中華民國第53屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　物理科

第二名

030114

我抓得住它——虛像

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國三 陳雨鴻	陳忠城 邱莉華

關鍵詞：虛像、視角、相似三角形

摘要

利用『視高-三角形法』推導平面鏡、凸透鏡和凹透鏡的虛像位置，所得到的式子完全相同，並確實驗證課本中有關平面鏡後的虛像，準確度極高。再進一步測量凸透鏡虛像，用相機拍攝凸透鏡面上像的視高度，推算出虛像的位置及大小，再求出焦距，以上兩點支持本實驗方法的可信度。在國中無法測出凹透鏡虛像位置，而高中以視差法及視線插針法測量凹透鏡虛像的誤差極大，本實驗『視高-三角形法』，不論在實驗數據的取得或是焦距的一致性均優於高中課程。

另外當物體在凸透鏡的焦點外，雖在另一側成倒立的像，但因觀測者(眼睛或相機)位置不同會有不同的結果，若實像的位置落在觀測者的後方，將觀測到正立的像，如果落在觀測者的前方，將觀測到倒立的像。

壹、研究動機

從國小至國中課本，甚至上課時老師總是告訴我們，平面鏡中的像雖然看起來比物體小，但平面鏡中的像其實與物體大小相同，雖然國中課本另外透過作圖法讓我們了解，卻從來沒有實際測量過此虛像的大小。另外學校在九年級上學期理化課本安排的實驗中，透過光屏法觀察物體在凸透鏡後的所成的實像，同學都能利用光屏判斷實像所在位置與大小，的確可以得到像在不同情況下的變化，可是在凹透鏡實驗卻無法找到虛像的位置，利用凹透鏡觀察物體，當凹透鏡貼在物體上時，可以看到凹透鏡中的像與物體大小接近，而拿起凹透鏡時，鏡中的像隨即縮小，距離愈遠時，像也愈小，因此認為這就是作圖法中的正立縮小虛像。

但我卻感到疑惑？虛像到底在哪裡？當物體遠離凹透鏡時，鏡中的像看起來愈來愈小，這樣就可以判斷出凹透鏡中的像是縮小的嗎？平面鏡中的像對觀察者而言，當物體遠離平面鏡時，物體在鏡中的像看起來也愈來愈小，卻可說成是正立相等的像？因此我想要釐清這些關係，透過眼睛所觀察到的虛像和物體所成的虛像兩者之間的關係是什麼？

詢問老師後，老師告訴我高中物理實驗是以視差法或視線插針法來測量凹透鏡虛像的位置，但是測量的誤差很大，而且並未測量虛像的大小，我想利用其他的方法，能有效的測量虛像的大小與位置，如果可以應用在國、高中的實驗中，將對虛像的觀察及測量更具有說服力。

鳥笛在平面鏡中的虛像，
如何量出其高度？位置？

鳥笛在凸透鏡中的虛像，
如何量出其高度？位置？

鳥笛在凹透鏡中的虛像，
如何量出其高度？位置？

貳、研究目的

一、了解視角對觀測虛像的影響，並利用『視高-三角形法』推導虛像的位置及大小。
二、以『視高-三角形法』測量平面鏡的虛像大小及成像位置，並討論視角的影響。
三、測量凸透鏡實像的位置並求出焦距，再以『視高-三角形法』測量凸透鏡虛像的位置、大小及求出焦距，並討論視角的影響。
四、以『視高-三角形法』測量凹透鏡的虛像的位置、大小及求出焦距，並討論視角的影響。

參、研究設備及器材

一、實驗研究器材如下

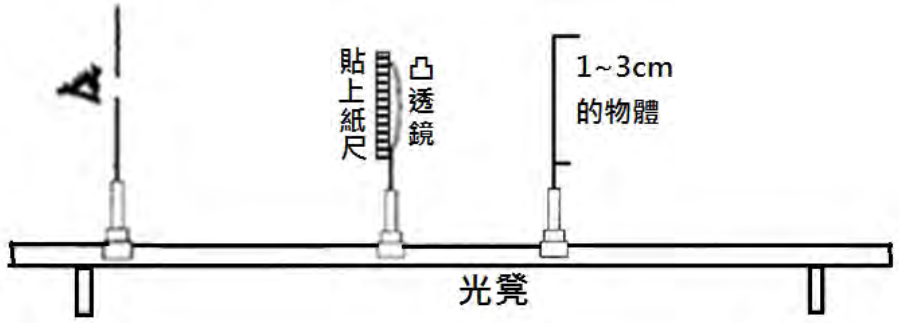
（一）平面鏡、Fresnel 透鏡、凹透鏡。

（二）數位相機、光凳(附臺座三個)、屏幕、有交叉箭頭的屏幕、輔助光源、刻度平台。

（三）方格紙、直尺、膠帶、剪刀、游標尺、長尾夾若干、有孔遮屏。

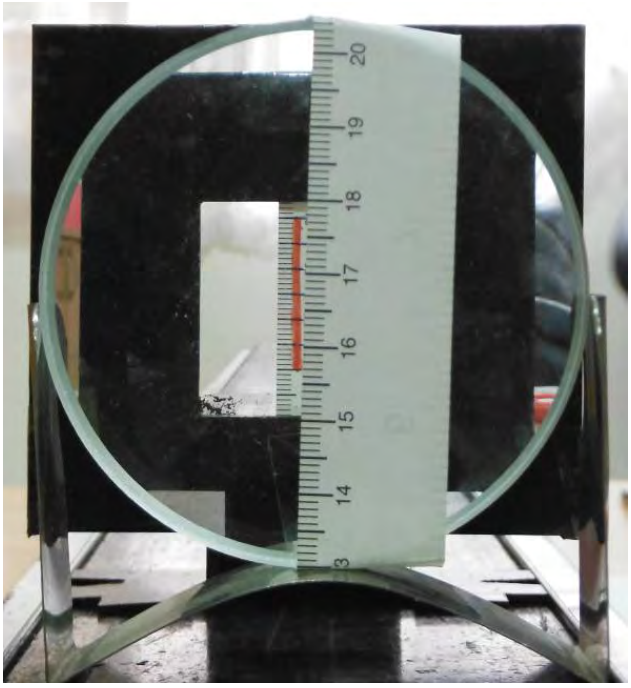
二、實驗測量方法

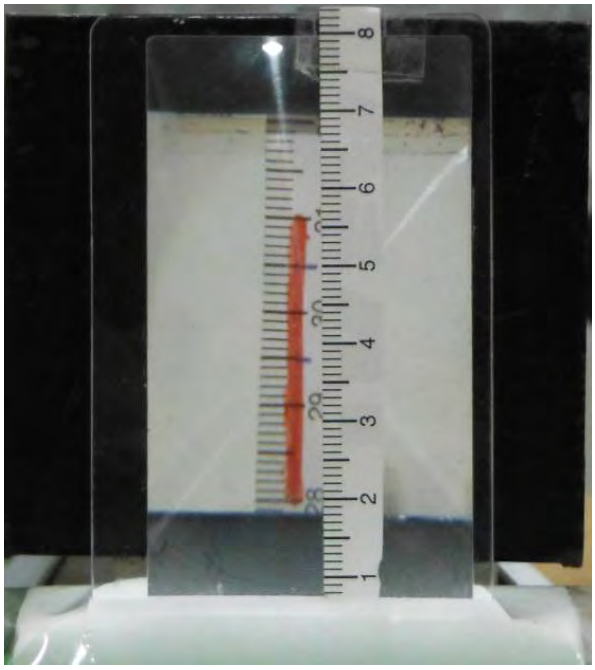
以 1~3cm 長的方格紙為物體置於光凳上，則物體發出的光線會經過透鏡的折射，利用數位相機拍攝(圖中眼睛所在觀察位置即為相機位置)物體經過透鏡後所產生的虛像，並且在透鏡上貼上刻度紙，讀取在透鏡處物體的視高度。如果是測量面鏡所產生的虛像時，則物體應放在面鏡與相機間的位置，將此方法稱為『視高-三角形法』。



三、紀錄實驗數據方法

國中課本是直接用眼睛觀察凹透鏡中的虛像，而高三實驗課本中測量虛像所在位置是利用視差法或視線插針法作判斷，本實驗過程是用數位相機拍攝，因觀測視線的直線性質，可利用相似三角形計算，並可避免不同觀察者的人為影響。另外如下圖中，可以在電腦螢幕上，利用鏡面上的刻度測量鏡中虛像的視高度，直接讀取其對應的刻度，將畫面中的數據詳實登錄在表格中，透過放大畫面以降低誤差，此方法具有可重複觀察實驗數據，提高精確度。

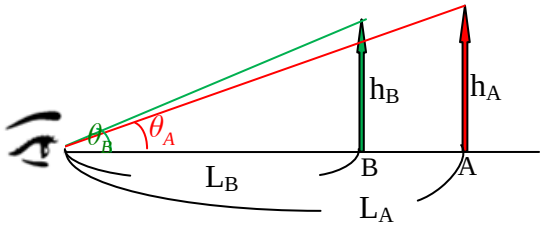




肆、研究過程及方法

一、了解視角對觀測虛像的影響，並利用『視高-三角形法』推導虛像的位置及大小。

(一) 虛像的視角是指虛像高度兩端與眼睛所夾的角度，不僅與虛像的高度有關，也與虛像到觀測者的距離有關，當眼睛無法明確分辨虛像的位置時，視角將影響人眼對虛像大小的判定，如下右圖可知，雖然視角 $\theta_B > \theta_A$，當兩者很接近時，有時無法正確判斷出兩者的相對大小(事實上 $h_A > h_B$)，在國中課本中直接觀察凹透鏡中的虛像時，並不知道虛像確實的位置，就判定鏡中的像為縮小虛像並不恰當，因為平面鏡中的虛像透過眼睛觀察也是縮小的，所以眼睛或相機無法直接用來判斷像與物之間的大小，此時所看到像的高度是在觀測虛像的視角下落在鏡面上的視高，並非虛像本身的大小。



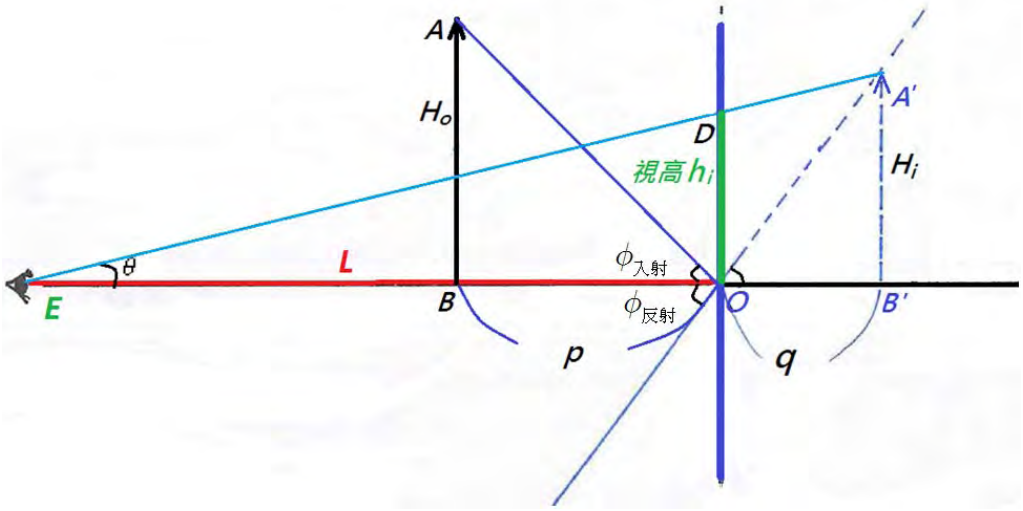
視角定為 $\tan\theta_A = \frac{h_A}{L_A}$ ，$\tan\theta_B = \frac{h_B}{L_B}$

(二) 以『視高-三角形法』推導平面鏡中虛像的位置及高度

(1) H_o：物體高度　　L：相機(觀察者)與平面鏡的距離

H_i：像的高度　　p：物與平面鏡的距離

h_i：像的視高度　　q：像與平面鏡的距離



物 A 發出的光在鏡面上 O 點反射，$\phi_{入射} = \phi_{反射}$，且反射光的延長線必通過像 A'

，故相似三角形△OAB~△O A' B'，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q}{p}$ …… ①

人眼觀測(相機拍攝)時，在相同的視角下，像 A'、鏡面上 D 點及觀測者 E 在同一視線上，利用相似三角形△EDO~△E A'B'，得 $\frac{H_i}{h_i} = \frac{q+L}{L}$ …… ②

將 ① 中 $H_i = \frac{q}{p} H_o$ 代入② ，可以得到像距 $q = \frac{p h_i L}{H_o L - p h_i}$ ……③

(2).拍攝的虛像視角定為 $\tan\theta = \frac{H_i}{L+q} = \frac{h_i}{L}$……④

(3).若平面鏡放大率 m 定義為像高 H_i 除以物高 H_o 的絕對值，

放大率 $m = \left|\frac{H_i}{H_o}\right| = \left|\frac{q}{p}\right|$ ……⑤

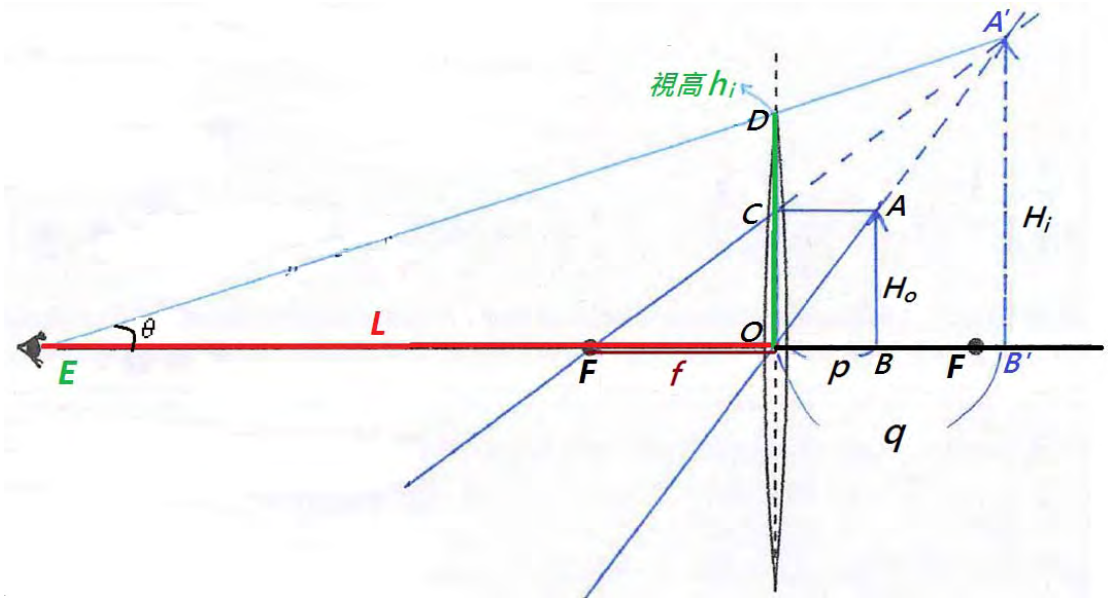
則像的高度為 $H_i = mH_o = (\frac{q}{p})H_o$……⑥

(三) 以『視高-三角形法』推導凸透鏡中虛像的位置及高度

(1).H_o：物體高度　　L：相機(觀察者)與平面鏡的距離

H_i：像的高度　　p：物與平面鏡的距離

h_i：像的視高度　　q：像與平面鏡的距離



由物 A 發出的光線 $\overline{AC}$，平行主軸經透鏡折射後通過焦點 F，又光線 $\overline{AO}$ 通過鏡心不偏折，兩光線的延長線交於像 A'， 利用相似三角形，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q}{p}$ ……①'

人眼觀測(相機拍攝)時，在相同的視角下，像 A'、鏡面上 D 點及觀測者 E 在同一視線上，利用相似三角形△EDO~△E A'B'，得 $\frac{H_i}{h_i} = \frac{q+L}{L}$ ……②'

將 ①' 中 $H_i = \frac{q}{p} H_o$ 代入②' ，可以得到像距 $q = \frac{ph_iL}{H_oL - ph_i}$ ……③'

竟然和平面鏡推導的式子一樣

(2).拍攝視角定為 $\tan\theta = \frac{h_i}{L}$ ……④'

(3).若凸透鏡放大率 m 定義為像高 H_i 除以物高 H_o 的絕對值，

放大率 $m = \left|\frac{H_i}{H_o}\right| = \left|\frac{q}{p}\right|$ ……⑤'

則像的高度為 $H_i = mH_o = (\frac{q}{p})H_o$……⑥'

(4).凸透鏡的焦距 f

利用相似三角形△FCO~△FA'B'，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q+f}{f}$ ……⑦'

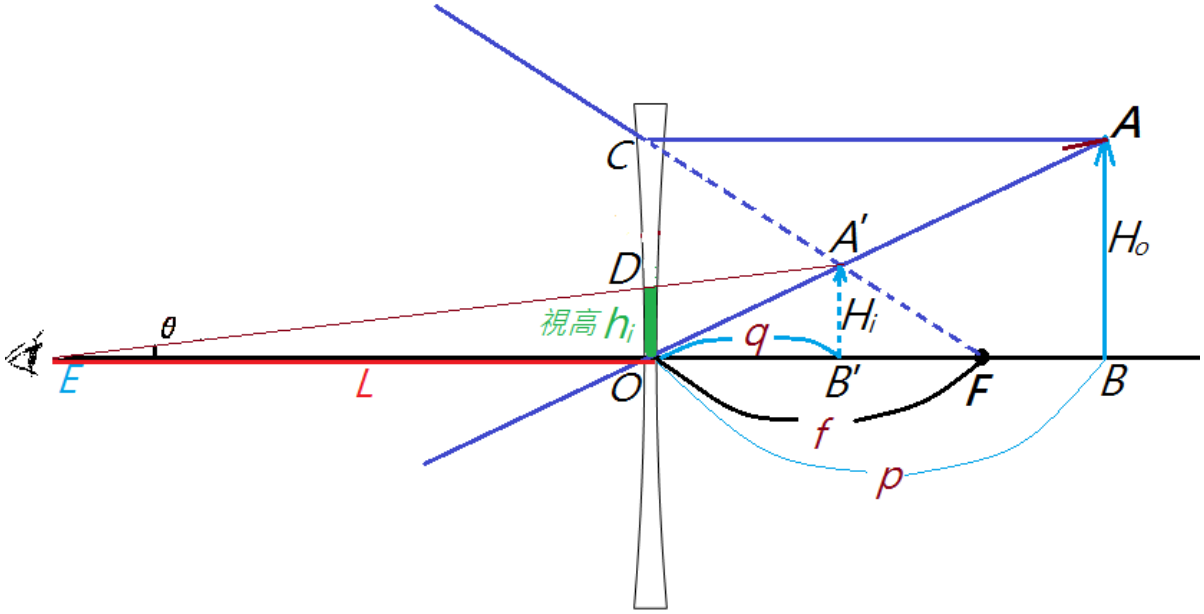
將①'= ⑦'，可得焦距 $f = \frac{pq}{q-p}$ 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{f}$ ……⑧'

(四) 以『視高-三角形法』推導凹透鏡中虛像的位置及高度

(1). H_o：物體高度　　L：相機(觀察者)與平面鏡的距離

H_i：像的高度　　p：物與平面鏡的距離

h_i：像的視高度　　q：像與平面鏡的距離



由物 A 發出的光線 $\overline{AC}$，平行主軸經透鏡折射後，其延長線通過鏡前焦點 F，又光線 $\overline{AO}$ 通過鏡心不偏折，兩光線交於像 A'， 利用相似三角形，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q}{p}$ ……①"

人眼觀測(相機拍攝)時，在相同的視角下，像 A'、鏡面上 D 點及觀測者 E 在同一視線上，利用相似三角形△EDO~△E A'B'，得 $\frac{H_i}{h_i} = \frac{q+L}{L}$ ……②"

將 ①" 中 $H_i = \frac{q}{p} H_o$ 代入②" ，可以得到像距 $q = \frac{ph_iL}{H_oL - ph_i}$ ……③"

竟然和平面鏡、凸透鏡推導的式子一樣

(2).拍攝視角定為 $\tan\theta = \frac{h_i}{L}$ …….…… ④"

(3).若凹透鏡放大率 m 定義為像高 H_i 除以物高 H_o 的絕對值，

放大率 $m = |\frac{H_i}{H_o}| = |\frac{q}{p}|$ …….…… ⑤"

則像的高度為 $H_i = mH_o = (\frac{q}{p})H_o$…… ⑥"

(4).凹透鏡的焦距 f

利用相似三角形△FCO~△FA'B'， 得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{f-q}{f}$…… ⑦"

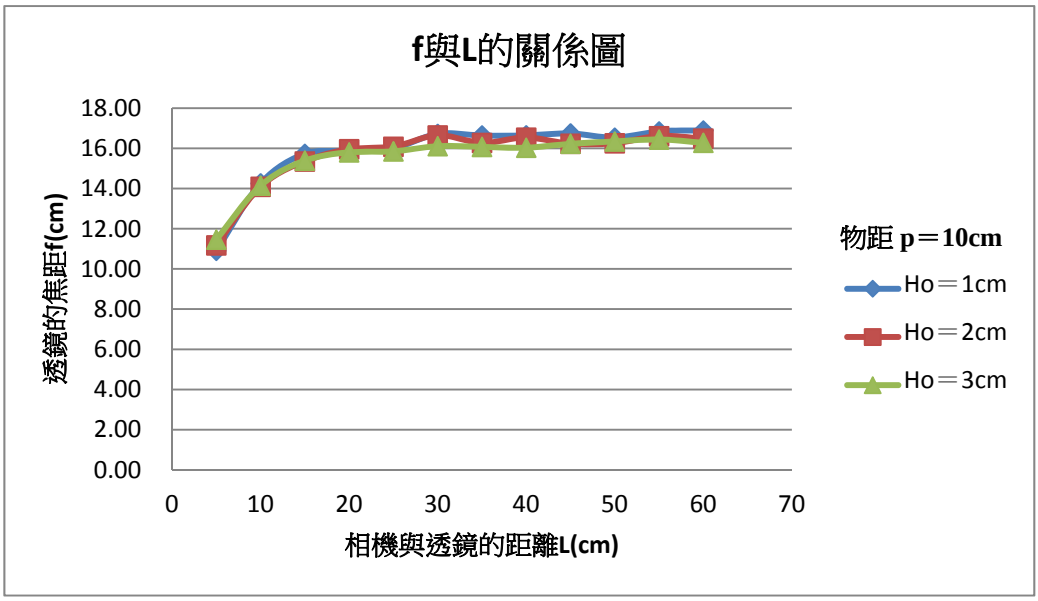
將①"= ⑦"，可得焦距 $f = \frac{-pq}{q-p}$ 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{-f}$ …… ⑧"

(5).綜合凸、凹透鏡可知成像公式為 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ， 當 $q<0$ 為虛像，$q>0$ 為實像；當 $f<0$ 為凹透鏡，$f>0$ 為凸透鏡，甚至可推廣至平面鏡，因平面鏡無會聚或發散光線，焦距為無限大，故滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = 0$。而且從上述的推導發現平面鏡、凸透鏡與凹透鏡所得到虛像的式子竟然完全相同，在處理實驗數據上可更加便利。

(五)、測試實驗：

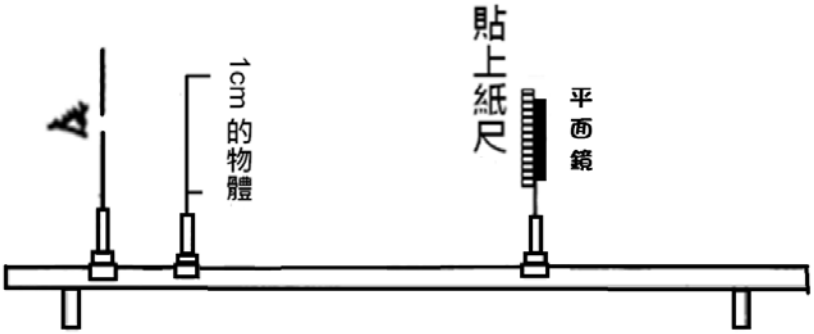
(1).經由測試，發現眼睛觀察到的視高與相機拍出的視高，十分接近，但相機的穩定度較高，並且可在電腦螢幕上重覆讀取數據，提高測量的精準度。

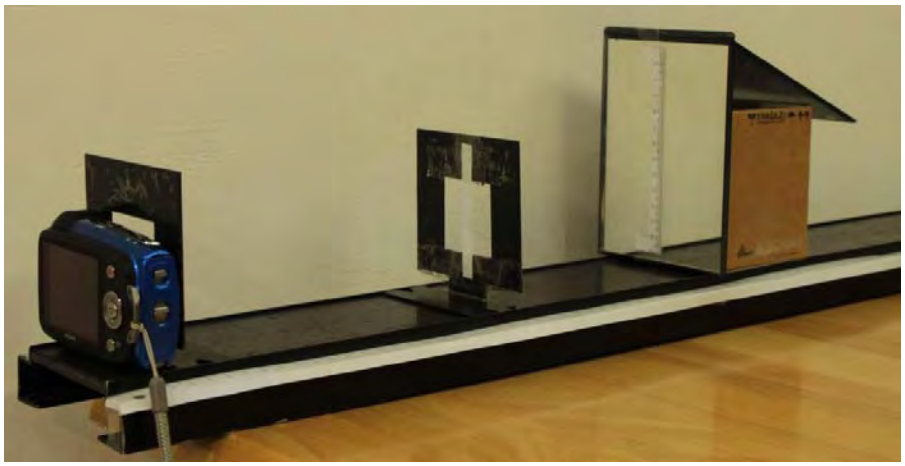
(2).因為相機本身也有凸透鏡，為了測試本實驗的相機所拍攝的數據是否對透鏡成像造成影響，先固定物距 p 恆為 10cm，改變相機到凸透鏡的距離 L=5cm~60cm，拍攝虛像並讀取視高，求得像距 q，代入 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$，得到焦距 f，以下為三種物體高度($H_0$=1cm、2cm、3cm)，所得到的測試結果。



當相機到凸透鏡的距離 L 較小時(5cm~20cm)，所得到的焦距 f 偏小，但 L 較大時(約 30cm 以上)，焦距會呈現較穩定的數值，可能是因為相機在近拍時，相機本身鏡頭的影響，無法得到單一透鏡的焦距，使得所求出的焦距為組合後的焦距，因此**在拍攝虛像時，相機與透鏡的距離不可太小，才可不考慮相機本身鏡頭的影響，當相機與透鏡的距離 L 夠大時，相機與眼睛的功能一樣，只單純的作為觀測點**，在以下的實驗中，我們取 L=30cm 及 L=50cm 為代表，分別進行平面鏡、凸透鏡與凹透鏡的實驗。

二、以『視高-三角形法』測量平面鏡的虛像大小及成像位置。





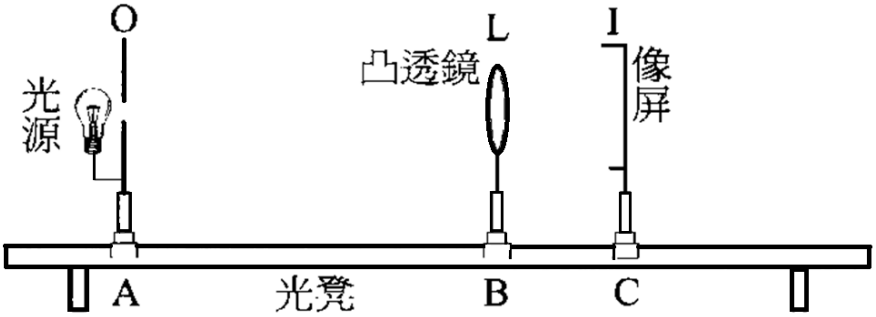
將實驗裝置如圖安排，眼睛所在處即為數位相機所在處。

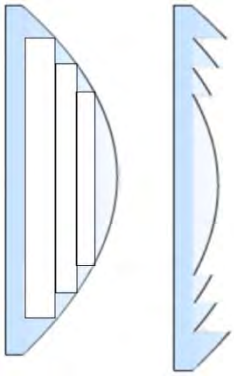
(一)相機與平面鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

(二)相機與平面鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

三、測量凸透鏡實像的位置並求出焦距，再以『視高-三角形法』測量凸透鏡虛像的位置、大小及求出焦距。

(一)利用國中課本實驗方法，測量凸透鏡在光屏上所成的實像位置，以此求出焦距，光線經過透鏡的曲面發生折射，去掉介質中平行方塊的部分並不影響光的偏折，將剩餘的曲面部分平移至透鏡底部，便形成 Fresnel 透鏡，因為很薄，可不考慮透鏡的厚度。





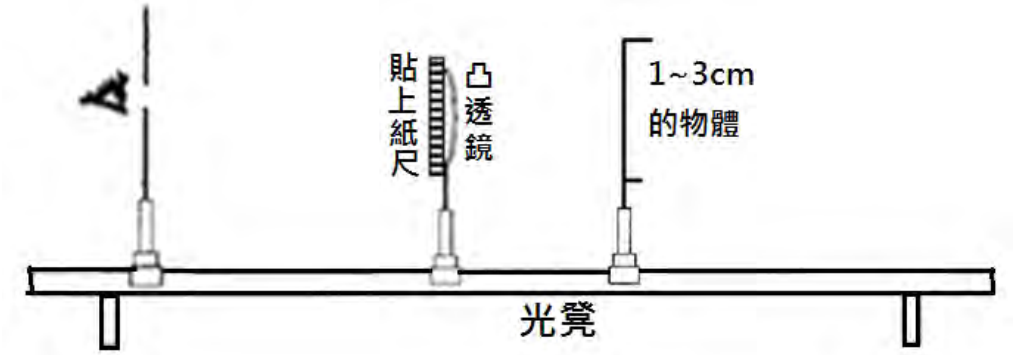
(二)將上圖實驗方法中的光源移除，再利用遠方物體(約 100 公尺)，直接使遠方光線經凸透鏡成像在屏上，像距十分接近焦距，以此求出焦距。

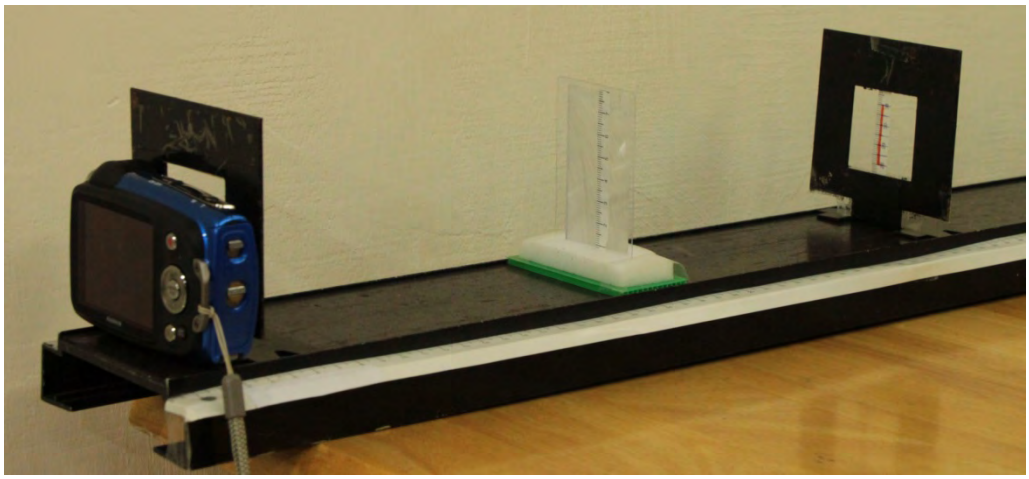
(三)將實驗裝置如圖安排，眼睛所在處即為數位相機所在處。

1.相機與凸透鏡相距 L＝10cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

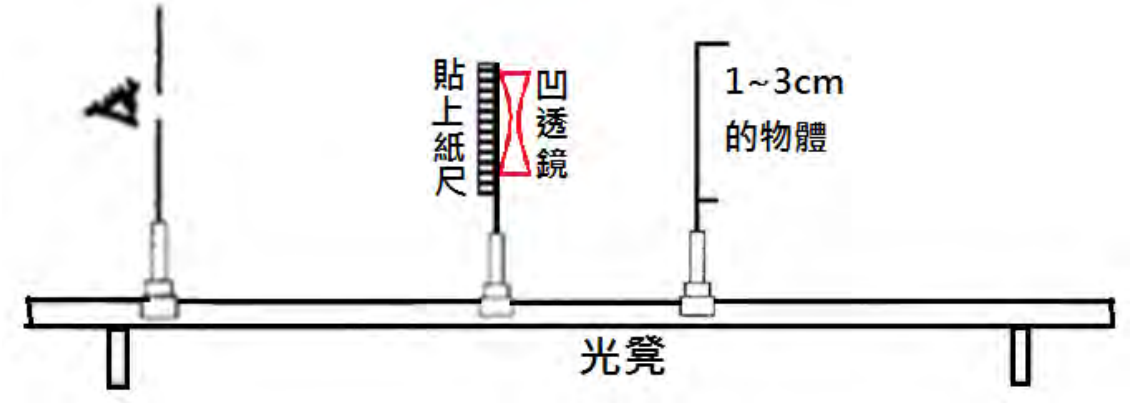
2.相機與凸透鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

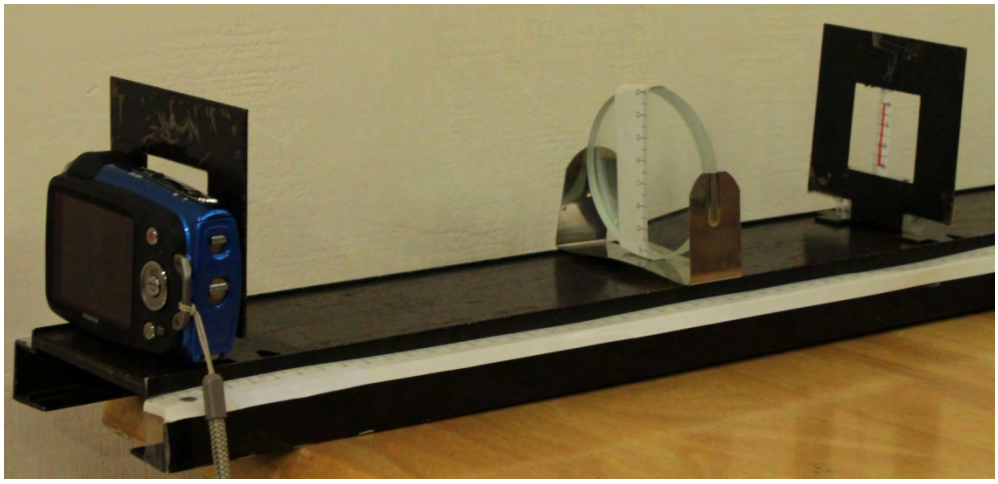
3.相機與凸透鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。





四、以『視高-三角形法』測量凹透鏡的虛像的位置、大小及求出焦距。





將實驗裝置如圖安排，眼睛所在處即為數位相機所在處，因凹透鏡本身有 0.90cm 的厚度，故鏡心位置取在正中央，鏡心到相機的距離應減去 0.45cm，才是紙尺到相機距離 L。

(一)相機與凹透鏡相距 L＝29.55cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

(二)相機與凹透鏡相距 L＝49.55cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i 更改物高 H_o 分別為 2cm 與 3cm，重複上述實驗。

伍、研究結果

一、以『視高-三角形法』測量平面鏡虛像的大小及成像位置，並求出視角及放大率。

(一)相機與平面鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)	1/p	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
3.00	0.33	1700	1.00	1.38	2.25	0.87	1.66	-2.86	-0.35	0.95	0.95
4.00	0.25	1701		1.36	2.22	0.86	1.64	-3.89	-0.26	0.97	0.97
5.00	0.20	1702		1.39	2.21	0.82	1.57	-4.75	-0.21	0.95	0.95
6.00	0.17	1703		1.40	2.23	0.83	1.59	-5.97	-0.17	1.00	1.00
7.00	0.14	1704		1.41	2.22	0.81	1.55	-6.99	-0.14	1.00	1.00
8.00	0.13	1705		1.44	2.22	0.78	1.49	-7.88	-0.13	0.98	0.98
9.00	0.11	1706		1.48	2.24	0.76	1.45	-8.86	-0.11	0.98	0.98
10.00	0.10	1707		1.50	2.25	0.75	1.43	-10.00	-0.10	1.00	1.00
11.00	0.09	1708		1.50	2.21	0.71	1.36	-10.56	-0.09	0.96	0.96
12.00	0.08	1709		1.53	2.25	0.72	1.38	-12.13	-0.08	1.01	1.01
13.00	0.08	1710		1.55	2.25	0.70	1.34	-13.06	-0.08	1.00	1.00
14.00	0.07	1711		1.59	2.28	0.69	1.32	-14.25	-0.07	1.02	1.02
15.00	0.07	1712		1.60	2.27	0.67	1.28	-15.11	-0.07	1.01	1.01

表(1)

相機與平面鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
3.00	1700	2.00	0.92	2.71	1.79	3.42	-2.95	-0.34	0.98	1.97
4.00	1701		0.92	2.66	1.74	3.32	-3.94	-0.25	0.98	1.97
5.00	1702		0.96	2.65	1.69	3.23	-4.92	-0.20	0.98	1.97
6.00	1703		1.00	2.65	1.65	3.15	-5.93	-0.17	0.99	1.98
7.00	1704		1.10	2.63	1.53	2.92	-6.52	-0.15	0.93	1.86
8.00	1705		1.05	2.62	1.57	3.00	-7.94	-0.13	0.99	1.99
9.00	1706		1.09	2.63	1.54	2.94	-9.01	-0.11	1.00	2.00
10.00	1707		1.11	2.62	1.51	2.88	-10.09	-0.10	1.01	2.02
11.00	1708		1.11	2.60	1.49	2.85	-11.27	-0.09	1.02	2.05
12.00	1709		1.19	2.61	1.42	2.71	-11.90	-0.08	0.99	1.98
13.00	1710		1.20	2.60	1.40	2.67	-13.06	-0.08	1.00	2.01
14.00	1711		1.25	2.61	1.36	2.60	-13.95	-0.07	1.00	1.99
15.00	1712		1.28	2.61	1.33	2.54	-14.94	-0.07	1.00	1.99

表(2)

相機與平面鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
3.00	1700	3.00	0.48	3.18	2.7	5.15	-2.97	-0.34	0.99	2.97
4.00	1701		0.50	3.11	2.61	4.98	-3.94	-0.25	0.98	2.95
5.00	1702		0.53	3.10	2.57	4.91	-5.00	-0.20	1.00	3.00
6.00	1703		0.57	3.08	2.51	4.79	-6.03	-0.17	1.00	3.01
7.00	1704		0.61	3.03	2.42	4.62	-6.96	-0.14	0.99	2.98
8.00	1705		0.65	3.01	2.36	4.50	-7.96	-0.13	1.00	2.99
9.00	1706		0.70	3.01	2.31	4.41	-9.01	-0.11	1.00	3.00
10.00	1707		0.75	3.00	2.25	4.30	-10.00	-0.10	1.00	3.00
11.00	1708		0.76	2.99	2.23	4.26	-11.24	-0.09	1.02	3.07
12.00	1709		0.82	2.99	2.17	4.14	-12.21	-0.08	1.02	3.05
13.00	1710		0.85	2.96	2.11	4.03	-13.15	-0.08	1.01	3.04
14.00	1711		0.90	2.98	2.08	3.97	-14.35	-0.07	1.02	3.07
15.00	1712		0.94	2.95	2.01	3.84	-15.11	-0.07	1.01	3.02

表(3)

(二)相機與平面鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)		檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
4.00	0.25	1731	1.00	1.30	2.20	0.90	1.03	-3.88	-0.26	0.97	0.97
5.00	0.20	1732		1.31	2.2	0.89	1.02	-4.88	-0.20	0.98	0.98
6.00	0.17	1733		1.33	2.2	0.87	1.00	-5.83	-0.17	0.97	0.97
7.00	0.14	1734		1.33	2.2	0.87	1.00	-6.93	-0.14	0.99	0.99
8.00	0.13	1735		1.33	2.19	0.86	0.99	-7.98	-0.13	1.00	1.00
9.00	0.11	1736		1.35	2.19	0.84	0.96	-8.91	-0.11	0.99	0.99
10.00	0.10	1720		1.33	2.15	0.82	0.94	-9.81	-0.10	0.98	0.98
11.00	0.09	1721		1.35	2.15	0.80	0.92	-10.68	-0.09	0.97	0.97
12.00	0.08	1722		1.38	2.17	0.79	0.91	-11.70	-0.09	0.97	0.97
13.00	0.08	1723		1.39	2.17	0.78	0.89	-12.72	-0.08	0.98	0.98
14.00	0.07	1724		1.38	2.15	0.77	0.88	-13.74	-0.07	0.98	0.98
15.00	0.07	1725		1.40	2.15	0.75	0.86	-14.52	-0.07	0.97	0.97
16.00	0.06	1726		1.39	2.12	0.73	0.84	-15.24	-0.07	0.95	0.95

表(4)

相機與平面鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
4.00	1731	2.00	0.84	2.69	1.85	2.12	-4.00	-0.25	1.00	2.00
5.00	1732		0.89	2.68	1.79	2.05	-4.91	-0.20	0.98	1.97
6.00	1733		0.90	2.65	1.75	2.01	-5.87	-0.17	0.98	1.96
7.00	1734		0.90	2.64	1.74	1.99	-6.93	-0.14	0.99	1.98
8.00	1735		0.91	2.63	1.72	1.97	-7.98	-0.13	1.00	1.99
9.00	1736		0.92	2.61	1.69	1.94	-8.97	-0.11	1.00	1.99
10.00	1720		0.92	2.69	1.77	2.03	-10.75	-0.09	1.08	2.15
11.00	1721		0.95	2.68	1.73	1.98	-11.75	-0.09	1.07	2.14
12.00	1722		0.99	2.60	1.61	1.84	-11.97	-0.08	1.00	2.00
13.00	1723		1.00	2.65	1.65	1.89	-13.65	-0.07	1.05	2.10
14.00	1724		1.00	2.64	1.64	1.88	-14.90	-0.07	1.06	2.13
15.00	1725		1.00	2.64	1.64	1.88	-16.31	-0.06	1.09	2.18
16.00	1726		1.00	2.51	1.51	1.73	-15.93	-0.06	1.00	1.99

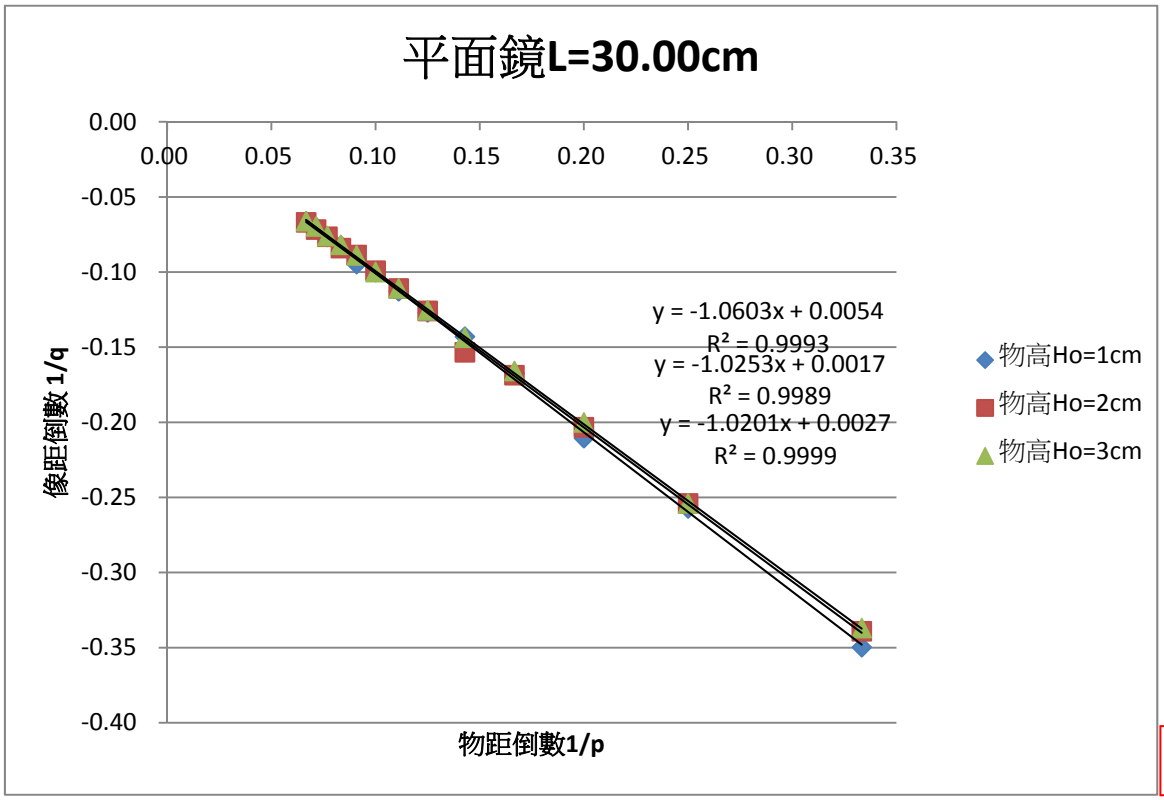
表(5)

相機與平面鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)
4.00	1731	3.00	0.37	3.15	2.78	3.18	-4.00	-0.25	1.00	3.00
5.00	1732		0.40	3.14	2.74	3.14	-5.03	-0.20	1.01	3.02
6.00	1733		0.45	3.10	2.65	3.04	-5.93	-0.17	0.99	2.96
7.00	1734		0.46	3.10	2.64	3.02	-7.03	-0.14	1.00	3.01
8.00	1735		0.49	3.07	2.58	2.96	-7.98	-0.13	1.00	2.99
9.00	1736		0.50	3.04	2.54	2.91	-8.99	-0.11	1.00	3.00
10.00	1720		0.51	3.01	2.5	2.86	-10.00	-0.10	1.00	3.00
11.00	1721		0.53	3.00	2.47	2.83	-11.06	-0.09	1.01	3.02
12.00	1722		0.55	3.00	2.45	2.81	-12.19	-0.08	1.02	3.05
13.00	1723		0.58	2.96	2.38	2.73	-12.99	-0.08	1.00	3.00
14.00	1724		0.60	2.94	2.34	2.68	-13.97	-0.07	1.00	2.99
15.00	1725		0.62	2.93	2.31	2.65	-15.02	-0.07	1.00	3.00
16.00	1726		0.63	2.90	2.27	2.60	-15.97	-0.06	1.00	3.00

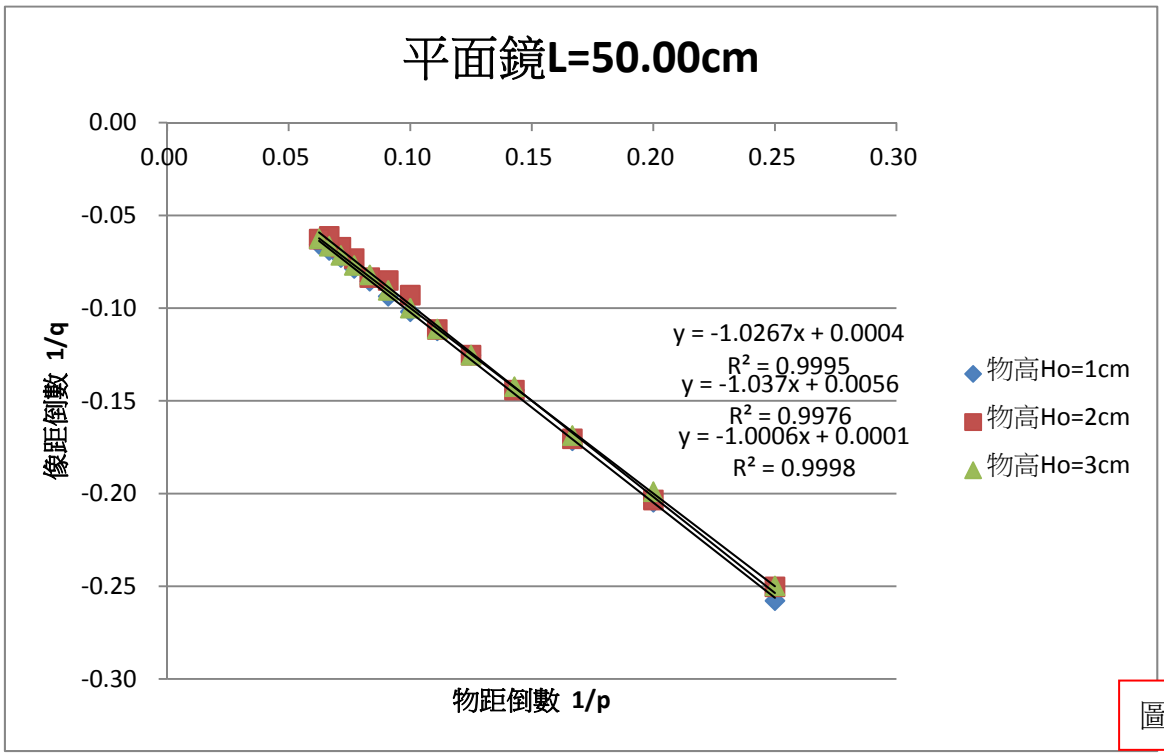
表(6)

(三)將相機與平面鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝1、2、3cm 三種狀態下，以 1/p 為橫坐標、以 1/q 為縱座標作圖加以比較。



圖(1)

將相機與平面鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝1、2、3cm 三種狀態下，以 1/p 為橫坐標、以 1/q 為縱座標作圖加以比較。



圖(2)

不論在 L=30cm 或 L=50cm 利用『視高-三角形法』都可以測出虛像的大小 H_i 與物體大小 H_o 幾乎相等，像距 q 幾乎等於物距 p，放大率 m 幾乎等於 1。因為 $\frac{1}{q}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{f}$，三條數據的圖線幾乎通過座標軸原點，截距十分接近零，表示所計算出的平面鏡焦距 f 接近無限大。當物體離平面鏡愈遠，此時觀測的視角愈小，在鏡面上量到的視高也愈小，對觀測者而言，會誤以為虛像比物體小，事實上經過實驗證明虛像的大小恆等於物體大小。

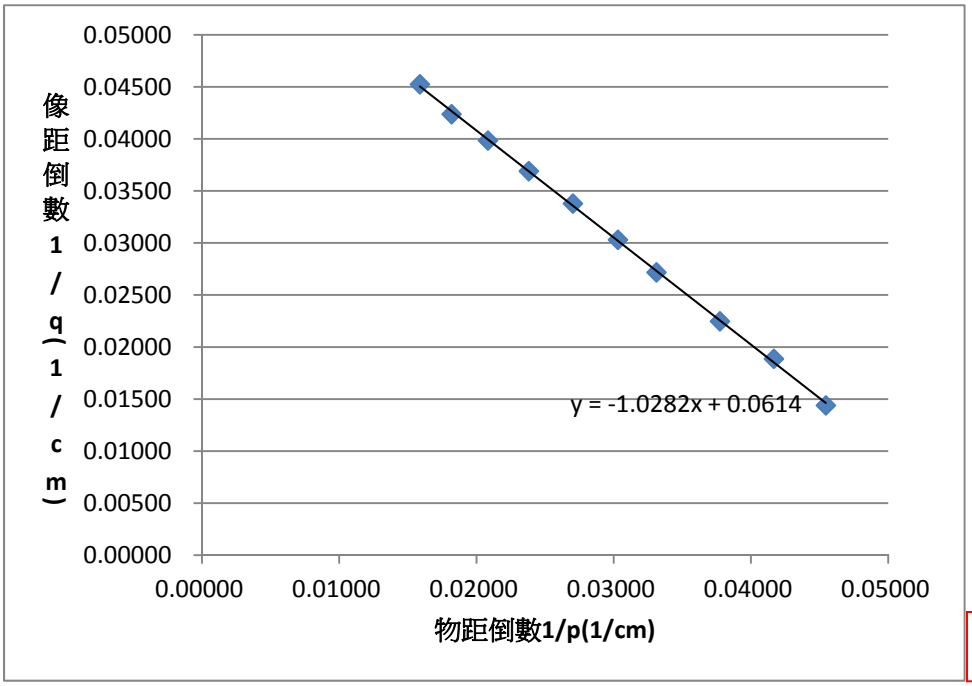
二、測量凸透鏡實像位置求出焦距

(一)利用國中課本實驗方法，以測量凸透鏡(Fresnel 透鏡)在光屏上所成的實像位置，以此求出焦距。本實驗以方形孔(長 3.50cm、寬 3.20cm)貼在凸透鏡(Fresnel 透鏡)上進行實驗。

p(cm)	1/p	q(cm)	1/q	f(cm)
22.00	0.04545	69.50	0.01439	16.71
24.00	0.04167	53.00	0.01439	16.52
26.50	0.03774	44.50	0.01439	16.61
30.20	0.03311	36.80	0.01439	16.59
33.00	0.03030	33.00	0.01439	16.50
37.00	0.02703	29.60	0.01439	16.44
42.00	0.02381	27.10	0.01439	16.47
48.00	0.02083	25.10	0.01439	16.48
55.00	0.01818	23.60	0.01439	16.51
63.00	0.01587	22.10	0.01439	16.36

表(7)

將成像公式移項後可得，$\frac{1}{q}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{f}$，以$\frac{1}{q}$為縱軸，$\frac{1}{p}$為橫軸作函數圖形，所得的斜率理論值為$-1$，縱軸截距的倒數即為焦距 f，實驗得到的線性趨勢線十分吻合，並可求出焦距 $f=\frac{1}{0.0614}$=16.29cm。



圖(3)

(二)利用超過 100 公尺的遠方建築物經 Fresnel 透鏡成像在屏上，因為$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$，當物距甚遠時，像距非常接近焦距，從 12 組數據中求出平均焦距為 16.95cm。

表(8)

1	2	3	4	5	6
16.90cm	16.90 cm	17.00 cm	16.90 cm	17.00 cm	17.10 cm
7	8	9	10	11	12
17.00 cm	16.90 cm	16.90 cm	17.10 cm	17.10 cm	16.90 cm

(三) 以『視高-三角形法』測量凸透鏡的虛像大小及成像位置，並求出視角、放大率、焦距。

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	1/p	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
3	0.333	1614	1.00	3.20	4.30	1.10	2.10	-3.71	-0.27	1.24	1.24	15.71
4	0.25	1615		3.20	4.30	1.10	2.10	-5.16	-0.19	1.29	1.29	17.84
5	0.2	1616		3.19	4.35	1.16	2.22	-7.19	-0.14	1.44	1.44	16.42
6	0.167	1617		3.20	4.40	1.20	2.29	-9.47	-0.11	1.58	1.58	16.36
7	0.143	1618		3.20	4.41	1.21	2.31	-11.80	-0.08	1.69	1.69	17.20
8	0.125	1619		3.20	4.45	1.25	2.39	-15.00	-0.07	1.88	1.88	17.14
9	0.111	1620		3.20	4.50	1.30	2.48	-19.18	-0.05	2.13	2.13	16.96
10	0.1	1621		3.20	4.55	1.35	2.58	-24.55	-0.04	2.45	2.45	16.88
11	0.091	16					1	-32.59	-0.03	2.96	2.96	16.61
12	0.083	16					6	-45.00	-0.02	3.75	3.75	16.36
13	0.077	1624		3.15	4.75	1.60	3.06	-67.83	-0.01	5.22	5.22	16.08
14	0.071	1625		3.13	4.80	1.67	3.19	-105.95	-0.01	7.57	7.57	16.13
15	0.067	1626						-170.00	-0.01			
16	0.063	1627						-357.93	0.00			
17	0.059	1628		3.00	5.00	2.00	3.82	255.00	0.00	-15.00	-15.00	15.94
18	0.056	1629		3.08	5.05	1.97	3.76	194.84	0.01	-10.82	-10.82	16.48
19	0.053	1630		3.15	5.30	2.15	4.10	112.95	0.01	-5.94	-5.94	16.26
20	0.05	1631		3.10	5.50	2.40	4.58	80.00	0.01	-4.00	-4.00	16.00

超過焦距，為何還測得到？

超過焦距，為何拍到正立？

為何像距變成正值？

表(9)

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
3	1614	2.00	2.65	4.82	2.17	4.14	-3.65	-0.27	1.22	2.43	16.82
4	1615		2.62	4.89	2.27	4.33	-5.35	-0.19	1.34	2.67	15.86
5	1616		2.60	4.93	2.33	4.45	-7.23	-0.14	1.45	2.89	16.22
6	1617		2.58	5.00	2.42	4.62	-9.58	-0.10	1.60	3.19	16.06
7	1618		2.55	5.03	2.48	4.73	-12.21	-0.08	1.74	3.49	16.40
8	1619		2.50	5.10	2.60	4.96	-15.92	-0.06	1.99	3.98	16.08
9	1620		2.51	5.18	2.67	5.10	-20.04	-0.05	2.23	4.45	16.34
10	1621		2.50	5.22	2.72	5.19	-24.88	-0.04	2.49	4.98	16.72
11	1622		2.45	5.30	2.85	5.44	-32.83	-0.03	2.98	5.97	16.54
12	1623		2.40	5.42	3.02	5.76	-45.76	-0.02	3.81	7.63	16.27
13	1624		2.40	5.52	3.12	5.95	-62.59	-0.02	4.81	9.63	16.41
14	1625		2.32	5.60	3.28	6.26	-97.84	-0.01	6.99	13.98	16.34
15	1626		2.20	5.70	3.50	6.68	-210.00	0.00	14.00	28.00	16.15
16	1627		2.10	5.82	3.72	7.10	-3720.00	0.00	232.50	465.00	16.07
17	1628		2.10	6.00	3.90	7.44	315.71	0.00	-18.57	-37.14	16.13
18	1629		2.00	6.10	4.10	7.82	160.43	0.01	-8.91	-17.83	16.18
19	1630		1.85	6.45	4.60	8.77	95.69	0.01	-5.04	-10.07	15.85
20	1631		1.75	6.65	4.90	9.34	77.37	0.01	-3.87	-7.74	15.89

表(10)

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝30cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

	物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
L=30.00cm	p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
	3	1614	3.00	2.10	5.40	3.30	6.30	-3.71	-0.27	1.24	3.71	15.71
	4	1615		2.05	5.45	3.40	6.49	-5.34	-0.19	1.34	4.01	15.94
	5	1616		2.02	5.62	3.60	6.87	-7.50	-0.13	1.50	4.50	15.00
	6	1617		1.98	5.60	3.62	6.91	-9.54	-0.10	1.59	4.77	16.16
	7	1618		1.90	5.68	3.78	7.21	-12.49	-0.08	1.78	5.35	15.92
	8	1619		1.85	5.75	3.90	7.44	-15.92	-0.06	1.99	5.97	16.08
	9	1620		1.80	5.87	4.07	7.76	-20.59	-0.05	2.29	6.86	15.99
	10	1621		1.77	5.98	4.21	8.03	-26.37	-0.04	2.64	7.91	16.11
	11	1622		1.70	6.08	4.38	8.35	-34.56	-0.03	3.14	9.43	16.14
	12	1623		1.65	6.20	4.55	8.67	-46.27	-0.02	3.86	11.57	16.20
	13	1624		1.55	6.32	4.77	9.09	-66.46	-0.02	5.11	15.34	16.16
	14	1625		1.40	6.50	5.10	9.72	-115.16	-0.01	8.23	24.68	15.94
	15	1626		1.30	6.60	5.30	10.10	-227.14	0.00	15.14	45.43	16.06
	16	1627		1.20	6.80	5.60	10.66	-6720.00	0.00	420.00	1260.00	16.04
	17	1628		1.00	7.10	6.10	11.61	227.08	0.00	-13.36	-40.07	15.82
	18	1629		1.00	7.20	6.20	11.80	155.00	0.01	-8.61	-25.83	16.13

表(11)

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

	物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
L=50.00cm	p(cm)	1/p	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
	3	0.333	1632	1.00	3.12	4.27	1.15	2.20	-3.71	-0.27	1.24	1.24	15.75
	4	0.25	1633		3.10	4.30	1.20	2.29	-5.31	-0.19	1.33	1.33	16.22
	5	0.2	1634		3.05	4.30	1.25	2.39	-7.14	-0.14	1.43	1.43	16.67
	6	0.167	1635		3.02	4.33	1.31	2.50	-9.33	-0.11	1.55	1.55	16.82
	7	0.143	1636		2.97	4.35	1.38	2.64	-11.97	-0.08	1.71	1.71	16.85
	8	0.125	1637		2.92	4.40	1.48	2.83	-15.51	-0.06	1.94	1.94	16.52
	9	0.111	1638		2.90	4.45	1.55	2.96	-19.35	-0.05	2.15	2.15	16.83
	10	0.1	1639		2.82	4.50	1.68	3.21	-25.30	-0.04	2.53	2.53	16.54
	11	0.091	1640		2.79	4.55	1.76	3.36	-31.59	-0.03	2.87	2.87	16.88
	12	0.083	1641		2.65	4.57	1.92	3.67	-42.73	-0.02	3.56	3.56	16.69
	13	0.077	1642		2.60	4.70	2.10	4.01	-60.13	-0.02	4.63	4.63	16.59
	14	0.071	1643		2.50	4.78	2.28	4.35	-88.27	-0.01	6.31	6.31	16.64
	15	0.067	1644		2.35	4.90	2.55	4.87	-162.77	-0.01	10.85	10.85	16.52
	16	0.063	1645		2.20	5.10	2.90	5.53	-644.44	0.00	40.28	40.28	16.41
	17	0.059	1646		1.90	5.20	3.30	6.30	459.84	0.00	-27.05	-27.05	16.39
	18	0.056	1647		1.70	5.50	3.80	7.25	185.87	0.01	-10.33	-10.33	16.41

表(12)

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

	物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
L=50.00cm	p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
	3	1632	2.00	2.55	4.82	2.27	2.60	-3.65	-0.27	1.22	2.44	16.77
	4	1633		2.50	4.90	2.40	2.75	-5.31	-0.19	1.33	2.65	16.22
	5	1634		2.42	4.93	2.51	2.88	7.18	0.14	1.44	2.87	16.49
	6	1635		2.35	5.00	2.65	3.04	-9.45	-0.11	1.58	3.15	16.43
	7	1636		2.25	5.03	2.78	3.18	-12.08	-0.08	1.73	3.45	16.64
	8	1637		2.19	5.13	2.94	3.37	-15.38	-0.07	1.92	3.84	16.68
	9	1638		2.07	5.22	3.15	3.61	19.78	0.05	2.20	4.40	16.51
	10	1639		1.90	5.32	3.42	3.92	-25.99	-0.04	2.60	5.20	16.25
	11	1640		1.82	5.50	3.68	4.22	-34.01	-0.03	3.09	6.18	16.26
	12	1641		1.62	5.55	3.93	4.50	-44.63	-0.02	3.72	7.44	16.41
	13	1642		1.45	5.80	4.35	4.98	65.07	0.02	5.01	10.01	16.25
	14	1643		1.25	6.00	4.75	5.44	-99.25	-0.01	7.09	14.18	16.30
	15	1644		1.00	6.30	5.30	6.07	-193.90	-0.01	12.93	25.85	16.26

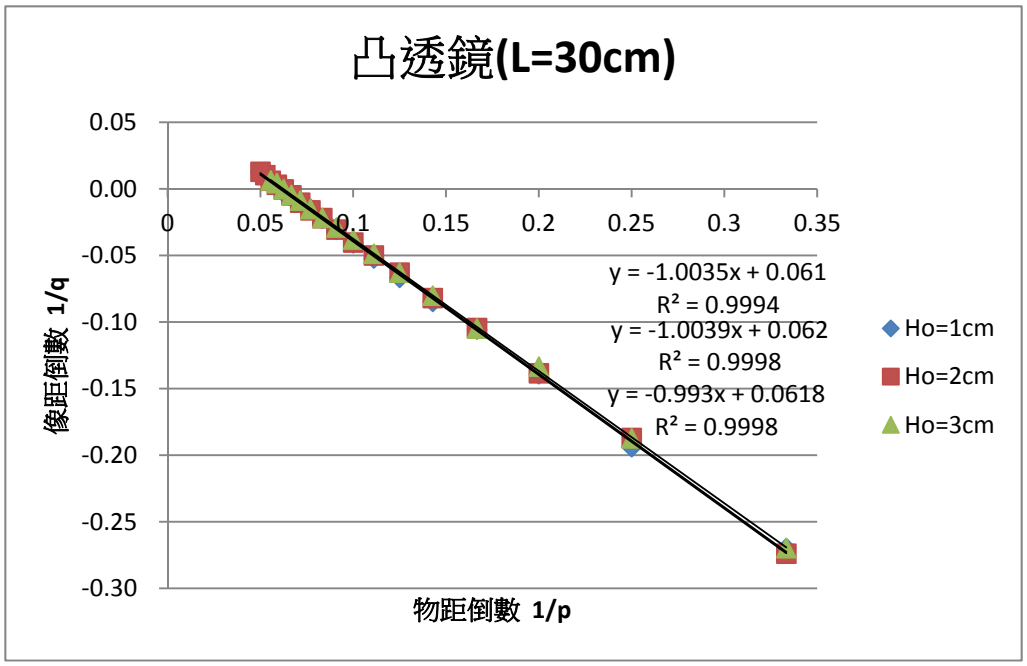
表(13)

相機與 Fresnel 透鏡相距 L＝50cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

	物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
L=50.00cm	p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
	3	1632	3.00	1.99	5.40	3.41	3.91	-3.66	-0.27	1.22	3.66	16.64
	4	1633		1.90	5.50	3.60	4.12	-5.31	-0.19	1.33	3.98	16.22
	5	1634		1.80	5.58	3.78	4.33	-7.21	-0.14	1.44	4.32	16.32
	6	1635		1.69	5.68	3.99	4.57	-9.50	-0.11	1.58	4.75	16.30
	7	1636		1.52	5.78	4.26	4.88	-12.41	-0.08	1.77	5.32	16.06
	8	1637		1.40	5.90	4.50	5.15	-15.79	-0.06	1.97	5.92	16.22
	9	1638		1.29	6.05	4.76	5.45	-19.99	-0.05	2.22	6.66	16.37
	10	1639		1.10	6.20	5.10	5.84	-25.76	-0.04	2.58	7.73	16.35
	11	1640		0.92	6.42	5.50	6.30	-33.80	-0.03	3.07	9.22	16.31
	12	1641		0.70	6.60	5.90	6.75	-44.70	-0.02	3.72	11.17	16.40
	13	1642		0.50	7.00	6.50	7.44	-64.50	-0.02	4.96	14.89	16.28
	14	1643		0.30	7.20	6.90	7.89	-90.45	-0.01	6.46	19.38	16.56

表(14)

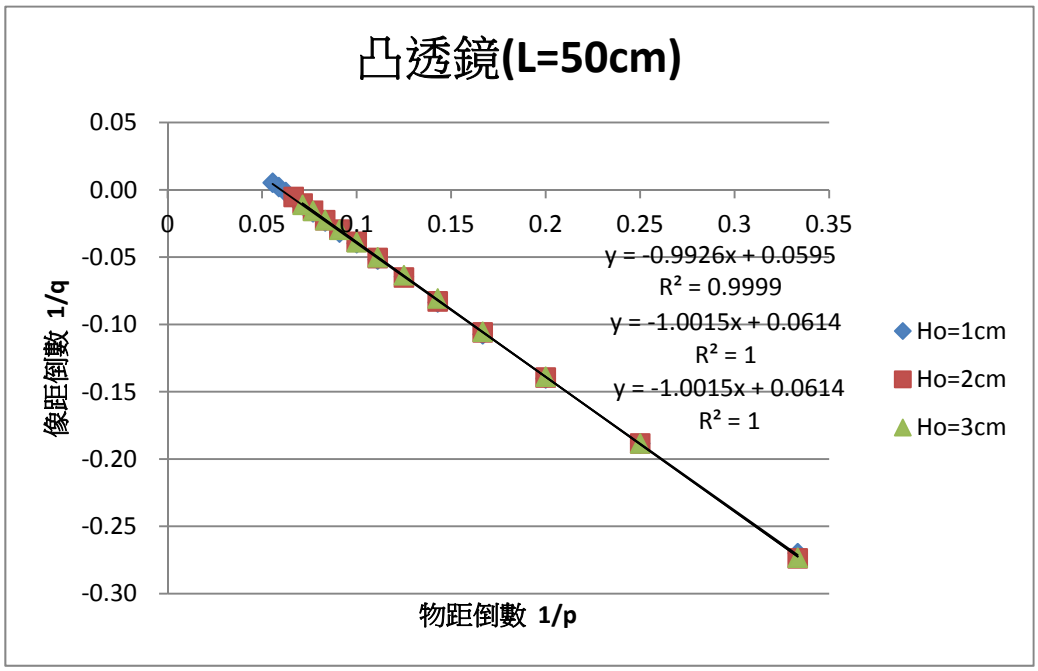
將成像公式移項後可得，$\frac{1}{q}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{f}$，以$\frac{1}{q}$為縱軸，$\frac{1}{p}$為橫軸作函數圖形，所得的斜率理論值為$-1$，縱軸截距的倒數即為焦距f，實驗得到的線性趨勢線十分吻合。



圖(4)

實驗結果為 H_o＝1cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.061=16.39cm
實驗結果為 H_o＝2cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.062=16.13cm
實驗結果為 H_o＝3cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.0618=16.18cm

接近光屏實像法測出的焦距 16.29cm



圖(5)

實驗結果為 H_o＝1cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.0595=16.81cm
實驗結果為 H_o＝2cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.0614=16.29cm
實驗結果為 H_o＝3cm 時，Fresnel 透鏡焦距為 f=1/0.0614=16.29cm

接近光屏實像法測出的焦距 16.29cm

利用『視高-三角形法』的實驗求得虛像的位置，再求出凸透鏡的焦距，與光屏實像法得到的焦距十分接近，可支持本實驗方法的可信度。

三、以『視高-三角形法』測量凹透鏡的虛像大小及成像位置，並求出視角、放大率、焦距。

相機與凹透鏡相距 L＝29.55cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

	物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
L=29.55cm	p(cm)	1/p	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
	4	0.25	1663	1.00	16.31	17.08	0.77	1.49	-3.49	-0.29	0.87	0.87	-27.42
	6	0.167	1664		16.37	17.05	0.68	1.32	-4.81	-0.21	0.80	0.80	-24.14
	8	0.125	1665		16.40	17.03	0.63	1.22	-6.17	-0.16	0.77	0.77	-26.95
	10	0.1	1666		16.49	17.04	0.55	1.07	-6.86	-0.15	0.69	0.69	-21.85
	12	0.083	1667		16.51	17.03	0.52	1.01	-8.03	-0.12	0.67	0.67	-24.28
	14	0.071	1668		16.53	17.01	0.48	0.93	-8.83	-0.11	0.63	0.63	-23.91
	16	0.063	1669		16.58	17.02	0.44	0.85	-9.38	-0.11	0.59	0.59	-22.69
	18	0.056	1670		16.60	17.01	0.41	0.79	-9.99	-0.10	0.55	0.55	-22.43
	20	0.05	1671		16.61	17.00	0.39	0.76	-10.76	-0.09	0.54	0.54	-23.28
	25	0.04	1672		16.63	16.98	0.35	0.68	-12.62	-0.08	0.50	0.50	-25.49
	30	0.033	1673		16.65	16.95	0.30	0.58	-13.14	-0.08	0.44	0.44	-23.38
	35	0.029	1674		16.68	16.94	0.26	0.50	-13.35	-0.07	0.38	0.38	-21.58
	40	0.025	1675		16.70	16.95	0.25	0.48	-15.35	-0.07	0.38	0.38	-24.90

表(15)

相機與凹透鏡相距 L＝29.55cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
4	1663	2.00	15.92	17.47	1.55	3.00	-3.52	-0.28	0.88	1.76	-29.06
6	1664		16.01	17.40	1.39	2.69	-4.93	-0.20	0.82	1.64	-27.62
8	1665		16.10	17.35	1.25	2.42	-6.11	-0.16	0.76	1.53	-25.86
10	1666		16.20	17.33	1.13	2.19	-7.09	-0.14	0.71	1.42	-24.39
12	1667		16.27	17.30	1.03	2.00	-7.93	-0.13	0.66	1.32	-23.41
14	1668		16.31	17.28	0.97	1.88	-8.95	-0.11	0.64	1.28	-24.81
16	1669		16.38	17.26	0.88	1.71	-9.38	-0.11	0.59	1.17	-22.69
18	1670		16.40	17.23	0.83	1.61	-10.15	-0.10	0.56	1.13	-23.27
20	1671		16.42	17.20	0.78	1.51	-10.76	-0.09	0.54	1.08	-23.28
25	1672		16.49	17.15	0.66	1.28	-11.62	-0.09	0.46	0.93	-21.71
30	1673		16.50	17.10	0.60	1.16	-13.14	-0.08	0.44	0.88	-23.38
35	1674		16.53	17.09	0.56	1.09	-14.89	-0.07	0.43	0.85	-25.90
40	1675		16.58	17.08	0.50	0.97	-15.35	-0.07	0.38	0.77	-24.90

表(16)

相機與凹透鏡相距 L＝29.55cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
4	1663	3.00	15.55	17.85	2.30	4.46	-3.47	-0.29	0.87	2.61	-26.41
6	1664		15.69	17.76	2.07	4.01	-4.89	-0.20	0.81	2.44	-26.37
8	1665		15.80	17.65	1.85	3.59	-6.01	-0.17	0.75	2.25	-24.20
10	1666		15.92	17.61	1.69	3.28	-7.07	-0.14	0.71	2.12	-24.09
12	1667		16.00	17.57	1.57	3.04	-8.10	-0.12	0.67	2.02	-24.89
14	1668		16.08	17.51	1.43	2.77	-8.75	-0.11	0.63	1.88	-23.34
16	1669		16.14	17.48	1.34	2.60	-9.57	-0.10	0.60	1.79	-23.81
18	1670		16.19	17.45	1.26	2.44	-10.31	-0.10	0.57	1.72	-24.15
20	1671		16.21	17.40	1.19	2.31	-11.01	-0.09	0.55	1.65	-24.49
25	1672		16.30	17.30	1.00	1.94	-11.78	-0.08	0.47	1.41	-22.29
30	1673		16.35	17.25	0.90	1.74	-13.14	-0.08	0.44	1.31	-23.38
35	1674		16.42	17.22	0.80	1.55	-13.85	-0.07	0.40	1.19	-22.92
40	1675		16.45	17.20	0.75	1.45	-15.35	-0.07	0.38	1.15	-24.90

表(17)

相機與凹透鏡相距 L＝49.55cm，物高 H_o＝1cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距			物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	1/p	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
4	0.25	1681	1.00	16.26	17.07	0.81	0.94	-3.50	-0.29	0.87	0.87	-27.88
6	0.167	1682		16.31	17.05	0.74	0.86	-4.92	-0.20	0.82	0.82	-27.37
8	0.125	1683		16.36	17.01	0.65	0.75	-5.86	-0.17	0.73	0.73	-21.94
10	0.1	1684		16.42	17.01	0.59	0.68	-6.76	-0.15	0.68	0.68	-20.85
12	0.083	1685		16.43	17.00	0.57	0.66	-8.01	-0.12	0.67	0.67	-24.07
14	0.071	1686		16.46	16.99	0.53	0.61	-8.81	-0.11	0.63	0.63	-23.74
16	0.063	1687		16.49	16.99	0.50	0.58	-9.63	-0.10	0.60	0.60	-24.17
18	0.056	1688		16.50	16.95	0.45	0.52	-9.77	-0.10	0.54	0.54	-21.37
20	0.05	1689		16.51	16.97	0.46	0.53	-11.40	-0.09	0.57	0.57	-26.51
25	0.04	1690		16.57	16.95	0.38	0.44	-11.86	-0.08	0.47	0.47	-22.57
[illegible]	0.033	1691		16.61	16.95	0.34	0.39	-12.96	-0.08	0.43	0.43	-22.82
[illegible]	0.029	1692		16.63	16.94	0.31	0.36	-14.02	-0.07	0.40	0.40	-23.38

表(18)

相機與凹透鏡相距 L＝49.55cm，物高 H_o＝2cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
4	1681	2.00	15.87	17.47	1.60	1.85	-3.45	-0.29	0.86	1.73	-25.20
6	1682		15.96	17.40	1.44	1.66	-4.78	-0.21	0.80	1.59	-23.40
8	1683		16.01	17.35	1.34	1.55	-6.06	-0.16	0.76	1.52	-25.07
10	1684		16.11	17.33	1.22	1.41	-7.02	-0.14	0.70	1.40	-23.55
12	1685		16.16	17.29	1.13	1.31	-7.93	-0.13	0.66	1.32	-23.35
14	1686		16.19	17.25	1.06	1.23	-8.81	-0.11	0.63	1.26	-23.74
16	1687		16.25	17.23	0.98	1.13	-9.40	-0.11	0.59	1.17	-22.78
18	1688		16.26	17.20	0.94	1.09	-10.29	-0.10	0.57	1.14	-24.05
20	1689		16.30	17.19	0.89	1.03	-10.95	-0.09	0.55	1.09	-24.18
25	1690		16.39	17.15	0.76	0.88	-11.86	-0.08	0.47	0.95	-22.57
30	1691		16.44	17.12	0.68	0.79	-12.96	-0.08	0.43	0.86	-22.82
[illegible]	1692		16.49	17.10	0.61	0.71	-13.73	-0.07	0.39	0.78	-22.59

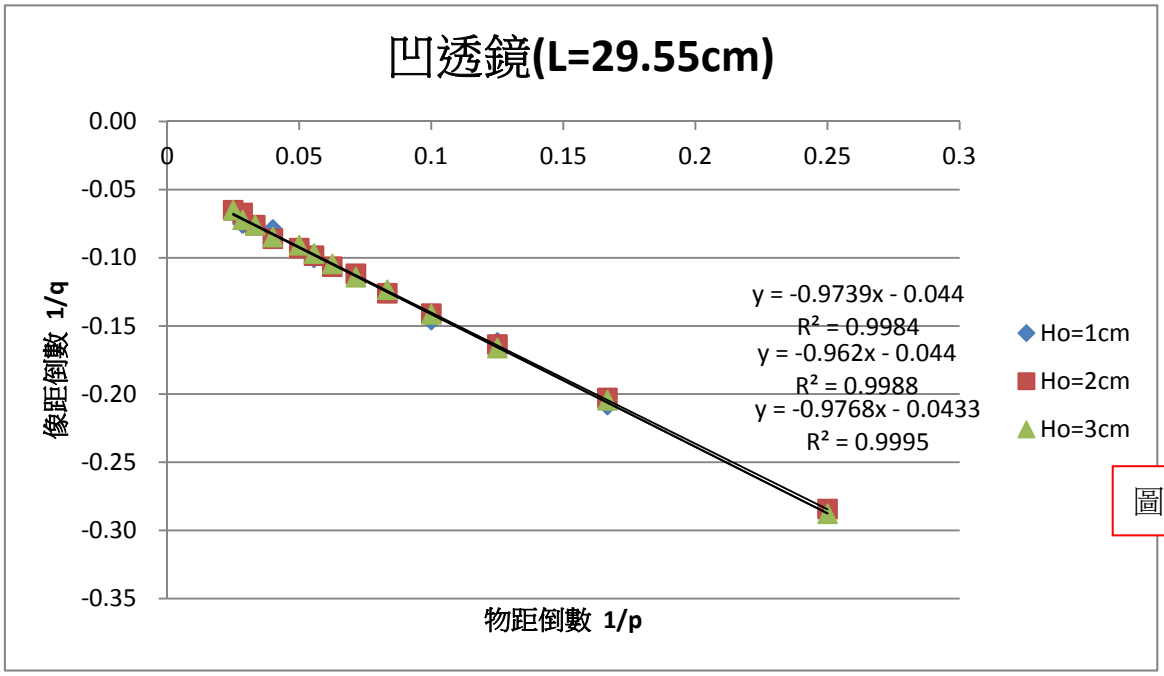
表(19)

相機與凹透鏡相距 L＝49.55cm，物高 H_o＝3cm，改變物距 p 進行實驗，測量像的視高 h_i

物距		物高			像的視高	視角	像距		放大率	像高	焦距
p(cm)	檔案	Ho(cm)	hi(起)	hi(終)	hi(cm)	θ (deg)	q(cm)	1/q	m	Hi(cm)	f(cm)
4	1681	3.00	15.48	17.88	2.40	2.77	-3.45	-0.29	0.86	2.59	-25.20
6	1682		15.60	17.78	2.18	2.52	-4.82	-0.21	0.80	2.41	-24.61
8	1683		15.70	17.70	2.00	2.31	-6.03	-0.17	0.75	2.26	-24.50
10	1684		15.80	17.65	1.85	2.14	-7.11	-0.14	0.71	2.13	-24.57
12	1685		15.87	17.59	1.72	1.99	-8.06	-0.12	0.67	2.02	-24.57
14	1686		15.92	17.51	1.59	1.84	-8.81	-0.11	0.63	1.89	-23.74
16	1687		16.00	17.49	1.49	1.72	-9.55	-0.10	0.60	1.79	-23.69
18	1688		16.04	17.44	1.40	1.62	-10.21	-0.10	0.57	1.70	-23.57
20	1689		16.09	17.41	1.32	1.53	-10.80	-0.09	0.54	1.62	-23.47
25	1690		16.20	17.35	1.15	1.33	-11.99	-0.08	0.48	1.44	-23.04
30	1691		16.27	17.30	1.03	1.19	-13.12	-0.08	0.44	1.31	-23.32
35	1692		16.32	17.26	0.94	1.09	-14.21	-0.07	0.41	1.22	-23.93

表(20)

將成像公式移項後可得，$\frac{1}{q}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{f}$，以$\frac{1}{q}$為縱軸，$\frac{1}{p}$為橫軸作函數圖形，所得的斜率理論值為－1，縱軸截距的倒數即為焦距f，實驗得到的線性趨勢線十分吻合。

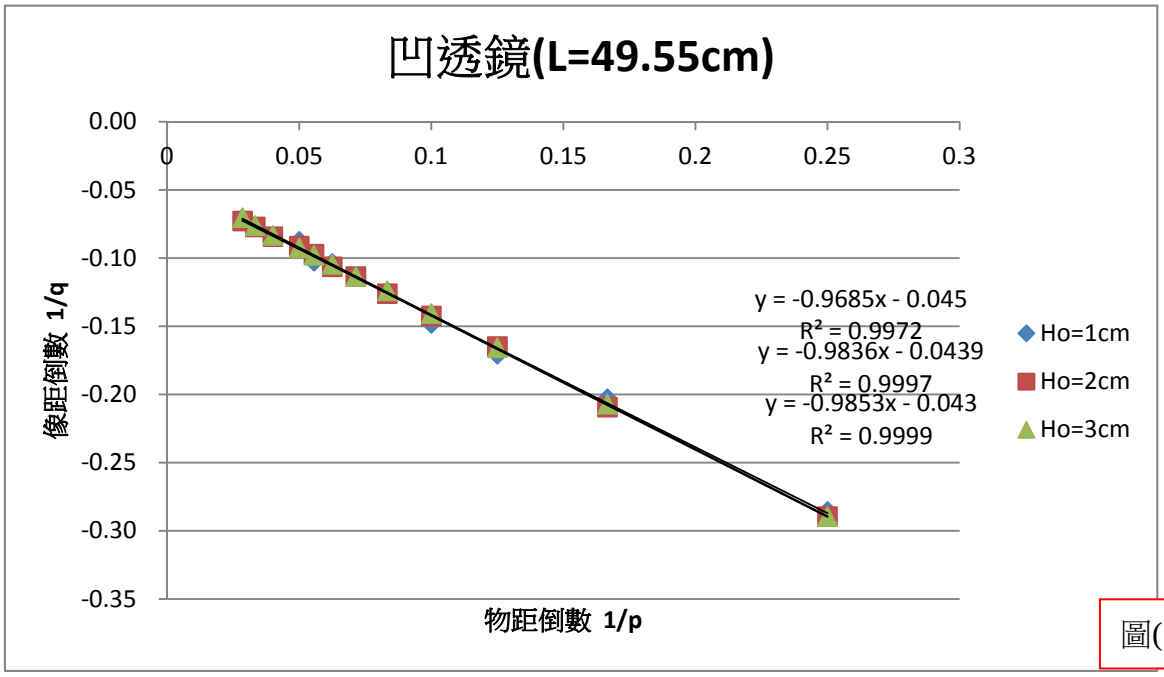


圖(6)

實驗結果為 H_o＝1cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.044=－22.73cm

實驗結果為 H_o＝2cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.044=－22.73cm

實驗結果為 H_o＝3cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.0433=－23.09cm



圖(7)

實驗結果為 H_o＝1cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.045=－22.22cm

實驗結果為 H_o＝2cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.0439=－22.78cm

實驗結果為 H_o＝3cm 時，凹透鏡焦距為 f=－1/0.043=－23.26cm

利用『視高-三角形法』的實驗求得虛像的位置，再求出凹透鏡的焦距，所得到實驗數據一致性極高，支持本實驗方法的可信度。

陸、討論

一、關於視角的討論

(一)在國中、高中的課本中從未對視角做任何的說明，但是在日常生活中，我們照鏡子時看到虛像、使用放大鏡看到虛像，以及戴著眼鏡時看到虛像，對虛像位置或大小的判斷，常常會直覺的受到視角的影響，當觀察的視角較小就以為虛像的位置較遠或較小，本實驗將眼睛看到的實際狀況拍照，了解到此時所看到像的高度是在觀測虛像的視角下落在鏡面上的視高，並非虛像本身的大小，利用相似三角形推算出虛像的位置及其高度，真正用數據證明當物體距離平面鏡愈遠，雖然觀察虛像的視角愈小，感覺虛像好像變小了，但實驗結果告訴我們在平面鏡中，視角並不影響虛像的大小，像距等於物距，像高等於物高，平面鏡沒有放大或縮小的效果，我們建議在國中、高中課本的光學內容應加入視角概念，澄清以人眼觀察虛像的錯覺。

(二)在實驗二，測量 Fresnel 透鏡的虛像時，我們發現視角的大小會稍微影響測量出的焦距，在相機與透鏡距離固定下，物體的高度愈小，視角愈小，焦距愈大。

相機與透鏡距離 L	物高 H_0(cm)	視角 θ	平均焦距 f(cm)	趨勢
L=30.00cm	1.00cm	2.10°~4.58°	16.53	視角愈大，焦距愈小。
	2.00cm	4.14°~9.34°	16.24	
	3.00cm	6.30°~11.80°	15.96	
L=50.00cm	1.00cm	2.20°~4.87°	16.54	視角愈大，焦距愈小。
	2.00cm	2.60°~6.07°	16.42	
	3.00cm	3.91°~7.89°	16.34	

表(21)

(三)在凹透鏡的實驗數據中，視角介於 0.31°~2.77°，視角對焦距的影響並不明顯，推論是因為凹透鏡為正立縮小虛像，視角原本就不大，因此影響不大。

二、討論 Fresnel 透鏡的球面像差

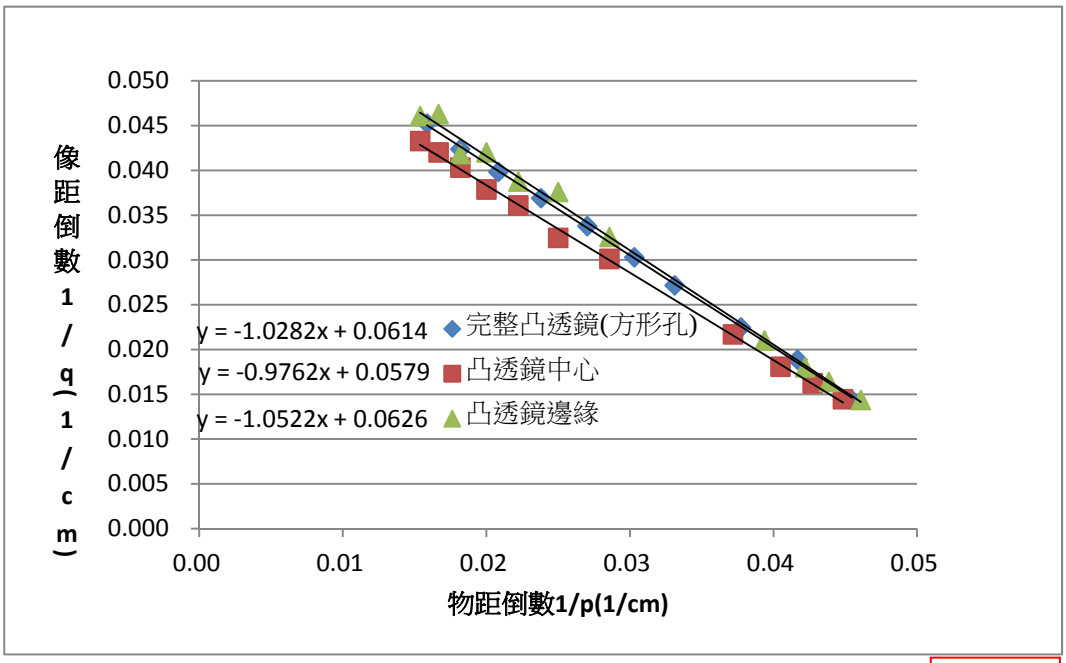
利用可遮光的圓形小孔(直徑為 1.20cm)放在 Fresnel 透鏡的中心及邊緣，將光源照射在可透光的十字形物體上，經由透鏡成實像在屏幕上(光屏法)，代入 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$，利用 $\frac{1}{q}$ 與 $\frac{1}{p}$ 函數圖形中截距 $\frac{1}{f}$ 的倒數，測出透鏡的焦距。

表(22) 凸透鏡中心的焦距

p(cm)	q(cm)	1/p	1/q	f(cm)
22.30	69.20	0.04484	0.01445	16.87
23.40	61.60	0.04274	0.01623	16.96
24.70	55.30	0.04049	0.01808	17.07
26.90	46.10	0.03717	0.02169	16.99
35.00	33.20	0.02857	0.03012	17.04
40.00	30.80	0.02500	0.03247	17.40
45.00	27.70	0.02222	0.03610	17.15
50.00	26.40	0.02000	0.03788	17.28
55.00	24.80	0.01818	0.04032	17.09
60.00	23.80	0.01667	0.04202	17.04
65.00	23.10	0.01538	0.04329	17.04

表(23) 凸透鏡邊緣的焦距

p(cm)	q(cm)	1/p	1/q	f(cm)
21.70	69.60	0.04608	0.01437	16.54
22.80	61.00	0.04386	0.01639	16.60
23.70	55.50	0.04219	0.01802	16.61
25.40	47.60	0.03937	0.02101	16.56
35.00	30.70	0.02857	0.03257	16.35
40.00	26.60	0.02500	0.03759	15.98
45.00	25.80	0.02222	0.03876	16.40
50.00	23.80	0.02000	0.04202	16.12
55.00	23.90	0.01818	0.04184	16.66
60.00	21.60	0.01667	0.04630	15.88
65.00	21.70	0.01538	0.04608	16.27

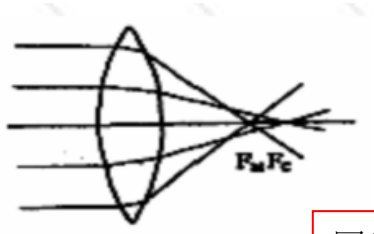


圖(8)

從實驗結果可知，凸透鏡中心的焦距略大於凸透鏡邊緣的焦距，這是因為凸透鏡為球面透鏡，光經過透鏡邊緣的偏折程度較大，故焦距較小，因此在本實驗中因像的視高太小或太大，所測出的焦距也會有些微的影響。

凸透鏡中心	$f=\frac{1}{0.0579}=17.27cm$
完整凸透鏡(方形孔)	$f=\frac{1}{0.0614}=16.29cm$
凸透鏡邊緣	$f=\frac{1}{0.0626}=15.97cm$

表(24)



圖(9)

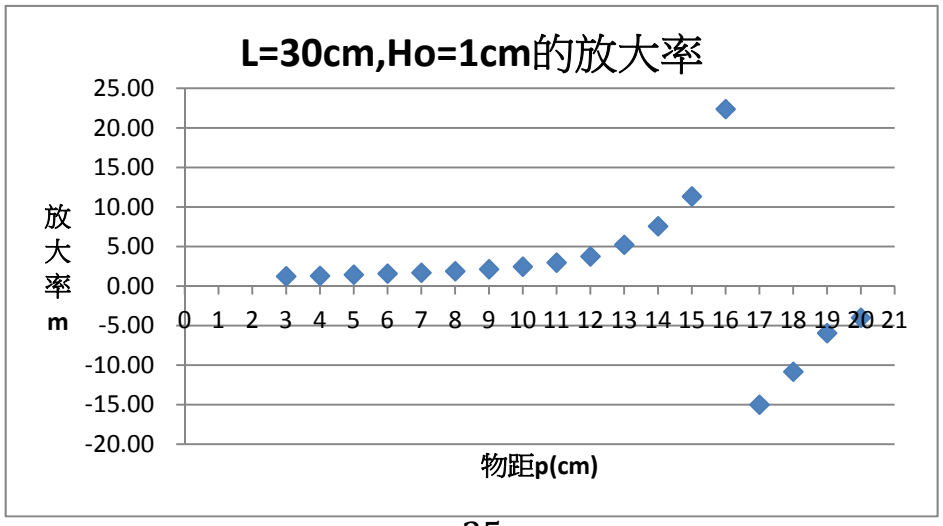
這也同時說明，當我們利用無窮遠處的建築物求出凸透鏡的焦距時，因為是根據所成實像的中間部分的清晰度來尋找像的位置，所以測出的焦距平均為 16.95cm，接近凸透鏡中心的焦距。

三、討論 Fresnel 透鏡虛像的測量

凸透鏡焦距的測量通常是以光屏法測量實像為主，高中課程所用的視差法及視線差針法對虛像的測量是很困難的，誤差也很大，本實驗讀取像的視高後，以相似三角形，求出虛像的位置，測出凸透鏡成虛像時的焦距，如實驗數據結果中的表(9)至表(14)， 當相機到凸透鏡的距離 L=30.00cm 及 L=50.00cm，在三種物體高度下(H_o=1.00cm、2.00cm、3.00cm)，求出的焦距與光屏法得到的焦距十分接近，在做實像測量時，往往為了求得實像位置，反覆移動透鏡或像屏的位置，並不能有效率的確定所謂成像清楚的位置到底在哪？但是利用拍攝虛像的視高度，可以在短時間內大量的得到實驗數據，即使拍攝得有些模糊，所測出的焦距卻也非常接近。

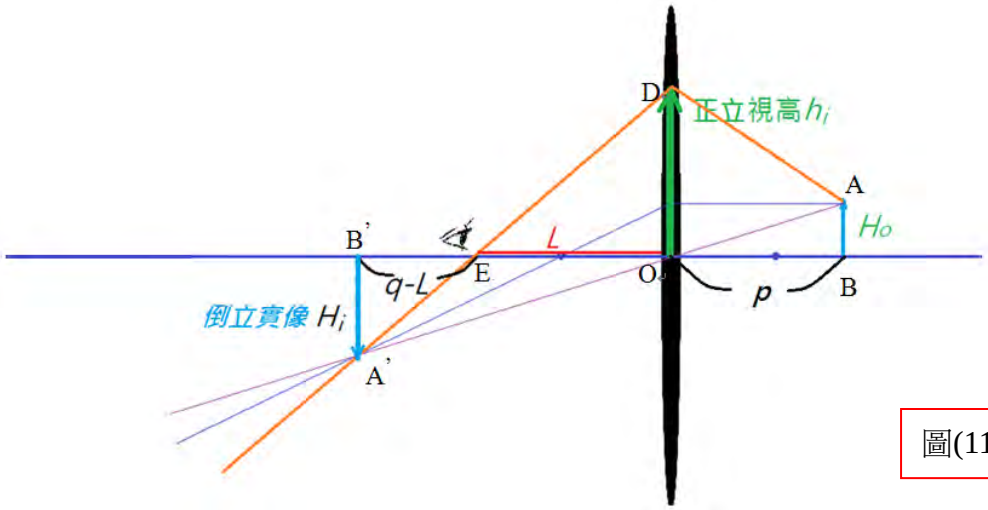
四、討論 Fresnel 透鏡的放大率

利用表(9)所得到的數據求出透鏡的放大率，當物距 p 由 1cm 遞增至 16cm 時，像距為負值，放大率為正值，且漸增，即所測的正立虛像的高度漸增，這符合課本中所學到的凸透鏡成像性質，物體在焦點內，成像為正立放大虛像，且接近焦點時像高漸增；但物距 p 超過焦距後(17cm~20cm)，在一倍焦距到兩倍焦距內應該成倒立放大的實像，我們所拍攝到照片卻是正立放大的像，所求出像距為正值，放大率為負值，這究竟是何原因？



圖(10)

(1).當物體位於焦點外，將在透鏡另一側產生倒立實像，若觀測者(相機)的位置落在實像的前方(L＜q)，則相機可拍攝出正立的像，推論如下。



圖(11)

如上圖所示，物體 A 發出的光線 $\overline{AD}$ 經過透鏡折射後為 $\overline{DA'}$，將交會於 A'點，若觀測者位在像與透鏡之間的 E 處，將接收到此光線，因此可拍到正立的像，故作圖時先畫好實像，A'、E 兩點的直線交於鏡面 D 點，$\overline{OD}$ 即為像的視高 h_i。

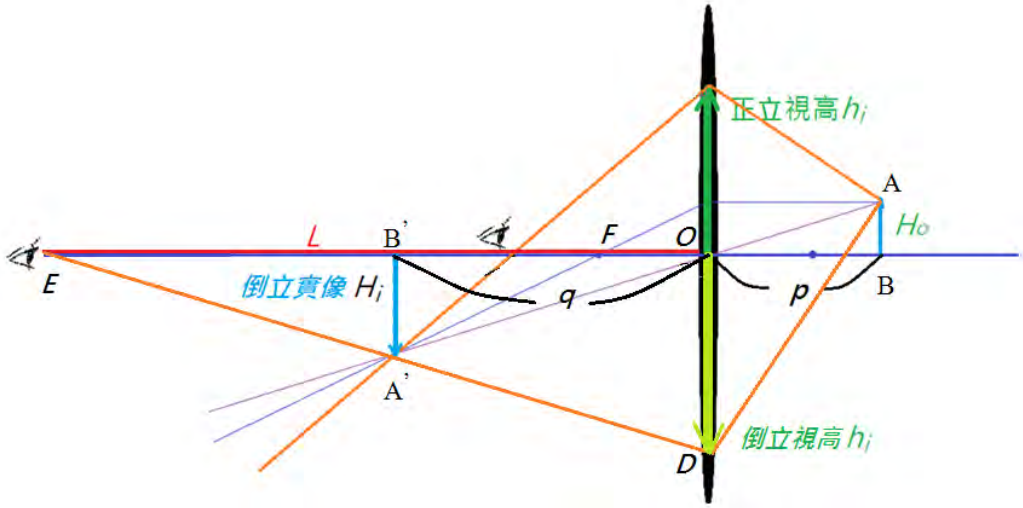
利用相似三角形△OAB~△O A'B'，可得 $\frac{H_i}{H_o}=\frac{q}{p}$ .....(a)

再利用另一組相似三角形△EDO~△E A'B'，則 $\frac{H_i}{h_i}=\frac{q-L}{L}$.....(b)

將(a) $H_i=\frac{q}{p}H_o$ 代入(b)中，得到像距 $q=\frac{-ph_iL}{H_oL-ph_i}$

與第 5 頁中的式子③'所得到的結果正好相差負號，也解釋了第 16 頁表(9)中的疑惑，故此公式仍可適用，與實驗數據吻合。

(2).若觀測者(相機)的位置落在實像的後方(L>q)，則相機可拍攝出倒立的像，作圖時先畫好實像，過 A'、E 兩點的直線再交於鏡面 D 點，因此將拍到倒立的像，本實驗進行中並未遇到倒立的像，故另行設計測試實驗在討論五中。

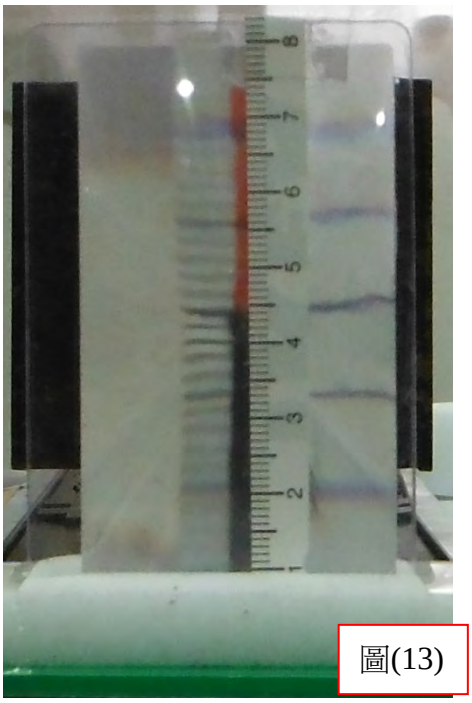


圖(12)

五、討論拍攝照片中像的正立及倒立

(一)從討論四及表(9)至表(11)中，出現放大率為負值時，代表物體到透鏡的距離 p 大於焦距，課本告訴我們此時成像應為倒立放大的實像，但拍攝時卻是正立放大的像，為了更加瞭解這個問題，以下做了一些測試的實驗，將物體上方塗以紅色，下方塗以黑色，代表物體正立，若拍攝出下方紅色，上方黑色則為倒立。

假設 f＝16.29cm、p=20cm、可預測 q 為 87.82cm，相機距離透鏡 L=30cm，此時相機與透鏡的距離小於像距 q，所拍攝的像為正立，如圖(13)所示。f＝16.29cm、p=30cm、可預測 q 為 35.64cm，相機距離透鏡 L=50cm，此時相機與透鏡的距離大於像距 q，所拍攝的像為倒立，如圖(14)所示。



圖(13)

圖(14)

從討論四的作圖中，整理出當相機與凸透鏡的距離 L、焦距 f 時、物距 p 在下列關係時，拍攝出來的像為正立即倒立的狀況如下。

物體位於焦點內 p＜f	成像在與物同側 為正立虛像	L 可為任意值	相機拍攝出正立的像
物體位於焦點外 p＞f	成像為與物異側 位在焦點外 為倒立實像	L＜q，即成像在相機後方	相機拍攝出正立的像
		L＞q＞f，即成像在相機前方	相機拍攝出倒立的像

(二)利用上述的推論，取 Fresnel 透鏡的焦距為 16.29cm 做測試，固定物距 p，先由公式 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$，預測出像距 q，因為物距 p 已大於焦距，故成倒立實像，當相機靠近鏡面時，從相機中可看到正立的像，當相機逐漸遠離鏡面，從相機中可看到像由正立變成倒立，但是在變化的交界位置，無法十分精準判斷，只能取一段範圍表示，實驗結果如下。

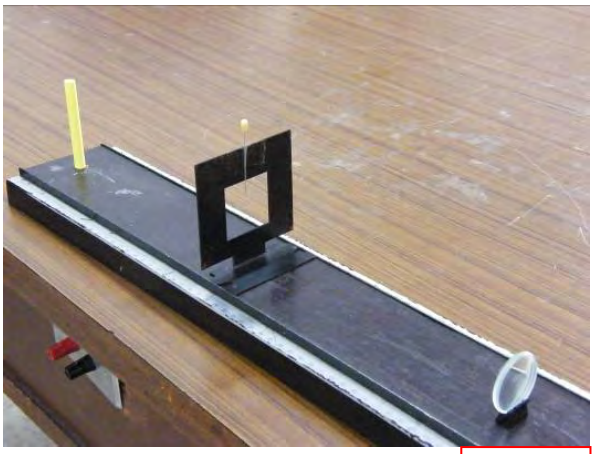
物距 p(cm)	若焦距為 16.29cm 預測出像距 q(cm)	若焦距為 16.50cm 預測出像距 q(cm)	測量像由正立變倒立時，相機的距離 L
23.00	55.83	58.38	57~58
25.00	46.75	48.53	48~49
30.00	35.65	36.67	36~37
35.00	30.07	31.22	30~31
40.00	27.48	28.09	26~27
45.00	25.33	26.05	24~25
50.00	24.16	24.63	23~24
55.00	23.10	23.57	21~22

表(25)

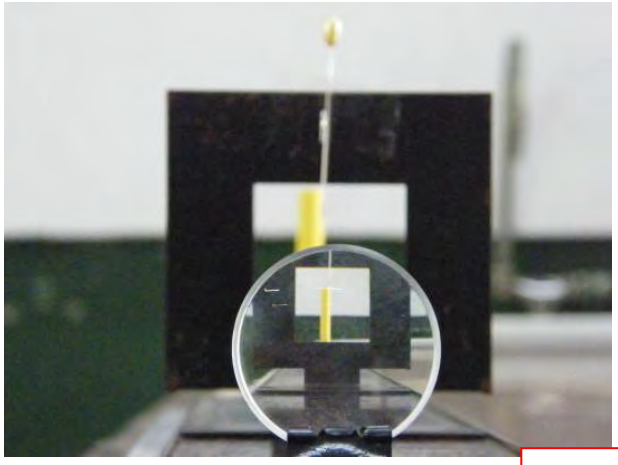
大致上的趨勢，與先前的推論吻合，而誤差的來源，與所選定的焦距數據有關，也與成像位置太過接近相機的位置，造成視高太大，不易判讀有關。

六、討論凹透鏡焦距的測量

(一)凹透鏡焦距的測量在高中課程中一直是十分困難的，有的版本使用視差法(裝置如下)，在實驗操作過程中觀察者透過凹透鏡，並左右擺動上半身，判斷鏡中虛像與凹透鏡後方參考像屏的位置無相對運動時，像屏的位置即為虛像的位置，而且像屏要中空，才不會擋住物體，這種方法不僅操作不易、判斷不易，所求出焦距的差異也很大。

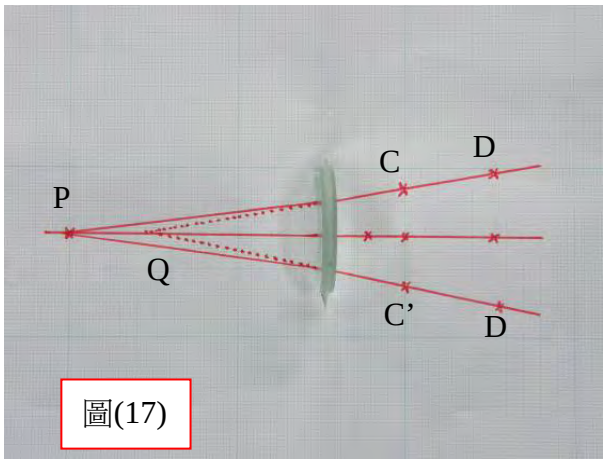


圖(15)



圖(16)

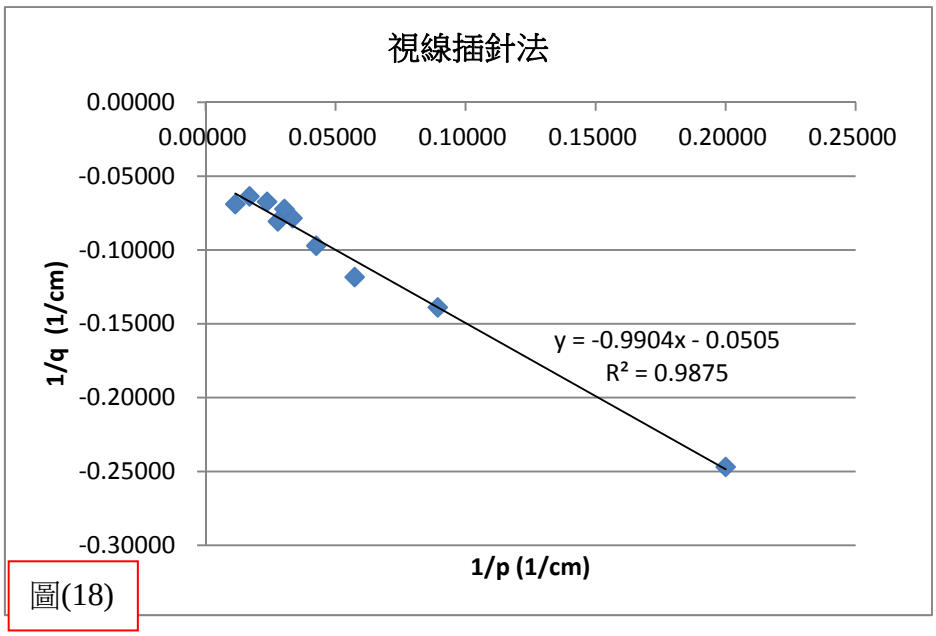
(二)高中課程中，有的版本使用視線插針法來測量凹透鏡的焦距，將凹透鏡的一半塞在保麗龍板上，在主軸上插上大頭針 P，從凹透鏡的另一側，以單眼透過凹透鏡觀察大頭針 P 的像，在此視線上插大頭針 C 以及 D，以相同的方法，在主軸的另一側插大頭針 C'以及 D'，射線 CD 與 C'D'的交會點 Q 即為大頭針 A 的成像處，以此方法的實驗結果如下。



圖(17)

物距 p(cm)	像距 q(cm)	1/p	1/q	焦距 f(cm)
5.00	-4.05	0.20000	-0.24691	-21.32
11.20	-7.20	0.08929	-0.13889	-20.16
17.45	-8.45	0.05731	-0.11834	-16.38
23.50	-10.30	0.04255	-0.09709	-18.34
29.90	-12.75	0.03344	-0.07843	-22.23
33.00	-13.85	0.03030	-0.07220	-23.87
36.00	-12.40	0.02778	-0.08065	-18.92
42.35	-14.85	0.02361	-0.06734	-22.87
59.30	-15.70	0.01686	-0.06369	-21.35
87.60	-14.50	0.01142	-0.06897	-17.38

表(26)



圖(18)

利用截距求出焦距

$$f=\frac{1}{0.0505}=19.80cm$$

這種方法在操作上還算方便，缺點是當視角太小時，很難畫出兩延長線的交點，誤差很大，但視角太大(本實驗的視角為 $9^o \le \theta \le 16^o$)，凹透鏡的球面像差太顯著，誤差也很大，而且物距 p 較大的幾個數據，其延長線的交點十分靠近，不易測量，故不容易產生較多組的數據，由上圖可看出數據在直線上的一致性比本實驗『視高-三角形法』結果較差。

(三)本實驗利用相機拍攝虛像的視高度，短時間內就得到 75 組數據，其視角介在 0.48^o~4.46^o 之間，非常的小，而且由實驗數據圖形可看出 $\frac{1}{p}$ 與 $\frac{1}{q}$ 幾乎成一直線，所求出的焦距也十分接近，均優於上述兩種方法，同時也證實了虛像的高度的確小於物體的高度，雖然因為視角很小，使我們誤以為虛像位在遠處，事實上實驗數據告訴我們，所成的虛像比物體更靠近我們，而且落在焦距之內。

柒、結論

一、利用眼睛直接觀察或相機直接拍攝鏡中的虛像，是無法判斷像的位置與大小，此時所看到像的高度是在觀測虛像的視角下落在鏡面上的視高，並非虛像本身的大小，平面鏡及凹透鏡的虛像看起來都比物體小，因此有些國中自然與生活科技教材以觀測法就判斷凹透鏡的虛像大小並不恰當。高中物理實驗手冊以視差法或視線插針法來決定虛像的位置，實驗誤差偏大，本實驗根據『視高-三角形法』，推導出同時適用於平面鏡、凸透鏡和凹透鏡三者的虛像位置及大小的式子。

二、『視高-三角形法』的實驗結果，可以確實的驗證平面鏡後的虛像與物體大小相等，物距等於像距，當物體與面鏡的距離愈遠，觀測者會因為視角變小，虛像在鏡面上的視高變小，看起來會有虛像變小的錯覺，但實驗數據明確的告訴我們，虛像本身高度並未改變。

三、利用國中的光屏法可以測量凸透鏡的實像位置以求出焦距，亦可利用無窮遠處的物體所成的實像，直接測量焦距，本實驗利用『視高-三角形法』測量凸透鏡後的虛像像距，當相機與凸透鏡在適當距離(約 30cm)以上時，所得到凸透鏡的焦距與實像的光屏法十分接近。另外，實驗中發現當物體位在凸透鏡焦點外側時，理論上應成像至透鏡另一側，形成倒立的實像，但是透過人的眼睛與相機觀測時，會因為觀測的位置不同，得到不同的結果，如果實像位置在相機前方，將拍攝到倒立的像，若是實像位置在相機後方，將拍攝到正立的像。

四、以眼睛或相機觀測凹透鏡的虛像時，我們會因為像的視角很小，就誤以為虛像成像在物體的後方，比物體更遠離透鏡，而國中課程並無法測量虛像的位置，本實驗在平面鏡與凸透鏡的實驗結果下，均支持『視高-三角形法』的可信度，以此方法測出凹透鏡的虛像位置及其大小，確實的證明凹透鏡的虛像比物體小，而且像距恆小於物距，視覺上的錯誤必須加以澄清。此外利用實驗所求出的焦距，其精準度因為視角小而更加準確，在實驗操作的方便性及實驗數據的一致性，均優於高中物理實驗課程的視差法及視線插針法。

捌、參考資料及其他

一、國中自然與生活科技課本第三冊　　南一書局

二、國中三年級上冊數學課本　　翰林書局

三、高級中學選修物理(上)實驗課本　　林明瑞等著　　南一書局

【評語】030114

優點：

以新實驗獨立驗證教科書上熟知的光學公式，科學求真的精神值得鼓勵，且方法可行。

改進：

1. 結果的誤差討論不足。

2. 觀察者(相機)與透鏡間決定不夠正確。