中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030401

正s邊形滾動路徑與面積暨階梯問題之通式探究

學校名稱：新北市私立南山高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 何承勳 國二 王梓軒 國二 陳則翰	王志偉

關鍵詞：移動路徑總長、橫掃區域面積、階梯問題

摘　要

從 2002 年 TRML 思考賽試題出發，研究正三角形與正方形繞轉 $m\times n$ 矩形外圍的旋轉弧度、內部任意點 P 的移動路徑總長、橫掃區域面積等問題，再將其延伸成正 s 邊形去繞轉矩形外圍，發現 m,n,s 彼此間都有連帶的關係，成功地寫出一般化通式。之後改成繞轉 $m\times n$ 矩形內圍，只研究正三角形與正方形，觀察其與繞轉矩形外圍的差異性，發現在頂角處需做細部分解，修改通式、歸納分類。最後，設計了創新的**『階梯問題』**，設計攀爬 t 階層樓梯與(x+y)階層樓梯，在其過程中於頂角處需整合外轉與內轉的通式，於直線部分需仔細思索其少轉的數量，才得以寫出完備的通式。

壹、研究動機

在一次的數學增廣課程當中，數學老師給了我們一道題目要我們討論，是 2002 年 TRML 數學競賽的思考賽試題，是有 10 小題的題組【見圖(1)】，主要是研究一個正方形繞轉矩形外圍所產生的一系列問題，包含正方形內部任意點的移動路徑總長、正方形所掃的區域面積⋯等等，因為那時我們已經超前進度上到了國二下的幾何圖形與尺規作圖，正好可將所學派上用場。剛開始幾題看似簡單，卻也花了我們不少時間去思索，所幸都還能解決，直到了後半段開始繞轉 $m\times n$ 的矩形外圍，要我們寫出一般化通式，如何從特例延伸到一般化是我們首次遇到，但卻引發我們強大的興趣，心想：「如果可以將一般化通式寫出來，不就可以一次解決很多問題嗎？」就此我們一頭栽入了數學的世界。之後我們當然不甘於只解決這 10 題，而繼續延伸**將正方形改成正 s 邊形**，**繞轉矩形外圍改成繞轉矩形內圍**，甚至**自己創新了『階梯問題』**，想法愈來愈多，且循序漸進逐一突破，完成了許多一般化通式。

TRML 思考賽-2002

思考賽共 10 題，每題 4 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。

在繳交的答案紙封面，只寫下隊的代號(不是隊名)，不可有任何其他方式表明隊的身份。

設 $B_0B_1B_2B_3$ 為一個固定的矩形，其中 $\overline{B_0B_1}=m$、$\overline{B_1B_2}=n$，(m 和 n 均為正整數)，$A_0A_1A_2A_3$ 是一個邊長為 1 的正方形，其中頂點 A_0 與 B_0 重合(如下圖所示)。將正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 沿著矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的外緣邊界依逆時針方向轉動，首先以 A_0 為旋轉中心，將 $A_0A_1A_2A_3$ 逆時針方向旋轉，直到 A_1 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；再以 A_1 為旋轉中心逆時針方向旋轉，直到 A_2 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；依序再以 A_2 為旋轉中心作同樣的旋轉⋯，直到正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 回到原來的位置(即所有的頂點恰好都回到原出發時的位置)。

圖(1) 2002 年 TRML 數學競賽思考賽試題。

貳、研究目的

本研究要探討的主題如下：

一、正 s 邊形各頂點**外轉**滾動第一次回原定點時，旋轉弧度、內部任一點 P 移動路徑總長、橫掃區域面積﹝重疊覆蓋的區域面積不重覆計算﹞之通式各為何？

二、正三角形與正方形各頂點**外轉**滾動第一次回原定點時，旋轉弧度、內部任一點 P 移動路徑總長、橫掃區域面積之通式各為何？

三、正三角形與正方形各頂點**內轉**滾動第一次回原定點時，旋轉弧度、內部任一點 P 移動路徑總長、橫掃區域面積之通式各為何？

四、正三角形與正方形**攀爬跨越 t 階層樓梯**與**(x+y)階層樓梯**，其旋轉弧度、內部任一點 P 移動路徑總長、橫掃區域面積之通式各為何？

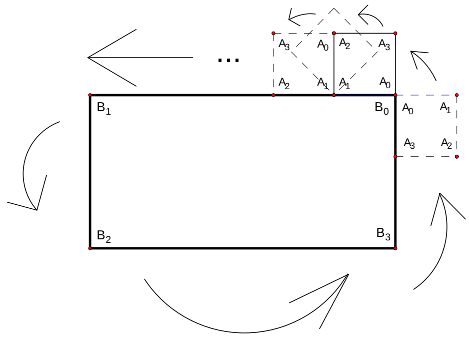
參、研究設備及器材

尺、筆、紙、電腦、幾何繪圖軟體(The Geometer's Sketchpad V4，縮寫 GSP)。

肆、研究過程與結果

一、規則說明與解釋

此次研究我們設定旋轉主體為正 s 邊形，其邊長均為 1，環繞一矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 進行旋轉，其中 $\overline{B_0B_1}=m$ ，$\overline{B_1B_2}=n$ ，且 $m, n \in N$ ，並不失一般性假設 $m \ge n$ 【見圖(2)】。旋轉區分為外轉與內轉兩種情形探討，所謂的**『外轉』**即繞矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 外圍旋轉直到回原定點，**『內轉』**則在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 內部旋轉直到回原定點。而所謂的**『回原定點』**，我們定義是所有點 $A_0A_1A_2\cdots$ 必須回到原出發點 $A_0A_1A_2\cdots$ 所對應的絕對位置，才是回到原定點。

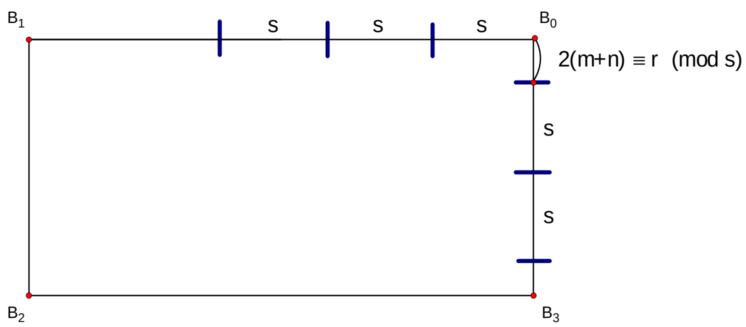


圖(2) 正方形環繞矩形外轉。

二、正 s 邊形之外轉問題

(一) 正 s 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{s-1}$

不論是旋轉弧度、移動路徑總長，我們必須先知道正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 要回到原定點所需繞轉矩形的圈數，在此我們稱之為「繞轉圈數」，以符號 c 表示之。首先，我們先思考正 s 邊形繞轉矩形的第 1 圈，將正 s 邊形每滾動 s 次視為一個週期。若可以剛好第 1 圈就回到原定點，即 $2(m+n)\equiv 0 \pmod{s}$ ，則繞轉圈數 $c=1$ ；若無法剛好第 1 圈就回到原定點，代表在完整週期之外尚會剩餘 $2(m+n)\equiv r \pmod{s}$ 【見圖(3)】，即每繞轉 1 圈矩形所會剩餘的部分，再取 r 與 s 的最小公倍數，則繞轉圈數 $c=\dfrac{[r, s]}{r}=\dfrac{s}{(r, s)}$ 。



圖(3) 正 s 邊形繞轉 1 圈矩形所會剩餘的部分。

1. **旋轉弧度**

【**定理一**】正 s 邊形外轉的旋轉弧度之通式

$$c\times\left[\frac{4(m+n)}{s}+2\right]\pi \quad ，其中\ c=\frac{s}{(r\ ,\ s)}\ \ 且\ 2(m+n)\equiv r\ (\mathrm{mod}\ s)\ 。$$

【**證明**】

正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 單一外角為 $\frac{2\pi}{s}$，所以在直線邊上旋轉一次的弧度為 $\frac{2\pi}{s}$，而轉到頂角時，除了轉 $\frac{2\pi}{s}$ 外，還須多轉 $\frac{\pi}{2}$ 才能緊貼矩形。所以旋轉弧度之通式為：

$$c\times\left[2(m+n)\times\frac{2\pi}{s}+4\times\frac{\pi}{2}\right]=c\times\left[\frac{4(m+n)}{s}+2\right]\pi$$

$$，其中\ c=\frac{s}{(r\ ,\ s)}\ \ 且\ 2(m+n)\equiv r\ (\mathrm{mod}\ s)\ \ \cdots\cdots①$$

2. **移動路徑總長**

【**定理二**】正 s 邊形外轉的內部任意點 P 移動路徑總長之通式

$$L=\left[\frac{4c(m+n)}{s^2}\times\left(\sum_{p=1}^{s}a_{p-1}\right)+\frac{1}{2}\times\sum_{p=1}^{2c}\left(a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\right]\pi$$

【**證明**】

P 為正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 內部任意點，假設 P 與各頂點 A_0、A_1、…、A_{s-1} 的距離分別為 a_0、a_1、…、a_{s-1}，則 P 點每旋轉 s 次(即一個週期)的移動路徑長為

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{s-1})\times\frac{2\pi}{s}=\left(\sum_{p=1}^{s}a_{p-1}\right)\times\frac{2\pi}{s}$$

至於當正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 旋轉到頂角時，以哪一個點為旋轉中心是關鍵，會用不同的旋轉半徑多轉 $\frac{\pi}{2}$，依序為：

第 1 圈：$a_{m\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{m+n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{2m+n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{2(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}$

第 2 圈：$a_{3m+2n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{3(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{4m+3n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{4(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}$

⋮

第 c 圈：$a_{(2c-1)m+(2c-2)n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{(2c-1)(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{2cm+(2c-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}\to a_{2c(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}$

觀察上述式子，我們將每一圈的 B_1 與 B_3 轉角所使用的旋轉半徑整理在一起，亦即每一圈的第 1 項與第 3 項，將其用 Σ 整合表示，而每一圈的第 2 項與第 4 項亦是如此，則正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 旋轉到頂角時的移動路徑長為

$$\sum_{p=1}^{2c}\left(a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$

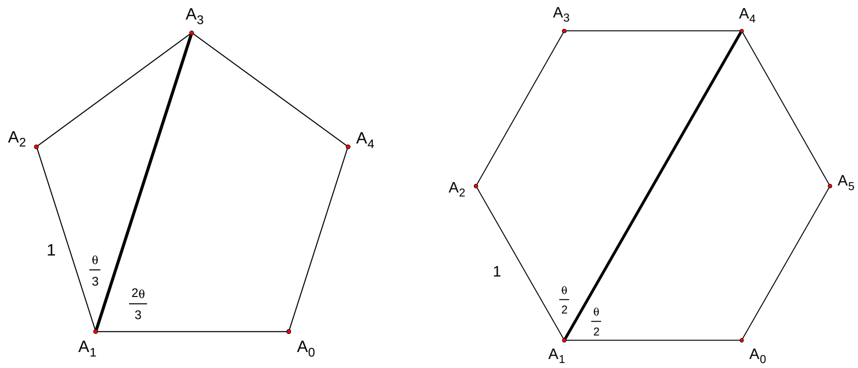
所以，移動路徑總長之通式為：

$$\frac{c\times 2(m+n)}{s}\times\left(\sum_{p=1}^{s}a_{p-1}\right)\times\frac{2\pi}{s}\ +\ \sum_{p=1}^{2c}\left(a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\frac{4c(m+n)}{s^2}\times\left(\sum_{p=1}^{s}a_{p-1}\right)\ +\ \frac{1}{2}\times\sum_{p=1}^{2c}\left(a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\right]\pi\quad\cdots\cdots②$$

3. 橫掃區域面積

首先，正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 所橫掃的區域面積一定是由最長的對角線橫掃出來的，所以首要目標先找出正 s 邊形最長對角線的長度 l 之通式。我們將正 s 邊形分為奇數邊與偶數邊兩種情形探討，若 s 為奇數，則最長對角線連接 $\overline{A_1A_{\frac{s+1}{2}}}$，無法將圖形對稱分割，即圖形左右兩側必為一尖端與一平端，其內角也無法對等平分；而若 s 為偶數，則最長對角線連接 $\overline{A_1A_{\frac{s}{2}+1}}$，可以將圖形對稱分割，即圖形左右兩側均為尖端或平端，其內角也可以對等平分成 $\frac{\theta}{2}$，此處 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$ 為正 s 邊形的一個內角【見圖(4)】。



圖(4) 奇數邊與偶數邊的最長對角線。

(1) s 為奇數

【引理三】正奇數邊形的最長對角線長度 l 之通式 當 $s=4k\pm1$ 時， 則最長對角線長度 $l=2\times\sum_{p=1}^{k}\sin\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right]$，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$。

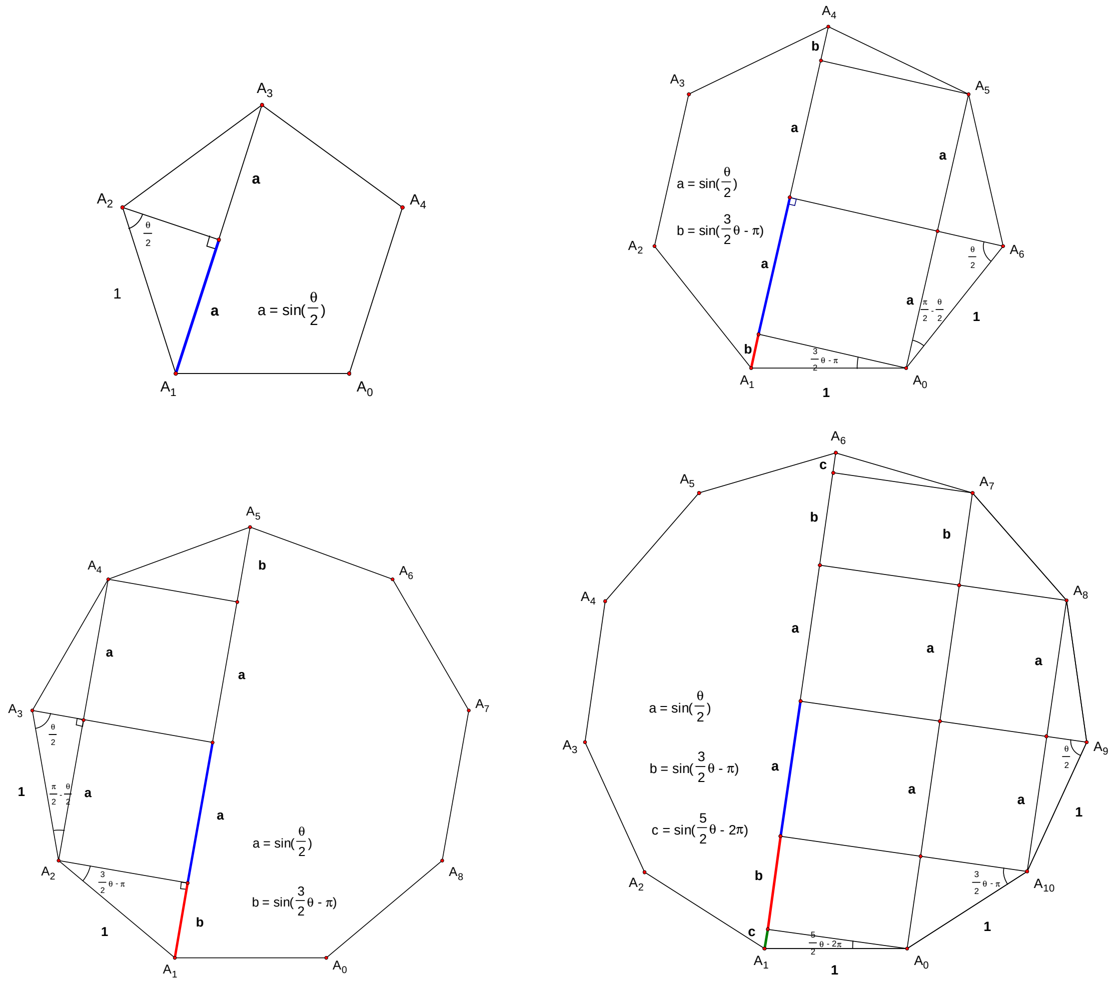
【證明】

最長對角線 $\overline{A_1A_{\frac{s+1}{2}}}$ 將圖形分割成一尖端側與一平端側，尖端側的邊數必為偶數邊，具有對稱性。我們利用尖端側去求出最長對角線的長度 l，因為自尖端處作對角線之垂線，會剛好將內角對等平分成 $\frac{\theta}{2}$，而且最長對角線長 l 亦會被平分。我們發現 $s=4k-1$ 與 $4k+1$ 的圖形，兩者的尖端側的邊數是一樣的，其最長對角線之半都可以切割成 k 段相加，故通式是共用的【見圖(5)】，可寫為

$$a+b+c+\cdots\cdots = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\theta-\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\theta-2\pi\right) + \cdots\cdots$$

所以，邊數 $s=4k\pm1$ 的最長對角線長 l 之通式為：

$$l = 2\times\sum_{p=1}^{k}\sin\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] \text{ ，其中 } \theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s} \quad \cdots\cdots③$$



圖(5) 正 $s=5,7,9,11$ 邊形利用尖端側分段求最長對角線長 l。

(2) s 為偶數

【引理四】 正偶數邊形的最長對角線長度 l 之通式

(i) 當 $s=4k$ 時，

則最長對角線長度 $l=2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right]$ ，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$。

(ii) 當 $s=4k+2$ 時，

則最長對角線長度 $l=1+2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right]$ ，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$。

【證明】

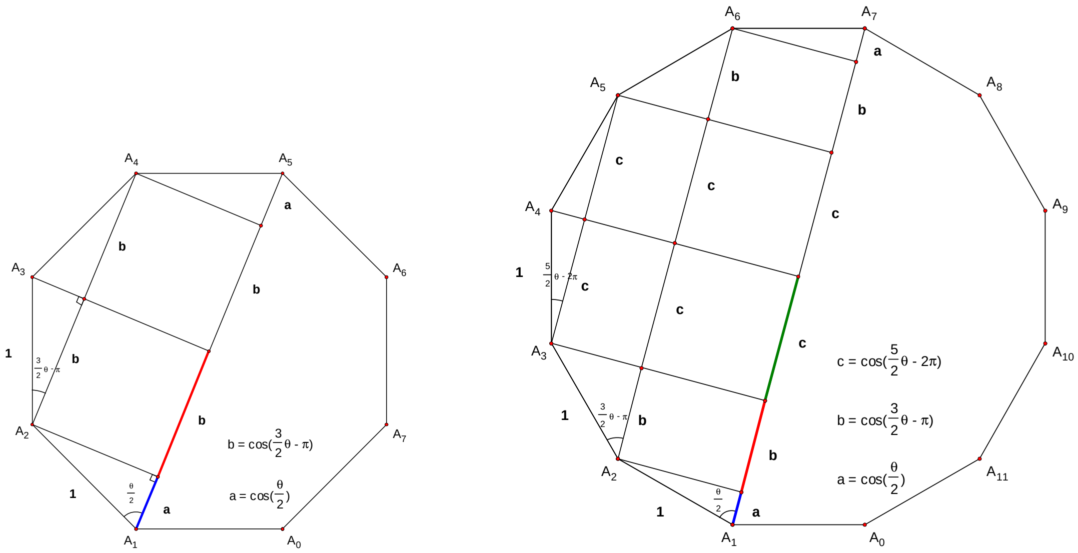
最長對角線 $\overline{A_1A_{\frac{s}{2}+1}}$ 將圖形分割成兩側均為尖端或平端，若 $s=4k$，則兩側均為尖端側；若 $s=4k+2$，則兩側均為平端側。

(i) $s=4k$

兩側均為偶數邊，亦即兩側均為尖端側【見圖(6)】，其最長對角線長 l 之通式為：

$$l = 2\times[a+b+c+\cdots\cdots] = 2\times\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\theta-\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\theta-2\pi\right) + \cdots\cdots\right]$$

$$= 2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] \quad ,\text{其中}\quad \theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s} \quad \cdots\cdots ④$$



圖(6) 正 s = 8 , 12 邊形利用尖端側分段求最長對角線長 l。

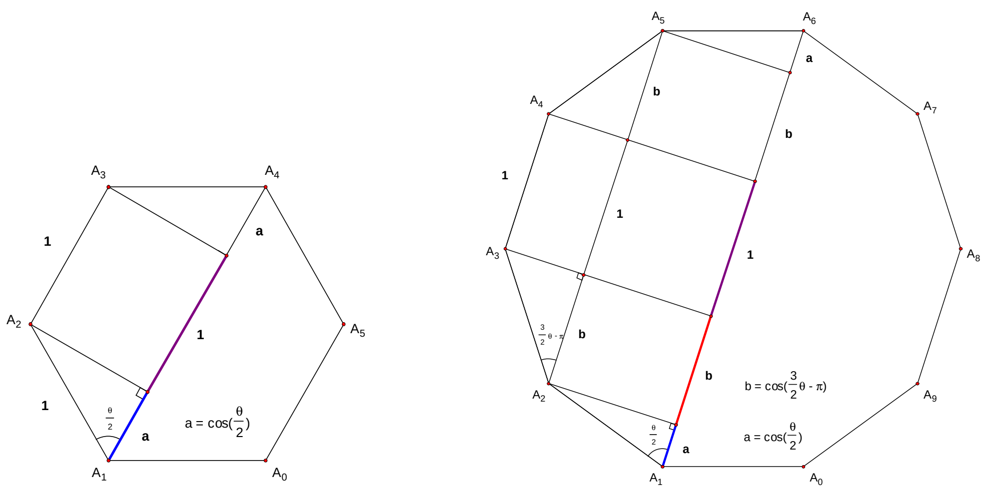
(ii) $s=4k+2$

兩側均為奇數邊，亦即兩側均為平端側，與上述不同處在於平端處會多出一段水平邊長 1【見圖(7)】，其最長對角線長 l 之通式為：

$$l = 1 + 2\times[a+b+c+\cdots\cdots]$$

$$= 1 + 2\times\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\theta-\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\theta-2\pi\right) + \cdots\cdots\right]$$

$$= 1 + 2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] \quad ,\text{其中}\quad \theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s} \quad \cdots\cdots ⑤$$



圖(7) 正 s = 6 , 10 邊形利用平端側分段求最長對角線長 l。

正 s 邊形的最長對角線長 l 之通式已解決，可開始研究橫掃區域面積。

【定理五】正 s 邊形外轉的橫掃區域面積之通式

(1) s 為奇數： $\text{Area} = l^2\pi + (m+n)\times\left[\frac{l^2}{s}\pi + \frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right]$ ，其中 l 見【引理三】。

(2) s 為偶數： $\text{Area} = l^2\pi + (m+n)\times\left[2l^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right) + \frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right]$ ，其中 l 見【引理四】。

【證明】

(1) **s 為奇數**

最長對角線長： $l = 2\times\sum_{p=1}^{k}\sin\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right]$ ，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$

扇形 ABC 的面積： $\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\pi}{2} = \frac{l^2}{4}\pi$

扇形 CBD 的面積： $\angle CBD = \frac{\frac{(s-2)\pi}{s}}{s-2}\times\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2s}$ 為一特殊角，所以面積為

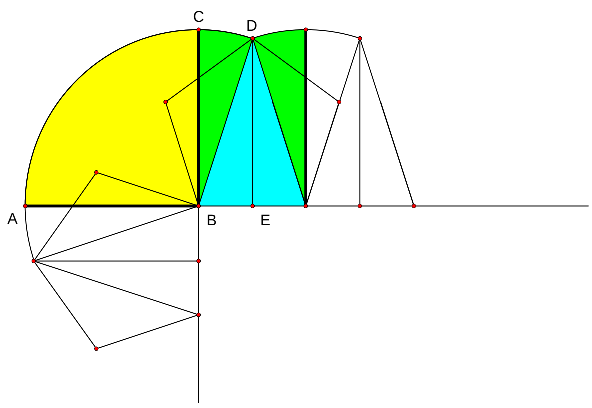
$$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\pi}{2s} = \frac{l^2}{4s}\pi$$

ΔBDE 的面積： $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{l^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{8}\times\sqrt{4l^2-1}$

【見圖(8)】，所以橫掃區域面積的通式為：

$$\text{Area} = 4\times\left(\frac{l^2}{4}\pi\right) + 2(m+n)\times2\times\left[\frac{l^2}{4s}\pi + \frac{1}{8}\times\sqrt{4l^2-1}\right]$$

$$= l^2\pi + (m+n)\times\left[\frac{l^2}{s}\pi + \frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right] \quad \cdots\cdots ⑥$$



圖(8) 奇數邊 s = 5 單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

(2) s 為偶數

$$最長對角線長：l=\begin{cases}2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] & ,\ s=4k\\ 1+2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] & ,\ s=4k+2\end{cases}，其中\ \theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$$

扇形ABC的面積：$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{l^2}{4}\pi$

扇形CBD的面積：$\angle CBD$非一特殊角，只能以反三角函數表示

$$\angle CBD=\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{l}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right)，所以面積為$$

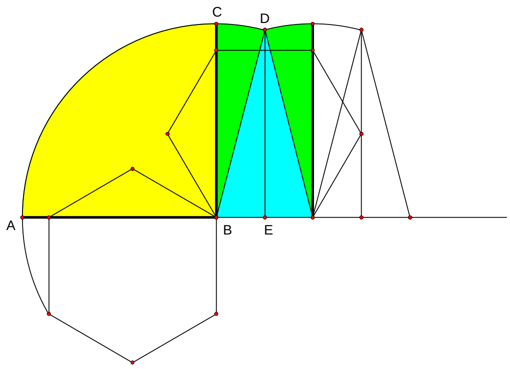
$$\frac{1}{2}\times l^2\times\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right)=\frac{l^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right)$$

ΔBDE的面積：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{l^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{8}\times\sqrt{4l^2-1}$

【見圖(9)】，所以橫掃區域面積的通式為：

$$Area=4\times\left(\frac{l^2}{4}\pi\right)+2(m+n)\times2\times\left[\frac{l^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right)+\frac{1}{8}\times\sqrt{4l^2-1}\right]$$

$$=l^2\pi+(m+n)\times\left[2l^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right)+\frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right]\ \cdots\cdots⑦$$



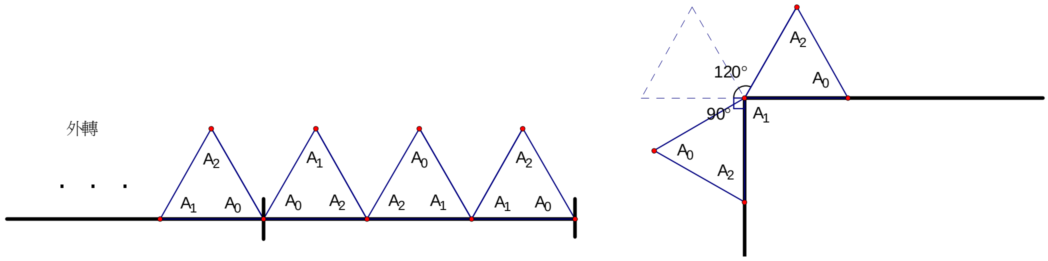
圖(9) 偶數邊s = 6 單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

(二) 正三角形$\Delta A_0A_1A_2$

1. 旋轉弧度

正三角形單一外角為$360°\div3=120°=\frac{2}{3}\pi$(弧度)，所以在直線邊上旋轉一次的弧度為

$\frac{2}{3}\pi$，而$\Delta A_0A_1A_2$轉到頂角時，除了轉$\frac{2}{3}\pi$外，還須多轉$\frac{\pi}{2}$才能緊貼矩形【見圖(10)】。



圖(10) $\Delta A_0A_1A_2$ 外轉在直線與頂角時的旋轉角度。

經研究發現，雖然繞轉一圈後 $\Delta A_0A_1A_2$ 皆會回到原位，但原對應點不同，所以要繼續繞轉直到回原定點。我們針對半周長 $m+n$，分成 $m+n\equiv 0$ or 1 or $2 \pmod{3}$。

(1) $m+n\equiv 0 \pmod{3}$

代表繞轉完第1圈就可以回到原定點。所以，旋轉弧度之通式為：

$$2(m+n)\times\frac{2}{3}\pi + 4\times\frac{\pi}{2} = \left[\frac{4(m+n)}{3}+2\right]\pi \quad \cdots\cdots⑧$$

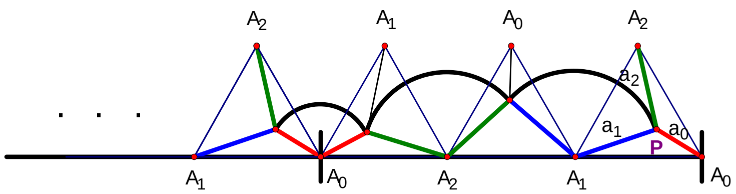
(2) $m+n\equiv 1$ or $2 \pmod{3}$

代表半周長除以 3 的餘數為 1 或 2，但都繞轉完第 3 圈即可回到原定點。所以，旋轉弧度之通式為：

$$3\times\left[\frac{4(m+n)}{3}\pi + 2\pi\right] = \left[4(m+n)+6\right]\pi \quad \cdots\cdots⑨$$

2. **移動路徑總長**

P 為 $\Delta A_0A_1A_2$ 內部的任意點，假設 P 與三頂點 A_0、A_1、A_2 的距離分別為 a_0、a_1、a_2，我們發現以下的半徑規則：第一次以 A_1 為旋轉中心，a_1 為旋轉半徑走了 $a_1\times\frac{2}{3}\pi$；第二次以 A_2 為旋轉中心，a_2 為旋轉半徑走了 $a_2\times\frac{2}{3}\pi\cdots$，依此類推，可知每轉三次就可回到原點 A_0。所以，P 點每旋轉三次的移動路徑長為 $(a_0+a_1+a_2)\times\frac{2}{3}\pi$【見圖(11)】。



圖(11) $\Delta A_0A_1A_2$ 內部任意點 P 在直線上旋轉三次的移動路徑。

若要進一步研究路徑總長，我們發現當 $\Delta A_0A_1A_2$ 旋轉到頂角時，以哪一個點為旋轉中心是關鍵，我們針對半周長 $m+n$，分為 $m+n\equiv 0$ or 1 or $2 \pmod{3}$。

(1) $m+n\equiv 0 \pmod 3$

代表繞轉完第1圈就可以回到原定點，再針對m，n分別除以 3 的餘數細分研究。

(i) $m\equiv 0 \pmod 3$ ， $n\equiv 0 \pmod 3$

$$L=\frac{2(m+n)}{3}\times(a_0+a_1+a_2)\times\frac{2}{3}\pi + 4\times a_0\times\frac{\pi}{2} = \left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}+2a_0\right]\pi \quad \cdots\cdots⑩$$

(ii) $m\equiv 1 \pmod 3$ ， $n\equiv 2 \pmod 3$

$$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}\right]\pi+2\times(a_0+a_1)\times\frac{\pi}{2} = \left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9} + (a_0+a_1)\right]\pi \quad \cdots\cdots⑪$$

(iii) $m\equiv 2 \pmod 3$ ， $n\equiv 1 \pmod 3$

$$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}\right]\pi+2\times(a_0+a_2)\times\frac{\pi}{2} = \left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9} + (a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots⑫$$

(2) $m+n\equiv 1 \text{ or } 2 \pmod 3$

此兩種情形都須繞轉完第 3 圈即可以回到原定點，而此過程中四個頂角 B_1、B_2、B_3、B_0 都會被經過 3 次，總共 12 次會平均分配分別以 a_0、a_1、a_2 為旋轉半徑各 4 次，只是先後順序不同而已，故其移動路徑總長之通式為：

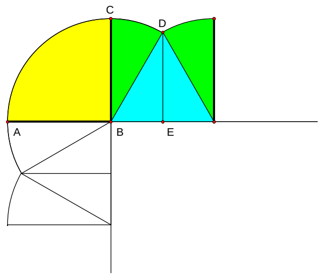
$$L=3\times\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}\right]\pi+4\times(a_0+a_1+a_2)\times\frac{\pi}{2} = \left\{\frac{[4(m+n)+6]\times(a_0+a_1+a_2)}{3}\right\}\pi \quad \cdots\cdots⑬$$

3. 橫掃區域面積

即研究 $\Delta A_0A_1A_2$ 外轉回到原定點所橫掃過的區域面積，但重疊覆蓋的區域不重覆計算，所以都繞轉完第 1 圈即可，其結果不需分類討論。我們針對邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積進行研究，發現其中包含了 2 個扇形BCD與 2 個 ΔBDE ，而頂角則有 1 個扇形ABC【見圖(12)】，所以 $\Delta A_0A_1A_2$ 橫掃的總區域面積有：4 個扇形ABC + 周長×(2 個扇形BCD + 2 個 ΔBDE)，其通式如下：

$$\text{Area} = 4\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right) + 2(m+n)\times2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)$$

$$= \pi + (m+n)\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \cdots\cdots⑭$$

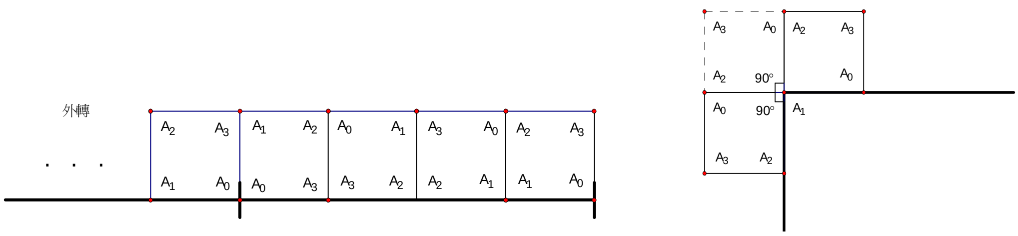


圖(12) $\Delta A_0A_1A_2$ 單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

(三) 正方形□$A_0A_1A_2A_3$

1. 旋轉弧度

正方形單一外角為 $360^\circ \div 4 = 90^\circ = \dfrac{1}{2}\pi$ ，所以在直線邊上旋轉一次的弧度為 $\dfrac{\pi}{2}$ 。而轉到頂角時，除了轉 $\dfrac{\pi}{2}$ 外，還須多轉 $\dfrac{\pi}{2}$ 才能緊貼矩形【見圖(13)】。



圖(13) □$A_0A_1A_2A_3$ 在直線與頂角時的旋轉角度。

相同地我們分成 $m+n\equiv 0$ or 1 or 2 or $3 \pmod 4$ 進行討論。

(1) $m+n\equiv 0$ or $2 \pmod 4$

繞轉完第1圈就可以回到原定點。所以，旋轉弧度之通式為：

$$2(m+n)\times\frac{1}{2}\pi + 4\times\frac{\pi}{2} = (m+n+2)\pi \quad \cdots\cdots ⑮$$

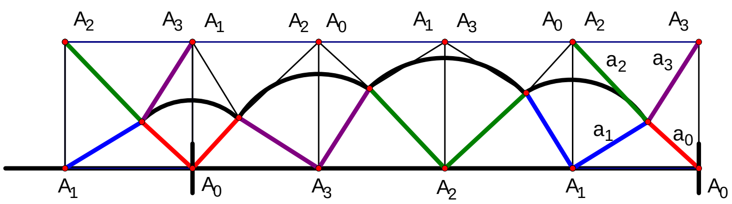
(2) $m+n\equiv 1$ or $3 \pmod 4$

繞轉完第 2 圈即可回到原定點。所以，旋轉弧度之通式為：

$$2\times(m+n+2)\pi \quad \cdots\cdots ⑯$$

2. 移動路徑總長

P 為□$A_0A_1A_2A_3$ 內部任意點，假設 P 與四頂點 A_0、A_1、A_2、A_3 的距離分別為 a_0、a_1、a_2、a_3，則 P 點在直線上每旋轉四次的移動路徑長為 $(a_0+a_1+a_2+a_3)\times\dfrac{\pi}{2}$ 【見圖(14)】。



圖(14) □$A_0A_1A_2A_3$ 內部任意點 P 在直線上旋轉四次的移動路徑。

當▫$A_0A_1A_2A_3$旋轉到頂角時，以哪一個點為旋轉中心是關鍵，我們針對半周長$m+n$，分為 $m+n\equiv 0$ or 1 or 2 or 3 $(\text{mod } 4)$進行討論。

(1) $m+n\equiv 0\ (\text{mod } 4)$

繞轉完第1圈就可以回到原定點，再針對m，n分別除以4的餘數細分通式。

(i) $m\equiv 0\ (\text{mod } 4)$ ， $n\equiv 0\ (\text{mod } 4)$

$$L=\frac{2(m+n)}{4}\times(a_0+a_1+a_2+a_3)\times\frac{\pi}{2}+4\times a_0\times\frac{\pi}{2}=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}+2a_0\right]\pi \quad \cdots\cdots ⑰$$

(ii) $m\equiv 1\ (\text{mod } 4)$ ， $n\equiv 3\ (\text{mod } 4)$

$$L=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}\right]\pi+2\times(a_0+a_1)\times\frac{\pi}{2}=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}+(a_0+a_1)\right]\pi \quad \cdots\cdots ⑱$$

(iii) $m\equiv 2\ (\text{mod } 4)$ ， $n\equiv 2\ (\text{mod } 4)$

$$L=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}+(a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots ⑲$$

(iv) $m\equiv 3\ (\text{mod } 4)$ ， $n\equiv 1\ (\text{mod } 4)$

$$L=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}+(a_0+a_3)\right]\pi \quad \cdots\cdots ⑳$$

(2) $m+n\equiv 1$ or 3 $(\text{mod } 4)$

此兩種情形都須繞轉完第2圈即可回到原定點，而此過程中四個頂角B_1、B_2、B_3、B_0都會被經過2次，總共8次會平均分配分別以a_0、a_1、a_2、a_3為旋轉半徑各2次，只是先後順序不同而已，故其移動路徑總長之通式為：

$$L=2\times\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}\right]\pi+2\times(a_0+a_1+a_2+a_3)\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\frac{(m+n+2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{2}\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉑$$

(3) $m+n\equiv 2\ (\text{mod } 4)$

繞轉完第1圈就可以回到原定點，再針對m，n分別除以4的餘數細分通式。

(i) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$ or $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$

此兩種分類的通式會一樣，都以a_0、a_2為旋轉半徑各 2 次，前者旋轉半徑的次序為$a_0 \to a_2 \to a_2 \to a_0$，，後者為$a_2 \to a_2 \to a_0 \to a_0$，故移動路徑總長之通式為：

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} + (a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉒$$

(ii) $m \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$ or $m \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$

此兩種分類的通式會一樣，都以a_0、a_1、a_2、a_3為旋轉半徑各 1 次，前者旋轉半徑的次序為$a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_0$，後者為$a_3 \to a_2 \to a_1 \to a_0$，故移動路徑總長之通式均為：

$$L = \left[\frac{(m+n+2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉓$$

3. 橫掃區域面積

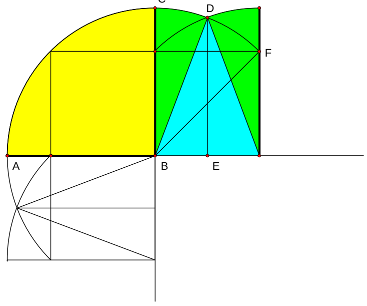
我們針對邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積進行研究，發現其中包含了 2 個扇形BCD與 2 個ΔBDE ，而頂角則有 1 個扇形ABC【見圖(15)】，所以$\square A_0A_1A_2A_3$橫掃的總區域面積有：4 個扇形ABC + 周長×(2 個扇形BCD + 2 個ΔBDE)。但與正三角形不同的是扇形BCD的角度$\angle$CBD並非特殊角，經由老師的建議與指導，我們引進**反三角函數**來表示，首先要找一個直角三角形，我們知道$\angle CBD = \angle BDE$ ，所以採用ΔBDE最恰當不過了，而$\overline{BD} = \overline{BF} = \sqrt{2}$ ，$\overline{BE} = \frac{1}{2}$ ，所以用sin的反三角函數較為方便【見圖(15)】，即

$$\angle CBD = \angle BDE = \sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

而橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 4\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{2}\right) + 2(m+n)\times2\times\left[\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$$

$$= 2\pi + (m+n)\times\left[4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}\right] \quad \cdots\cdots ㉔$$



圖(15) $\square A_0A_1A_2A_3$單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

三、正三角形與正方形之內轉問題

內轉問題我們只研究正三角形與正方形，其原因是若$s\geq 5$，則當此正 s 邊形內轉到頂角時，會卡住產生縫隙而無法緊貼矩形，而有可能導致最後根本無法回到原定點，所以我們設定正三角形與正方形便可繼續研究。

(一) 正三角形$\Delta A_0A_1A_2$

1. 旋轉弧度

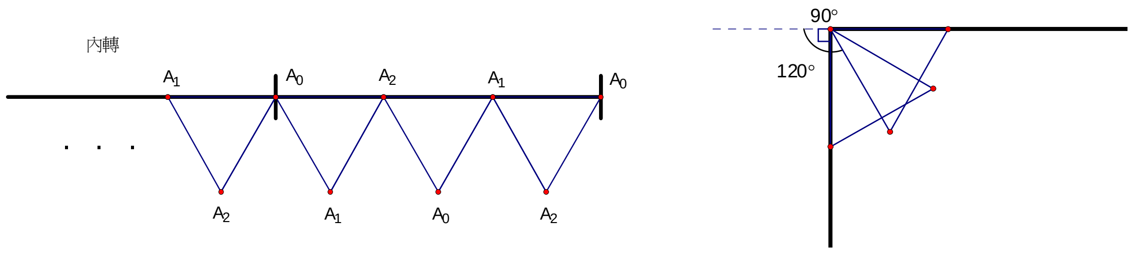
在正$\Delta A_0A_1A_2$的外轉情形之下，轉到四頂角B_1、B_2、B_3、B_0時，必須各多轉$\frac{\pi}{2}$才能緊貼矩形，但在內轉的情形正好相反，要緊貼矩形可少轉$\frac{\pi}{2}$【見圖(16)】，而其餘直線部分均相同，故將通式⑧與⑨中在四頂角所共多轉的$+2\pi$改成共少轉的-2π，即可得到旋轉弧度的通式為：

(1) $m+n\equiv 0\pmod 3$

$$2(m+n)\times\frac{2}{3}\pi-4\times\frac{\pi}{2}=\left[\frac{4(m+n)}{3}-2\right]\pi\quad\cdots\cdots ㉕$$

(2) $m+n\equiv 1 \text{ or } 2\pmod 3$

$$3\times\left[\frac{4(m+n)}{3}\pi-2\pi\right]=\left[4(m+n)-6\right]\pi\quad\cdots\cdots ㉖$$



圖(16) $\Delta A_0A_1A_2$內轉在直線與頂角時的旋轉角度。

2. 移動路徑總長

與上述雷同，只須將通式⑩~⑬中在四頂角所共多移動的$+2\pi$路徑長改成共少移動的-2π路徑長即可，所以移動路徑總長之通式如下：

(1) $m+n\equiv 0\pmod 3$

(i) $m\equiv 0\pmod 3$, $n\equiv 0\pmod 3$

$$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-2a_0\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉗$$

(ii) $m\equiv 1 \pmod 3$, $n\equiv 2 \pmod 3$

$$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-(a_0+a_1)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉘$$

(iii) $m\equiv 2 \pmod 3$, $n\equiv 1 \pmod 3$

$$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-(a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉙$$

(2) $m+n\equiv 1 \text{ or } 2 \pmod 3$

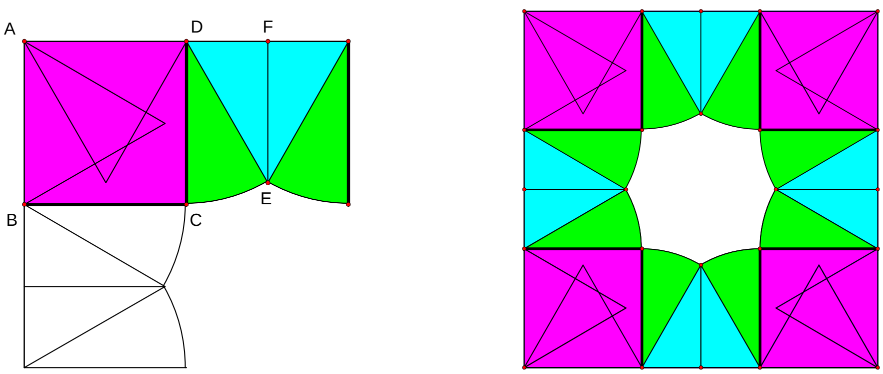
$$L=\left\{\frac{[4(m+n)-6]\times(a_0+a_1+a_2)}{3}\right\}\pi \quad \cdots\cdots ㉚$$

3. **橫掃區域面積**

內轉的正$\Delta A_0A_1A_2$在直線部分所掃的區域面積與外轉的雷同，差異在頂角處。內轉的正$\Delta A_0A_1A_2$在頂角處會重疊覆蓋形成一個正方形，而使得直線部分在一個頂角處會少掉$1+1=2$單位，總共少掉 8 單位【見圖(17)】，所以內轉的正$\Delta A_0A_1A_2$橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 4\times(1^2) + [2(m+n)-8]\times 2\times\left(\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\right)$$

$$= 4 + (m+n-4)\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{，其中 } m\ge n>1 \quad \cdots\cdots ㉛$$



圖(17) 內轉$\Delta A_0A_1A_2$單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

但若$m\ge n=1$，則其橫掃區域面積之通式為$\text{Area}=m\times 1=m$ 。

(二) 正方形$\square A_0A_1A_2A_3$

因為正方形$\square A_0A_1A_2A_3$在矩形$B_0B_1B_2B_3$內旋轉需要較大的空間，若$m \ge n = 1$會導致無法旋轉，所以先設定$m \ge n > 1$。

1. 旋轉弧度

將通式⑮與⑯中在四頂角所共多轉的$+2\pi$改成共少轉的-2π，即可得到旋轉弧度的通式為：

(1) $m+n \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod 4$

$$2(m+n)\times\frac{1}{2}\pi - 4\times\frac{\pi}{2} = (m+n-2)\pi \quad \cdots\cdots ㉜$$

(2) $m+n \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod 4$

$$2\times(m+n-2)\pi \quad \cdots\cdots ㉝$$

2. 移動路徑總長

將通式⑰~㉓中在四頂角所共多移動的$+2\pi$路徑長改成共少移動的-2π路徑長即可，所以移動路徑總長之通式如下：

(1) $m+n \equiv 0 \pmod 4$

(i) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - 2a_0\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉞$$

(ii) $m \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_1)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㉟$$

(iii) $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㊱$$

(iv) $m \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_3)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㊲$$

(2) $m+n \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod 4$

$$L = \left[\frac{(m+n-2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{2}\right]\pi \quad \cdots\cdots ㊳$$

(3) $m+n \equiv 2 \pmod 4$

(i) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$ or $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$

$$L=\left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}-(a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots (39)$$

(ii) $m \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$ or $m \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$

$$L=\left[\frac{(m+n-2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}\right]\pi \quad \cdots\cdots (40)$$

3. 橫掃區域面積

正方形$\square A_0A_1A_2A_3$在內轉時較為複雜，我們發現直線部分所掃的區域面積與外轉的雷同，但在頂角處會多塊重疊，使得直線部分在一個頂角處會少掉$1.5+1.5=3$單位，總共少掉 12 單位，之後我們再針對頂角處的面積進行切割計算【見圖(18)】。

ΔABD的面積：$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

ΔBDI的面積：$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{2}^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΔDEF的面積：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

扇形 IDE 的面積：$\angle IDE = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}$ ，所以面積為

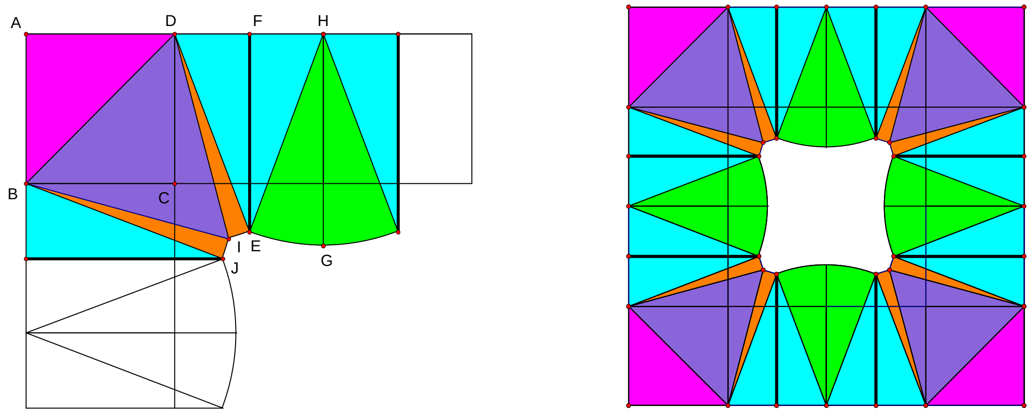
$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}\right] = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}$$

扇形 EHG 的面積：$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

所以內轉的正方形$\square A_0A_1A_2A_3$橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 4\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right\}+\left[2(m+n)-12\right]\times2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + (m+n-4)\times\left[\frac{\sqrt{7}}{2}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] \quad \text{，其中 } m \geq n > 2 \quad \cdots\cdots (41)$$

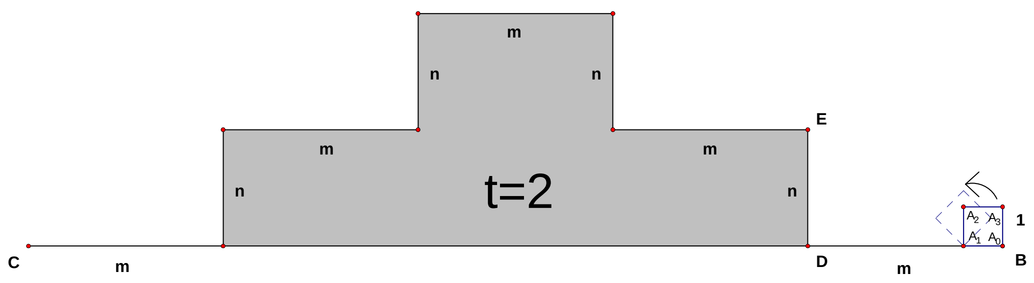


圖(18) 內轉$\square A_0A_1A_2A_3$單一邊長 1 的範圍所涵蓋的區域面積。

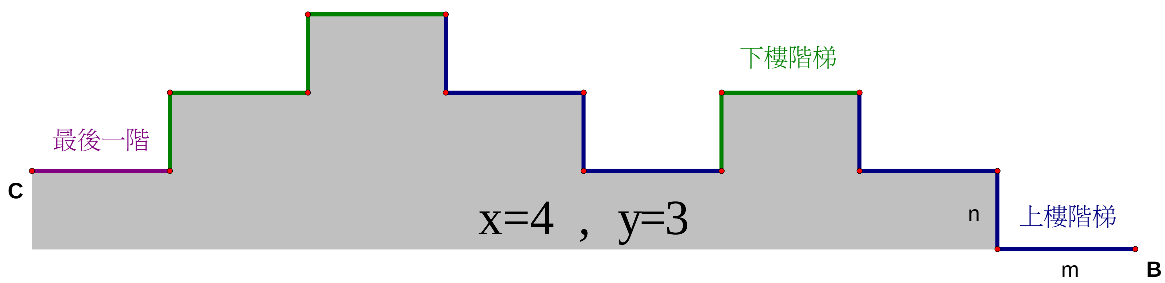
但若$m \geq n = 2$，則其橫掃區域面積之通式為$\text{Area} = m \times 2 = 2m$。

四、正三角形與正方形之階梯問題

研究完正三角形與正方形的內轉與外轉問題後，我們想把這兩者之間做連結，繼而延伸出了『階梯問題』。我們假設**『有一組 t 階層的對稱樓梯，先上樓再下樓，每一階層的水平寬度為 m，鉛直高度為 n，今有一正三角形或正方形，從最右邊 B 處出發，攀爬跨越 t 階層的樓梯，直到最左邊的 C 處停止，其旋轉弧度、內部任一點 P 移動路徑總長、橫掃區域面積之通式各為何？』**【見圖(19)】，此問題須結合外轉與內轉的通式整合討論。之後更一般化再延伸成**『有一組(x+y)階層的樓梯，包含了 x 階上樓與 y 階下樓，且上樓階梯與下樓階梯的排列順序不定，以及最後一階為平台』**【見圖(20)】，討論相同的議題。



圖(19) $\square A_0A_1A_2A_3$攀爬跨越$t = 2$階層的樓梯。



圖(20) $\square A_0A_1A_2A_3$攀爬跨越$(x + y)$階層的樓梯。

(一) t 階層樓梯

觀察此階梯，不同於繞轉矩形須回到原出發定點，這裡只需攀爬跨越，沒有繞轉圈數的問題。又因為此階梯具對稱性，所以水平寬度 m 必有奇數段，鉛直高度 n 必有偶數段，且 $m=n+1$。另外每一階梯均包含一內轉頂角 D 與一外轉頂角 E【見圖(19)】。

1. 旋轉弧度

> **【定理六】** 正 s 邊形攀爬跨越 t 階層樓梯的旋轉弧度之通式
>
> $$\left[2t(m+n)+m-1\right]\times\frac{2\pi}{s}\quad \text{，其中} s=3\text{, }4\text{。}$$

【證明】

不論是正 $\Delta A_0A_1A_2$ 或正 $\square A_0A_1A_2A_3$，當轉到內轉頂角 D 時會少轉 $\frac{\pi}{2}$，而轉到外轉頂角 E 時會多轉 $\frac{\pi}{2}$，剛好相互抵消，亦即等同於只走直線部分。唯一要注意的是最後一段水平寬度停止的位置，因沒有轉出去階梯外，所以最後一段會少轉 1 次。所以，攀爬跨越 t 階層樓梯的旋轉弧度之通式為：

$$2\times t\times(m+n)\times\frac{2\pi}{s}+(m-1)\times\frac{2\pi}{s}=\left[2t(m+n)+m-1\right]\times\frac{2\pi}{s}\quad \text{，其中} s=3\text{, }4 \quad \cdots\cdots (42)$$

2. 移動路徑總長

> **【定理七】** 正 s 邊形攀爬跨越 t 階層樓梯的移動路徑總長之通式
>
> $$L=\left(\sum_{p=1}^{2t(m+n)+m-1}a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}+\sum_{p=1}^{t}\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$
> $$+\sum_{p=t+1}^{2t}\left(+a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}-a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}\quad \text{，其中 } s=3\text{，}4$$

【證明】

不論是正 $\Delta A_0A_1A_2$ 或正 $\square A_0A_1A_2A_3$，直線部分就是各個旋轉半徑 a_0、a_1、a_2、a_3 輪流使用，關鍵在於『當轉到內轉頂角 D 時是以何者為旋轉半徑，因會少轉 $\frac{\pi}{2}$ 要扣除少轉的路徑長；當轉到外轉頂角 E 時是以何者為旋轉半徑，因會多轉 $\frac{\pi}{2}$ 要加上多轉的路徑長；又兩者使用的旋轉半徑不同，所以是無法抵消的。』

直線部分移動路徑長：$\left(\sum_{p=1}^{2t(m+n)+(m-1)}a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}$

頂角部分移動路徑長：上樓梯為 $\sum_{p=1}^{t}\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$ ，其中 $s=3$, 4

下樓梯為 $\sum_{p=t+1}^{2t}\left(+a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}-a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$ ，其中 $s=3$, 4

所以，攀爬跨越 t 階層樓梯的移動路徑總長之通式為：

$$\left(\sum_{p=1}^{2t(m+n)+m-1} a_{p \pmod s}\right)\times\frac{2\pi}{s}+\left[\sum_{p=1}^{t}\left(-a_{pm+(p-1)n \pmod s}+a_{p(m+n) \pmod s}\right)+\sum_{p=t+1}^{2t}\left(+a_{pm+(p-1)n \pmod s}-a_{p(m+n) \pmod s}\right)\right]\times\frac{\pi}{2}$$

，其中 $s=3,4$ ……㊸

3. 橫掃區域面積

(1) 正三角形 $\Delta A_0A_1A_2$

【定理八】 正三角形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式

(i) 當 $m\geq n>1$ 時，則 $\text{Area} = 2t + \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi + \left[2t(m+n-2)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(ii) 當 $m=n=1$ 時，則 $\text{Area} = 2(t-1) + \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

【證明】

(i) 當 $m\geq n>1$ 時，

起始點與終點面積：$2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

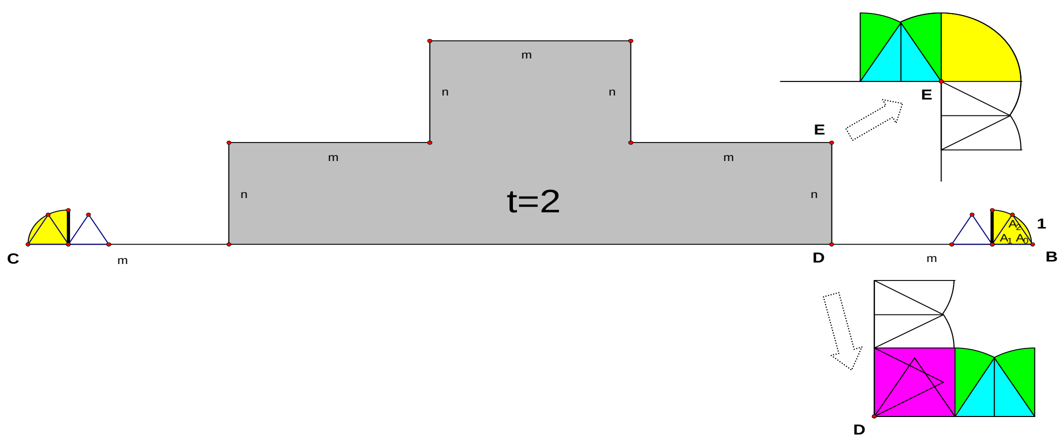
內轉頂角：$2t\times\left(1^2\right)$　　外轉頂角：$2t\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{t}{2}\pi$

直線部分：$\left[2t\times(m+n)+(m-2)-2\times2t\right]\times2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

【見圖(21)】所以，正三角形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 2t + \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi + \left[2t(m+n-2)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

，其中 $m\geq n>1$ ……㊹



圖(21) $\Delta A_0A_1A_2$ 攀爬跨越 t=2 階層的樓梯($m\geq n>1$)所橫掃區域面積。

(ii) 當 $m=n=1$ 時，

起始點與終點面積：$2\times2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$　　內轉頂角：$(2t-2)\times\left(1^2\right)=2t-2$

外轉頂角：$2t\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{t}{2}\pi$　　最高水平階梯面積：$2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

所以，正三角形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 2(t-1) + \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \cdots\cdots ㊺$$

(2) 正方形$\square A_0A_1A_2A_3$

> **【定理九】**正方形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式
>
> **(i)** 當 $m \geq n > 1$時，
>
> 則 $$\text{Area} = 1+\left(1+\sqrt{3}\right)t+\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3}\right)\pi+\left[2t(m+n-2)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$
>
> **(ii)** 當 $m = n = 1$時，
>
> 則 $$\text{Area} = -\sqrt{3} + \left(1+\sqrt{3}\right)t + \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}t\right)\pi + \frac{\sqrt{7}}{4} + 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

【證明】

(i) 當 $m \geq n > 1$時，

起始點與終點面積：$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$

內轉頂角：$2t\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right\}$

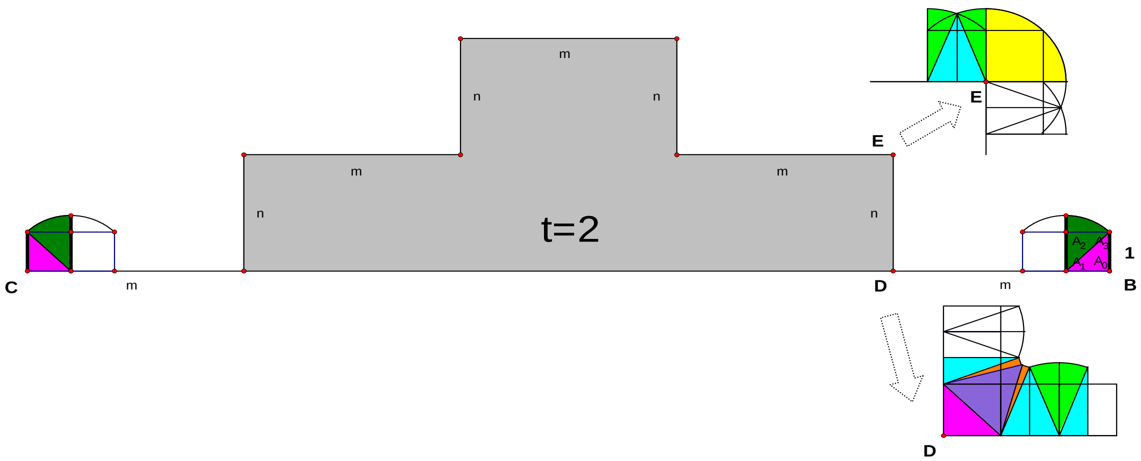
外轉頂角：$2t\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{2}\right)=t\pi$

直線部分：$\left[2t\times(m+n)+(m-2)-3\times2t\right]\times2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

【見圖(22)】，所以，正方形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 1+\left(1+\sqrt{3}\right)t+\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3}\right)\pi+\left[2t(m+n-2)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

，其中 $m \geq n > 1$ ……㊻



圖(22) $\square A_0A_1A_2A_3$攀爬跨越 t=2 階層的樓梯($m \geq n > 1$)所橫掃區域面積。

(ii) 當 $m=n=1$ 時，

起始點與終點面積：$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$

內轉頂角：$(2t-2)\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2\right\}=(t-1)\times\left(1+\sqrt{3}\right)$

外轉頂角：$2t\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{5}{6}t\pi$

最高水平階梯面積：$2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

所以，正方形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = -\sqrt{3} + \left(1+\sqrt{3}\right)t + \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}t\right)\pi + \frac{\sqrt{7}}{4} + 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \cdots\cdots ㊼$$

(二) (x+y)階層樓梯

將原先左右對稱的 t 階層樓梯更加一般化，改成**『此樓梯共包含了 x 階上樓與 y 階下樓，以及最後一階為平台』**，我們的上樓台階與下樓台階定義如圖(20)。

1. **旋轉弧度**

【定理十】正 s 邊形攀爬跨越 $(x+y)$ 階層樓梯的旋轉弧度之通式

$$\left[(x+y)(m+n)+(m-1)\right]\times\frac{2\pi}{s} \quad \text{，其中} s=3,4 \text{。}$$

2. **移動路徑總長**

【定理十一】正 s 邊形攀爬跨越 $(x+y)$ 階層樓梯的移動路徑總長之通式

$$L=\left(\sum_{p=1}^{(x+y)(m+n)+m-1} a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}+\sum_{p=1}^{x+y} f(p)\times\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$

$$\text{，其中 } f(p)=\begin{cases}1 & \text{，第p組為上樓階梯組}\\ -1 & \text{，第p組為下樓階梯組}\end{cases} \quad \text{且} \quad s=3,4 \text{。}$$

【證明】

直線部分移動路徑長：$\left(\sum_{p=1}^{(x+y)(m+n)+(m-1)} a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}$

頂角部分移動路徑長：上樓梯為 $\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$ ，其中 $s=3,4$

下樓梯為 $\left(+a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}-a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$ ，其中 $s=3,4$

不論是正 $\Delta A_0A_1A_2$ 或正 $\square A_0A_1A_2A_3$，攀爬跨越 $(x+y)$ 階層樓梯的移動路徑總長之通式為：

$$L=\left(\sum_{p=1}^{(x+y)(m+n)+m-1} a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}+\sum_{p=1}^{x+y} f(p)\times\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$

，其中 $f(p)=\begin{cases}1 &，第p組為上樓階梯組\\ -1 &，第p組為下樓階梯組\end{cases}$ 且 $s=3,4$ ……㊽

3. 橫掃區域面積

(1) 正三角形 $\Delta A_0A_1A_2$

【定理十二】正三角形攀爬跨越 $(x+y)$ 階層樓梯的橫掃區域面積之通式

(i) 當 $m\ge n>1$ 時，

則 $\text{Area}=\frac{\pi}{2}+(x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+\left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(ii) 當 $m=n=1$ 時，

則 $\text{Area}=-2-b\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+(x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+(a+b+2)\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

，其中『a 為上樓接下樓的階梯組數』且『b 為下樓接上樓的階梯組數』。

【證明】

(i) 當 $m\ge n>1$ 時，

起始點與終點面積：$2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

內轉頂角：$(x+y)\times(1^2)$　　外轉頂角：$(x+y)\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{x+y}{4}\pi$

直線部分：$\left[(x+y)\times(m+n)+(m-2)-2(x+y)\right]\times2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

正三角形攀爬跨越 $(x+y)$ 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area}=\frac{\pi}{2}+(x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+\left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad，其中\ m\ge n>1$$

(ii) 當 $m=n=1$ 時， ……㊾

假設在全部的 $(x+y)$ 階層樓梯中，其排列方式包含了**『a 組上樓接下樓的階梯組』**與**『b 組下樓接上樓的階梯組』**。

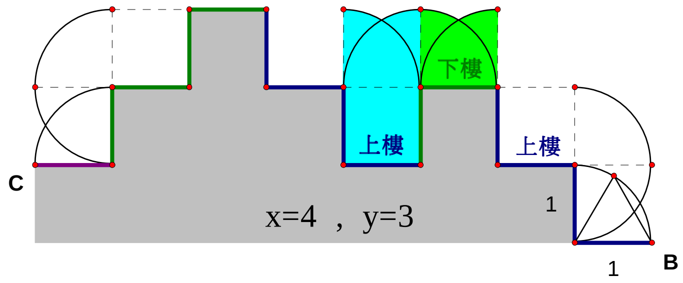
起始點與終點面積：$2\times2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$　　內轉頂角：$(x+y-2-2b)\times(1^2)$

外轉頂角：$(x+y-2b)\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\right)$　　上樓接下樓的階梯組：$a\times2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

下樓接上樓的階梯組：$b\times\left[1^2+2\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right]$

【見圖(23)】，所以正三角形攀爬跨越$(x+y)$階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = -2 - b\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + (x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + (a+b+2)\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \cdots\cdots ⑤⓪$$



圖(23) $\Delta A_0A_1A_2$攀爬跨越$(x+y)$階層的樓梯($m=n=1$)所橫掃區域面積。

(2) **正方形$\square A_0A_1A_2A_3$**

【定理十三】正方形攀爬跨越$(x+y)$階層樓梯的橫掃區域面積之通式

當$m \ge n > 1$時，則

$$\text{Area} = 1 + \frac{\pi}{2} + (x+y)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + \left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

【證明】

(i) 當$m \ge n > 1$時，

起始點與終點面積：$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$

內轉頂角：$(x+y)\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right\}$

外轉頂角：$(x+y)\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{x+y}{2}\pi$

直線部分：$\left[(x+y)\times(m+n)+(m-2)-3(x+y)\right]\times2\times\left[\frac{\sqrt{7}}{8}+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

正方形攀爬跨越$(x+y)$階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 1 + \frac{\pi}{2} + (x+y)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + \left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

，其中 $m \ge n > 1$ ⋯⋯⑤①

(ii) 當$m=n=1$時，

在全部的$(x+y)$階層樓梯中，其排列方式若出現下樓接上樓的階梯組，因旋轉半徑為正方形的對角線長$\sqrt{2}$，而會導致卡住的狀態，故在此暫不研究此特例。

伍、討論

本次科展我們以2002年的TRML思考賽試題出發，進行一連串的延伸討論，我們固定繞轉主體為一個 $m\times n$ 的矩形，先用簡單的正三角形、正方形去繞轉矩形外部，研究旋轉弧度、內部任意點P的移動路徑總長、橫掃區域面積等課題，並且設定要回到原出發定點才算完成，過程中我們發現在算面積時需要用到某些角度但卻無法表達，因而引進了反三角函數。之後我們再延伸到用任意正s邊形去繞轉矩形外圍，發現了一系列的通式與規則性，解決了大量的問題。<u>而任意正s邊形又引發出我們的另一個想法，就是『**當s→∞時，其實就近似一個圓**』，所以我們還想『**用圓去繞轉矩形外圍與內圍**』，但這個部分的推論尚未周全，在截稿前此份作品說明書內暫時還沒有放進去，應該在複審時會以補充資料的型態呈現給教授們參閱。</u>我們再繼續延伸把正s邊形放到矩形內部去做繞轉，我們只做了正三角形與正方形，因為當 $s\geq 5$ 時，在繞轉矩形內部時會卡住產生縫隙而無法貼合矩形，著落點的位置使矩形邊上產生無理數，致使最後根本無法回到原出發定點，這問題我們尚在努力思考要如何解決。雖然我們只做了正三角形與正方形去繞轉矩形內部，但也得到了不錯的通式與規則，正因如此，才有後續**『階梯問題』**的創新發明。我們想要結合矩形的內轉與外轉問題，在一次的偶然發現了『爬樓梯』具備了這兩種特質，所以設定了一個 t **階層的對稱樓梯**，用正三角形與正方形去攀爬，先上樓再下樓，每一階層的水平寬度為 m，鉛直高度為 n，甚至再延伸到更一般化的**(x+y)階層樓梯**，都很辛苦也很順利地整合了內轉與外轉的通式，做了一個創新的研究。

陸、結論

一、正 s 邊形 $A_0A_1\cdots A_{s-1}$ 之外轉問題

(一) 旋轉弧度

正 s 邊形在直線邊上旋轉一次的弧度為 $\frac{2\pi}{s}$，而轉到頂角時，除了轉 $\frac{2\pi}{s}$ 外，還須多轉 $\frac{\pi}{2}$ 才能貼合矩形，最後還須繞轉 c 圈才能回原出發定點。所以，旋轉弧度之通式為：

$$c\times\left[\frac{4(m+n)}{s}+2\right]\pi \quad ，其中\ c=\frac{s}{(r\ ,\ s)}\ \ 且\ 2(m+n)\equiv r\ (\text{mod}\ s)\ \ \cdots\cdots ①$$

(二) 移動路徑總長

P 為正 s 邊形內部任意點，假設 P 與各頂點 A_0、A_1、…、A_{s-1} 的距離分別為 a_0、a_1、…、a_{s-1}，所以，移動路徑總長之通式為：

$$L=\left[\frac{4c(m+n)}{s^2}\times\left(\sum_{p=1}^{s}a_{p-1}\right)+\frac{1}{2}\times\sum_{p=1}^{2c}\left(a_{pm+(p-1)n\ (\text{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\text{mod}\ s)}\right)\right]\pi\ \ \cdots\cdots ②$$

(三) 橫掃區域面積

1. s 為奇數

最長對角線長：$l = 2\times\sum_{p=1}^{k}\sin\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right]$，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$

$$\therefore\ \text{Area} = l^2\pi + (m+n)\times\left[\frac{l^2}{s}\pi + \frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right] \cdots\cdots ⑥$$

2. s 為偶數

最長對角線長：$l = \begin{cases} 2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right] & ,\ s=4k \\ 1 + 2\times\sum_{p=1}^{k}\cos\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)\theta-(p-1)\pi\right], & s=4k+2 \end{cases}$，其中 $\theta=\frac{(s-2)\times\pi}{s}$，

$$\therefore\ \text{Area} = l^2\pi + (m+n)\times\left[2l^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2l}\right) + \frac{1}{2}\times\sqrt{4l^2-1}\right] \cdots\cdots ⑦$$

二、正三角形與正方形之內轉問題

(一) 正三角形 $\Delta A_0A_1A_2$

1. 旋轉弧度

(1) $m+n\equiv 0\ (\text{mod}\ 3)$：$\left[\frac{4(m+n)}{3}-2\right]\pi \cdots\cdots ㉕$

(2) $m+n\equiv 1$ or $2\ (\text{mod}\ 3)$：$\left[4(m+n)-6\right]\pi \cdots\cdots ㉖$

2. 移動路徑總長

(1) $m+n\equiv 0\ (\text{mod}\ 3)$：

(i) $m\equiv 0\ (\text{mod}\ 3)$，$n\equiv 0\ (\text{mod}\ 3)$：$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-2a_0\right]\pi \cdots\cdots ㉗$

(ii) $m\equiv 1\ (\text{mod}\ 3)$，$n\equiv 2\ (\text{mod}\ 3)$：$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-(a_0+a_1)\right]\pi \cdots\cdots ㉘$

(iii) $m\equiv 2\ (\text{mod}\ 3)$，$n\equiv 1\ (\text{mod}\ 3)$：$L=\left[\frac{4(m+n)(a_0+a_1+a_2)}{9}-(a_0+a_2)\right]\pi \cdots\cdots ㉙$

(2) $m+n\equiv 1$ or $2\ (\text{mod}\ 3)$：$L=\left\{\frac{\left[4(m+n)-6\right]\times(a_0+a_1+a_2)}{3}\right\}\pi \cdots\cdots ㉚$

3. 橫掃區域面積

$$\text{Area} = 4 + (m+n-4)\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{，其中 } m \ge n > 1 \quad \cdots\cdots ㉛$$

但若 $m \ge n = 1$，則其橫掃區域面積為 $\text{Area} = m\times 1 = m$ 。

(二) 正方形 $\square A_0A_1A_2A_3$

1. 旋轉弧度

(1) $m+n \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod 4$ ：$(m+n-2)\pi$ ⋯⋯㉜

(2) $m+n \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod 4$ ：$2\times(m+n-2)\pi$ ⋯⋯㉝

2. 移動路徑總長

(1) $m+n \equiv 0 \pmod 4$ ：

(i) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$ ：$L = \left[\dfrac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - 2a_0\right]\pi$ ⋯⋯㉞

(ii) $m \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$ ：$L = \left[\dfrac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_1)\right]\pi$ ⋯⋯㉟

(iii) $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$ ：$L = \left[\dfrac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_2)\right]\pi$ ⋯⋯㊱

(iv) $m \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$ ：$L = \left[\dfrac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_3)\right]\pi$ ⋯⋯㊲

(2) $m+n \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod 4$ ：$L = \left[\dfrac{(m+n-2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{2}\right]\pi$ ⋯⋯㊳

(3) $m+n \equiv 2 \pmod 4$ ：

(i) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$ or $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$ ：

$$L = \left[\frac{(m+n)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4} - (a_0+a_2)\right]\pi \quad \cdots\cdots ㊴$$

(ii) $m \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$ or $m \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 4$ ：

$$L = \left[\frac{(m+n-2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}{4}\right]\pi \quad \cdots\cdots ㊵$$

3. 橫掃區域面積

$$\text{Area} = 2 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + (m+n-4)\times\left[\frac{\sqrt{7}}{2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] \quad \text{，其中 } m \ge n > 2 \quad \cdots\cdots ㊶$$

但若 $m \ge n = 2$ ，則其橫掃區域面積為 $\text{Area} = m\times 2 = 2m$ 。

三、正三角形與正方形之階梯問題

(一) t 階層樓梯

1. 旋轉弧度

不論是正$\Delta A_0A_1A_2$或正$\square A_0A_1A_2A_3$，攀爬跨越 t 階層樓梯的旋轉弧度之通式為：

$$\left[2t\left(m+n\right)+m-1\right]\times\frac{2\pi}{s}\quad，其中\ \ s=3,4\ \ \cdots\cdots ㊷$$

2. 移動路徑總長

不論是正$\Delta A_0A_1A_2$或正$\square A_0A_1A_2A_3$，攀爬跨越 t 階層樓梯的移動路徑總長之通式為：

$$L=\left(\sum_{p=1}^{2t(m+n)+m-1} a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}+\left[\sum_{p=1}^{t}\left(-a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)+\sum_{p=t+1}^{2t}\left(+a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}-a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\right]\times\frac{\pi}{2}$$

$$，其中\ \ s=3,4\ \ \cdots\cdots ㊸$$

3. 橫掃區域面積

(1) 正三角形$\Delta A_0A_1A_2$

正三角形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

(i) 當$m\geq n>1$時，則

$$\text{Area}\ =\ 2t\ +\ \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi\ +\ \left[2t\left(m+n-2\right)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ \ \cdots\cdots ㊹$$

(ii) 當$m=n=1$時，則 $\text{Area}\ =\ 2\left(t-1\right)\ +\ \left(\frac{t+1}{2}\right)\pi\ +\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \ \cdots\cdots ㊺$

(2) 正方形$\square A_0A_1A_2A_3$

正方形攀爬跨越 t 階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

(i) 當$m\geq n>1$時，則

$$\text{Area}\ =\ 1+\left(1+\sqrt{3}\right)t+\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3}\right)\pi+\left[2t\left(m+n-2\right)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]\ \ \cdots\cdots ㊻$$

(ii) 當$m=n=1$時，則

$$\text{Area}\ =\ -\sqrt{3}\ +\ \left(1+\sqrt{3}\right)t\ +\ \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}t\right)\pi\ +\ \frac{\sqrt{7}}{4}\ +\ 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\ \ \cdots\cdots ㊼$$

(二) (x+y)階層樓梯

1. 旋轉弧度

不論是正$\Delta A_0A_1A_2$或正$\square A_0A_1A_2A_3$，攀爬跨越(x+y)階層樓梯的旋轉弧度之通式為：

$$\left[\left(x+y\right)\left(m+n\right)+\left(m-1\right)\right]\times\frac{2\pi}{s}\quad，其中 s=3,4。$$

2. 移動路徑總長

不論是正$\Delta A_0A_1A_2$或正$\square A_0A_1A_2A_3$，攀爬跨越(x+y)階層樓梯的移動路徑總長之通式為：

$$L=\left(\sum_{p=1}^{(x+y)(m+n)+m-1} a_{p\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{2\pi}{s}\ +\sum_{p=1}^{x+y} f(p)\times\left(-\,a_{pm+(p-1)n\ (\mathrm{mod}\ s)}+\,a_{p(m+n)\ (\mathrm{mod}\ s)}\right)\times\frac{\pi}{2}$$

$$，其中\ \ f(p)=\begin{cases}1\ ，第p組為上樓階梯組\\-1\ ，第p組為下樓階梯組\end{cases}\ \ 且\ \ s=3,4\ \ \cdots\cdots ㊽$$

3. **橫掃區域面積**

(1) **正三角形**$\Delta A_0A_1A_2$

正三角形攀爬跨越(x+y)階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

(i) 當$m \geq n > 1$時，則

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} + (x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + \left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \cdots\cdots ㊾$$

(ii) 當$m = n = 1$時，則

$$\text{Area} = -2 - b\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + (x+y)\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + (a+b+2)\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

，其中『a 為上樓接下樓的階梯組數』且『b 為下樓接上樓的階梯組數』。 ……㊿

(2) **正方形**$\square A_0A_1A_2A_3$

正方形攀爬跨越(x+y)階層樓梯的橫掃區域面積之通式為：

$$\text{Area} = 1 + \frac{\pi}{2} + (x+y)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + \left[(x+y)(m+n-2)+m-2\right]\times\left[\frac{\sqrt{7}}{4}+2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

，其中 $m \geq n > 1$ ……51

柒、參考資料及其他

1. 許志農 (民 99)。 第一章：數列與級數。 **高中數學第二冊。** 台北縣：龍騰文化。

2. 許志農 (民 100)。 第一章：三角。 **高中數學第三冊。** 新北市：龍騰文化。

3. 九九文教基金會試題委員會 (民 98)。 TRML2002 年思考賽試題。 **TRML 台灣區高中數學競賽歷屆試題暨詳解。** 台北縣：建興文化。

4. 艾利克斯・貝洛斯(著)、胡守仁(譯) (民101)。 第四章：π的故事。 **數字奇航。** 台北市：時報文化。

5. 毛爾(著)、胡守仁(譯) (民 89)。 第一章：角、第二章：弦、第三章：六個函數粉墨登場。**毛起來說三角。** 台北市：天下遠見。

6. 斯坦(著)、葉偉文(譯) (民 94)。 第 10 章：同餘式。 **數學是啥玩意？II。** 台北市：天下遠見。

7. 斯坦(著)、葉偉文(譯) (民 98)。 第 17 章：尺規作圖。 **數學是啥玩意？III。** 台北市：天下遠見。

【評語】030401

正ｎ邊形滾動路徑與面積問題歷年已有一些相關研究。本文最具創意之處是將他們對正三角形與正方形的內、外轉研究結果應用到對「階梯」的相關研究，進而獲得許多漂亮的定理，全文流暢，證明簡潔值得肯定，作者除表達能力佳外，對研究的態度亦很積極值得讚賞。