中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030402

芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式

學校名稱：屏東縣立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 羅和憲	黃俊才

關鍵詞：摺紙、相似、規律

芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式

摘要：由芳賀和夫所提出的「芳賀第二定理」做延伸，求出當 $\overline{DF}$ 數值為 $\sqrt{2}-1$ 時，G 點和 A 點將會重合。接著，求出當 G 點在 $\overline{AB}$ 上時，$\overline{FA}+\overline{AG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HB}$、四邊形 AGJF、△GHJ、四邊形 HBCJ 的一般式和 $\overline{AG}$ ：$\overline{GH}$ ：$\overline{HB}$ 的比例式；以及當 G 點在 $\overline{AD}$ 上時，$\overline{GF}$ 、$\overline{GA}+\overline{AH}$ 、$\overline{HB}$ 、△GJF、四邊形 AHJG、四邊形 HBCJ 的一般式和 $\overline{AG}$ ：$\overline{AH}$ ：$\overline{HB}$ 的比例式。最後，利用線段的一般式求出數值後，分別以 $\frac{n}{2}$ 、$\frac{n}{3}$ 、$\frac{n}{4}$ 、……、$\frac{n}{m}$ (m 和 n 為正整數且 n＜m)為一組，觀察數值中分母和分子數字的變化方式並証明。(參考圖請見圖 2)

壹、研究動機

在「飛揚」這本專刊的專論上，我看見了由芳賀和夫所提出的「芳賀第二定理」：先將色紙對折，再以 $\overline{CF}$ 為折線，將 D 點折至 J 點，再分別摺出通過 $\overline{CJ}$ 和 $\overline{FJ}$ 的直線交 $\overline{AB}$ 於 G 和 H，則 $\overline{AG}$ ：$\overline{GB}$ ＝1：3，$\overline{AH}$ ：$\overline{HB}$ ＝2：1，就能將 $\overline{AB}$ 三等分。如圖 1 至圖 2：

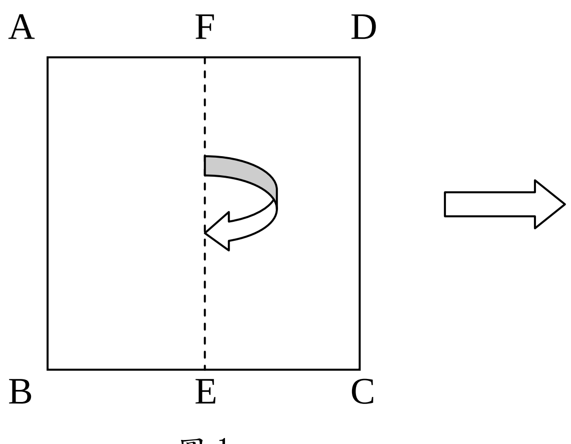


圖 1

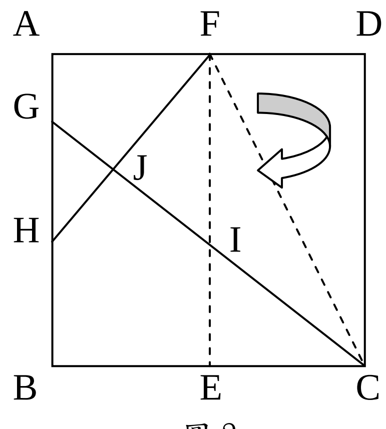


圖 2

如圖 2，為了方便計算，爾後便將正方形邊長設為 1，則 $\overline{DF}$ 、$\overline{EC}$ 和 $\overline{FJ}$ 皆為 $\frac{1}{2}$ ，因為 $\overline{EC}$ 和 $\overline{FJ}$ 等長，且 $\angle FJI$ 和 $\angle CEI$ 皆為直角，所以，按照三角形全等性質(AAS)，ΔFJI 和 ΔCEI 全等。接著，令 $\overline{CI}=x$ ，則 $\overline{EI}=1-x$ ，由畢氏定理，得到：

$$(\frac{1}{2})^2+(1\text{-}x)^2=x^2$$

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=2x$$

$$x=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 1-x=\frac{3}{8}$$

解之，我們可以發現ΔCEI和ΔFJI皆為邊長是 3：4：5 的直角三角形。然後，再分別摺出通過$\overline{FJ}$和$\overline{CJ}$的直線，並與$\overline{AB}$交於 H 點和 G 點。進一步地，利用平行線內錯角相等的原理、前述ΔFJI和ΔCEI全等及三角形內角和為 180° 的結果，發現ΔFJI、ΔCEI、ΔGJH、ΔHAF、ΔGBC皆相似。

下一步，令$\overline{GB}$長為y，由前述三角形相似關係，得到：$\frac{y}{1}=\frac{\overline{GB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{IE}}{\overline{EC}}=\frac{3}{4}$ 。

解之，得$y=\frac{3}{4}$，即 G 點是$\overline{AB}$的 1：3 等分點。

最後，令$\overline{AH}=z$，由前述三角形相似關係，得到：$\frac{\frac{1}{2}}{z}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{JI}}{\overline{FJ}}=\frac{3}{4}$。

解之，得$z=\frac{2}{3}$，即 H 點為$\overline{AB}$的 2：1 等分點。

只經幾次摺紙動作，便將一線段三等分，著實令人驚奇。在專論的最後一段寫道：「你將會發現，利用 J 點，便可將一線段作 1：4 與 2：3 等更多不同比例分割。」

我從文獻探討中，發現並沒有任何文獻對「芳賀第二定理」有更進一步的研究。於是，我提出不同的想法：是否可利用公式求出$\overline{GH}$(或$\overline{GA}+\overline{AH}$)、$\overline{HB}$和$\overline{FG}$(或$\overline{FA}+\overline{AG}$)的數值，並觀察數值之間的數字，在$\overline{DF}$以$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、……、$\frac{1}{m}$為一單位時，上述三條線段的數值將有何變化？

貳、研究目的

一、求出當$\overline{DF}$數值為多少時，G 點和 A 點將會重合。

二、求出當 G 點在$\overline{AB}$上時，$\overline{FA}+\overline{AG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HB}$、四邊形 AGJF、△GHJ、四邊形 HBCJ 的一般式和$\overline{AG}$：$\overline{GH}$：$\overline{HB}$的比例式；以及當 G 點在$\overline{AD}$上時，$\overline{GF}$、$\overline{GA}+\overline{AH}$、$\overline{HB}$、△GJF、四邊形 AHJG、四邊形 HBCJ 的一般式和$\overline{AG}$：$\overline{AH}$：$\overline{HB}$的比例式。

三、利用線段的一般式求出數值後，分別以$\frac{n}{2}$、$\frac{n}{3}$、$\frac{n}{4}$、……、$\frac{n}{m}$(m 和 n 為正整數且 n＜m)為一組，觀察數值中分母和分子數字的變化方式並証明。

參、研究設備及器材

筆、正方形色紙、尺、GSP 幾何繪圖軟體

肆、研究過程或方法

一、目的一

如圖 3，當我們折出一條通過$\overline{CJ}$，且與$\overline{AB}$交會於 A 點的直線，此線正好就是正方形的對角線，為了方便計算，爾後便將正方形邊長設為 1。由於$\overline{CA}$是正方形的對角線，所以，$\angle FAJ = 45^\circ$，再利用對頂角相等及三角形內角和為 180° 的關係，可以發現ΔFAJ 為一等腰直角三角形，且與ΔADC 相似。

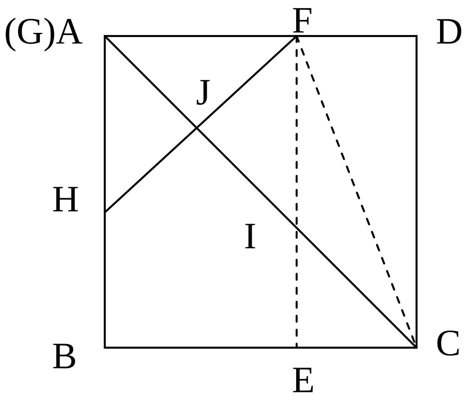


圖 3

接著，設$\overline{AJ} = x$，由畢氏定理，得到：

$$1^2 + 1^2 = (1+x)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 = 1 + 1$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{2}\text{(負不合)}$$
$$x = \sqrt{2} - 1$$

解之，得$\overline{AJ} = \sqrt{2} - 1$，並由$\Delta FAJ$ 為等腰三角形，且$\overline{DF} = \overline{FJ}$，所以$\overline{DF} = \sqrt{2} - 1$。

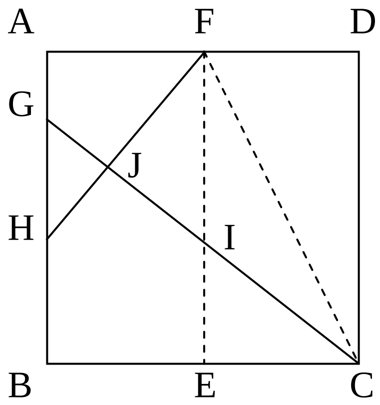
結論：當$\overline{DF} > \sqrt{2} - 1$時，G 點在$\overline{AB}$上；當$\overline{DF} < \sqrt{2} - 1$時，G 點在$\overline{AD}$上。

由於$\sqrt{2} - 1$為一無理數，所以$\overline{DF} = \sqrt{2} - 1$並不在目的三的討論範圍，目的二則不需找其一般式。

二、目的二

(一)當 $\overline{DF} > \sqrt{2}-1$ 時

如圖 4，令 $\overline{DF}=x$ 、 $\overline{CI}=y$ ，則 $\overline{FA}=1-x$ 、 $\overline{EI}=1-y$ 。



$[\overline{DF} > \sqrt{2}-1]$

圖 4

由畢氏定理，得到：

$$\overline{EI}^2+\overline{EC}^2=\overline{CI}^2$$
$$(1-y)^2+x^2=y^2$$

解之，得 $y=\dfrac{x^2+1}{2}$ ，$1-y=\dfrac{1-x^2}{2}$ 。

接著，利用平行線內錯角相等，對頂角相等及三角形內角和為 180° 的關係，我們可以發現 ΔCEI 和 ΔCBG 相似，$\therefore \dfrac{x}{1}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{EI}}{\overline{GB}}=\dfrac{\frac{1-x^2}{2}}{\overline{GB}}$ 。

解之，我們可得 $\overline{GB}=\dfrac{1-x^2}{2x}$ 。

由於我們已得知 $\overline{GB}$ 的一般式，接著，我們便可求出 $\overline{FA}+\overline{AG}$ 的一般式：

$\because \overline{AB}=1$ ，且 $\overline{FA}=1-x$ ，$\therefore \overline{FA}+\overline{AG}=(1-x)+(1-\dfrac{1-x^2}{2x})$ 。

解之，我們可得 $\boxed{\overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{-(x^2-4x+1)}{2x}}$ 。

再來，繼續利用上述的關係，可以發現 ΔCBG 和 ΔHAF 相似。

$\because \dfrac{1}{\frac{1-x^2}{2x}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{HA}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{GH}+\frac{x^2+2x-1}{2x}}{1-x}$ ，$\therefore \boxed{\overline{GH}=\dfrac{(x^2+1)(1-x)}{2x(1+x)}}$ 。

最後，我們可利用已知的 $\overline{AG}$ 和 $\overline{GH}$ 來求得 $\overline{HB}$ ：

$\because \overline{AB}=1$ ，$\therefore \overline{HB}=1-(\dfrac{x^2+2x-1}{2x}+\dfrac{(x^2+1)(1-x)}{2x(x+1)})$

解之，得$\boxed{\overline{HB}=\frac{1-x}{1+x}}$。

$\overline{AG}$ ： $\overline{GH}$ ： $\overline{HB}=\frac{x^2+2x-1}{2x}$ ： $\frac{(x^2+1)(1-x)}{2x(1+x)}$ ： $\frac{1-x}{1+x}$ 。

解之，得$\boxed{\overline{AG} ： \overline{GH} ： \overline{HB}=(1+x)(x^2+2x-1) ： (x^2+1)(1-x) ： 2x(1-x)}$。

四邊形 AGJF=梯形 AGIF－△JIF

$=(\frac{x^2+2x-1}{2x}+\frac{x^2+1}{2})\times(1-x)\times\frac{1}{2}-x\times\frac{1-x^2}{2}\times\frac{1}{2}$ 。

解之，得$\boxed{\text{四邊形 AGJF}=\frac{(1-x)(3x-1)}{4x}}$。

△GHJ=△AHF－四邊形 AGJF=$(1-x)\times\frac{2x}{x+1}\times\frac{1}{2}-\frac{(1-x)(3x-1)}{4x}$ 。

解之，得$\boxed{\triangle\text{GHJ}=\frac{(1-x)^3}{4x(1+x)}}$。

四邊形 HBCJ=△GBC－△GHJ=$\frac{1-x^2}{2x}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{(1-x)^3}{4x(1+x)}$ 。

解之，得$\boxed{\text{四邊形 HBCJ}=\frac{1-x}{1+x}}$。

(二)當 $\overline{DF}<\sqrt{2}-1$時

如圖 5，令 $\overline{DF}=x$ ，$\overline{EI}=y$ ，則$\overline{FA}=1-x$ 、$\overline{CI}=1-y$ 。

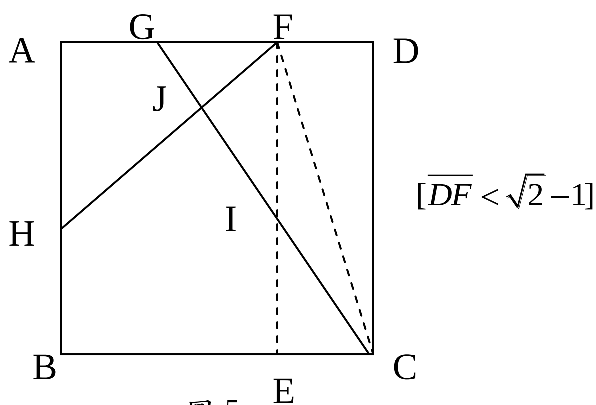


圖 5

由畢氏定理，得到：

$$\overline{EC}^2+\overline{EI}^2=\overline{CI}^2$$
$$x^2+y^2=(1-y)^2$$

解之，得 $y=\dfrac{1-x^2}{2}$ ，$1-y=\dfrac{1+x^2}{2}$ 。

得到 y 和 x 的關係後，利用平行線內錯角相等及三角形內角和為 180° 的關係，可以發現 ΔCEI 和 ΔGJF 相似，$\therefore \dfrac{x}{\overline{GF}}=\dfrac{\overline{FJ}}{\overline{GF}}=\dfrac{\overline{EI}}{\overline{CI}}=\dfrac{\frac{1-x^2}{2}}{\frac{1+x^2}{2}}$ 。

解之，得 $\boxed{\overline{GF}=\dfrac{(1+x^2)x}{1-x^2}}$ 。

接著，利用 $\overline{FA}=1-x$ ，$\therefore \overline{GA}=(1-x)-\dfrac{(1+x^2)x}{1-x^2}$ 。

解之，得 $\overline{GA}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ 。

再來，$\because \angle IEC$ 和 $\angle FAH$ 皆為 90°，且 $\angle CIE=\angle HFA$ ，可以發現 ΔIEC 和 ΔFAH 相似，$\therefore \dfrac{\overline{HA}}{1-x}=\dfrac{\overline{HA}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EI}}=\dfrac{x}{\frac{1-x^2}{2}}$ 。

解之，得 $\overline{HA}=\dfrac{2x}{1+x}$ 。

最後，我們便可利用 $\overline{AH}$ 來求 $\overline{GA}+\overline{AH}$和$\overline{HB}$：

$\boxed{\overline{GA}+\overline{AH}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{1+x}=\dfrac{1-3x^2}{1-x^2}}$ ，$\boxed{\overline{HB}=1-\dfrac{2x}{1+x}=\dfrac{1-x}{1+x}}$ 。

$\overline{AG}:\overline{AH}:\overline{HB}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}:\dfrac{2x}{1+x}:\dfrac{1-x}{1+x}$ 。

解之，得 $\boxed{\overline{AG}:\overline{AH}:\overline{HB}=-(x^2+2x-1):2x(1-x):(1-x)^2}$。

△GJF=△GIF－△JIF=$\dfrac{x^3+x}{1-x^2}\times\dfrac{x^2+1}{2}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-x^2}{2}\times x\times\dfrac{1}{2}$ 。

解之，得 $\boxed{\triangle \text{GJF}=\dfrac{x^3}{1-x^2}}$。

四邊形 AHJG=△AHF－△GJF=$\dfrac{2x}{1+x}\times(1-x)\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^3}{1-x^2}$ 。

解之，得 $\boxed{\text{四邊形 AHJG}=\dfrac{x(1-2x)}{1-x^2}}$ 。

四邊形 HBCJ=梯形 ABCG－四邊形 AHJG

$=(\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}+1)\times 1\times\frac{1}{2}-\frac{x(1-2x)}{1-x^2}$ 。

解之，得 $\boxed{\text{四邊形 HBCJ}=\frac{1-x}{1+x}}$ 。

(三)結論

將上述 6 個線段一般式、2 個線段比例式和 6 個面積一般式整理如下：

(當 $\overline{DF}>\sqrt{2}-1$ 時)

$$\begin{cases}
1.\ \overline{FA}+\overline{AG}=\frac{-(x^2-4x+1)}{2x} \\
2.\ \overline{GH}=\frac{(x^2+1)(1-x)}{2x(1+x)} \\
3.\ \overline{HB}=\frac{1-x}{1+x} \\
4.\ \overline{AG}：\overline{GH}：\overline{HB}= \\
\quad (1+x)(x^2+2x-1)：(x^2+1)(1-x)：2x(1-x) \\
5.\text{四邊形 AGJF}=\frac{(1-x)(3x-1)}{4x} \\
6.\triangle\text{GHJ}=\frac{(1-x)^3}{4x(1+x)} \\
7.\text{四邊形 HBCJ}=\frac{1-x}{1+x}
\end{cases}$$

(當 $\overline{DF}<\sqrt{2}-1$ 時)

$$\begin{cases}
1.\ \overline{GF}=\frac{(1+x^2)x}{1-x^2} \\
2.\ \overline{GA}+\overline{AH}=\frac{1-3x^2}{1-x^2} \\
3.\ \overline{HB}=\frac{1-x}{1+x} \\
4.\ \overline{AG}：\overline{AH}：\overline{HB}=-(x^2+2x-1)：2x(1-x)：(1-x)^2 \\
5.\triangle\text{GJF}=\frac{x^3}{1-x^2} \\
6.\text{四邊形 AHJG}=\frac{x(1-2x)}{1-x^2} \\
7.\text{四邊形 HBCJ}=\frac{1-x}{1+x}
\end{cases}$$

三、目的三

由於數值的數字討論，是以 $\frac{1}{m}$ 為一單位來討論，若是用目的二的線段一般式，則會顯得麻煩，所以我們令 $\overline{DF}=\frac{b}{a}$ (a 和 b 均為正整數且 a＞b)，代入目的二所框起來的 6 個線段一般式，得到：

$$(\text{當 } \overline{DF}>\sqrt{2}-1\text{時}) \begin{cases} 1.\ \overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab} \\ 2.\ \overline{GH}=\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

$$(\text{當 } \overline{DF}<\sqrt{2}-1\text{時}) \begin{cases} 1.\ \overline{GF}=\dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)} \\ 2.\ \overline{GA}+\overline{AH}=\dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

(一)下列數值表，請仔細觀察：

1.附註：

(1) ①表示為 $\overline{DF}<\sqrt{2}-1$ 的情況

(2) ②表示為 $\overline{DF}>\sqrt{2}-1$ 的情況

2.研究規定：

(1)數值不可約分，以觀察分母和分子數字的變化方式。

(2) $\overline{DF}$ 需大於 0、小於 1。

(3)若以 $\frac{1}{m}$ 為 1 單位，則 m 需為正整數。

(4)若以 $\frac{b}{a}$ 為 1 單位，且 a 和 b 可約分，則此時需約至最簡。

(5)不將 1.5、1.6、1.7 等有小數點的單位納入討論，僅討論 1、2、3……等正整數單位。

	$\frac{b}{a}$	$\frac{a-b}{a+b}$	① $\frac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)}$ ② $\frac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab}$	① $\frac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)}$ ② $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)}$
	$\overline{DF}$	$\overline{HB}$	① $\overline{GF}$ ② $\overline{FA}+\overline{AG}$	① $\overline{GA}+\overline{AH}$ ② $\overline{GH}$
②	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$
①	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{6}{8}$
②	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{13}{60}$
①	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{13}{15}$
②	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{40}{96}$
②	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{25}{168}$
①	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{22}{24}$
①	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{58}{105}$	$\frac{13}{21}$
②	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{26}{30}$	$\frac{68}{240}$
②	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{39}{40}$	$\frac{41}{360}$
①	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{37}{210}$	$\frac{33}{35}$
①	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{80}{192}$	$\frac{24}{32}$
②	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{135}{324}$
②	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{44}{48}$	$\frac{104}{480}$
②	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{59}{60}$	$\frac{61}{660}$
①	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{50}{336}$	$\frac{46}{48}$

①	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{106}{315}$	$\frac{37}{45}$
②	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{26}{42}$	$\frac{232}{420}$
②	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{47}{56}$	$\frac{195}{616}$
②	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{66}{70}$	$\frac{148}{840}$
②	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{83}{84}$	$\frac{85}{1092}$
①	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{65}{504}$	$\frac{61}{63}$
①	$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{136}{480}$	$\frac{52}{60}$
①	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{219}{440}$	$\frac{37}{55}$
②	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{48}{64}$	$\frac{320}{768}$
②	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{71}{80}$	$\frac{267}{1040}$
②	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{92}{96}$	$\frac{200}{1344}$
②	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{111}{112}$	$\frac{113}{1680}$
①	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{82}{720}$	$\frac{78}{80}$
①	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{170}{693}$	$\frac{69}{77}$
①	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{270}{648}$	$\frac{54}{72}$
②	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{47}{72}$	$\frac{485}{936}$

②	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{74}{90}$	$\frac{424}{1260}$
②	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{99}{108}$	$\frac{351}{1620}$
②	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{122}{126}$	$\frac{260}{2016}$
②	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{143}{144}$	$\frac{145}{2448}$
①	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{101}{990}$	$\frac{97}{99}$
①	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{208}{960}$	$\frac{88}{96}$
①	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{327}{910}$	$\frac{73}{91}$
①	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{464}{840}$	$\frac{52}{84}$
②	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{625}{1500}$
②	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{104}{120}$	$\frac{544}{1920}$
②	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{131}{140}$	$\frac{447}{2380}$
②	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{156}{160}$	$\frac{328}{2880}$
②	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{179}{180}$	$\frac{181}{3420}$

(以下證明結果，可利用上面數值表作輔助，實際觀察)

(二)當 $\overline{DF} > \sqrt{2}-1$ 時(令 $\overline{DF}=\dfrac{b}{a}$ ，a 和 b 均為正整數且 a＞b。)

1. $\overline{FA}+\overline{AG}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab}$)

(1) $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分母數字變化(一般式：$2ab$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$ 、$\dfrac{6}{10}$ 、$\dfrac{7}{10}$ 、$\dfrac{8}{10}$ 、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分母為例：
100、120、140、160、180。

由於其分母一般式為 $2ab$，且 2 和 a 已經固定，b 又以+1 的方式遞增，所以，分母數字變化是以 $+2a$ 的方式遞增。我們可以得到分母的遞迴式：

$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1}+2a \text{ 。}}$

證明：$2a(b+1)-2ab=2a$ 。

(2) $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分子數字變化(一般式：$4ab-(a^2+b^2)$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$ 、$\dfrac{6}{10}$ 、$\dfrac{7}{10}$ 、$\dfrac{8}{10}$ 、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分子為例：
75、104、131、156、179。

$$
\begin{array}{lll}
40\times5-(100+5^2) & & \\
 & 40-11 & \\
40\times6-(100+6^2) & & -2\times1 \\
 & 40-11-2\times1 & \\
40\times7-(100+7^2) & & -2\times1 \\
 & 40-11-2\times2 & \\
40\times8-(100+8^2) & & -2\times1 \\
 & 40-11-2\times3 & \\
40\times9-(100+9^2) & &
\end{array}
$$

由於其分子 $4ab$ 之部分，是以 $+4a$ 的方式遞增，其減 (a^2+b^2) 的部分，則是由前後兩個 $\overline{DF}$ 的 b 相加減為 $-(2b+1)$ 。兩者相加為 $4a-(2b+1)$ ，是其分子數字變化的首次增加數字，後來的增加數字為前次增加數字 -2 。我們可以得到分子的遞迴式：$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1}+4a-(2b+1)-2(n-2) \text{ 。}}$

證明：$4a(b+1)-[a^2+(b+1)^2]-4ab+(a^2+b^2)=4a-(2b+1)$ 。

2. $\overline{GH}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)}$)

(1) $\overline{GH}$ 分母數字變化(一般式：$2ab(a+b)$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$、$\dfrac{6}{10}$、$\dfrac{7}{10}$、$\dfrac{8}{10}$、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{GH}$ 分母為例：
1500、1920、2380、2880、3420。

其分母數字變化的首次增加數字為 $2a(a+2b+1)$，後來的增加數字為前次增加數字 $+4a$。我們可以得到分母的遞迴式：

$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1} + 2a(a+2b+1) + 4a(n-2)\text{。}}$

証明：$2a(b+1)[a+(b+1)] - 2ab(a+b) = 2a(a+2b+1)$。

(2) $\overline{GH}$ 分子數字變化(一般式：$(a-b)(a^2+b^2)$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$、$\dfrac{6}{10}$、$\dfrac{7}{10}$、$\dfrac{8}{10}$、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{GH}$ 分子為例：
625、544、447、328、181。

其分子數字變化的首次減少數字為 $a(a-2b-1)+3b(b+1)+1$，後來的減少數字為前次減少數字 $+(6m-2a+6b)$，m≥1。我們可以得到分子的遞迴式：$\boxed{n \geq 3 \text{ 時，} a_n = a_{n-1} - [a(a-2b-1)+3b(b+1)+1] - [6(n-2)-2a+6b]\text{。}}$

証明：$[a-(b+1)][a^2+(b+1)^2] - (a-b)(a^2+b^2)$
$= -[a(a-2b-1)+3b(b+1)+1]$。

3. $\overline{HB}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a-b}{a+b}$)

(1) $\overline{HB}$ 分母數字變化(一般式：$a+b$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$、$\dfrac{6}{10}$、$\dfrac{7}{10}$、$\dfrac{8}{10}$、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{HB}$ 分母為例：
15、16、17、18、19。

其分母數字變化是以+1 的方式遞增。我們可以得到分母的遞迴式：

$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1} + 1 \text{。}}$

證明：$a+(b+1)-(a+b)=1$。

(2) $\overline{HB}$ 分子數字變化(一般式：$a-b$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{5}{10}$、$\dfrac{6}{10}$、$\dfrac{7}{10}$、$\dfrac{8}{10}$、$\dfrac{9}{10}$ 的 $\overline{HB}$ 分子為例：
5、4、3、2、1。

其分子數字變化是以 -1 的方式遞減。我們可以得到分子的遞迴式：
$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1} - 1 \text{。}}$

證明：$a-(b+1)-(a-b)=-1$。

(三)當 $\overline{DF} < \sqrt{2}-1$ 時(令 $\overline{DF}=\dfrac{b}{a}$，a 和 b 均為正整數且 a＞b。)

1. $\overline{GF}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)}$)

(1) $\overline{GF}$ 的分母數字變化(一般式：$a(a+b)(a-b)$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{2}{10}$、$\dfrac{3}{10}$、$\dfrac{4}{10}$ 的 $\overline{GF}$ 分母為例：
990、960、910、840。

其分母數字變化是以 $-3a$、$-5a$、$-7a$、……的方式遞減。我們可以得到分母的遞迴式：$\boxed{n \geq 2 \text{ 時，} a_n = a_{n-1} - (2n-1)a \text{。}}$

證明：$a[a+(b+1)][a-(b+1)]-a(a+b)(a-b)=-a(2b+1)$。

(2) $\overline{GF}$ 的分子數字變化(一般式：$b(a^2+b^2)$)

以 $\overline{DF}=\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{2}{10}$、$\dfrac{3}{10}$、$\dfrac{4}{10}$ 的 $\overline{GF}$ 分子為例：
101、208、327、464。

$$\begin{array}{lll}
1\times(100+1) & & \\
 & 100+7 & \\
2\times(100+4) & & 6\times 2 \\
 & 100+7+6\times 2 & \\
3\times(100+9) & & 6\times 3 \\
 & 100+7+6\times(2+3) & \\
4\times(100+16) & &
\end{array}$$

其分子一般式為$b(a^2+b^2)$，b是以+1的方式遞增，而(a^2+b^2)則是以+3、+5、+7、……來遞增。其分子數字變化的首次增加數字為a^2+7，後來的增加數字為前次增加數字$+6m$，m≥ 2。我們可以得到分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 3\text{ 時，}\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+a^2+7+6[2+3+\cdots\cdots+(n-1)] \\ &= a_{n-1}+a^2+7+3(n+1)(n-2)\end{aligned}}$。

證明：$(b+1)[a^2+(b+1)^2]-b(a^2+b^2)=a^2+(3b^2+3b+1)$。

2.$\overline{GA}+\overline{AH}$的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)}$)

(1)$\overline{GA}+\overline{AH}$分母數字變化(一般式：$(a+b)(a-b)$)

以$\overline{DF}=\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{2}{10}$、$\dfrac{3}{10}$、$\dfrac{4}{10}$的$\overline{GA}+\overline{AH}$分母為例：
99、96、91、84。

其分母數字變化方式，是以-3、-5、-7、……的方式遞減。我們可以得到分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-(2n-1)\text{ 。}}$

證明：$[a+(b+1)][a-(b+1)]-(a+b)(a-b)=-(2b+1)$。

(2)$\overline{GA}+\overline{AH}$分子數字變化(一般式：$a^2-3b^2$)

以$\overline{DF}=\dfrac{1}{10}$、$\dfrac{2}{10}$、$\dfrac{3}{10}$、$\dfrac{4}{10}$的$\overline{GA}+\overline{AH}$分子為例：
97、88、73、52。

$$\begin{array}{lll}
100-3\times 1^2 & & \\
 & -3\times 3 & \\
100-3\times 2^2 & & -3\times 2 \\
 & -3\times 5 & \\
100-3\times 3^2 & & -3\times 2 \\
 & -3\times 7 & \\
100-3\times 4^2 & &
\end{array}$$

其分子數字變化方式，是以-9、-15、-21、……的方式遞減。我們可以得到分子的遞迴式：$\boxed{n\geq 2 \text{ 時}，a_n = a_{n-1} - 3(2n-1)\text{ 。}}$

證明：$a^2 - 3(b+1)^2 - a^2 + 3b^2 = -3(2b+1)$ 。

3.$\overline{HB}$的數值數字變化(一般式：$\frac{a-b}{a+b}$)

(1)$\overline{HB}$分母數字變化(一般式：$a+b$)

以$\overline{DF}=\frac{1}{10}$、$\frac{2}{10}$、$\frac{3}{10}$、$\frac{4}{10}$的$\overline{HB}$分母為例：
11、12、13、14。

其分母數字變化是以+1 的方式遞增。我們可以得到分母的遞迴式：$\boxed{n\geq 2 \text{ 時}，a_n = a_{n-1} + 1\text{ 。}}$

證明：$a + (b+1) - (a+b) = 1$ 。

(2)$\overline{HB}$分子數字變化(一般式：$a-b$)

以$\overline{DF}=\frac{1}{10}$、$\frac{2}{10}$、$\frac{3}{10}$、$\frac{4}{10}$的$\overline{HB}$分子為例：
9、8、7、6。

其分子數字變化是以-1的方式遞減。我們可以得到分子的遞迴式：$\boxed{n\geq 2 \text{ 時}，a_n = a_{n-1} - 1\text{ 。}}$

證明：$a - (b+1) - (a-b) = -1$ 。

伍、研究結果

一、目的一

(一)當$\overline{DF}=\sqrt{2}-1$時，G 點和 A 點將會重合。
(二)當$\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時，G 點在$\overline{AB}$上。
(三)當$\overline{DF} < \sqrt{2}-1$時，G 點在$\overline{AD}$上。

二、目的二

(一)當 $\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時(令 $\overline{DF}$ =x)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{-(x^2-4x+1)}{2x} \\ 2.\ \overline{GH}=\dfrac{(x^2+1)(1-x)}{2x(1+x)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{1-x}{1+x} \\ 4.\ \overline{AG}：\overline{GH}：\overline{HB}= \\ \quad (1+x)(x^2+2x-1)：(x^2+1)(1-x)：2x(1-x) \\ 5.\text{四邊形 AGJF}=\dfrac{(1-x)(3x-1)}{4x} \\ 6.\triangle\text{GHJ}=\dfrac{(1-x)^3}{4x(1+x)} \\ 7.\text{四邊形 HBCJ}=\dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

(二)當 $\overline{DF} < \sqrt{2}-1$時(令 $\overline{DF}$ =x)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{GF}=\dfrac{(1+x^2)x}{1-x^2} \\ 2.\ \overline{GA}+\overline{AH}=\dfrac{1-3x^2}{1-x^2} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{1-x}{1+x} \\ 4.\ \overline{AG}：\overline{AH}：\overline{HB}=-(x^2+2x-1)：2x(1-x)：(1-x)^2 \\ 5.\triangle\text{GJF}=\dfrac{x^3}{1-x^2} \\ 6.\text{四邊形 AHJG}=\dfrac{x(1-2x)}{1-x^2} \\ 7.\text{四邊形 HBCJ}=\dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

三、目的三

(一)當 $\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時(令 $\overline{DF}=\dfrac{b}{a}$ ，a 和 b 均為正整數且 a＞b)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab} \\ 2.\ \overline{GH}=\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

1. $\overline{FA}+\overline{AG}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab}$)

(1) $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分母數字變化(一般式：$2ab$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}+2a\text{ 。}}$

(2) $\overline{FA}+\overline{AG}$ 分子數字變化(一般式：$4ab-(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}+4a-(2b+1)-2(n-2)\text{ 。}}$

2. $\overline{GH}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)}$)

(1) $\overline{GH}$ 分母數字變化(一般式：$2ab(a+b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}+2a(a+2b+1)+4a(n-2)\text{ 。}}$

(2) $\overline{GH}$ 分子數字變化(一般式：$(a-b)(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：

$\boxed{\text{n}\geq 3\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-[a(a-2b-1)+3b(b+1)+1]-[6(n-2)-2a+6b]\text{ 。}}$

3. $\overline{HB}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a-b}{a+b}$)

(1) $\overline{HB}$ 的分母數字變化(一般式：$a+b$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}+1\text{ 。}}$

(2) $\overline{HB}$ 的分子數字變化(一般式：$a-b$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-1\text{ 。}}$

(二)當 $\overline{DF}<\sqrt{2}-1$ 時(令 $\overline{DF}=\dfrac{b}{a}$ ，a 和 b 均為正整數且 a＞b)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{GF}=\dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)} \\ 2.\ \overline{GA}+\overline{AH}=\dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

1. $\overline{GF}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)}$)

(1) $\overline{GF}$ 的分母數字變化(一般式：$a(a+b)(a-b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-(2n-1)a\text{ 。}}$

(2) $\overline{GF}$ 的分子數字變化(一般式：$b(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 3\text{ 時，}a_n=a_{n-1}+a^2+7+3(n+1)(n-2)\text{ 。}}$

2. $\overline{GA}+\overline{AH}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)}$)

(1) $\overline{GA}+\overline{AH}$ 分母數字變化(一般式：$(a+b)(a-b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-(2n-1)\text{ 。}}$

(2) $\overline{GA}+\overline{AH}$ 分子數字變化(一般式：a^2-3b^2)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n=a_{n-1}-3(2n-1)\text{ 。}}$

3. $\overline{HB}$的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a-b}{a+b}$)

(1) $\overline{HB}$的分母數字變化(一般式：$a+b$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1}+1\text{。}}$

(2) $\overline{HB}$的分子數字變化(一般式：$a-b$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1}-1\text{。}}$

陸、討論

一、在研究過程或方法中，因為「芳賀第二定理」只是比例的延伸，無理數無法等分，所以，我們不將$\overline{DF}$長度是無理數和整數的情形納入討論，而且線段的數值皆只是比例。

二、此次研究目的主要是討論數值中分母和分子的數字變化方式，或許也可以直接討論數值的變化方式，但是，計算量會非常大。

三、將來會試著探討在$\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時，四邊形 AGJF、△GHJ、四邊形 HBCJ 的面積和$\overline{AG}$：$\overline{GH}$：$\overline{HB}$的比例變化方式；以及在$\overline{DF} < \sqrt{2}-1$時，△GJF、四邊形 AHJG、四邊形 HBCJ 的面積和$\overline{AG}$ ： $\overline{AH}$ ： $\overline{HB}$的比例變化方式。因為其面積大小和線段比例仍然受$\overline{DF}$的大小影響。

柒、結論

一、結論一

(一)當$\overline{DF} = \sqrt{2}-1$時，G 點和 A 點將會重合。
(二)當$\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時，G 點在$\overline{AB}$上。
(三)當$\overline{DF} < \sqrt{2}-1$時，G 點在$\overline{AD}$上。

二、結論二

(一)當$\overline{DF} > \sqrt{2}-1$時(令$\overline{DF}$=x)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{-(x^2-4x+1)}{2x} \\ 2.\ \overline{GH}=\dfrac{(x^2+1)(1-x)}{2x(1+x)} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{1-x}{1+x} \\ 4.\ \overline{AG}：\overline{GH}：\overline{HB}= \\ \quad (1+x)(x^2+2x-1)：(x^2+1)(1-x)：2x(1-x) \\ 5.\text{四邊形 AGJF}=\dfrac{(1-x)(3x-1)}{4x} \\ 6.\triangle\text{GHJ}=\dfrac{(1-x)^3}{4x(1+x)} \\ 7.\text{四邊形 HBCJ}=\dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

(二)當 $\overline{DF} < \sqrt{2}-1$ 時(令 $\overline{DF}$ =x)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{GF}=\dfrac{(1+x^2)x}{1-x^2} \\ 2.\ \overline{GA}+\overline{AH}=\dfrac{1-3x^2}{1-x^2} \\ 3.\ \overline{HB}=\dfrac{1-x}{1+x} \\ 4.\ \overline{AG}：\overline{AH}：\overline{HB}=-(x^2+2x-1)：2x(1-x)：(1-x)^2 \\ 5.\triangle\text{GJF}=\dfrac{x^3}{1-x^2} \\ 6.\text{四邊形 AHJG}=\dfrac{x(1-2x)}{1-x^2} \\ 7.\text{四邊形 HBCJ}=\dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

三、結論三

(一)當 $\overline{DF} > \sqrt{2}-1$ 時(令 $\overline{DF}=\dfrac{b}{a}$ ，a 和 b 均為正整數且 a＞b)

$$\begin{cases} 1.\overline{FA}+\overline{AG}=\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab} \\ 2.\overline{GH}=\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)} \\ 3.\overline{HB}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

1.$\overline{FA}+\overline{AG}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{4ab-(a^2+b^2)}{2ab}$)

(1)$\overline{FA}+\overline{AG}$ 分母數字變化(一般式：$2ab$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，} a_n=a_{n-1}+2a\text{ 。}}$

(2)$\overline{FA}+\overline{AG}$ 分子數字變化(一般式：$4ab-(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，} a_n=a_{n-1}+4a-(2b+1)-2(n-2)\text{ 。}}$

2.$\overline{GH}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{2ab(a+b)}$)

(1)$\overline{GH}$ 分母數字變化(一般式：$2ab(a+b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，} a_n=a_{n-1}+2a(a+2b+1)+4a(n-2)\text{ 。}}$

(2)$\overline{GH}$ 分子數字變化(一般式：$(a-b)(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：

$\boxed{\text{n}\geq 3\text{ 時，} a_n=a_{n-1}-[a(a-2b-1)+3b(b+1)+1]-[6(n-2)-2a+6b]\text{ 。}}$

3.$\overline{HB}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a-b}{a+b}$)

(1)$\overline{HB}$ 的分母數字變化(一般式：$a+b$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，} a_n=a_{n-1}+1\text{ 。}}$

(2) $\overline{HB}$的分子數字變化(一般式：$a-b$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1} - 1\text{ 。}}$

(二)當 $\overline{DF} < \sqrt{2}-1$時(令 $\overline{DF} = \dfrac{b}{a}$ ，a 和 b 均為正整數且 a＞b)

$$\begin{cases} 1.\ \overline{GF} = \dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)} \\ 2.\ \overline{GA}+\overline{AH} = \dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)} \\ 3.\ \overline{HB} = \dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

1. $\overline{GF}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{b(a^2+b^2)}{a(a+b)(a-b)}$)

(1) $\overline{GF}$ 的分母數字變化(一般式：$a(a+b)(a-b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1} - (2n-1)a\text{ 。}}$

(2) $\overline{GF}$ 的分子數字變化(一般式：$b(a^2+b^2)$)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 3\text{ 時，}a_n = a_{n-1} + a^2 + 7 + 3(n+1)(n-2)\text{ 。}}$

2. $\overline{GA}+\overline{AH}$ 的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)}$)

(1) $\overline{GA}+\overline{AH}$ 分母數字變化(一般式：$(a+b)(a-b)$)

分母的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1} - (2n-1)\text{ 。}}$

(2) $\overline{GA}+\overline{AH}$ 分子數字變化(一般式：a^2-3b^2)

分子的遞迴式：$\boxed{\text{n}\geq 2\text{ 時，}a_n = a_{n-1} - 3(2n-1)\text{ 。}}$

3. $\overline{HB}$的數值數字變化(一般式：$\dfrac{a-b}{a+b}$)

(1) $\overline{HB}$的分母數字變化(一般式：$a+b$)

分母的遞迴式：$\boxed{n\geq 2\text{ 時，} a_n = a_{n-1}+1\text{。}}$

(2) $\overline{HB}$的分子數字變化(一般式：$a-b$)

分子的遞迴式：$\boxed{n\geq 2\text{ 時，} a_n = a_{n-1}-1\text{。}}$

捌、參考資料及其他

一、Kazuo Haga(2008) ．Origamics：Mathematical Explorations through Paper folding ．

二、洪萬生、黃俊瑋(2012)。摺紙藝道與數學。**飛揚，75**，21-27。

三、洪萬生等(2011)。摺摺稱奇。台北市：三民出版社。

四、國中數學第二冊第三章(2013)。**比與比例式**。康軒出版社。

五、國中數學第三冊第二章(2012)。**平方根與畢氏定理**。康軒出版社。

六、國中數學第三冊第四章(2012)。**一元二次方程式**。康軒出版社。

七、國中數學第四冊第一章(2013)。**等差數列與等差級數**。康軒出版社。

八、國中數學第四冊第二章(2013)。**幾何圖形與尺規作圖**。康軒出版社。

九、國中數學第四冊第三章(2013)。**三角形的基本性質**。康軒出版社。

十、國中數學第四冊第四章(2013)。**平行**。康軒出版社。

十一、國中數學第五冊第一章(2012)。**相似形**。康軒出版社。

【評語】030402

芳賀定理係探討摺紙問題，本定理在中小學科展算是第一次被引用，然摺紙問題在歷屆科展已出現多次，作者似乎未做好充分的文獻探討。另外國外網站已有類似相關說明及圖說，難以突顯研究創新，實為可惜。