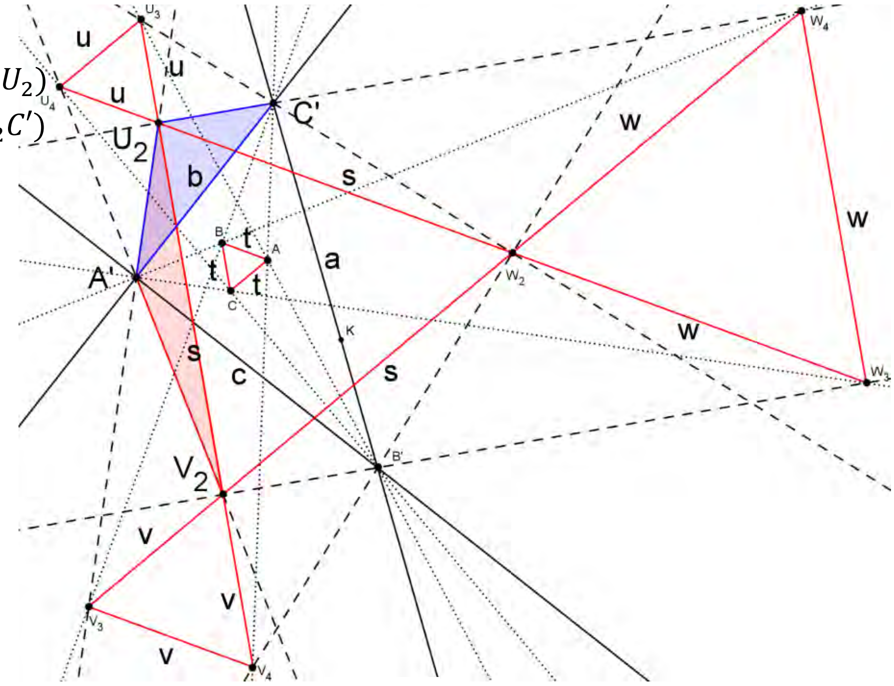
(二)、攣生莫利△，s、t、u、v、w 的來源說明

1、s 的來源 圖(22)

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\sin 150} = \dfrac{\overline{A'U_2}}{\sin\beta} & (\triangle\, V_2A'U_2) \\ \dfrac{\overline{A'U_2}}{\sin(60-\gamma)} = \dfrac{b}{\sin(90+\gamma)} & (\triangle\, \mathrm{A}'U_2C') \end{cases}$$

經化簡得

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{b}\cdot\sin(60-\gamma)}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$$



圖(22)

2、t 的來源 圖(23)

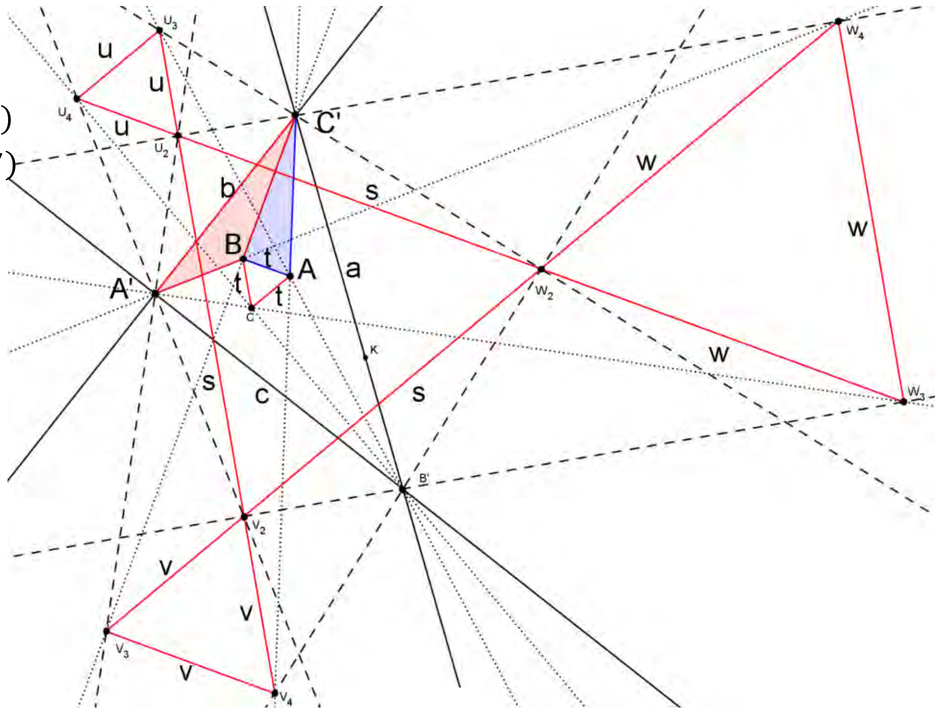
$$\begin{cases} \dfrac{t}{\sin\gamma} = \dfrac{\overline{BC'}}{\sin(90-\gamma)} & (\triangle\, \mathrm{ABC}') \\ \dfrac{\overline{BC'}}{\sin 30} = \dfrac{b}{\sin(150-\gamma)} & (\triangle\, \mathrm{BC'A'}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{t}{\sin\gamma} = \dfrac{\overline{AC'}}{\sin 90} \\ \dfrac{\overline{AC'}}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin(180-\beta-\gamma)} \end{cases}$$

經化簡得

$$\mathrm{t} = \frac{\sin\gamma\; b}{2\sin\beta\sin(30+\gamma)}$$

$$\mathrm{t} = 2\mathrm{a}\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$



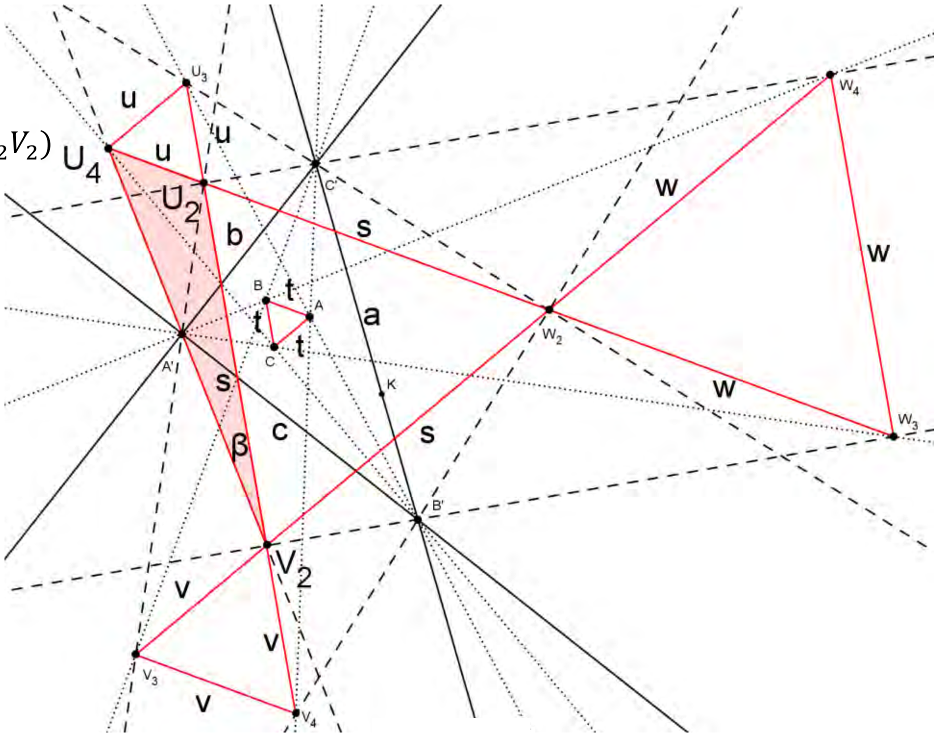
圖(23)

3、u 的來源 圖(24)

$$\left\{\frac{u}{\sin\beta}=\frac{s}{\sin(60-\beta)}\right. \ (\triangle\, U_4U_2V_2)$$

經化簡得

$$\mathrm{U}=\frac{\mathrm{b}\sin(60-\gamma)}{2\sin(60-\beta)\cdot\cos\gamma}$$



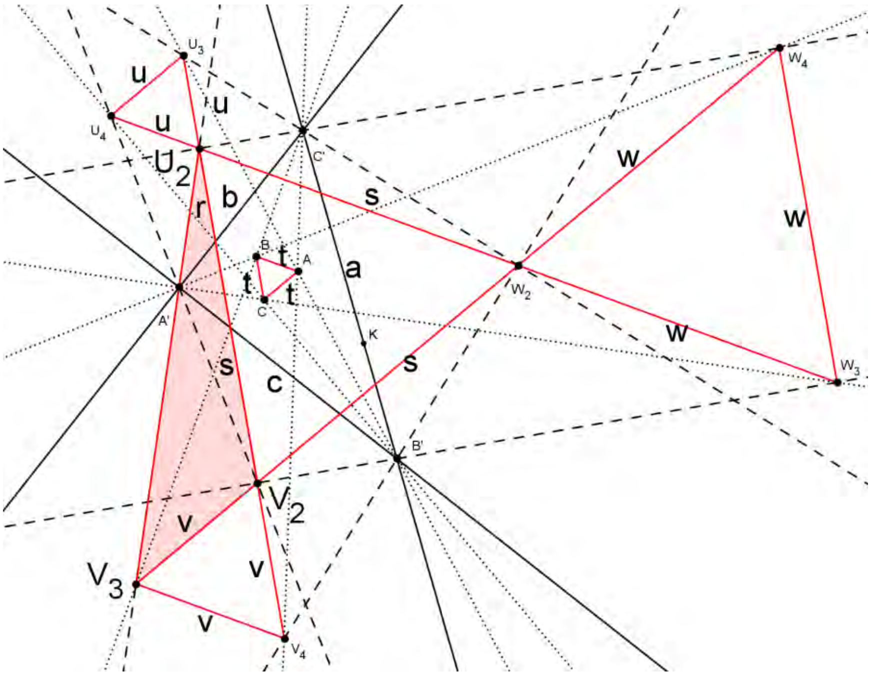
圖(24)

4、v 的來源 圖(25)

$$\left\{\frac{v}{\sin\gamma}=\frac{s}{\sin(60-\gamma)}\right. \ (\triangle\, V_3V_2U_2)$$

經化簡得

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{b}\sin\gamma}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$$

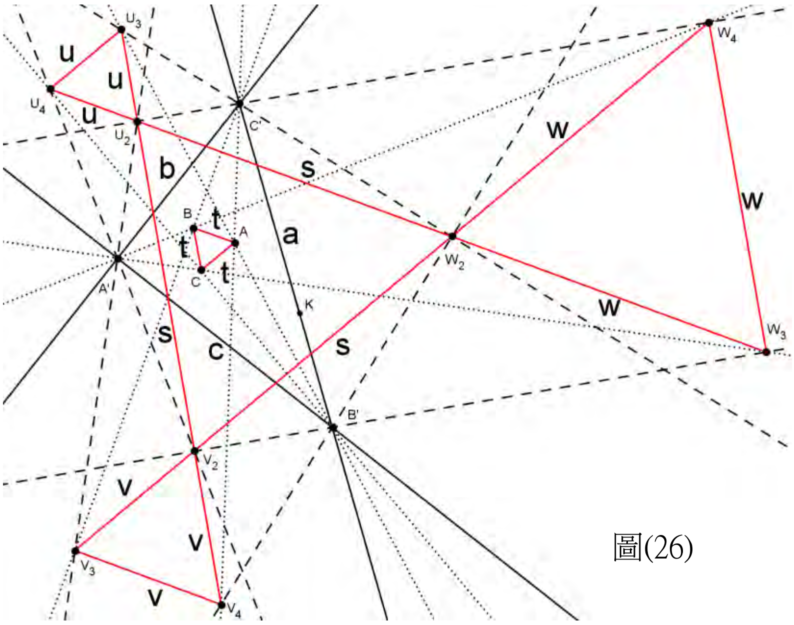


圖(25)

5、w 的來源　圖(26)

w 與 s 相等(因 $U_2V_2W_3W_4$ 為矩形)

$$w=\frac{b\cdot\sin(60-\gamma)}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$$



圖(26)

得定理四

在原生的母△A′B′C′的各莫利正△家族中，必存在下列 3 個關係式

(一) $\dfrac{\sin\gamma}{st}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{wu}$　(二) $\dfrac{\sin\alpha}{st}=\dfrac{\sin(60-\alpha)}{uv}$　(三) $\dfrac{\sin\beta}{st}=\dfrac{\sin(60-\beta)}{wv}$

證明:

(一)、

$\alpha+\beta+\gamma=60\quad \alpha+\beta=60-\gamma$

$$t=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\sin(120+\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\sin(120+\gamma)}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\cos(30+\gamma)}---①$$

$$S=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(120+\alpha)\cdot b}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\gamma+60)}=\frac{\sin(60-\gamma)\cdot\cos(30+\alpha)\cdot b}{\sin\beta\cdot\sin(60+\beta)}---②$$

$$W=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\sin(120+\alpha)}=\frac{\sin(60-\gamma)\cdot\sin(60-\beta)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\cos(30+\alpha)}=\frac{\cos(30+\gamma)\cdot\sin(60-\beta)\cdot a}{\sin(60+\alpha)\cdot\cos(30+\alpha)}---③$$

$$U=\frac{\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot b}{\sin(60+\beta)\cdot\sin(120+\beta)}=\frac{\sin(60-\alpha)\cdot\sin(60-\gamma)\cdot b}{\sin(60+\beta)\cdot\cos(30+\beta)}---④$$

$$V=\frac{\sin(\gamma+\alpha)\cdot\sin(\gamma+\beta)\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\sin(120+\gamma)}=\frac{\sin(60-\beta)\cdot\sin(60-\alpha)\cdot c}{\sin(60+\gamma)\cdot\cos(30+\gamma)}---⑤$$

$$\frac{t}{V}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(30+\beta)\cdot\cos(30+\alpha)}\rightarrow\ \cos(30+\beta)\cdot\cos(30+\alpha)=\frac{V\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{t}$$

由 ① ③ 得

$$\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot a}{t}=\frac{\sin(60-\gamma)\cdot\sin(60-\beta)\cdot a}{W}=\frac{\cos(30+\gamma)\cdot\cos(30+\beta)}{W}---⑥$$

由 ② ④ 得

$$\frac{S\cdot\sin\beta}{\cos(30+\alpha)}=\frac{U\cdot\cos(30+\beta)}{\sin(60-\alpha)}=\frac{U\cdot\cos(30+\beta)}{\cos(30+\alpha)}---⑦$$

$$\rightarrow\quad S\cdot\sin\beta=U\cdot\cos(30+\beta)$$

由 ⑥ ÷ ⑦

$$\frac{\sin\gamma}{S\cdot t}=\frac{\cos(30+\gamma)}{W\cdot U}$$

再將 ⑤ 代入上式

$$\frac{\sin\gamma}{S\cdot t}=\frac{c\cdot\cos(30+\beta)\cdot\cos(30+\alpha)}{W\cdot U\cdot V\cdot\sin(60+\gamma)}=\frac{c\cdot V\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{W\cdot U\cdot V\cdot\sin(60+\gamma)\cdot t}$$

$$\rightarrow\frac{\sin\gamma}{S}=\frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{W\cdot U\cdot\sin(60-\gamma)}=\frac{t\cdot\sin(60+\gamma)\cdot\cos(30+\gamma)}{W\cdot U\cdot\sin(60+\gamma)}$$

$$\frac{\sin\gamma}{S}=\frac{t\cdot\cos(30+\gamma)}{W\cdot U}\rightarrow\frac{\sin\gamma}{S\cdot t}=\frac{\cos(30+\gamma)}{W\cdot U}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{W\cdot U}$$

(二)、(三)，證明見附件

又得定理五

在孿生的母△A′B′C′的各莫利正△家族中，除了具有(一)、(二)、(三)關係式外，進一步的又存在下列關係式

(四) st = uv　(五) s = w　(六) $\left(\frac{\sin\beta}{u}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{v}\right)^2=\left(\frac{1}{w}\right)^2$

證明：

(四)、(五)

原生莫利三角形的關係式(二)，經驗證發現孿生也適用，藉此推得下列關係式

孿生 $\alpha=30°$　$\sin(60°-30°)=\sin 30°$　得 $V\cdot U=S\cdot t$　$\because S=W$　$\therefore V\cdot U=W\cdot t$

(六)

$\beta+\gamma=30°=\alpha$　$60°-\gamma=30°+\beta$

內 $t=2a\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ ---①　外 $S=\dfrac{b\cdot\sin(60-\gamma)}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$ ---②

旁 $=W=S$ ---③　旁 $U=\dfrac{b\sin(60-\gamma)}{2\sin(60-\beta)\cdot\cos\gamma}$ ---④

旁 $V=\dfrac{b\sin\gamma}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$ ---⑤

證明

$$S=\frac{b\cos(30+\gamma)}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{b\cos(60-\beta)}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{2U\sin(60-\beta)\cdot\cos\gamma}{2\sin\beta\cdot\cos\gamma}$$ (④代入)

$$=\frac{U\sin(60-\beta)}{\sin\beta}$$ ---⑥

$U=\dfrac{b\cos(60-\beta)}{2\sin(60-\beta)\cdot\cos\gamma}$ ---④　$\dfrac{S}{V}=\dfrac{\cos(60-\beta)}{\sin\gamma}$ ---⑦

由 ⑥得 $\sin(60-\beta)=\dfrac{S\cdot\sin\beta}{U}$　⑦得 $\cos(60-\beta)=\dfrac{S\cdot\sin\gamma}{V}$

代入　$\sin^2(60-\beta)+\cos^2(60-\beta)=1$

得　$\dfrac{S^2\cdot\sin^2\beta}{U^2}+\dfrac{S^2\cdot\sin^2\gamma}{V^2}=1$

即 $\left(\frac{\sin\beta}{U}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{V}\right)^2=\frac{1}{S^2}=\left(\frac{\sin 90°}{S}\right)^2$

由 W=S，故知 $\left(\frac{\sin\beta}{U}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{V}\right)^2=\frac{1}{S^2}=\left(\frac{1}{W}\right)^2$

八、原生內莫利正Δ 與孿生內莫利正Δ 的偏角探討

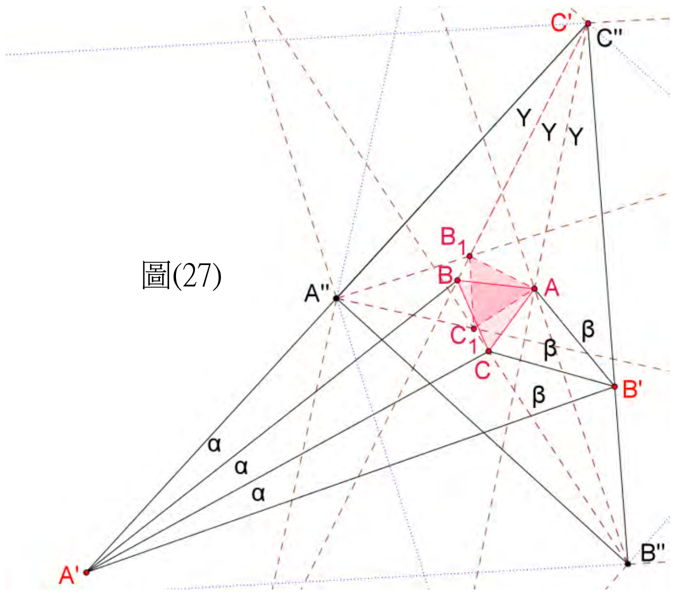
名詞定義:

偏角: 原生內莫利正Δ 與孿生內莫利正Δ 對應邊的夾角(如下圖∠BAB_1)

(一)、當 K≠J 時，如圖(27)

偏角∠BAB_1

$$
\begin{aligned}
&= \angle BAC' - \angle B_1 AC' \\
&= (60+\beta)-[60+(30-\gamma)] \\
&= \beta+\gamma-30 \\
&= (60-\alpha)-30 \\
&= 30-\alpha \\
&= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}
\end{aligned}
$$



圖(27)

若原生Δ 的頂角∠A′為鈍角時，A′會變成在 A′′的上方，所以偏角∠BAB_1=∠B_1 AC'-∠BAC'，不過所得公式相同，計算出的負數是因為內莫利正△變為往內偏移的緣故

(二)、當 K=J 時，內莫利正Δ ABC 與Δ AB_1C_1 重合，故偏角為零度，如圖(28)

(三)、又當 K≠J 時，正Δ ABC 與Δ AB_1C_1 的邊長 t 與 t′的關係式，如圖(27)

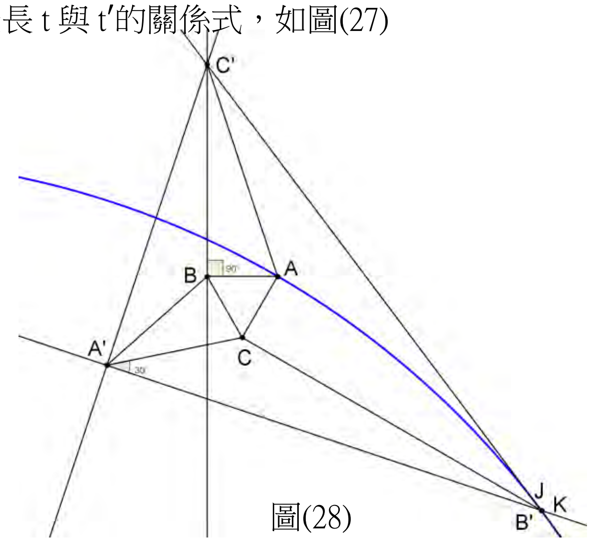
在Δ ABB_1 中，∠A B_1B=90°

$$\frac{t}{\sin 90}=\frac{t'}{\sin(60+\alpha)}$$

得 $\frac{t'}{t}=\sin(60+\alpha)$

當 $\alpha=30°$ 時，$t'=t$，△AB_1C_1 邊長最大

當 $\alpha=0°$ 時，$t'=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，△AB_1C_1 邊長最小



圖(28)

(註:其實α此時是接近$0°$而非$0°$)

九、平面上以正△ABC 為內莫利正△的逆向尺規作圖法過程中，頂點 P 的有效落點範圍探討

在本文之前研究莫利△的尺規作圖過程中，因為是先給定內部的正△再倒畫出外面的母△，一定有人會認為這樣研究有點不完整，他們會說我們對母△的掌握不像從正面畫法那樣確實，因此接下來我們要針對起始的母△頂點 P 的有效落點範圍做一個全面性的探討

(一)、如圖(29)先建立一個標準圖在$\overline{AB}$的中垂線上觀察 F 點及 G 點，其中$\overline{FD}$=$\overline{CD}$=正△ABC 的高，$\overline{GF}$=$\overline{FA}$=$\overline{FB}$=正△ABC 的邊長

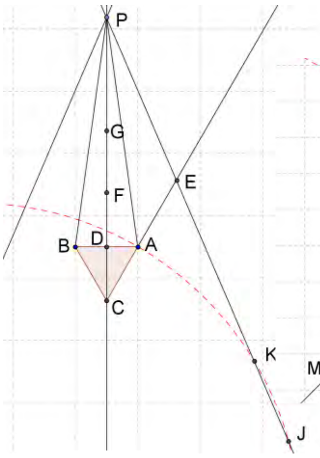
1、當 P 取在 G 的上方時，輔助圓弧向下，K≠J，K 在上方，J 在下方，如圖(29)

2、當 P 取在 G 時，輔助圓弧退化成一直線，K=J，如圖(30)

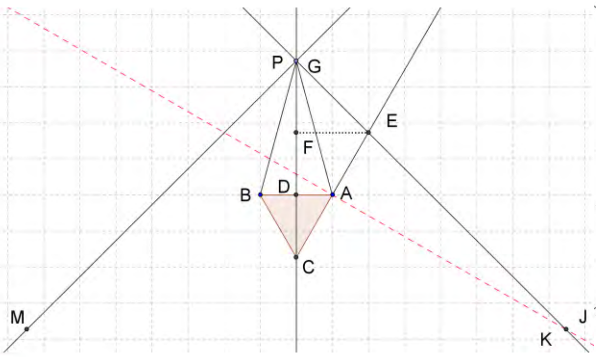
3、當 P 取在 G、F 之間，輔助圓弧向上，K≠J，K 在上方，J 在下方，如圖(31)

4、當 P 取在 F 時，輔助圓弧又退化成一直線，K=J 重合，如圖(32)

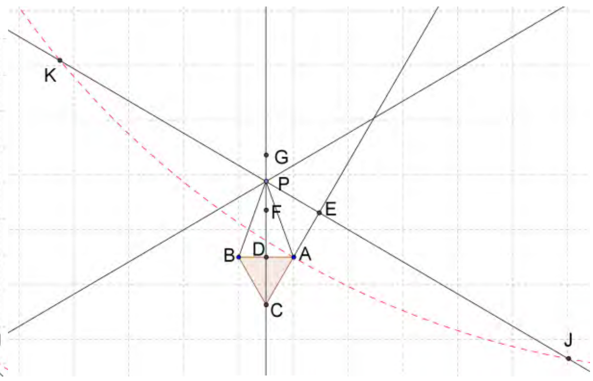
5、當 P 取在 F、D 之間，輔助圓弧向下，K≠J，K 在下方，J 在上方，如圖(33)



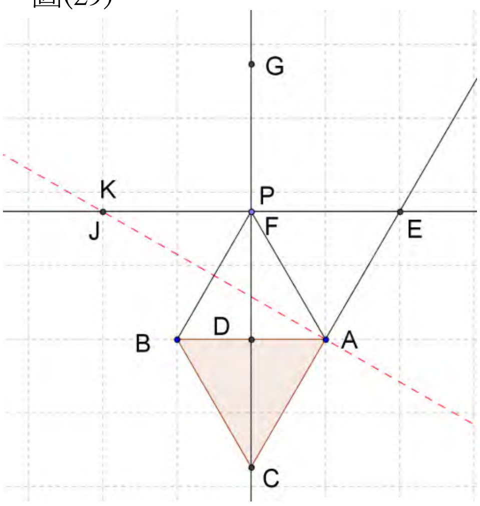
圖(29)



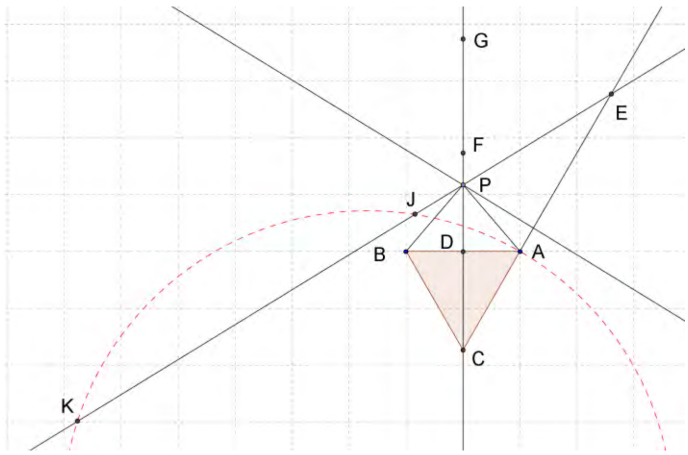
圖(30)



圖(31)



圖(32)



圖(33)

(二)、在標準圖上 G 點與 F 點來源的說明

1、在標準圖上，當 P 點落在 F 點上時，母△的∠P=3∠AFB=3*60°=180°(成一平角)，故母△畫不出來，如圖(32)

2、在標準圖上，當 P 落在 G 點上時輔助圓退化成一直線，依預備定理的說明知該直線過 A 點，A 為$\overline{CE}$中點，且 K 與 J 重合，J 點的母△為直角△(定理二)，∠JGM=90°，P 與 G 重合

故∠AGB=∠EGA=90°/3=30°

∴∠CPE=30°/2+30°=45°

∴∠FEP=90°-45°=45°

∴△PFE 為等腰直角△且△CEF 為 30°-60°-90°的△

得證$\overline{PE}$=$\overline{FE}$=$\frac{1}{2}$$\overline{CE}$=$\overline{CA}$=正△ABC 的邊長，如圖(30)

(三)在標準圖上，當 P 點由上往下移動時，觀察原生正△ABC 及孿生正△AB_1C_1的變化

在$\overline{AB}$的中垂線上，由上而下慢慢移動後發現很多奇妙的現象，敘述如下:

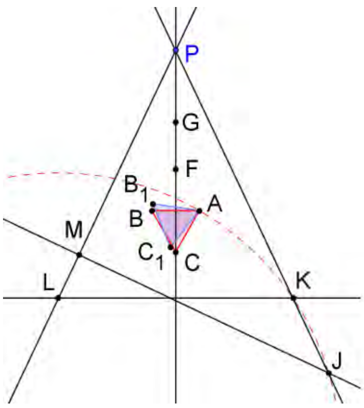
1、如圖(34)△ABC 為 K 點原生母△的內莫利，△AB_1C_1為 J 點孿生母△的內莫利

2、如圖(35)△ABC 與△AB_1C_1重合，K 與 J 重合

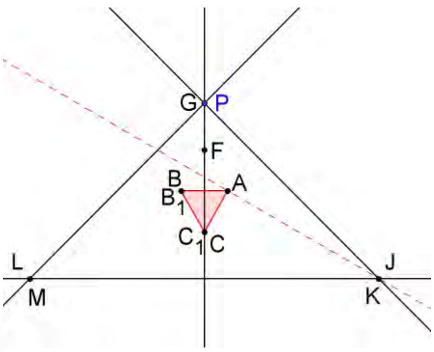
3、如圖(36)△ABC 為 J 點原生母△的內莫利，△AB_1C_1為 K 點孿生母△的旁莫利

4、如圖(37)K 與 J 又重合，原生與孿生母△都退化成一線段，△ABC 和△AB_1C_1為各自廣義的旁莫利

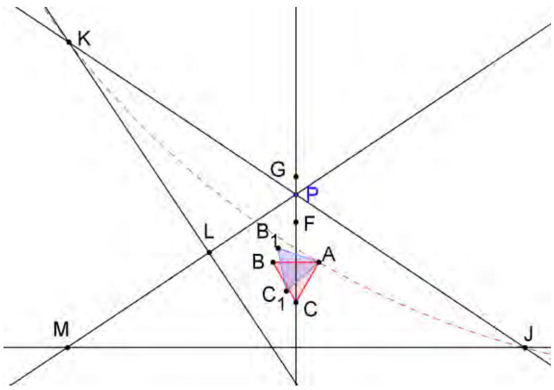
5、如圖(38)△ABC 為 K 點原生母△PKL 的旁-旁莫利，△AB_1C_1為 J 點孿生母△PJM 的旁-旁莫利(見後文解釋)



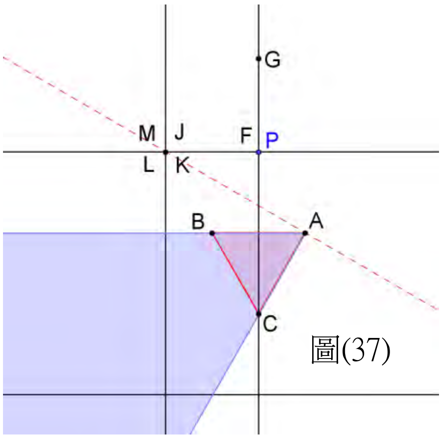
圖(34)



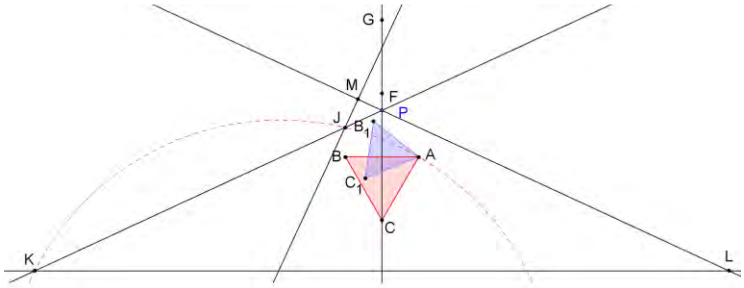
圖(35)



圖(36)



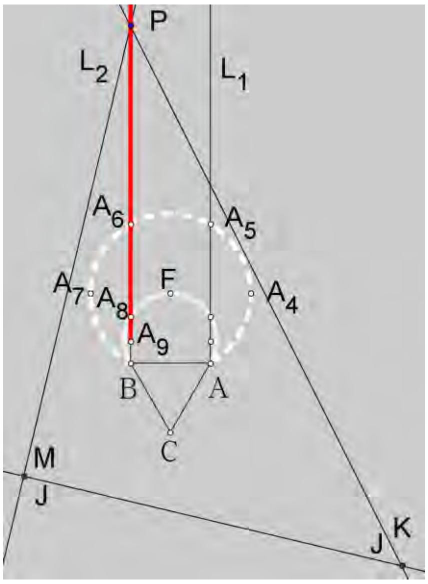
圖(37)



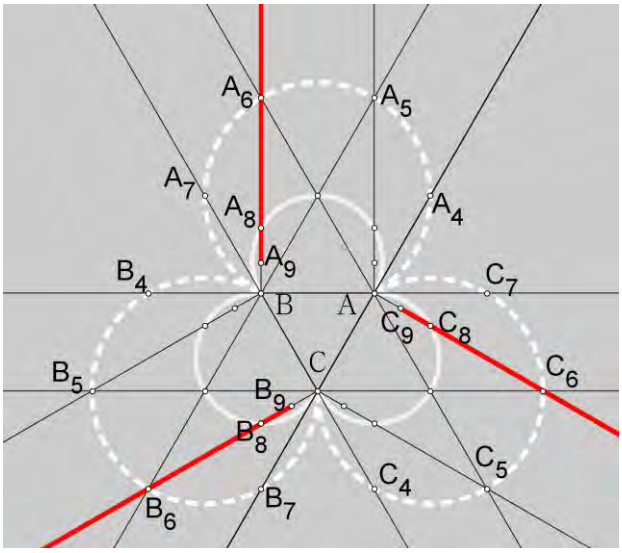
圖(38)

(四)、在標準圖上，分別過 A、B 做直線 L_1、L_2 皆垂直$\overline{AB}$如圖(39)，當 P 取在 L_2 上的紅色區，其中 A_9 這特殊點的來源是產生在∠BA_9A=75°時(證明見附件)由前文圖(28)知 K=J，原生母△的頂點∠A′為直角，此時正△ABC 與正△AB_1C_1 重合偏角為零度，接下來將 A、B、C 三方向垂線(只含逆時針方向)都畫出來可得到如圖(40)，推得定理六

如上文，在正△ABC 的平面上，欲依尺規作圖求作母莫利△，滿足原生與孿生兩家族合而為一時，若且唯若起點 P 取在圖(40)的紅色線條上，並且三旁莫利邊長 u、v、w 有如下的關係式 $\left(\frac{\sin\beta}{U}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{V}\right)^2=\left(\frac{1}{W}\right)^2$

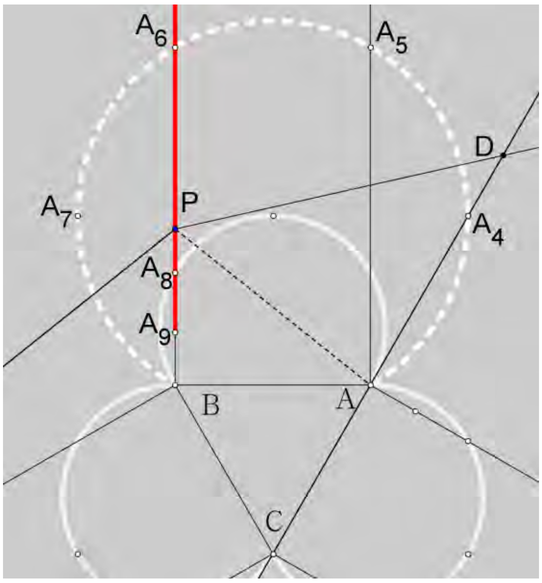


圖(39)

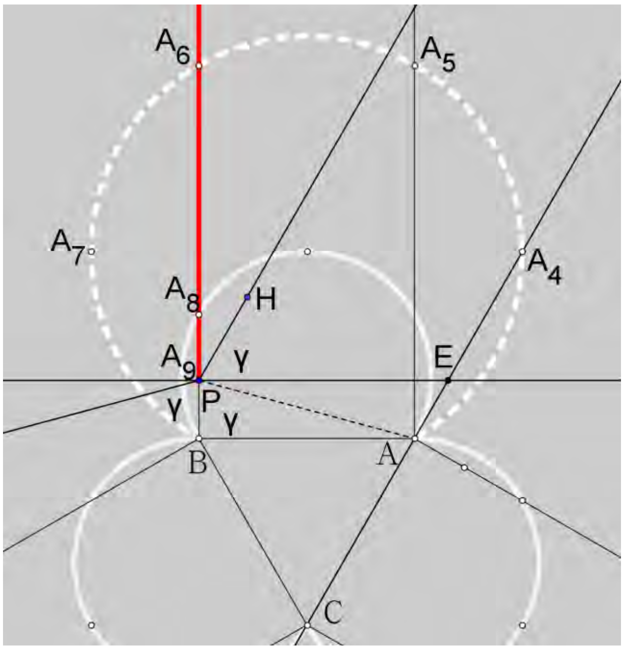


圖(40)

承上文，在圖(39)中紅色直線為什麼會停在 A_9 呢?如圖(41)當起點 P 在 A_9 上方逐漸往下移動時，$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{PX}$的交點 D，逐漸往遠方飄走，而當 P 移動到 A_9 時，因$\overrightarrow{PH}$和$\overrightarrow{CA}$平行，故 D 點飄到無限遠處，此時無法產生母∆ 。接著要算∠BA_9A 的度數，先過 A_9 作一直線 PE 平行$\overline{BA}$，如圖(42)，∠PEA=∠BAC=60°，∠HPE=∠PEA=60°，∠BPE=90°，∴∠BPH=60°+90°=150°，又∠BPH=2γ，推得∠BPA=150° ÷2=75°，所以 P 點往下最多移到 A_9



圖(41)

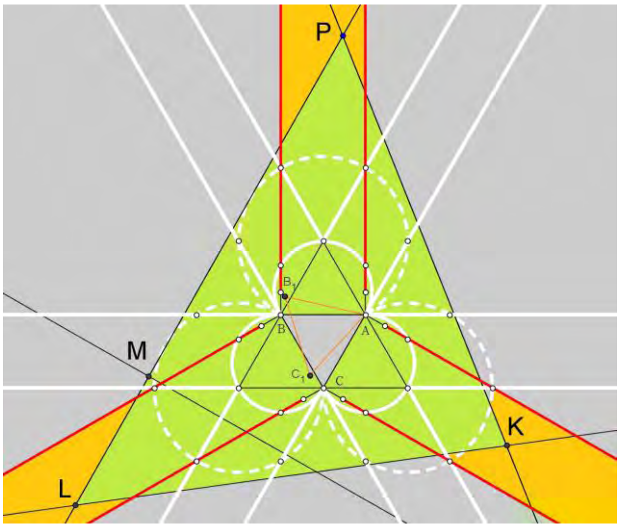


圖(42)

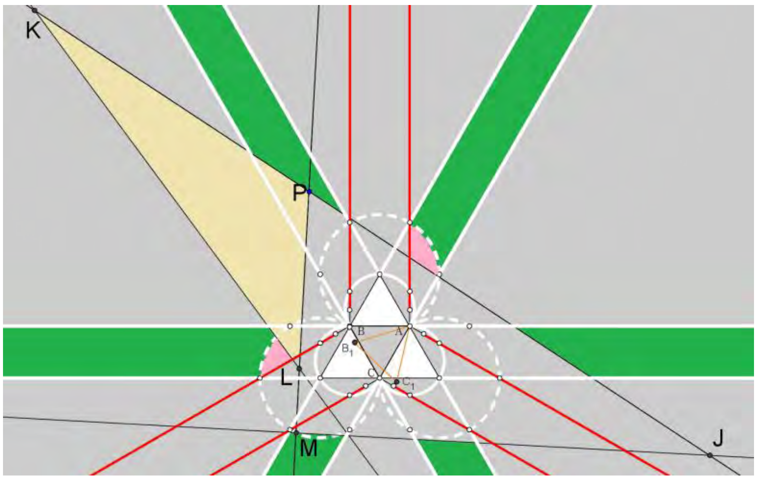
(五)、在標準圖上，當 P 落在弧 A_5A_6 及 L_1、L_2 包圍的黃色區內時，正∆ ABC 的母莫利△為銳角∆ ，正∆ AB_1C_1 的母∆ 為直角∆ ，兩家族不重合，如圖(43)，進一步的用 Geogebra 電腦軟體試探，知△ABC 及∆ AB_1C_1 皆為各自母∆ 的內莫利(變色區表示被三角形覆蓋到)

(六)在標準圖上，當 P 落在綠色區(圖 44)時，以 K 點畫出原生母△後，發現正△ABC 為其旁莫利，而正△AB_1C_1 為孿生母△的內莫利，(變色區表示被三角形覆蓋到)

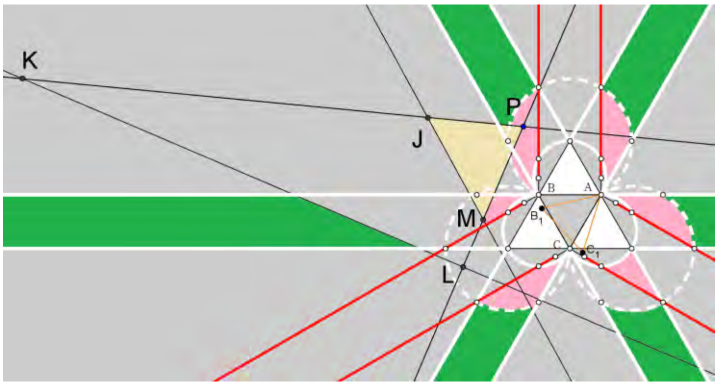
(七)在標準圖上，當 P 落在粉紅色區(圖 45)時，以 J 點畫出原生母△後，發現正△ABC 為其旁莫利，又正△AB_1C_1 亦為孿生母△的旁莫利，真神奇(變色區表示被三角形覆蓋到)



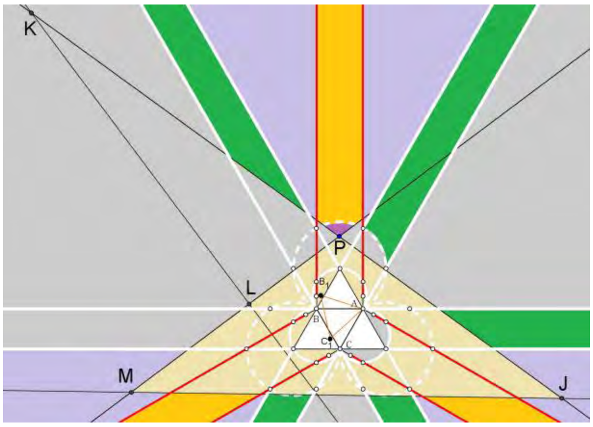
圖(43)



圖(44)

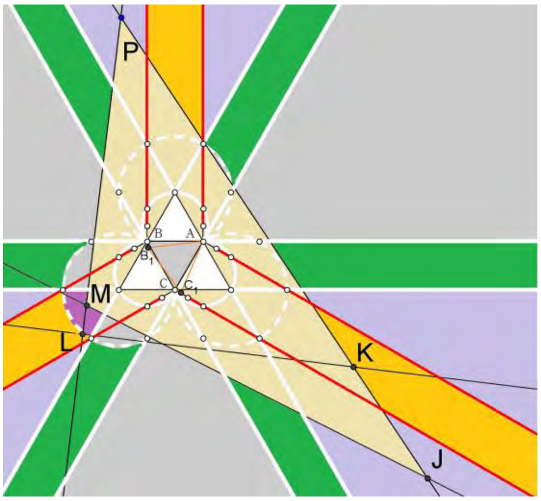


圖(45)

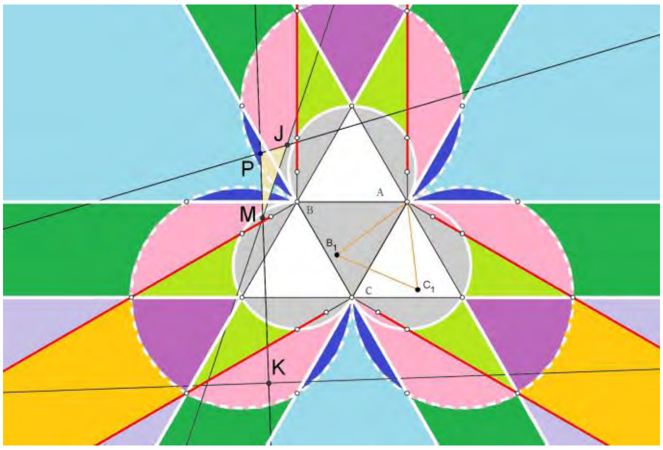


圖(46)當 P 落在深紫色區時，點 J 為原生母∆的頂點，∆ ABC 為其內莫利，∆ AB_1C_1 為其旁莫利

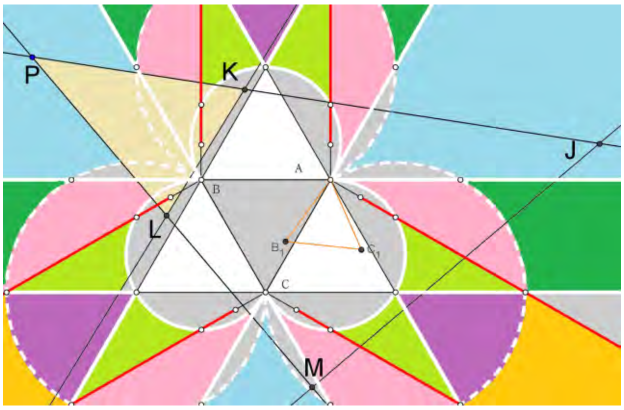
(八)其它各色區的特徵



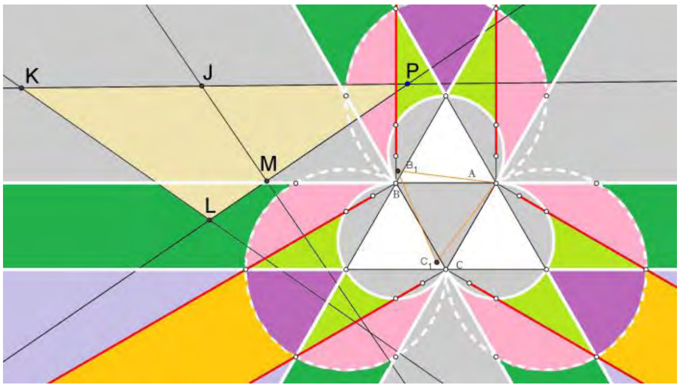
圖(47)當 P 落在淺紫色區時，點 J 為原生母∆ 的頂點，∆ ABC 為其內莫利，∆ AB_1C_1 為其內莫利



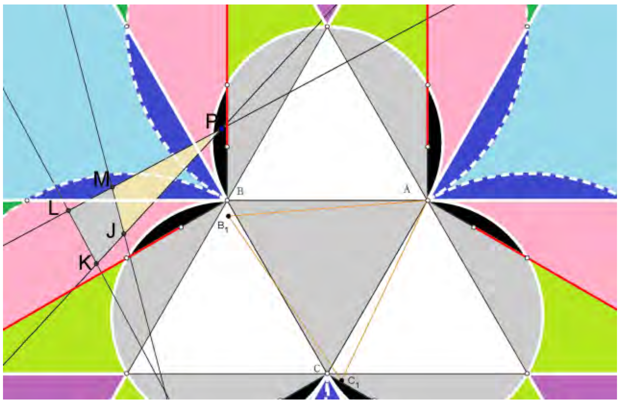
圖(48)當 P 落在深藍色區時，點 J 為原生母∆的頂點，∆ ABC 為其旁-旁莫利，∆ AB_1C_1 為孿生母∆ 的旁莫利



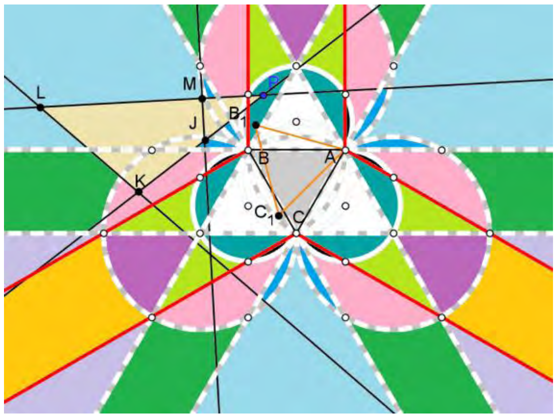
圖(49)當 P 落在淺藍色區時，點 K 為原生母△的頂點，△ABC 為其旁-旁莫利，△AB_1C_1 為孿生母△的內莫利



圖(50)當 P 落在淺綠色區時，點 K 為原生母∆ 的頂點，∆ ABC 為其旁莫利，∆ AB_1C_1 為孿生母∆ 的旁莫利



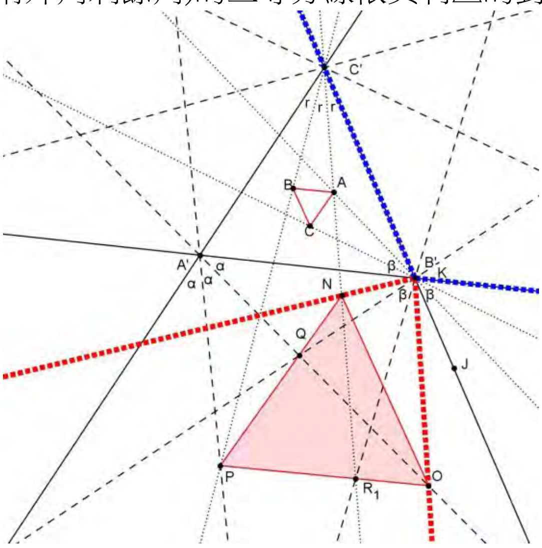
圖(51)當 P 落在黑色區時，點 J 為原生母∆的頂點，∆ ABC 為其旁-旁莫利，∆ AB_1C_1 為孿生母∆ 的旁-旁莫利



圖(52)當 P 落在藏青色區時，點 K 為原生母△的頂點，△ABC 為其旁-旁莫利，△AB_1C_1 為孿生母△的旁-旁莫利

(九)旁-旁莫利的定義：

如圖(53)母△A'B'C'中，作∠C'的內角三等分線、∠A'的外角三等分線、∠B'的外角之外的大角(之後簡稱外角剩餘角)的三等分線依莫利△的對應取交點法所得到的正△叫旁-旁莫利



圖(53)

1、在探討旁-旁莫利△的組合數量時，因內角有三種選擇，接著兩內角的外角有兩種選擇，最後剩下的內角的外角剩餘大角只有一種選擇，這樣組合起來共有六個旁-旁莫利，如圖(54)

2、設旁-旁莫利邊長一組為 x_1、x_2、x_3 另一組為 y_1、y_2、y_3，母△三邊長各為 a、b、c，

則 $$x_1=\frac{\sin(60+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\,a}{\sin(60+\alpha)\sin(60-\alpha)} \qquad y_1=\frac{\sin(60+\beta)\sin(60-\gamma)\,a}{\sin(60+\alpha)\sin(60-\alpha)}$$

$$x_2=\frac{\sin(60+\alpha)\sin(\alpha+\beta)\,b}{\sin(60+\beta)\sin(60-\beta)} \qquad y_2=\frac{\sin(60+\gamma)\sin(60-\alpha)\,b}{\sin(60+\beta)\sin(60-\beta)}$$

$$x_3=\frac{\sin(60+\beta)\sin(\beta+\gamma)\,c}{\sin(60+\gamma)\sin(60-\gamma)} \qquad y_3=\frac{\sin(60+\alpha)\sin(60-\beta)\,c}{\sin(60+\gamma)\sin(60-\gamma)}$$

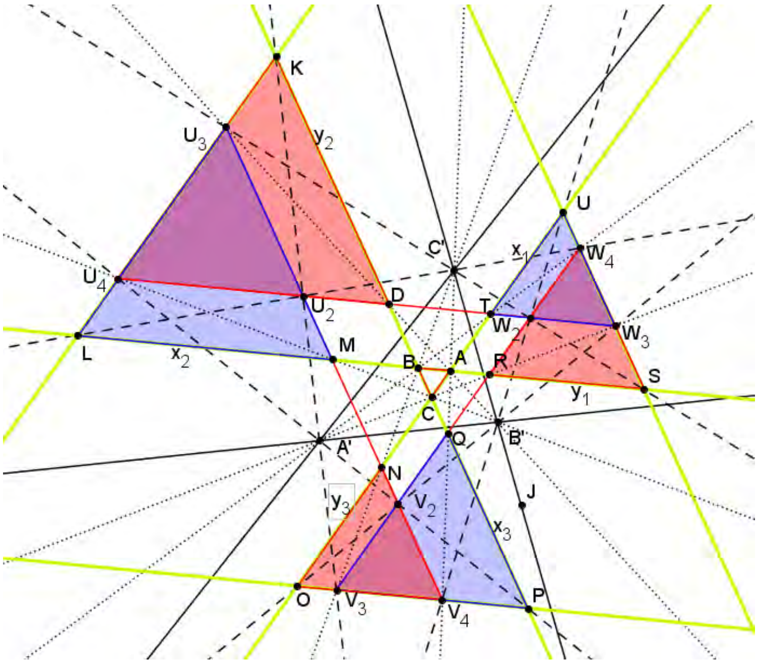
得定理七

若母△三邊長 a、b、c，六個旁-旁莫利正△的邊長依序為 x_1、x_2、x_3 及 y_1、y_2、y_3，

則（一）$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = a \cdot b \cdot c$　　(二) $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$

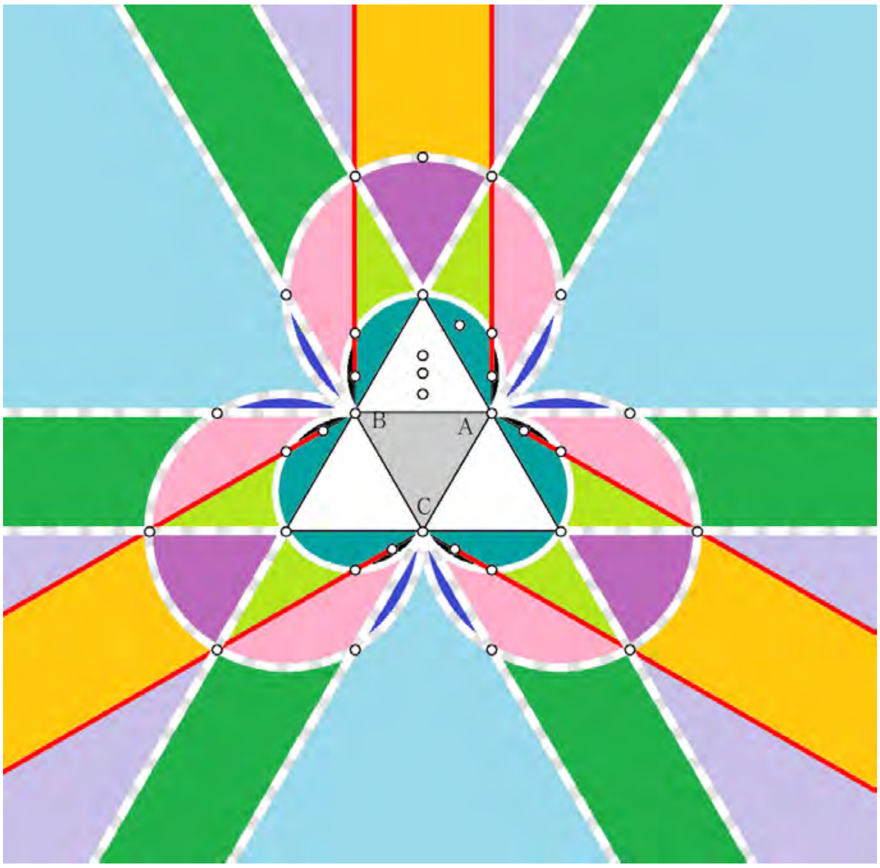
(三) $(x_1 + x_2 + x_3) + \mathrm{t} = \mathrm{S} + \mathrm{W} + \mathrm{U} + \mathrm{V}$

證明見附件



圖(54)

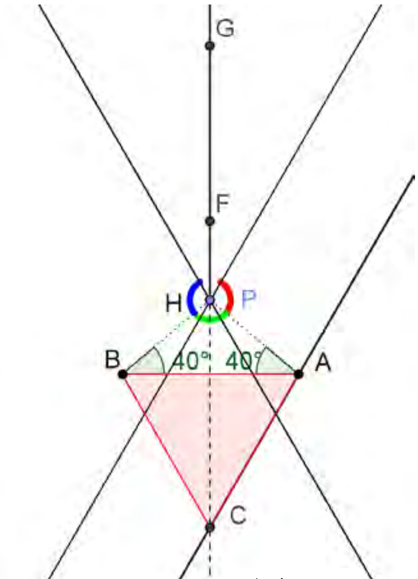
各色區合併如圖(55)



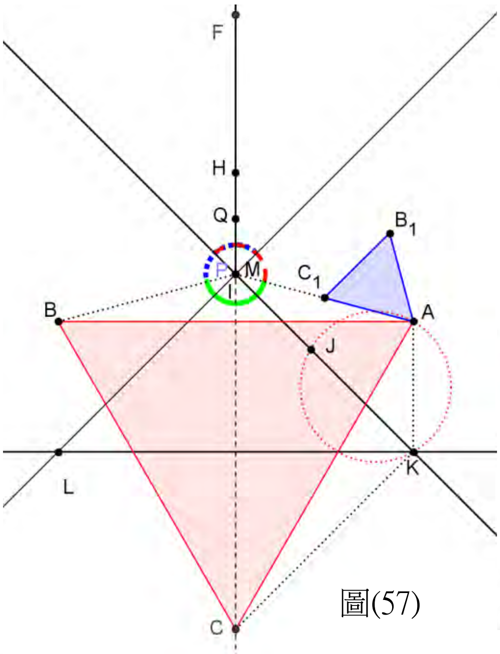
圖(55)

(十)再深入探討圖(55)中心區的白色△部分

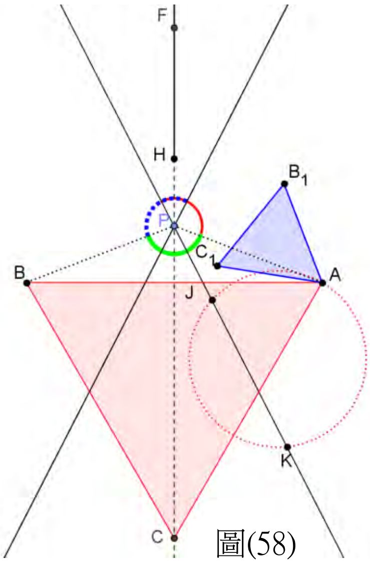
前文中所使用的輔助圓，其半徑都大於正△ABC 的邊長$\overline{AC}$，現欲觀察中心區白色△部分則輔助圓半徑須小於$\overline{AC}$，這時要把本文一開始畫輔助圓時的$\overline{CA}$:$\overline{AD}$的 D 點取在$\overline{CA}$上(C 點和 A 點之間)而仍按 CA:AD 的比例即可畫出縮小的輔助圓並取得 K、J 兩點而用於觀察中心白色區的莫利△



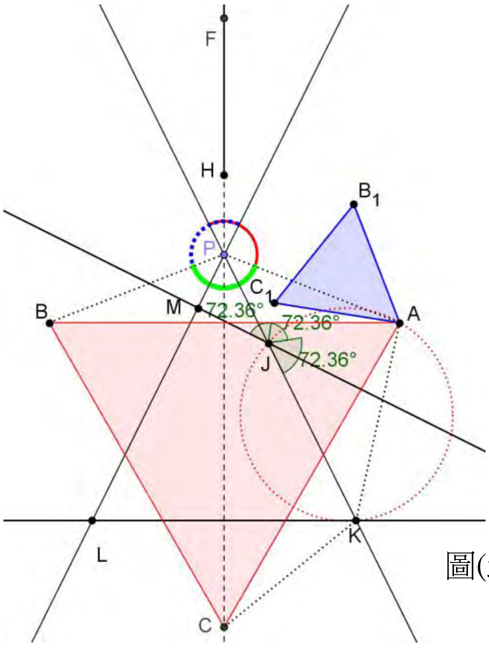
圖(56)



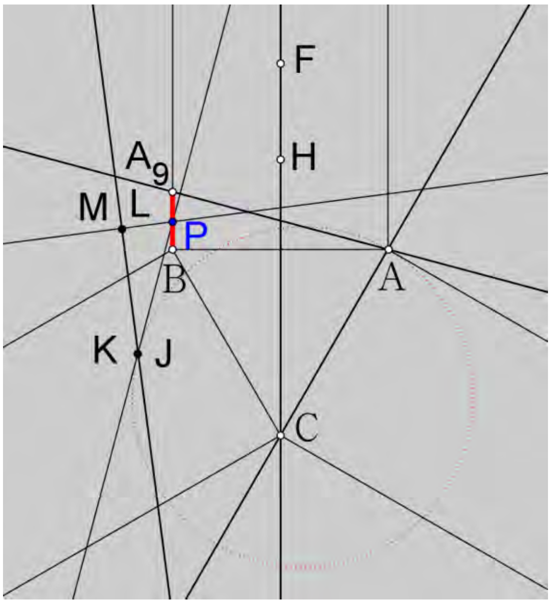
圖(57)



圖(58)



圖(59)



圖(60)

定義 H、Q、I 三點: 在標準圖上，如圖(56)，H 點位在 F 下方，使∠AHB=100°，又如圖(57)，Q 點位在 H 點下方，使∠AQB=120°，I 點在更下方，使∠AIB=150°

① 當 P 落在 H 點時，∠P 的一邊和$\overline{CA}$平行，不形成 K、J 點

② 當 P 落在棕色區(H 點除外)時，K 為原生母△的頂點，△ABC 的三頂點分別由∠P 外角剩

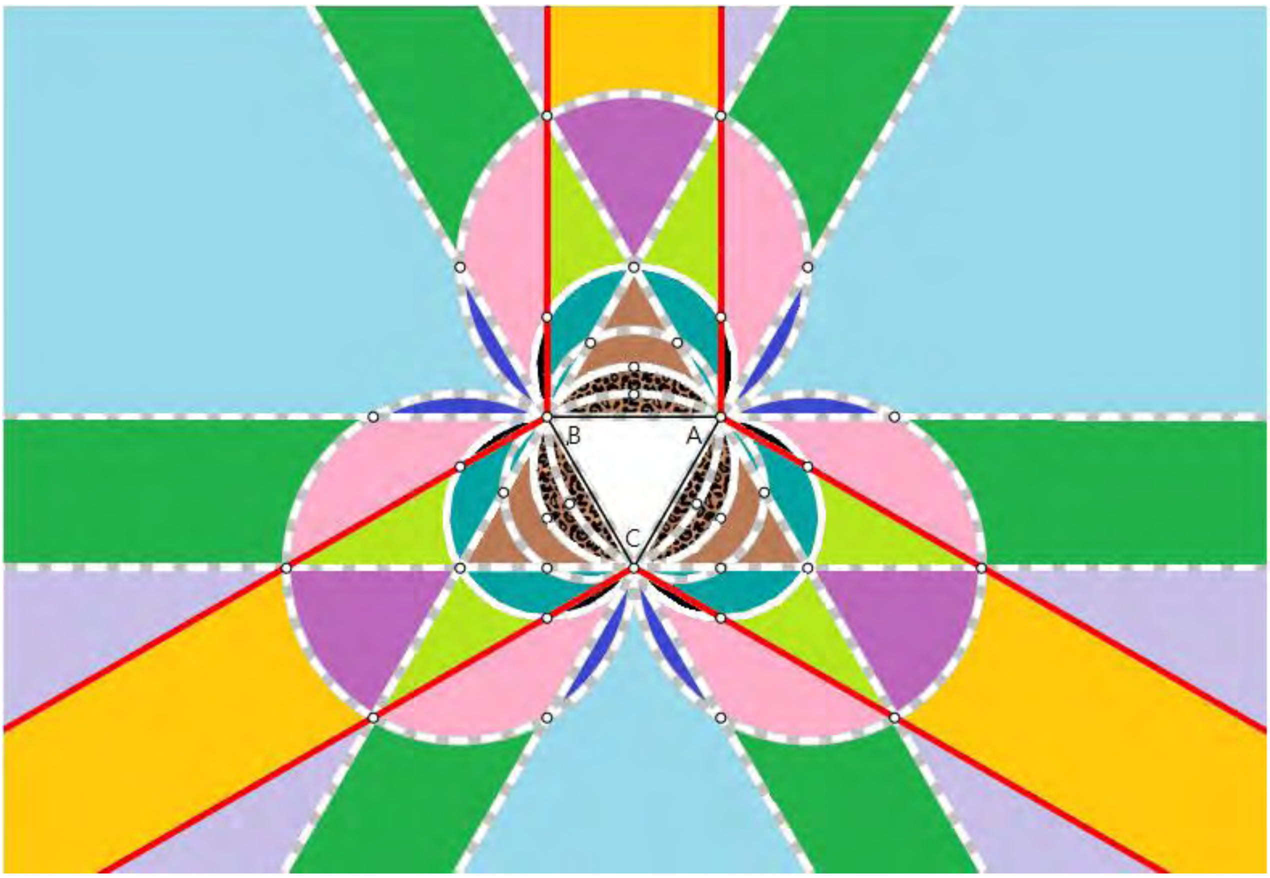
餘角三分線，∠K 內角三分線及∠L 內角三分線取交點而來，而 J 為孿生母△的頂點，△AB_1C_1的三頂點分別由∠P 外角剩餘角三分線，∠J 外角剩餘角三分線，∠M 外角三分線取交點而來

③ 當 P 落在上豹紋區和下豹紋區，輔助圓半徑越來越小，母△PKL 及母△PJM 各頂點之由來見表(一)

④ 當 P 落在弧 AIB 時，母△PJM、母△PKL 面積為零

⑤ 當 P 落在圖(60)中紅色$\overline{A_9B}$上時，K、J 重合，輔助圓的半徑小於$\overline{AC}$，在圖(55)中是白線，

但現在應加入紅色區，因此時原生與孿生仍是重合，我們將以上新增部分添加到圖(55)中，得到完整的 P 點有效範圍，完整全覽圖(61)，並針對各色區的母△PKL 及母△PJM 各頂點的來源列表說明如下



圖(61)

色區名稱	原　生			△ABC 名稱	變　生			△AB_1C_1 名稱
黃色	P 內角	K 內角	L 內角	內莫利	P 內角	J 內角	M 內角	內莫利
淺紫色	P 內角	J 內角	M 內角	內莫利	P 內角	K 內角	L 內角	內莫利
深紫色	P 內角	J 內角	M 內角	內莫利	P 外角	K 內角	L 外角	旁莫利
淺綠色	P 外角	K 內角	L 外角	旁莫利	P 外角	J 內角	M 外角	旁莫利
深綠色	P 外角	K 內角	L 外角	旁莫利	P 內角	J 內角	M 內角	內莫利
粉紅色	P 外角	J 內角	M 外角	旁莫利	P 外角	K 內角	L 外角	旁莫利
淺藍色	P 內角	K 外角	L 外角剩	旁-旁莫利	P 內角	J 內角	M 內角	內莫利
深藍色	P 內角	J 外角	M 外角剩	旁-旁莫利	P 外角	K 內角	L 外角	旁莫利
上藏青	P 外角剩	K 外角	L 內角	旁-旁莫利	P 外角剩	J 外角	M 內角	旁-旁莫利
下藏青	P 外角剩	K 外角	L 內角	旁-旁莫利	P 外角剩	J 外角剩	M 外角	未命名
黑色	P 外角剩	J 外角	M 內角	旁-旁莫利	P 外角剩	K 外角	L 內角	旁-旁莫利
紅色	P 內、外、外角剩	K 外、內、外	L 外角剩、外、內	莫利種類與鄰色同	P 內、外、外角剩	J 外、內、外	M 外角剩外、內	莫利種類與鄰色同
純白	原生與變生皆畫不出來							
虛線白	原生或變生有一不存在							
上棕	P 外角剩	K 內角	L 內角	未命名	P 外角剩	J 外角	M 內角	旁-旁莫利
下棕	P 外角剩	K 內角	L 內角	未命名	P 外角剩	J 外角剩	M 外角	未命名
上豹紋	P 外角	K 外角	L 外角	外莫利	P 外角	J 外角剩	M 內角	旁-旁莫利
下豹紋	P 外角	K 外角	L 外角	外莫利	P 內角	J 外角	M 外角	旁莫利

伍、結論

一、 一般△無法只利用尺規直接做出莫利正△，本文借助阿波羅圓由內而外反向操作，先指定一正△當內莫利，接著畫出對應的母△，在畫出外莫利△、旁莫利△……等。那對應的母△一般狀況下會有兩個，它倆共用一頂點，其中一個產生原生莫利家族，另一個產生孿生莫利家族，兩家族有一定的偏角關係及邊長關係，當起點 P 落在圖(61)中的紅色線上時，兩家族合而為一，偏角為零，邊長相等

二、

(一)、在原生的母△A′B′C′的莫利家族中，必存在下面三個關係式

1、$\frac{\sin\gamma}{st}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{wu}$ 2、$\frac{\sin\alpha}{st}=\frac{\sin(60-\alpha)}{uv}$ 3、$\frac{\sin\beta}{st}=\frac{\sin(60-\beta)}{wv}$

(二)、在孿生的母△A′B′C′的莫利家族中，除了上文中的三式外，還存在下面三個關係式

4、 $\mathrm{st}=\mathrm{uv}$ 5、$\mathrm{s}=\mathrm{w}$ 6、 $\left(\frac{\sin\beta}{u}\right)^2+\left(\frac{\sin\gamma}{v}\right)^2=\left(\frac{1}{w}\right)^2$

三、 文中六個旁-旁莫利正△邊長關係式為 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=y_1\cdot y_2\cdot y_3=a\cdot b\cdot c$

且 $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3$ 且 $(x_1+x_2+x_3)+t=S+W+U+V$

四、 在給定的正△ABC 平面上，起點 P 取在圖(61)的各色區中會有不同的莫利家族出現，其各自對應的三分線來源列於上表。欲產生何種家族可依圖(61)及上表條件選出 P 點位置，又若 P 點取在虛線白處則只會產生單一家族(例如孿生家族)

陸、參考資料及其他

一、游森棚，2010 年，<三等分一個角>，科學月刊 488 期

二、黃家禮，2000 年，<幾何明珠>，p.176~179，九章出版社

三、梁卷明，2001 年，<Morley 魔方的美妙性質>，柳州師專學報第二期 p.104~107

四、<三等分角>、<三角函數>、<圓錐曲線>，維基百科

【評語】030403

由於用直尺和圓規無法三等分任意角，因此，本作品反過來思考，由 Morley 正三角形反過來求母三角形，以國中生來講是相當有創意的，並進而得到母三角形的各種 Morley 家族中的許多關係式，這些關係式都相當簡潔，是一篇相當不錯的作品。唯一可惜的是文獻引用時不夠完整和有一些論述不夠明確。