中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　物理科

最佳團隊合作獎

030107

「深」在「浮」中不知「浮」

～探討表面張力對『沉體』浮於水面行為之影響

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡依靜	林宏一
國二 劉育辰	韓顏吉
國二 趙得佑	

關鍵詞：表面張力、漂浮物體、吸引

摘要

硬幣因表面張力的作用而浮於水面上，且當所形成水面曲線各點斜率小於 1 時，即硬幣與水面接觸角小於 135° ，其曲線會符合$h(x) = c_1 e^{-x/L_c}$ 的形式。另外，實驗驗證兩枚浮於水面之硬幣因兩側接觸角不同，使硬幣受力 $F=\gamma(\sin\theta_{c2}-\sin\theta_{c1})*A$，而發生互相靠近的情形，此機制與文獻[4]所提到的解釋不同，這是因為沉體(本實驗所研究的)與浮體(文獻所提到的)與水面的接觸形式不同，而使得物體浮於水面上互相靠近的物理機制不同。最後，本組發現水面漂浮物體為浮體時(密度小於 1 gw/cm^3)，接觸角大小與表面材質有關，與密度大小無關；而為沉體時(密度大於 1 gw/cm^3)，接觸角大小與表面材質無關，會隨著密度增加而變大，可說明了兩沉體互相靠近時，接觸角是會改變，因而產生吸引的現象。

壹、研究動機

我們在 YouTube 網站上看到一部”**一円玉を７枚合わせて浮かばせる**”的影片，發現一圓的日幣竟然會漂浮於水面上(如右圖上)，對於這樣的現象感到好奇，為何密度比水大的日幣(鋁製)不會沉到水中？此外從影片中觀察到硬幣間會互相吸引，形成漂亮的圖形(如右圖下)。因此本組想利用此次科展的機會來探討硬幣浮於水面之原因，並了解其互相吸引的物理機制。

貳、研究目的

一、觀察一圓日幣浮於水面上之情形。

二、探討液體特性(表面張力、密度) 對一圓日幣浮於水面情形之影響。

三、探討漂浮物體負重，對其漂浮行為之影響。

四、研究兩枚一圓日幣浮於水面上所形成互相牽引的現象及原因。

五、探討漂浮物體的表面材質及密度對其漂浮行為之影響。

六、探討漂浮物體在水面上受到排斥及吸引的現象。

參、研究設備及器材

實驗器材：

圖 1 一圓日幣	圖 2 一圓日幣	圖 3 蠟燭	圖 4 檯燈	圖 5 各式水杯

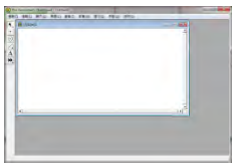
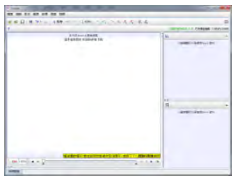

	

圖 6 gsp 幾何畫板	圖 7 tracker 程式	圖 8 相機 (GC-PX10)	圖 9 自製硬幣放置器	圖 10 壓克力水槽
圖 11 油性黏土	圖 12 雷射光筆	圖 13 數位顯微鏡	圖 14 毫克天平	圖 15 針筒
			器材規格 圓柱狀強力磁鐵(大)： 重量：5.97g、直徑：10.0mm、 高度：10.0mm。 圓柱狀強力磁鐵(小)： 重量：0.75g、直徑：8.0mm、 高度：2.0mm。 水杯：重量：4.09g、直徑：43.0mm 高度：30.0mm	
圖 16 酒精 體積百分濃度 (95%)	圖 17 表面附碳銅片	圖 18 白鐵片		

肆、研究方法

一、文獻探討

本研究中的許多工作，乃是針對 D.Vella and L. Mahadevan **[4]** 他們所提出的理論進行實驗的驗證，而他們的研究結果經常被許多研究" Cheerios effect"的人們當作參考依據，而同樣地，本組在實驗的過程中發現他們的理論有些地方必須更深入探討，才能了解所謂的"Cheerios effect"。

1、由 Young–Laplace equation 得知$\Delta p = \gamma(1/R_1 + 1/R_2)$ ，其中 γ 為表面張力係數， $1/R_1$ 和 $1/R_2$ 分別是該點上曲面的最大和最小曲率；並從文獻**[4]**可以得到$\rho gh = \gamma \frac{d^2h}{dx^2}$ ……(1)，此式之通解$h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{L_c}} + c_2 e^{\frac{x}{L_c}}$ ，其中$L_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ ，且當 x→∞時，h(∞)=0，因此c_2=0，所以 $h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{L_c}}$ 。而由文獻**[9]**得知曲線 f(x)的曲率公式應為$f''(x)\{1 + [f'(x)]^2\}^{-\frac{3}{2}}$ ，所以式子(1)應該寫為$\boldsymbol{\rho g h = \gamma * h''(x)\{1 + [h'(x)]^2\}^{-\frac{3}{2}}}$，式子(1)是水面曲線斜率遠小於 1 時的近似結果，如果整體水面曲線斜率太大，則理論曲線將會有偏差，因此本實驗利用 USB 顯微鏡拍攝硬幣浮於水面時所呈現的水面曲線，並利用 GSP 幾何軟體將圖像轉換成座標曲線，藉以了解理論曲線與實際水面曲線間的差異，並推測當硬幣與水面接觸角大於 135°，即整條水面曲線斜各點率大於 1 時，理論分析所得的數值將與實際測量值有出入。

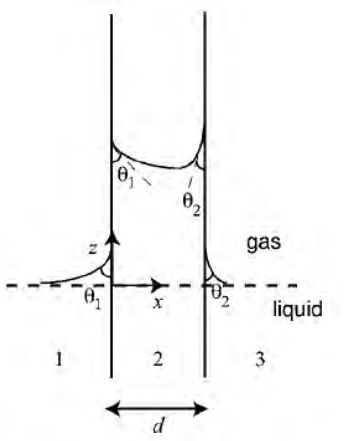


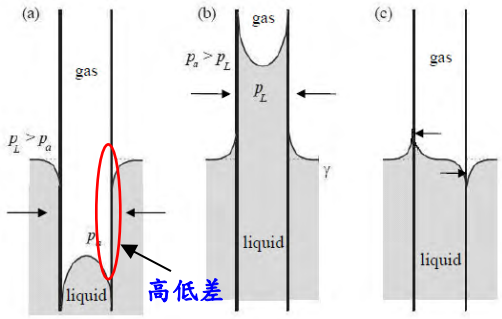
Fig. (a). The geometry of two infinite plates in a semi-infinite fluid. The planes have contact angles θ_1 and θ_2 and are at a horizontal distance *d* apart.**[4]**

2、文獻**[4]**中針對浮於水面的物體之間會有吸引或排斥的現象提出解釋，在文中是假設兩無限大的平板置於水中，當兩平板相互接近時，會有類似毛細現象的情形發生，如 Fig. (a)，而使平板兩側受力不均，其受力可寫為：

$$F_h = -\int_{-\infty}^{h_2(0)} \rho g z dz + \int_{-\infty}^{h_1(0)} \rho g z dz = -\int_{h_1(0)}^{h_2(0)} \rho g z dz = \frac{1}{2} * \rho g[h_1(0)^2 - h_2(0)^2] \quad \cdots\cdots(2)$$

$$F_h = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{(\cot\theta_1 \cosh(d/L_c) + \cot\theta_2)^2}{\sinh^2(d/L_c)} - \cot^2\theta_1\right] \quad \cdots\cdots(3)$$

由式子(2)可以得知，受力來源最主要是平板兩側水位高低所造成的，且由文中得知，整個吸引過程接觸角是不會發生變化的，主要是因平板左右兩側的壓力不均造成平板受力而移動，因此看起來會有吸引或相吸的現象，如圖(b)所示。而本組研究硬幣互相吸引的情形發現，其吸引的現象與圖(b)是不同，因為本組所使用的硬幣是密度大於 1 的沉體，即水面與硬幣的接觸點皆在硬幣上緣，所以兩側水面接觸點是不會有高低落差；此外所使用的硬幣厚度很薄，則兩側壓力差所帶來的效應將會被削減，因此本組認為硬幣這種所謂密度大於 1 的沉體若浮於水面上，其互相吸引及排斥的行為，將會與文獻所提到兩無限大平板互相吸引的情形不同(本組認為兩無限大的平板與水面接觸的形式是屬於浮體的範疇，此判別方式是以水面與物體壁面接觸形式來分類，如圖 19 所示)。



圖(b) 兩無限大平板因兩側壓力不同，而造成吸引或排斥的示意圖。

圖 19 物體浮於水面上，沉體及浮體與水面接觸形式差異示意圖。

我們將文獻中所提到內容節錄出來：

This result shows that vertical plates at a liquid–gas interface will attract if they have like menisci and otherwise repel, as we saw in Sec. II with floating objects. However, the physical mechanism here is subtly different. We can no longer argue in terms of one plate following the meniscus imposed by the other because these plates do not float, meaning that there is no analogue of the condition of vertical force balance in this case. Instead, we must consider the effects of hydrostatic pressure which result from the deformation of the interface.

因此接下來的實驗重點將在於釐清兩者不同之處，使人們對”Cheerios effect”的了解更加完善。

二、研究原理：

(一) 表面張力

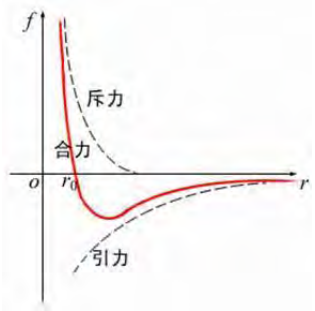


圖 20 分子間作用力。

在多相體系中，相之間存在著界面。習慣上人們僅將氣-液，氣-固界面稱為表面。通常，由於環境不同，處於界面的分子與處於相本體內的分子所受力是不同的。在水內部的一個水分子受到周圍水分子的作用力的合力為零，如圖 21 所示；但在表面的一個水分子卻不是如此，因上層空間氣相分子對它的吸引力小於內部液相分子對它的吸引力，所以該分子所受合力不等於零，其合力方向垂直指向液體內部，如圖 22 所示，結果導致液體表面具有自動縮小的趨勢，這種收縮力稱為表面張力。

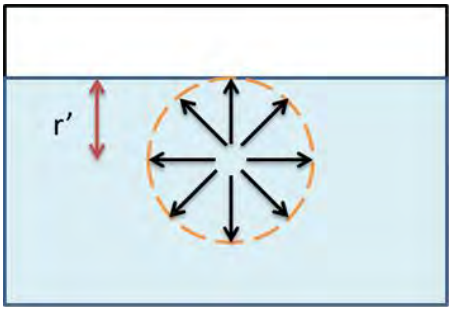


圖 21 液體內部分子受到的合力為零。

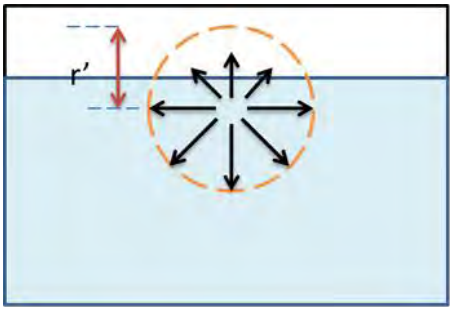


圖 22 液體表面分子受到作用力向內。

其中r′為稱為分子的作用距程(range of molecular action) ，其大小大約不出幾個分子直徑。

(二) Young–Laplace equation

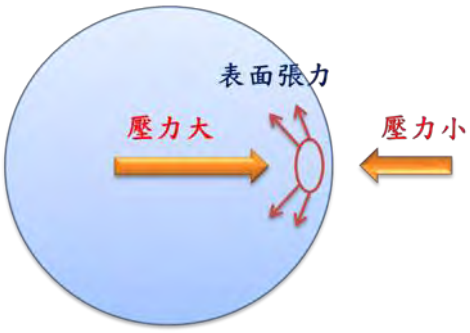


圖 23 泡泡表面張力示意圖。

肥皂泡必須靠我們強行往裡面吹氣才能成形，顯示泡泡和外界環境之間有壓力差。這並不令人驚訝，因為表面張力會壓縮泡膜，泡泡內必須有另一種力與之抗衡，才能維持泡泡一定的大小。此壓力差和泡膜面的曲率有關。由精確的實驗可以證明泡泡裡外的氣壓差 Δp 和半徑 R 成反比，也就是和曲率 $1/R$ 成正比。

十九世紀初分別由物理學家楊格(Thomas Young,1773-1829) 和拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) 從流體力學和天體力學的計算中得到 $\Delta p=\gamma(1/R_1+1/R_2)$，其中 γ 為表面張力係數，其中， $1/R_1$ 和 $1/R_2$ 分別是該點上曲面的最大和最小曲率。

三、實驗步驟：

實驗一：觀察一圓日幣浮在水面的情形。

1、先將壓克力水槽裝水 100cc，並放入一圓日幣，使之浮於水面，再利用 USB 顯微照相機，由側面拍攝硬幣浮於水面之情形。

2、利用 GSP 幾何繪圖軟體分析所拍攝的照片，以求得硬幣入水深度及接觸角的大小。

實驗二：探討液體特性(表面張力、密度) 對一圓日幣浮於水面情形之影響。

1、先將壓克力水槽裝水 100cc，然後加入 5.0ml 濃度 95%的酒精，並重複實驗一之步驟。

2、接著再加入 5.0ml 的酒精，重複實驗一之步驟，並持續添加酒精，直到硬幣無法浮於水面為止。

實驗三：探討漂浮物體負重，對其漂浮行為之影響。

1、按照先前方式將測量系統架設定位。

2、使用美工刀切下一小塊油土，將油土揉成圓球狀，並將其壓平貼於硬幣中央，如圖 24 所示。

圖 24 硬幣黏上油土。

3、將油土連同硬幣放置於毫克天平秤重，並記錄下來。

4、利用自製硬幣放置器，使硬幣漂浮在水面上，並去除下方氣泡。

5、拍攝硬幣浮於水面的情形。

註：在硬幣浮於水面的前提下，採用十種不同重量之黏土。

實驗四：研究兩枚一圓日幣浮於水面上所形成互相牽引的現象及原因。

1、將兩枚硬幣靜置於水面上，利用高速攝影機拍攝以 60fps(每秒 60 張)的速度拍攝影片，並以 tracker 程式分析其運動情形。

2、改變液體特性，依序在 500ml 的水中，加入 25ml 酒精(濃度 95%)。

3、同時，以 USB 顯微鏡由側面觀察硬幣在吸引過程中，其接觸角變化的情形。

實驗五：探討漂浮物體的表面材質對其漂浮行為之影響。

1、將水杯下方貼上強力磁鐵，使其漂浮與水面上，並確認當水杯裝滿水時，水杯會沉入水中。

2、使用針筒將水注入水杯中，藉以改變水杯總重量(總體積保持不變)。

3、依序改變注入水量多寡，利用 USB 顯微鏡拍攝水杯的接觸角，觀察接觸角變化情形。

4、改變水杯表面材質，先使用砂紙將水杯表面磨過，然後水杯內裝滿水，並置於蠟燭上燒烤，使水杯表面上附著碳黑；再重複之前的實驗步驟，觀察水杯接觸角與水杯重量之關係。

5、接著使用汽車美容材料行購買的親水劑，塗在水杯表面，再重複之前的實驗步驟，觀察水杯接觸角與水杯重量之關係。

實驗六：探討漂浮物體在水面上受到排斥及吸引的現象。

1、將白鐵片以鐵夾夾住置入水中，再將硬幣浮於水面上，當硬幣接近時，以 USB 顯微鏡拍攝其互相排斥情形，並觀察水面及兩側接觸角變化的情形。

2、使用蠟燭燒烤銅片，使銅片的一側附著碳黑，再以鐵夾夾住置入水中，並重複前項步驟，觀察水面及兩側接觸角變化情形。

伍、研究結果與討論

實驗一：觀察一圓日幣浮在水面的情形。

本組利用 USB 數位顯微鏡拍攝硬幣浮於水面之情形，再利用 GSP 繪圖軟體將水面曲線描繪出來，並在曲線上標出多點座標，以利於分析水面曲線的彎曲情形。

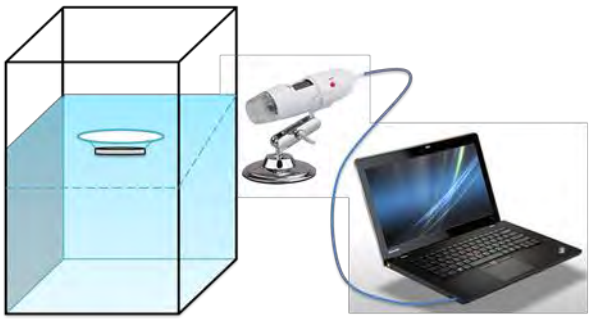


圖 25 實驗一裝置示意圖。

首先預想浮在水面的可能情形：共有六種可能

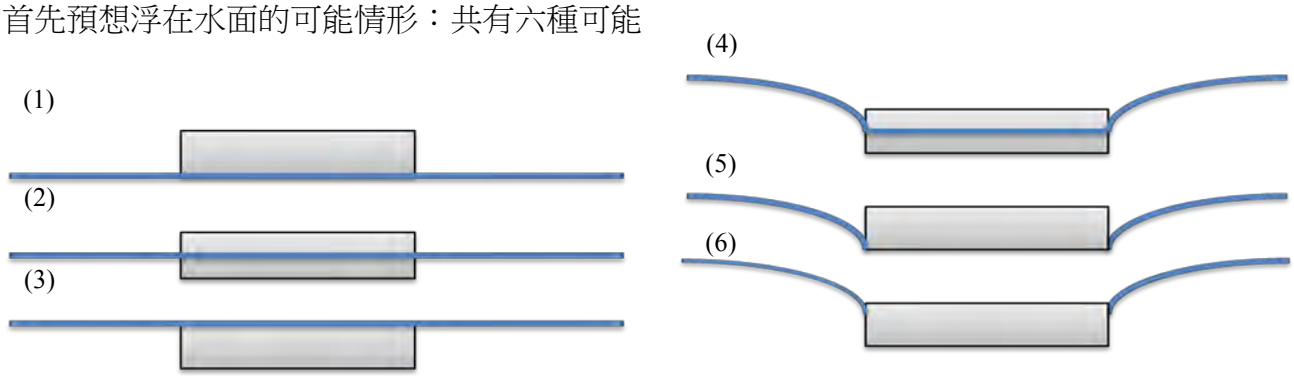


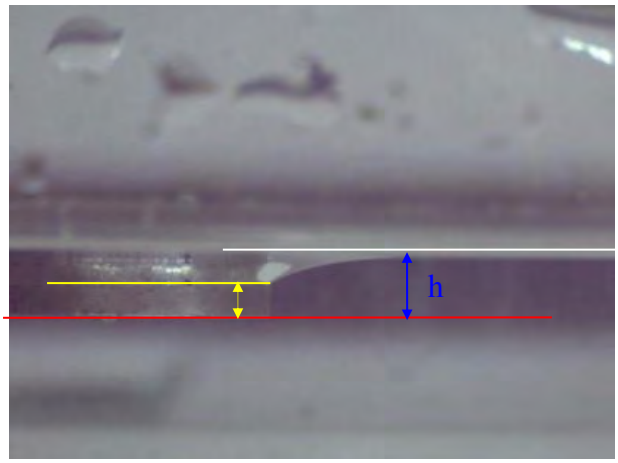
圖 26 硬幣浮於水面的六種可能情形。

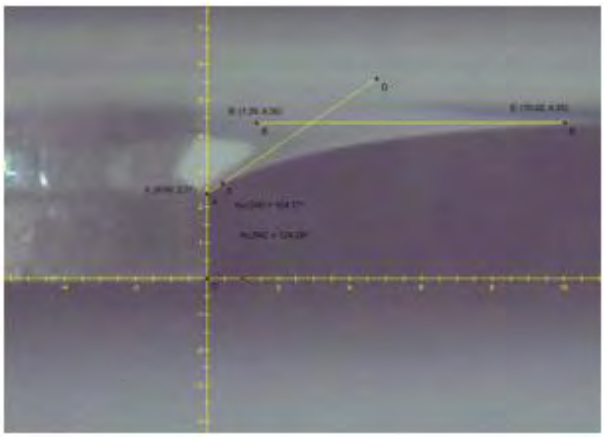
結果：

1、一圓日幣：材質為鋁、重 1.0g、直徑 20 mm、厚度 t=1.18 mm、密度 2.70g/cm^3。

置於蒸餾水上，水的表面張力係數為 72.8 mN/m

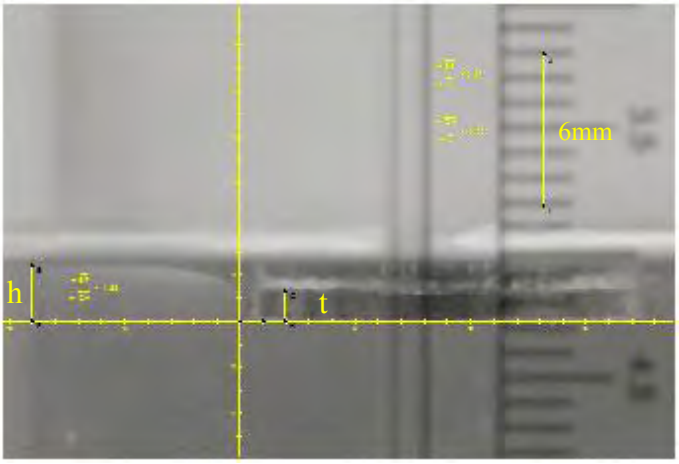
利由 USB 顯微攝影機所拍攝的照片作來測量硬幣入水深度 h 及接觸角。





紅色線代表硬幣的最下緣，白色線代表水平面，黃色線代表硬幣厚度 t，藍色線代表入水深度 h；已知硬幣厚度 t=1.18 mm，利用比例尺的方式，可推得入水深度 h=2.18 mm

2、進一步使用相機所拍攝之照片來比較測量上是否有誤。

	以一般相機拍攝硬幣浮於水中之照片，拍攝時須調整鏡頭角度與水平面呈現水平，才不會有誤差。利用 GSP 幾何繪圖軟體測量出各線段長度，並依透明尺上小刻度 1mm(圖中以長度 6.0mm 為比例尺)，並依比列換算出 t=1.20mm，h=2.22mm；若定義 t=1.18mm，則 h=2.18mm。
	由左圖基本上可以發現水平面與硬幣的接觸方式是屬於第六類接觸情形。**水面是與硬幣上緣接觸，且成彎曲的情形。**

討論：

由文獻**[3]**得知，雖然其假想之硬幣漂浮於水面之情形與本組推論相異(水面與硬幣的接觸在硬幣下緣)，但仍可以用來檢驗實驗的準確性。由之前實驗測量得知 h≒2.18mm，與理論值相同，但實驗中所測量到的接觸角為 124.3°，與文獻中理論計算的 132.1°有些微出入，百分誤差約為 6%。

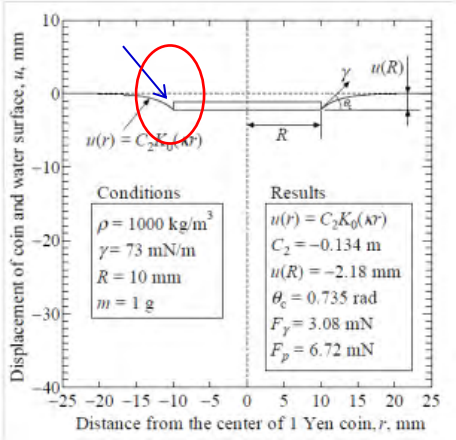


圖 27 文獻**[3]**理論計算結果。

因此，本組改以文獻**[6]**所提供的計算方式，來探討一圓日幣浮於水面之情形。

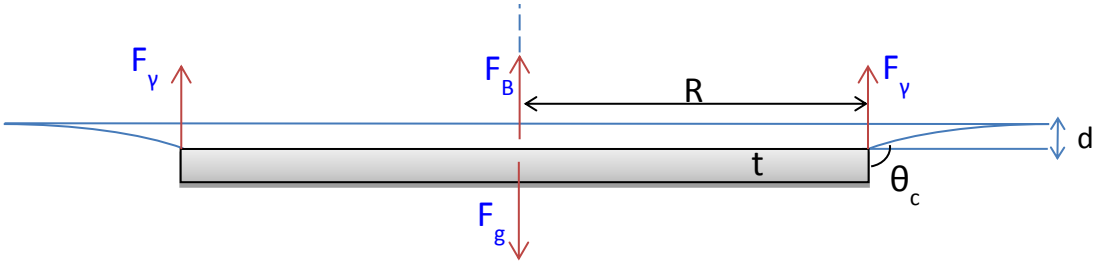


圖 28 硬幣浮於水面受力示意圖。

硬幣浮於水面，且靜止不動，這就表示其所合力為零，因此我們可以寫出下列式子：

$$F_g=F_\gamma+F_B$$

其中 F_g 為硬幣所受重力，F_γ 為硬幣四周所受到之表面張力，F_B 為硬幣所受到之浮力。

$$F_g=mg=\pi R^2 t\rho g$$

$$F_\gamma=2\pi R\gamma\sin(\theta_c-90°)$$

其中 **t** 為硬幣厚度，γ 為液體之表面張力係數，ρ 為硬幣之密度，R 為圓形硬幣之半徑。

浮力的部分，是因為硬幣而排開的液體體積所造成的，包含硬幣本身體積外，還考慮水平面及硬幣上方間的體積，而此項之體積以「圓錐臺」的體積來加以近似**(比實際體積還小)**。

$$F_B\fallingdotseq\rho_0 g\pi R^2 t+\rho_0 g\pi\left[R^2 d+Rd^2\cot(\theta_c-90°)+1/3\times d^3\cot^2(\theta_c-90°)\right]$$

其中 ρ_0 為液體密度，d 為硬幣上緣至水平面之距離。

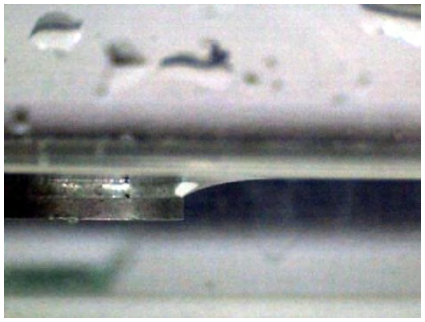
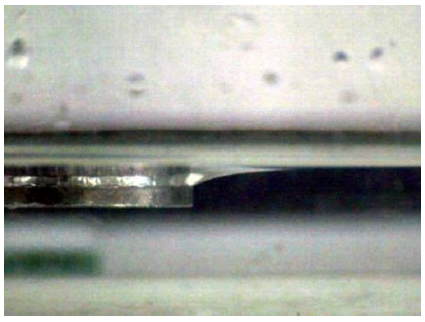
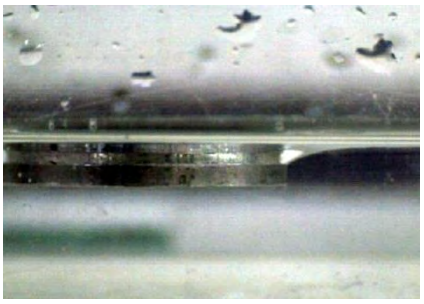
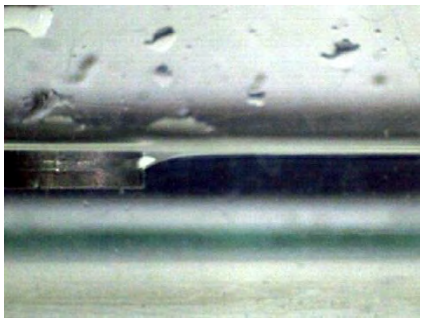
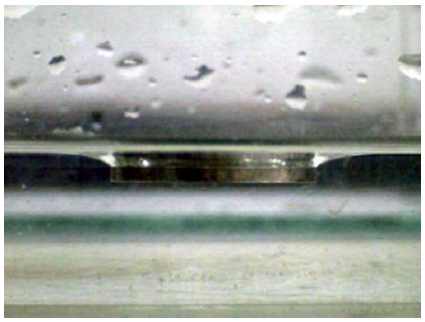
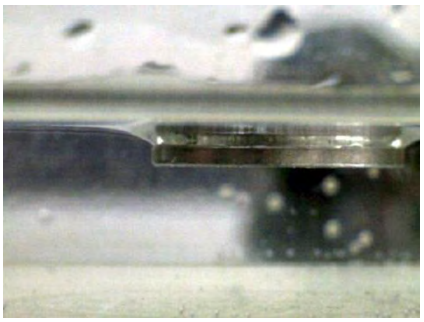
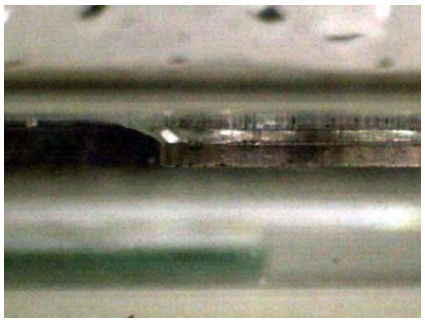
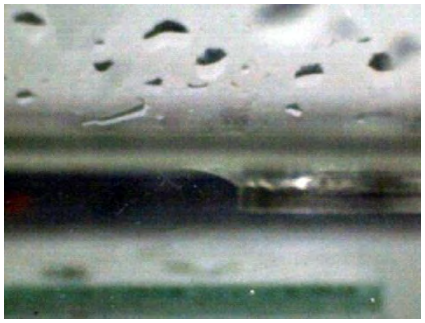
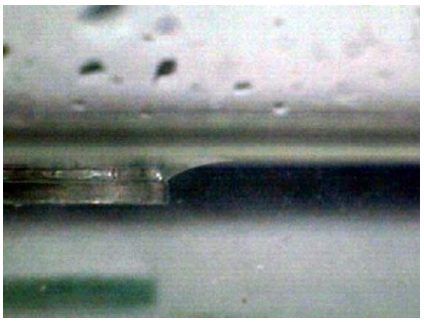
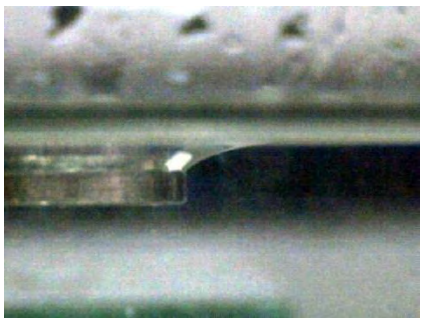
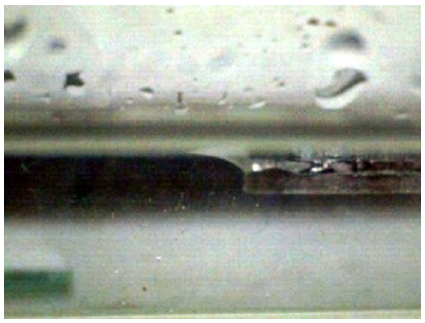
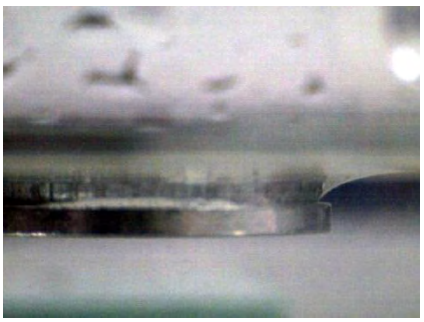
代入實驗所測量到的數據，R=10mm，t=1.18mm，g=9.8 m/s^2，ρ=2700 kg/m^3，γ=*0.0728* N/m，純水 25℃時密度 ρ_0=997.0kg/m^3，θ_c=124.3°，d=1.00mm，可求得 $F_\gamma+F_B\fallingdotseq 0.994$ gw，但若改以 θ_c=132.1°，代入計算則 $F_\gamma+F_B\fallingdotseq 10.13\times10^{-3}$ N=1.034 gw，而兩者的 F_g=1.0gw。

因為以近似的方式做計算，所以計算求得硬幣所受表面張力及浮力之合力應略小於硬幣之重力，因此經由比較兩個不同接觸角計算出來的結果發現，文獻[3]中 θ_c=132.1°所推得的結果明顯比硬幣重量還大，因此接觸角應該還要再小一點，所以很明顯的本組所測量的接觸角比較符合實際情形。

實驗二：探討液體特性(表面張力、密度) 對一圓日幣浮於水面情形之影響。

在 100ml 的水中加入 5ml 濃度 95%的酒精，觀察硬幣浮於水面之情形，接著每次再加入 5ml 酒精，改變液體的酒精濃度，來探討液體特性(表面張力、密度) 對一圓日幣浮於水面情形之影響。

結果：

		
加酒精 0ml	加酒精 5.0ml	加酒精 10.0ml
		
加酒精 15.0ml	加酒精 20.0ml	加酒精 25.0ml
		
加酒精 30.0ml	加酒精 35.0ml	加酒精 40.0ml
		
加酒精 45.0ml	加酒精 50.0ml	加酒精 55.0ml

註：固定水量為 100ml，只改變加入酒精量的多寡。

利用 GSP 繪圖軟體將硬幣浮於水面之水面曲線，利用描點方式將其轉換成直角座標圖形，以利後續的分析討論。

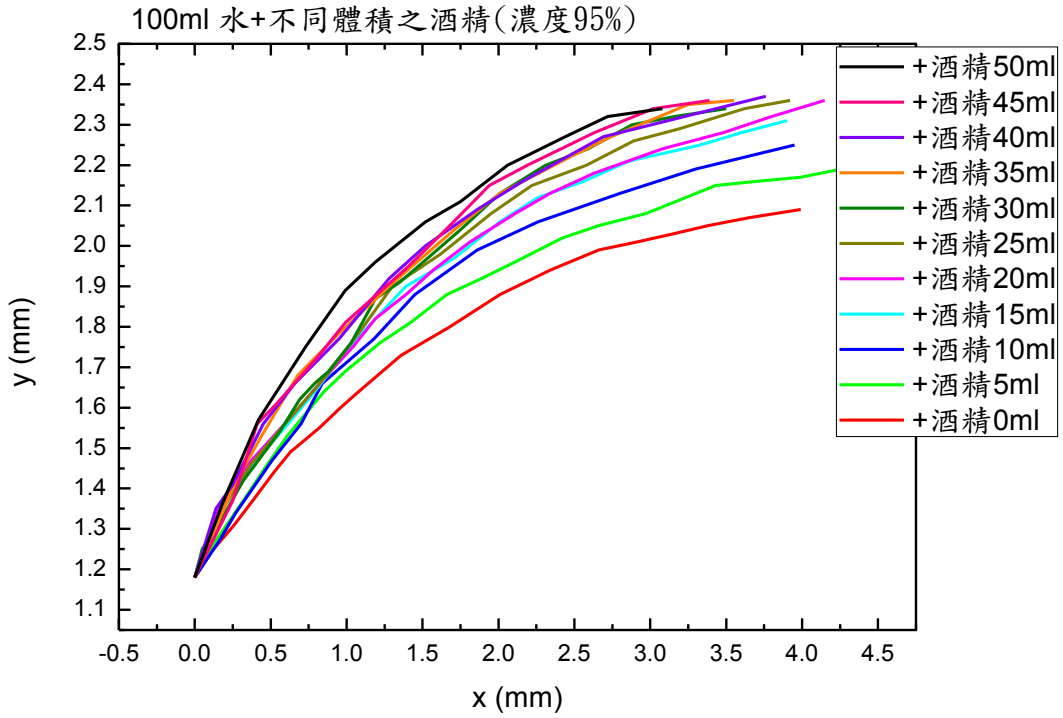


圖 29 在固定體積的水中，加入不同體積酒精，當硬幣漂浮時，所形成的水面曲線圖形。

由圖 29 可以看出，隨著酒精濃度增加，曲線越來越高，代表硬幣入水深度愈深，因此經由查表及內插法可求得酒精不同濃度時的密度及表面張力係數，如表 1 所示。

表 1 不同酒精濃度水溶液，其密度及表面張力係數列表。

水體積 (ml)	酒精體積 (ml)	重量百分濃度 (%)	混合後密度 (gw/cm^3)	體積百分濃度 (%)	表面張力係數 (mN/m)
100	0	0	1.0	0	72.8
100	5	3.60	0.991	4.52	57.54
100	10	6.93	0.986	8.67	48.94
100	15	10.03	0.981	12.46	43.36
100	20	12.90	0.977	15.98	39.63
100	25	15.58	0.974	19.24	37.06
100	30	18.09	0.971	22.26	35.24
100	35	20.44	0.968	25.08	33.94
100	40	22.65	0.965	27.70	32.99
100	45	24.72	0.962	30.14	32.27
100	50	26.67	0.959	32.42	31.73

註：酒精濃度為 95%

依據所加酒精多寡，換算出重量百分濃度，然後利用查表的方式，得知相對應之混合液體密度，再轉換出體積百分濃度，並利用已知不同酒精濃度(體積百分濃度)時的表面張力係數來作圖，畫出趨勢線，並利用內插法求出所需的表面張力係數。

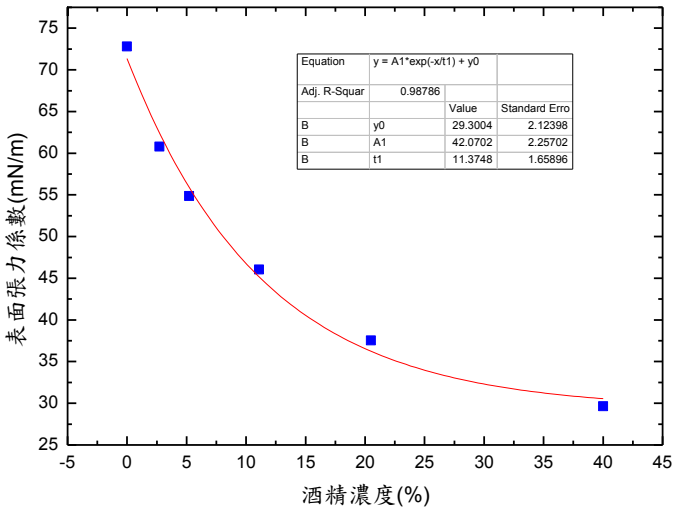


圖 30 表面張力係數與酒精濃度關係圖。

表 2 不同濃度酒精之表面張力係數。

酒精濃度 (%)	表面張力係數 (mN/m)	
0	72.8	純水
2.72	60.79	
5.21	54.87	
11.1	46.03	
20.5	37.53	
40	29.63	
87.92	23.64	
100	22.03	酒精

表 3 一圓日幣在不同濃度酒精表面漂浮時，其入水深度、接觸角及其受力情形列表。

添加酒精體積 (ml)	入水深度 h(mm)	接觸角 (°)	表面張力 (gw)	硬幣入水體積所造成之浮力 (gw)	水平面及硬幣上方間的體積所造成浮力 (gw)	合力 (gw)
0ml	2.18	124.3	0.2630	0.3696	0.3614	0.9940
5ml	2.27	127.4	0.2241	0.3663	0.3888	0.9792
10ml	2.37	129.2	0.1983	0.3644	0.4237	0.9864
15ml	2.4	133.2	0.1903	0.3626	0.4257	0.9786
20ml	2.45	136.9	0.1855	0.3611	0.4367	0.9833
25ml	2.49	138.2	0.1771	0.3600	0.4483	0.9854
30ml	2.51	141.0	0.1756	0.3589	0.4496	0.9842
35ml	2.53	141.8	0.1710	0.3577	0.4543	0.9831
40ml	2.54	142.9	0.1687	0.3566	0.4548	0.9802
45ml	2.56	144.1	0.1676	0.3555	0.4587	0.9818
50ml	2.57	148.2	0.1729	0.3544	0.4545	0.9819

註：一圓日幣重量為 1.0gw

利用表 1 所得知的液體密度及表面張力係數，再加上所測量到的硬幣入水深度及接觸角大小，便可採用之前的計算模式，來了解硬幣浮在水面時的受力情形。由表 3 中我們可以發現，隨著酒精濃度的增加，硬幣的入水深度及接觸角也越來越大，而硬幣所受向上的浮力及表面張力兩者的合力，則略小於硬幣所受重力。

接著，利用之前所描繪出的硬幣浮於水面所形成水面曲線，並由文獻**[4]**所提供的理論曲線來分析，$h(x)=h_0-y(x)=c_1e^{-x/L_c}$，其中 h_0 為入水深度，再由 x=0 時的切線斜率來計算出接觸角的大小，並將所求得的理論值與實際值做比較。

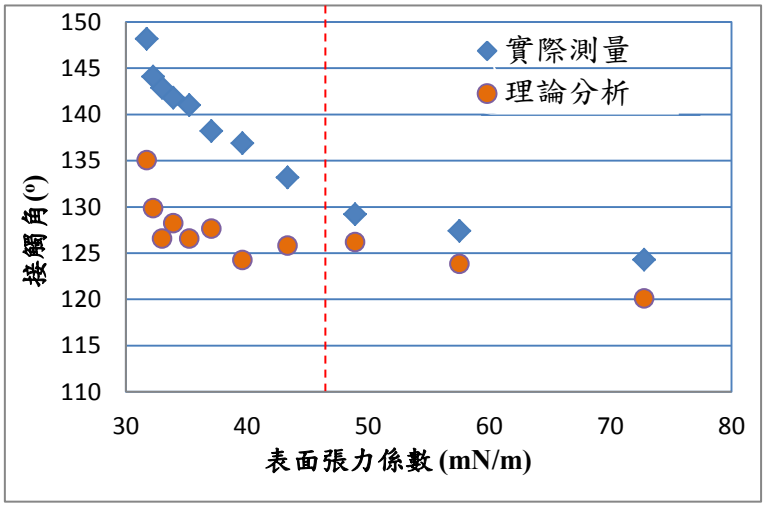


圖 31 硬幣浮於水面時，接觸角大小與液體表面張力係數之關係圖。

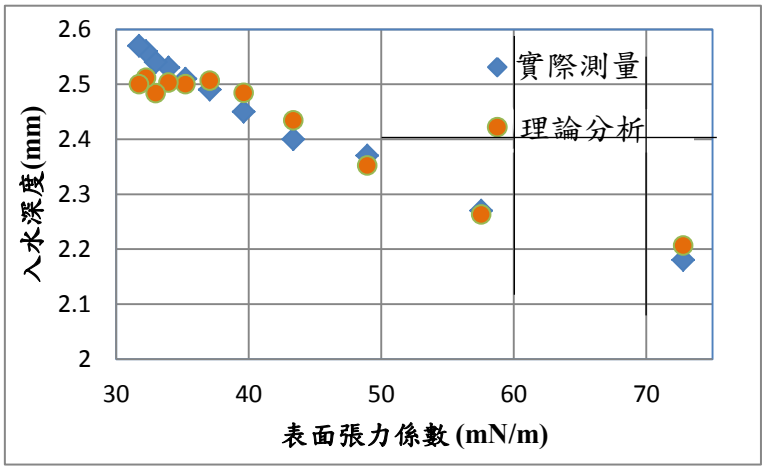


圖 32 硬幣浮於水面時，入水深度與液體表面張力係數之關係圖。

由圖 31、32 可以發現，硬幣浮於水面時，隨著液體的表面張力係數變小時，接觸角與入水深度有增大的情形，且發現入水深度的理論值及實際值差異不大，但**接觸角的部分，在實際測量值大於 133.2° 時，理論值與實際值差異就變得比較大**。

改以液體密度來分析，探討液體密度改變對接觸角及入水深度之影響。

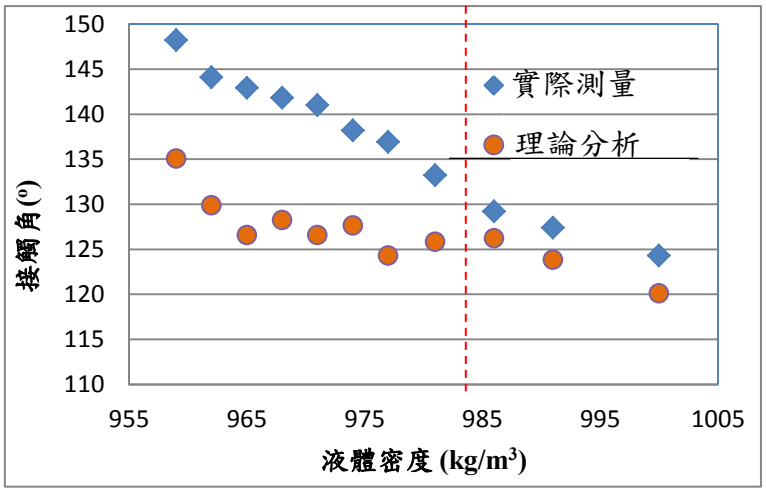


圖 33 硬幣浮於水面時，接觸角大小與液體密度之關係圖。

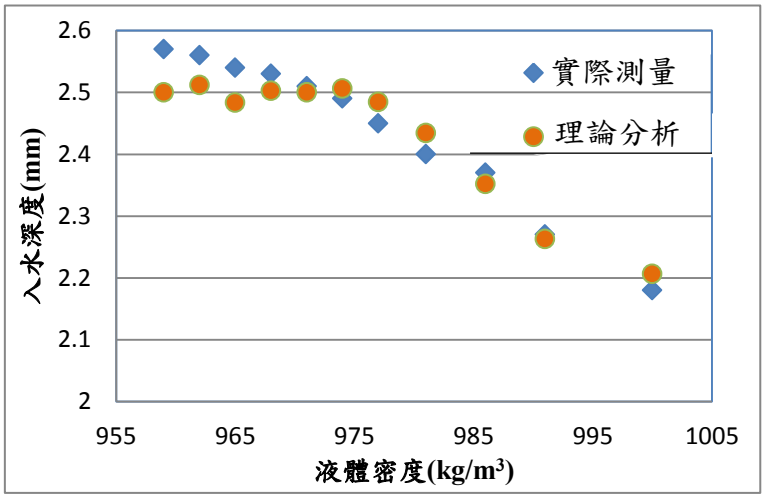


圖 34 硬幣浮於水面時，入水深度與液體密度之關係圖。

同樣由圖 33、34 可以發現，當液體密度變小時，接觸角及入水深度相對就會變大，且接觸角的部分在**實際測量值大於 133.2° 時**，理論值與實際值差異就變得比較大。

總結以上討論，我們得知當水溶液的酒精濃度升高時，液體的表面張力係數及液體密度都會減小，造成硬幣所受浮力及表面張力減小，因此硬幣若要保持漂浮於溶液表面，則其接觸角以及入水深度都要隨著增加，且接觸角部分當實際測量值愈大時，理論值與實際值差異就愈大，如圖 35 所示。

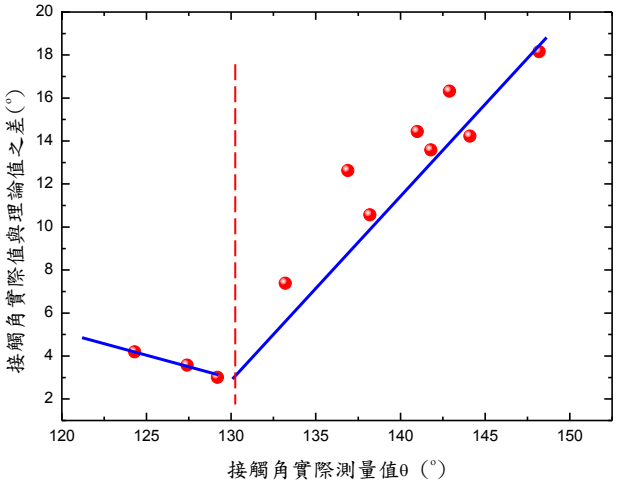


圖 35 接觸角實際值與理論值之差與接觸角實際測量值之關係。

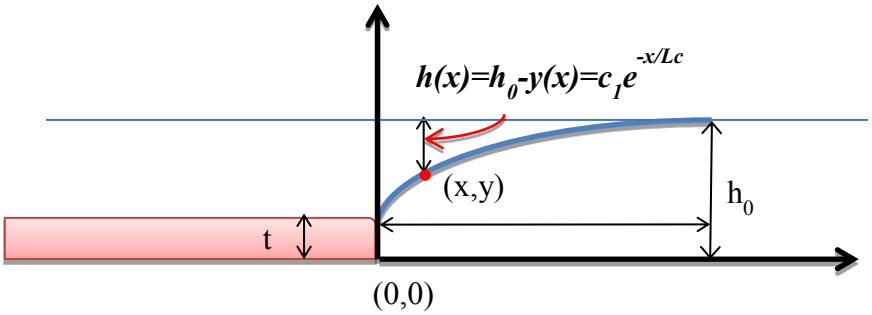


圖 36 水面曲線方程示意圖。

本組認為水面會發生彎曲情形，與內外壓力差有關，因此，我們猜測水面曲線的曲率會與 h(x)的大小有關，而由文獻[4]中得知，曲線上每一點的平衡方程式可寫為$\gamma \frac{d^2h}{dx^2} = \rho g h$ (由 **(Young–Laplace equation** 推論)。此方程式的解可寫為$h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{L_c}} + c_2 e^{\frac{x}{L_c}}$，其中 $L_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$，且當 x→∞時，h(∞)=0，因此最終可得$h(x) = c_1 e^{-\frac{x}{L_c}}$，因此我們先嘗試以 $h(x)=h_0-y(x)=c_1e^{-x/Lc}$ 來分析水面曲線，之所會以此方程式嘗試，與微分方程求解有關，數學理論太難，不須太過深究，所以將實際測量到的入水深度 h_0 減去 $y(x)$值而得到 $h(x)$值，並且取對數作圖，如圖 37，發現圖形呈現線性的關係，也因此我們可以確認我們的假設是可信的，也就是說水面線上任兩點的內部壓力不同(因為外部壓力都相同)，而造成水面線上任兩點曲率不同，這也如同之前理論所提到的泡泡之所以為球形，是因為泡泡內外壓力差及表面張力所造成的，只是泡泡的曲面上任兩點內外壓力差皆相同，所以曲率皆相同，因而才形成球形。綜合以上討論，本組認為水面之所以會彎曲是因為表面張力的關係，而彎曲程度則與其內外壓力差有關，只是差別在於本現象的每一點壓力差皆不相同。

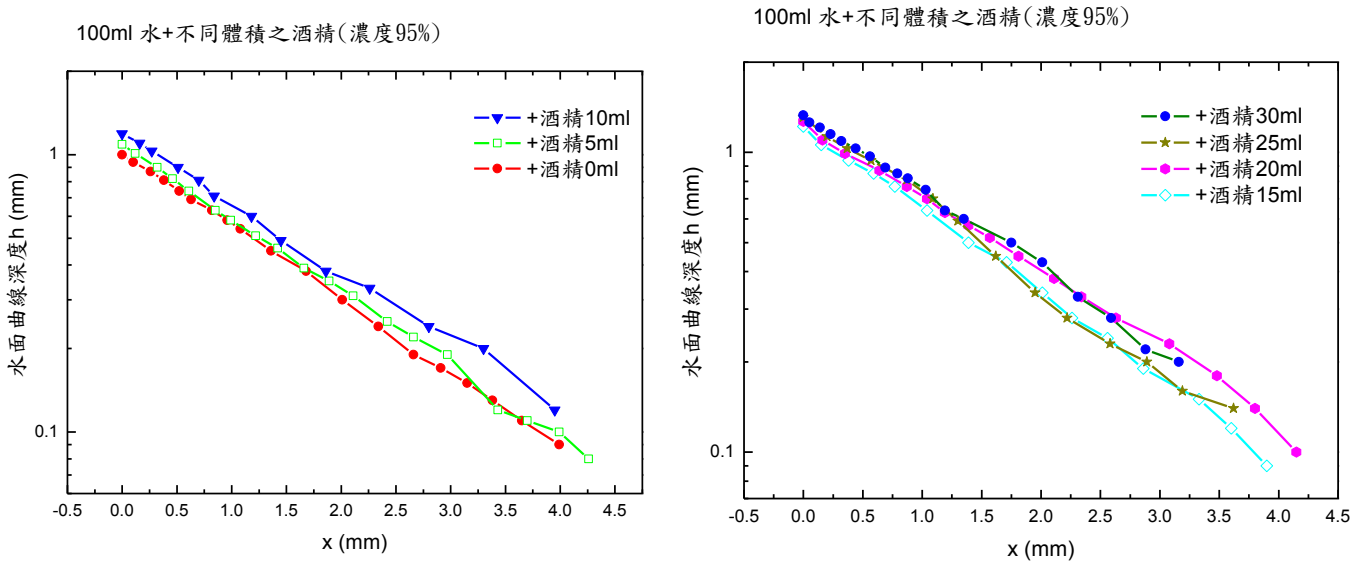


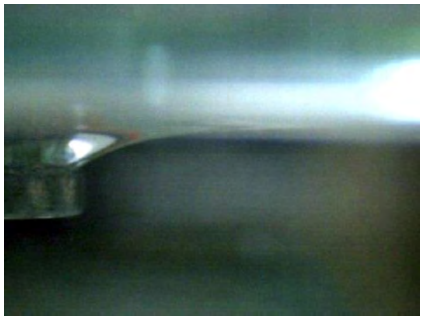
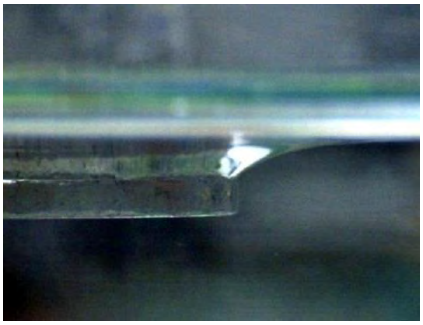
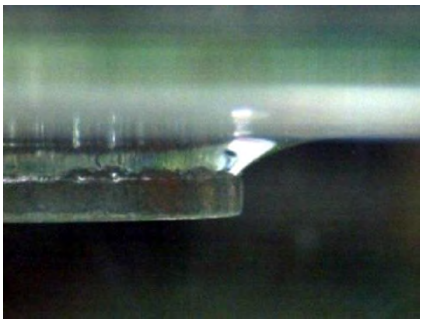
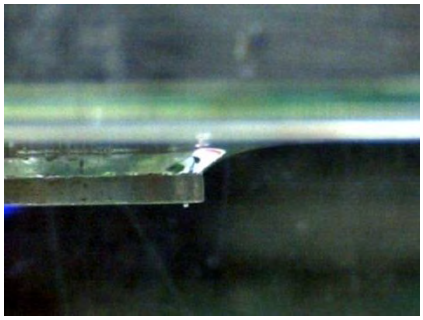
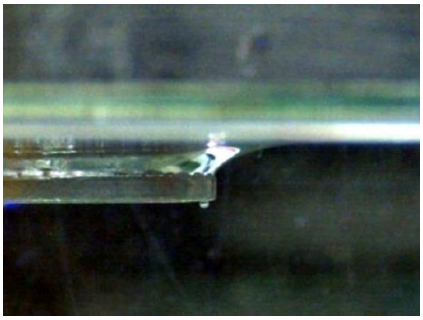
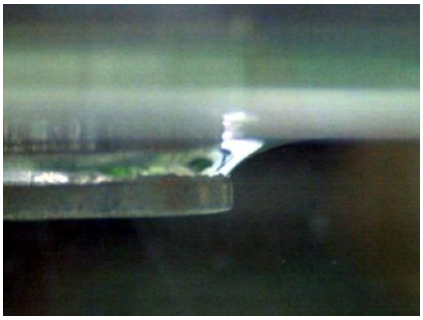
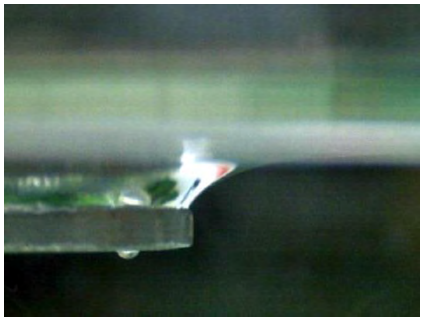
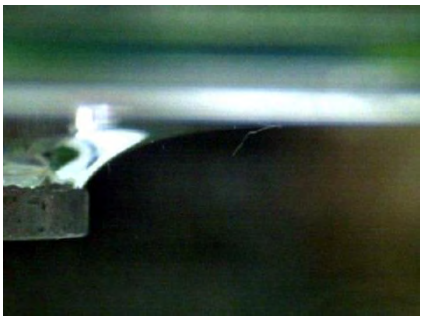
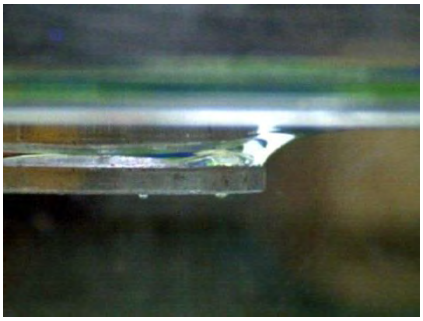
圖 37 不同濃度酒精溶液，硬幣入水之水面曲線圖；水面曲線深度 h 與距硬幣水平距離 x 之關係圖，並在 y 軸取對數。

另外，我們可以將水面曲線方程式近似為 $y(x)=h_0-c_1e^{-x/Lc}$，並以 Exponential Decay 分析水面線曲線，如圖 29，可以由分析所得到的參數得知入水深度，而我們將所得到的結果與實驗值相互比較，如圖 31~34 所示，發現與入水深度的理論值與實際測量值非常近似，但接觸角的部分，會因接觸角實際測量值愈大，理論值與實際值差異愈大，尤其是當接觸角實際測量值大於 133.2° 時，這是因為理論曲線是以近似的方式求得，所以水面曲線各點的斜率越小於 1 時，則理論值與實際值越相符。

實驗三：探討漂浮物體負重，對其漂浮行為之影響。

本實驗將小塊陶土黏於硬幣上方，改變硬幣的總重，但保持硬幣入水的體積，以及固定水的密度及表面張力係數，觀察物體浮於水面情形與其重量之關聯性。

結果：

		
總重 1.060g	總重 1.098g	總重 1.137g
		
總重 1.186g	總重 1.233g	總重 1.284g
		
總重 1.317g	總重 1.351g	總重 1.373g

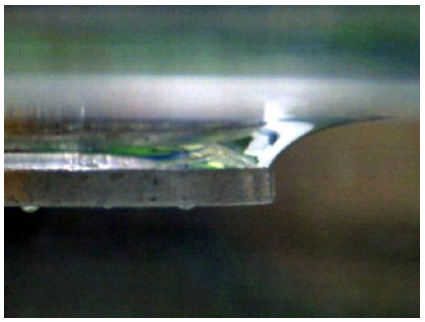
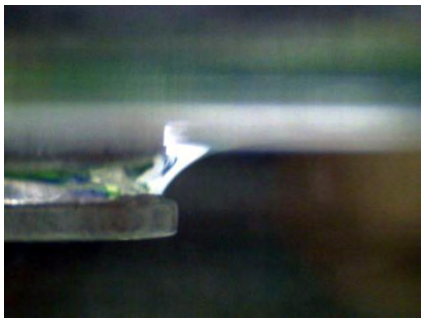
		
總重 1.395g	總重 1.412g	

表 4 在硬幣上方放置不同重量之油土，增加硬幣負重，觀察入水深度及接觸角之變化情形。

硬幣+油土總重(gw)	入水深度 h (mm)	接觸角 (°)	合力 (gw)
1.0	2.18	124.30	0.994
1.060	2.30	127.76	1.058
1.098	2.33	131.81	1.088
1.137	2.37	134.53	1.118
1.186	2.46	139.60	1.173
1.233	2.55	143.49	1.218
1.284	2.64	147.44	1.267
1.317	2.70	153.10	1.302
1.351	2.82	156.70	1.352
1.373	2.86	157.60	1.367
1.395	2.90	158.44	1.383

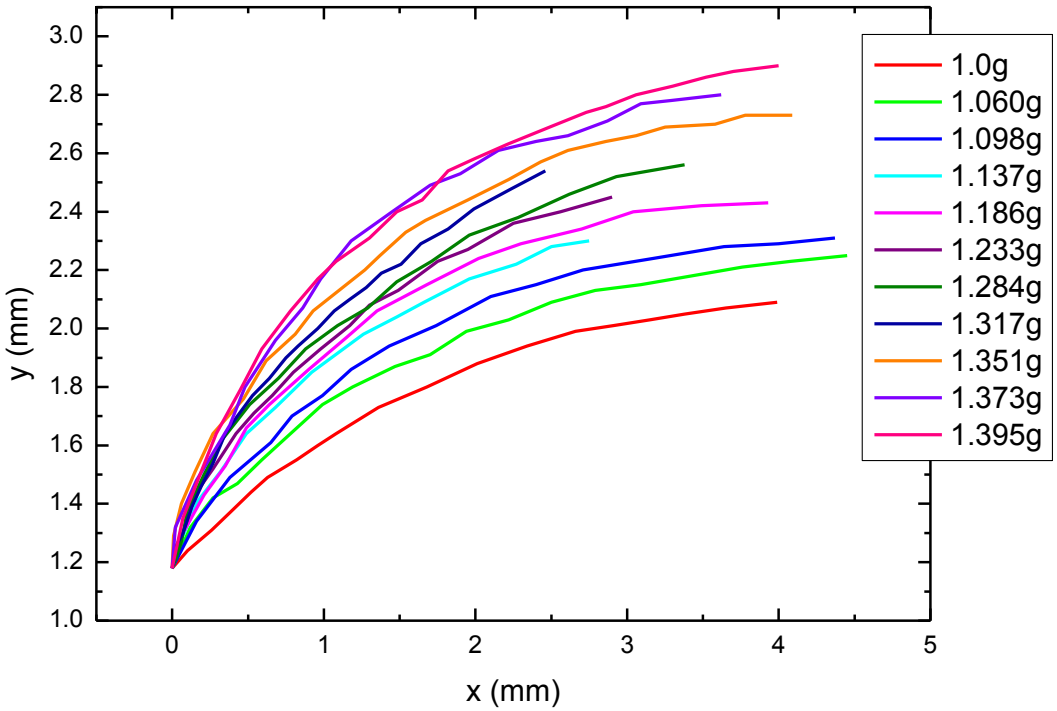
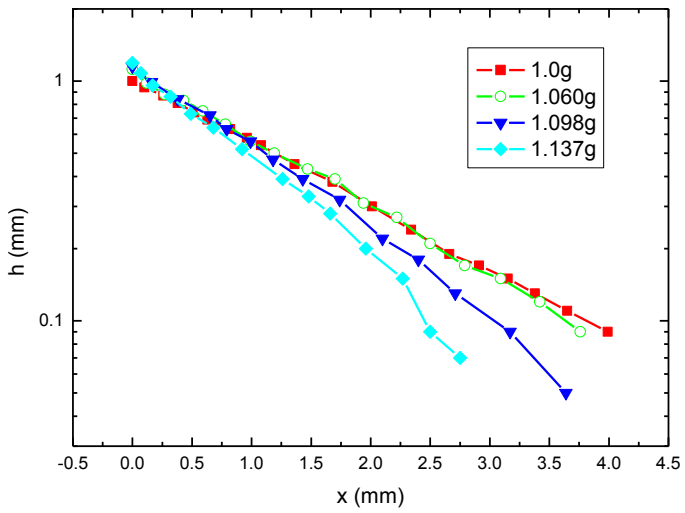
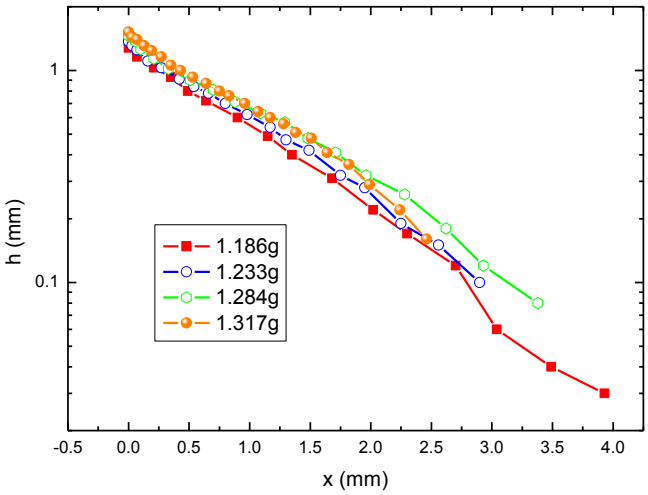


圖 38 不同硬幣加油土總重，其硬幣浮於水面之水面曲線圖形。





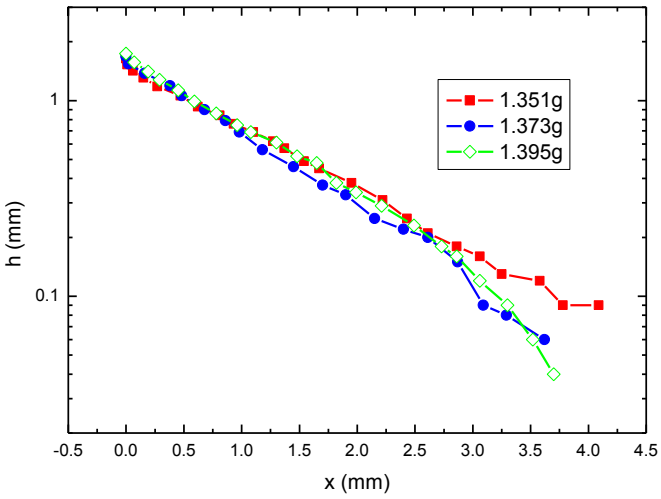


圖 39 不同硬幣加油土總重，入水之水面曲線圖；水面曲線深度 h 與距硬幣水平距離 x 之關係圖，並在 y 軸取對數尺度來呈現。

討論：

1、由圖 38 可以發現隨著硬幣加油土總重增加，硬幣入水深度與接觸角也會跟著變大，因為當重力增加時，硬幣所受到的浮力及表面張力在 y 方向的分力也要跟著變大，這樣硬幣才能穩定的浮於水面上。

2、圖 39 改以$\boldsymbol{h(x) = h_0 - y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{l_c}}}$方式呈現，將實際測量到的入水深度 h_0 減掉 $y(x)$，並且在 y 軸的部分取對數，發現圖形仍具有線性行為，更加證明硬幣浮於水面之曲面彎曲情形，與其曲面兩側壓力差有關。

同樣根據之前的理論，以 Exponential Decay 的方式直接分析曲線，可求得入水深度，以及由斜率$y'(0)$可以換算出硬幣與水面之接觸角大小。

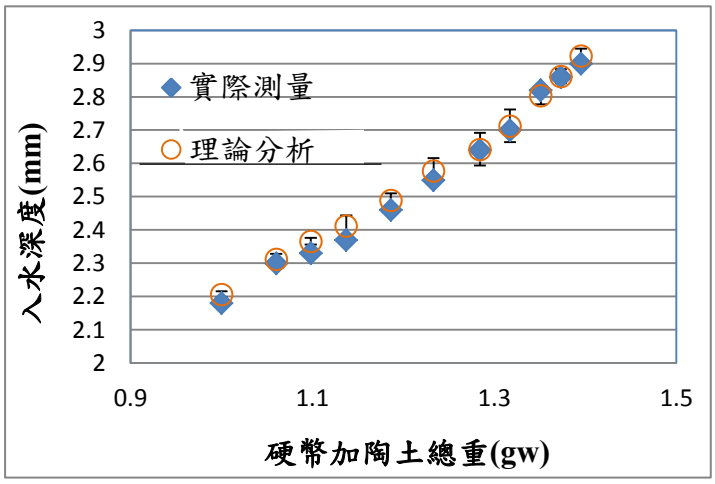


圖 40 硬幣浮於水面時，入水深度與硬幣總重之關係圖。

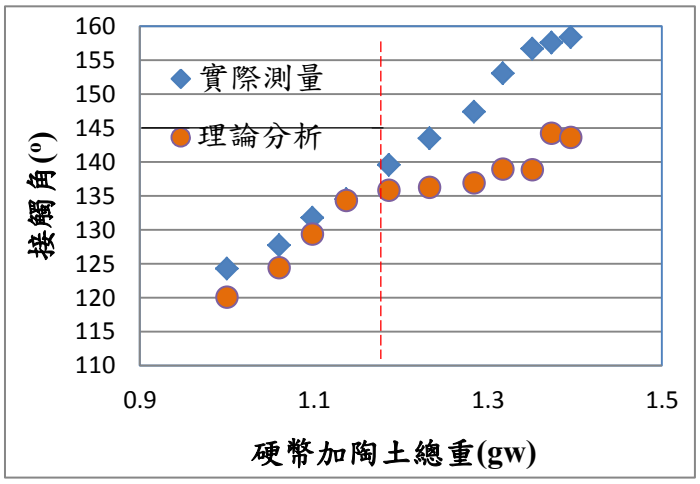


圖 41 硬幣浮於水面時，接觸角與硬幣總重之關係圖。

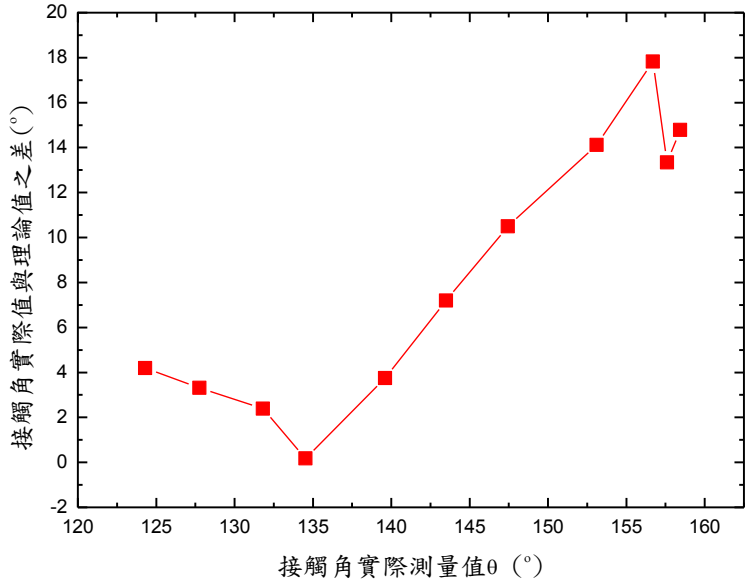


圖 42 接觸角實際值與理論值之差與入水深度之關係圖。

討論：

由圖 38 可以發現分析所得到的入水深度與實際測量值差異不大，且比較前項實驗結果如圖 32、34 所示，也是這樣的情形；但是接觸角的部分，隨著接觸角實際測量值越大，與理論值差異越大(如圖 42 所示)。因此以$\boldsymbol{h(x) = h_0 - y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{L_c}}}$的方式來分析曲線，當接觸角大於 135° 時，在水與物體的交界面的水面分析會有偏差。因此，可以確定當觀察到硬幣與水面的接觸角愈大，代表整體水面曲線斜率愈大，則在文獻探討時得知 $\gamma\frac{d^2h}{dx^2} = \rho gh$ 就不適合，但是在水面曲線各點斜率小於 1 時，理論曲線就非常適合，而真正的式子應寫為：

$$\boldsymbol{\rho g h = \gamma * h''(x)\{1 + [h'(x)]^2\}^{-\frac{3}{2}}}$$

水面曲線各點斜率小於 1 時，此項可忽略。

實驗四：研究兩枚一圓日幣浮於水面上所形成互相牽引的現象及原因。

由 Youtube 的影片我們觀察到當數枚硬幣漂浮於水面時，會有互相吸引的情形，且排列成整齊的圖案，本組想知道為何硬幣間會有互相吸引的情形？是何種因素造成硬幣相吸的現象？所以本組猜測是因為單一硬幣兩端的接觸角不同造成，造成受力不均的現象，使得硬幣會有互相靠近的行為。因此，本組將兩枚硬幣放置於水面上，並使用攝影機以 60fps 拍攝其靠近情形，並使用 tracker 程式分析兩枚硬幣運動軌跡，可得到 x-t 圖(如圖 43)，經對時間二次微分後求得 a-t 圖，再畫出 a-x 圖(如圖 44)，找出隨著兩枚硬幣間距變化與加速度間的關係。接著，使用 USB 顯微鏡拍攝硬幣互相靠近時，接觸角變化的情形，以驗證硬幣間的吸引力與接觸角的變化有關。

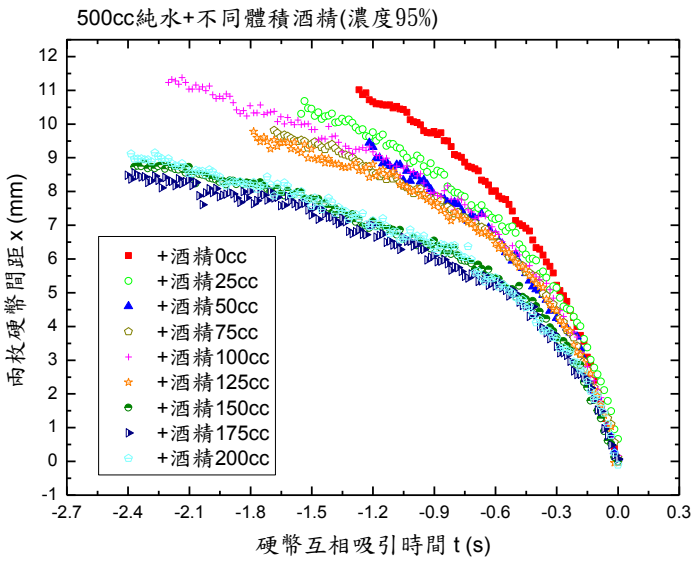


圖 43 硬幣互相吸引，硬幣間距 x 與吸引時間 t 之關係圖。

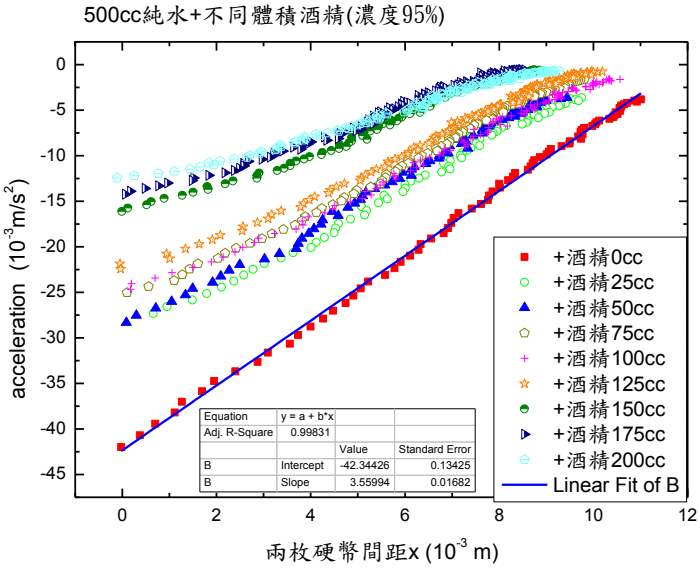
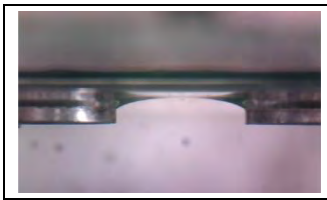
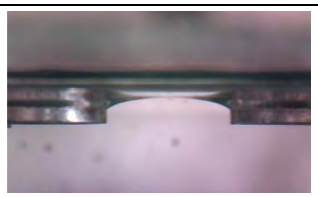
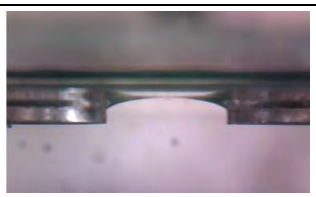
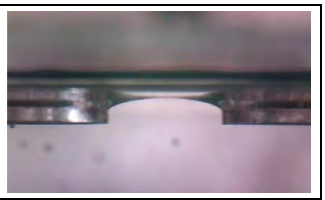
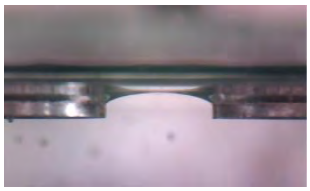
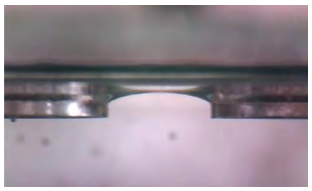
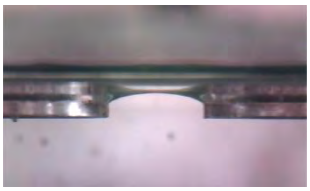
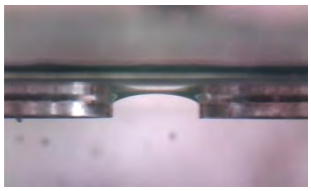
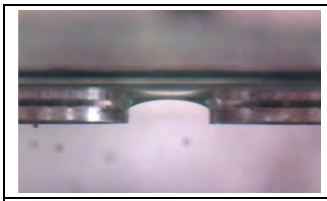
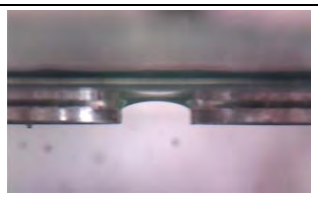
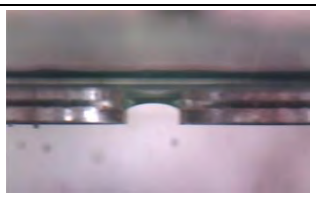
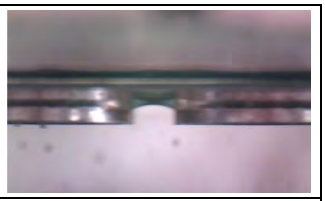
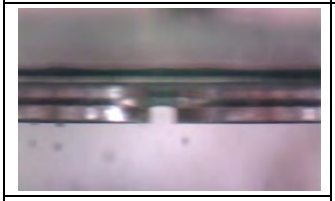
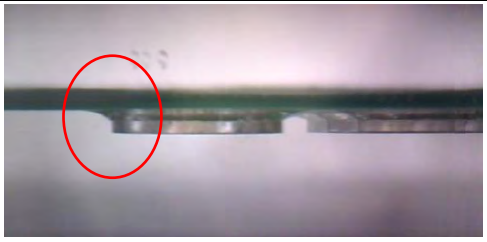


圖 44 硬幣互相吸引，硬幣間的相對加速度 a 與硬幣間距 x 之關係圖。

使用 USB 顯微鏡拍攝硬幣互相靠近之情形(純水)

			
x =10.36mm，θ_c=122.8°	x =9.90mm，θ_c=121.4°	x =9.58mm，θ_c=120.3°	x =9.10mm，θ_c=119.5°
			
x =8.49mm，θ_c=117.9°	x =8.27mm，θ_c=117.4°	x =7.77mm，θ_c=116.7°	x =7.04mm，θ_c=114.9°

			
x =6.64mm，θ_c=113.6°	x =5.51mm，θ_c=112.2°	x =4.17mm，θ_c=109.9°	x =3.31mm，θ_c=107.1°
		為了確認硬幣另一側接觸角在吸引靠近的過程是否保持不變，因此拍攝其角度，並且將照片以淡化且重疊的方式處理，發現角度是保持固定的。	
x =2.38mm，θ_c=103.2°			

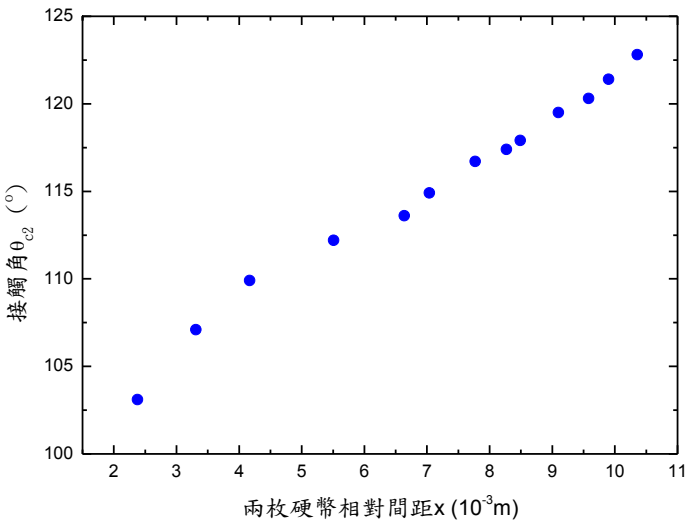


圖 45 硬幣互相吸引，硬幣間距 x 與接觸角之關係圖。

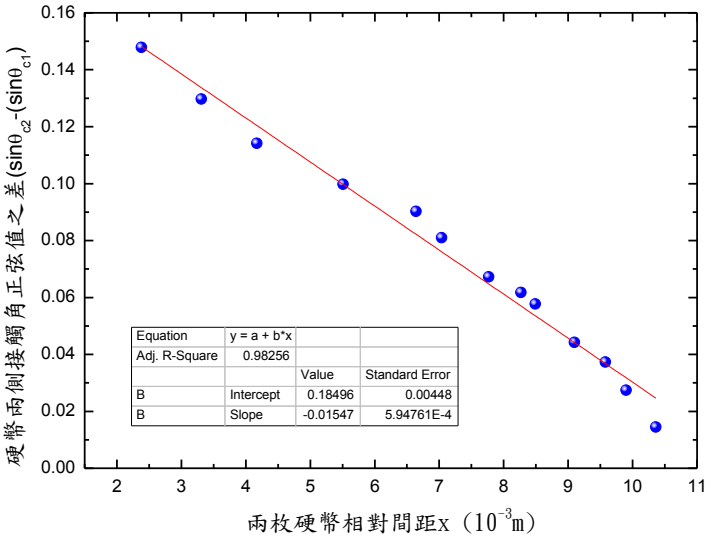


圖 46 硬幣互相吸引，硬幣間距 x 與硬幣兩側接觸角正弦值之差值之關係圖。

討論：

1、為何硬幣會有相互吸引的現象呢？由圖 45 的實驗結果發現，隨著硬幣的相對間距越來越小，接觸角也有越來越小的情形，而本組認為當一側接觸角變小時，會造成硬幣兩側受力不均，而使硬幣朝接觸角較小的一側移動(如圖 47、48 所示)，因此，硬幣會有互相靠近的情形。

圖 47 硬幣互相吸引時，受力示意圖。

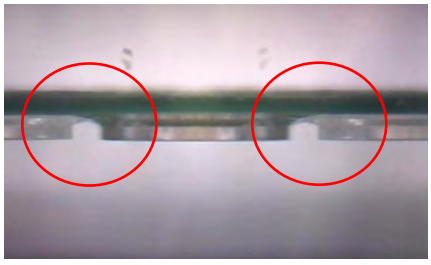


圖 48 硬幣兩側接觸角重疊比較圖。

2、由之前討論得知，硬幣兩側接觸角不同，因而導致硬幣互相吸引的情形，因此硬幣受力主要是兩側表面張力的水平分力之差值，$F=\gamma(\sin\theta_{c2}-\sin\theta_{c1})*A$，其中 γ 為表面張力係數，A 為幾何因子，因此可以兩側接觸角正弦值之差來代表受力情形，由圖 46 發現硬幣間距 x 與硬幣兩側接觸角正弦值之差值間的關係為線性，這也就代表硬幣受力與硬幣間距 x 呈線性關係；接著對比硬幣互相吸引時的運動行為，由圖 44 得知硬幣間運動相對加速度與硬幣間距 x 也呈線性關係，這正符合我們所猜測的—**硬幣兩側接觸角不同，是導致硬幣互相吸引的主要因素**。

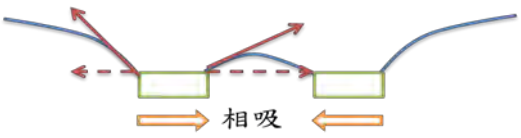
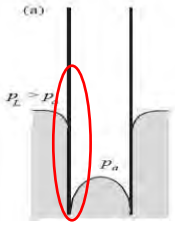
3、更進一步確認，由圖 44 得知加速度與兩枚硬幣間距 x 的關係式為 **$a=3.56x-42.34$**……(1)

而圖 46 可以得到硬幣兩側接觸角正弦值之差值與兩枚硬幣間距 x 的關係式為

$y=(\sin\theta_{c2}-\sin\theta_{c1})=-0.0155x+0.185\cong-0.0437(3.56x-42.34)=-0.0437*a$……(2)

由(2)式知硬幣兩側接觸角不同是導致兩枚硬幣互相吸引之主要因素。並由文獻[4]得知，若漂浮物體密度小於 1 gw/cm^3，接觸角變化不大時，則其互相吸引的力量會與兩側水壓差有關(毛細現象所引起的)，而由此實驗結果發現當硬幣(密度大於 1gw/cm^3，接觸角會變化)，除了兩側水壓差所造成的移動外，最主要的受力來源為兩側接觸角不同所造成表面張力的水平分力之差所致。

4、

形式	沉體	浮體
示意圖		
與水面接觸情形	硬幣上緣，兩側接觸點無高低差。	接觸點在板壁，且會產生高低差。
受力來源	主要：兩側接觸角不同造成表面張力水平張力不均。 次要：兩側水位高低不同，造成水壓差，但因硬幣很薄，所以影響較小。	平板兩側的水壓及大氣壓力不同，造成平板受到側壓力而移動。
相吸原因	為”表面張力”分力所引起的	為”毛細現象”高度差所引起的

5、那兩枚硬幣之間的水面為何會下降呢？原則上一枚硬幣浮在水上是處於平衡狀態，但是當兩枚硬幣距離很近時，其水面會互相重疊，而造成不安定的狀態，如圖 49 所示，且可由前實驗結果可觀察到硬幣相吸時，水面變化之情形。就我們對表面張力的了解，為了保持最低能量，液體表面有會自動縮小的趨勢，因而水面會有降低的情形，造成硬幣內側的接觸角變小，兩硬幣就會互相吸引。

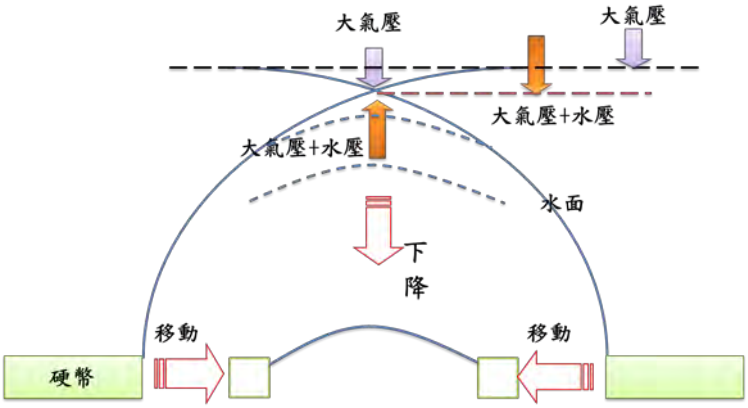


圖 49 兩枚硬幣靠近，水面變化機制之示意圖。

實驗五：探討漂浮物體的表面材質及密度對其漂浮行為之影響。

將塑膠水杯底部吸上強力磁鐵，增加水杯重量，並且在水杯表面塗上各種不同塗料，然後再使用針筒將水慢慢滴入水杯中，觀察接觸角變化情形。圖片拍攝情形詳見附錄(一)

圖 50 實驗五裝置示意圖。

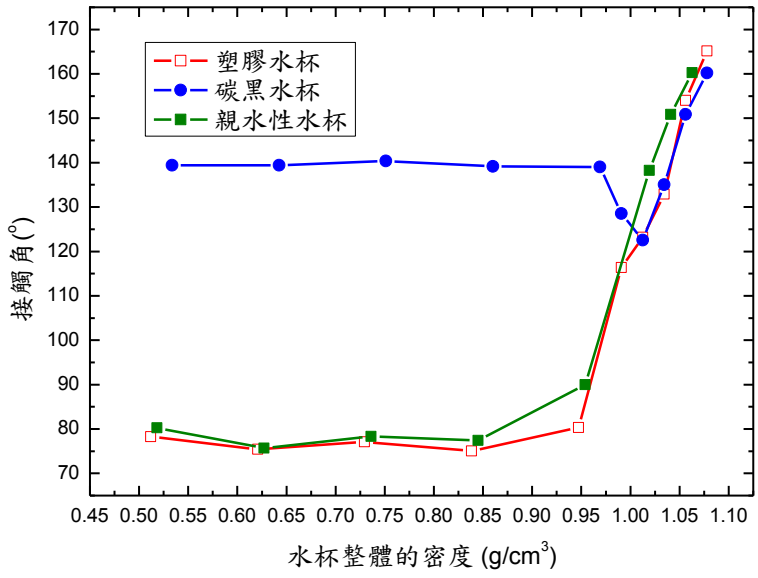


圖 51 不同表面材質之水杯，其密度與接觸角之關係圖。

討論：

1、由圖 51 結果發現，當水杯整體的密度比水小時，水杯的接觸角基本上變化不大，但是當密度接近 1 時，則接觸角開始變化，由整體趨勢可判斷，當水杯密度為 1.0 gw/cm^3 時，接觸角應為 90°。

2、當水杯整體密度大於 1.0 gw/cm^3 時，發現其接觸角只單純與水杯整體的密度有關，水杯密度越大，接觸角就越大，與水杯表面材質的關係不大。

3、另外發現，整體水杯為沉體時(密度大於 1.0 gw/cm^3)，與水面的接觸點會在水杯杯口上緣，而如果水杯為浮體時(密度小於 1.0 gw/cm^3)，與水面的接觸點會在杯壁，且隨著密度增加而往上移動，直到杯口。

4、總而言之，水面漂浮物體為浮體時(密度小於 1 gw/cm^3)，接觸角大小與表面材質有關，與密度大小無關；而為沉體時(密度大於 1 gw/cm^3)，接觸角大小與表面材質無關，而隨著密度增加而變大，也說明了兩沉體互相靠近時，接觸角是會改變，因而產生吸引的現象。

實驗六：探討漂浮物體在水面上受到排斥及吸引的現象。

為了研究漂浮物體間吸引及排斥的行為，本組採用多種不同片材，並以鐵架夾住，置入水中，並放上硬幣，觀察硬幣受到片材吸引或排斥的情形；

同樣也以拍攝影片(拍攝速度 30fps，每個影格時間為 1/30 秒)的方法，並以 tracker 程式分析硬幣的運動情形。

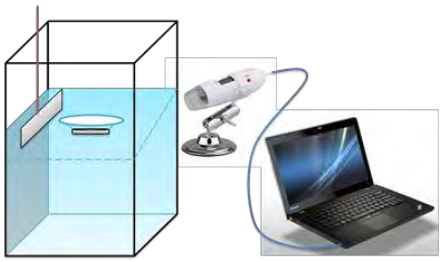
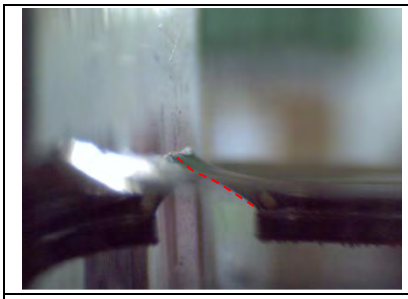
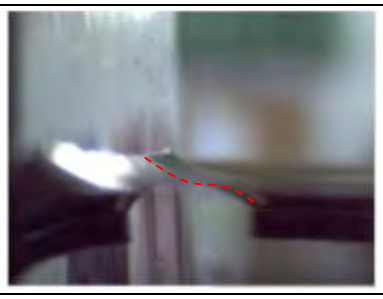
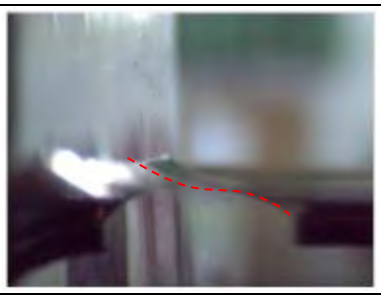


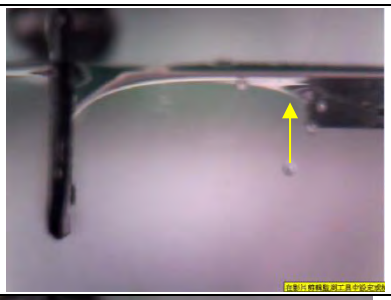
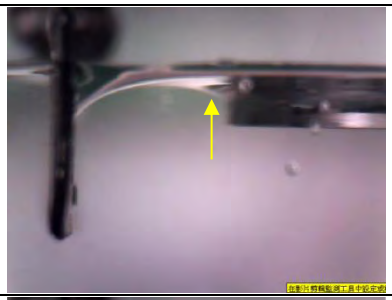
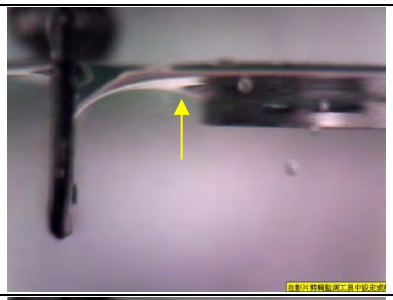
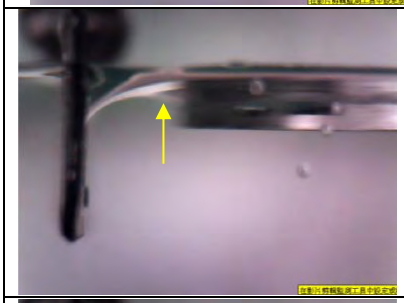
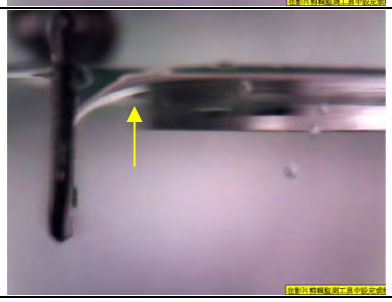
圖 52 實驗六裝置示意圖。

白鐵-排斥

		
接觸角 138.45° 與片材距離 3.21mm	接觸角 132.5° 與片材距離 4.08 mm	接觸角 127.32° 與片材距離 6.35 mm

		由實驗結果發現硬幣會受到白鐵片的排斥，而且隨著距離越近，接觸角越大，也就代表硬幣的另一側接觸角較小，所以會有排斥的現象。
接觸角 124.7° 與片材距離 7.24mm		

碳黑-相吸

		
		
	由所拍攝到的圖形發現，當硬幣接近塗滿碳黑的銅片時，會有吸引的情形發生，且可以看到片材一側的接觸角沒有明顯變化，但是硬幣隨著距離愈近，接觸角變得愈小，尤其是距離靠得很近時，接觸角會小於 90 度，且硬幣會產生傾斜的狀況。	

討論：

當一側為片材(浮體)，另一端為硬幣(沉體)，觀察吸引或排斥現象，可以看到在片材一側的接觸角變化不大，但是在硬幣端的接觸角會因為愈靠近片材而變小，這與我們先前實驗所認定的浮體接觸角在整個吸引過程不易改變，而沉體與水面接觸角會發生變化的情形相符。

陸、結論

一、一圓日幣之所以會浮於水面上，主要是受到表面張力的影響，而其所形成之水面曲線與其兩側內外壓力差有關，因此可以 $h(x)=h_0-y(x)=c_1e^{-x/Lc}$ 來模擬，但若接觸角實際測量值大於 135° 時，則硬幣與水面交接處的水面曲線就較不符合理論曲線，本組認為當觀測到接觸角愈大時，水面曲線各點的斜率就愈大於 1，造成實際測量到的接觸角會比理論分析得到的接觸角來的大，因此理論式子應改寫為 $\rho gh = \gamma \frac{h''(x)}{\left(\sqrt{1+h'(x)^2}\right)^3}$，才會比較適合。

二、因為硬幣兩側的接觸角不同，造成兩側表面張力的水平分力不均，而使硬幣互相靠近，可以寫出 $F=\gamma(\sin\theta_{c2}-\sin\theta_{c1})*A$，其中 γ 為表面張力係數，A 為幾何因子，因此可以兩側接觸角正弦值之差來代表受力情形，並且由圖 44 及圖 46 所得結果推論出浮於水面上的兩枚硬幣會互相吸引的主因是硬幣兩側接觸角不同。與文獻[4]中描述兩無限大平板互相吸引的物理機制是不同的。

三、由實驗五得知，水面漂浮物體為浮體時(密度小於 1)，接觸角大小與表面材質有關，與密度大小無關；而當物體為沉體時(密度大於 1)，接觸角大小與表面材質無關，而隨著本身密度增加而變大。

四、物體間會互相吸引或排斥與物體間的接觸角變化有關(密度大於 1gw/cm^3 時)，所以當兩物體靠近時，會造成其內側水面發生變化，因此兩物體間內側接觸角會發生變化。對單一物體而言，因其兩側接觸角不同，造成兩側表面張力水平分力不均，而產生漂移的情形，整體看起來就像有排斥或吸引的情形。

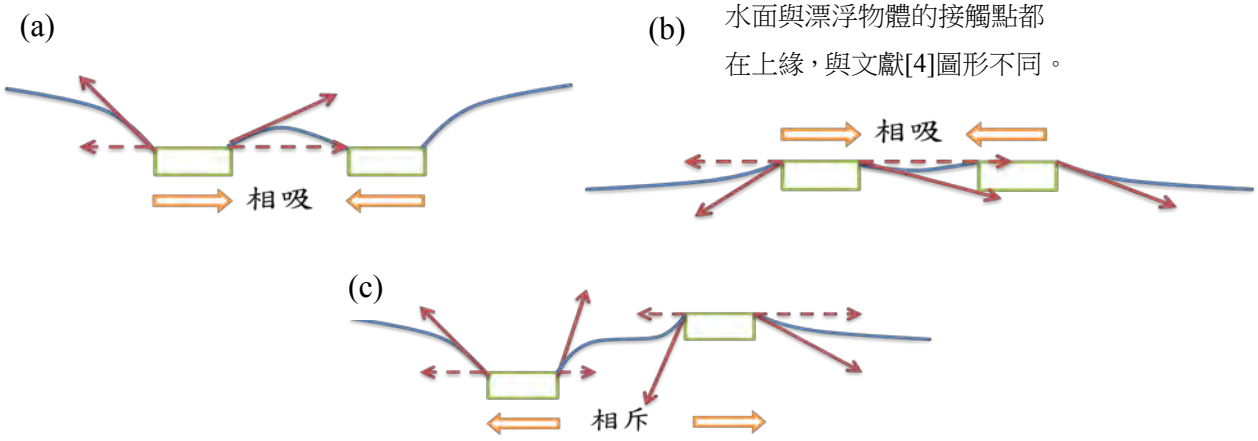


圖 53 漂浮物體互相排斥及吸引受力示意圖。

柒、參考資料

[1] 洪碩成等，2011，”「液表」人才—同性相吸，異性相斥”，中華民國第 51 屆中小學科展高中組物理科，國立臺灣科學教育館，台北。

[2] 高頌凱，2006，”利用浮沉子測量液體表面張力並演示 ”Cheerios effect”” 臺灣二 OO 六年國際科學展覽物理科，國立臺灣科學教育館，台北。

[3] 1 円玉の沈み量と水面形状の近似計算例。

[4] Dominic Vella and L. Mahadevan, “The Cheerios effect”, Am. J.Phys. 73(9) 817~825 (September 2005)。

[5] Chan, D.Y.C.; Henry, J.D.; White, L.R. (1979). "The interaction of colloidal particles collected at the fluid interface". *Journal of Colloid and Interface Science* **79** (9): 410–418.

[6] Goran Bezjak,“The Cheerios effect”, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, January 2010.

[7] 山本 明利，2002，”一円玉はなぜ浮かぶ？”神奈川県立湘南台高等学校。

[8] 林 英子等，2005，”Why one-yin coin float on water?”千葉大學 教育學部。

[9] 上野光昭等，くっつく？くっつかない一円玉～水面上に浮かぶ一円玉の研究Ⅲ～，妙高市立新井中学校　科学部。

[10] 表面張力—水に浮く１円玉について調べる。

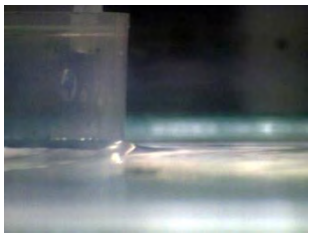
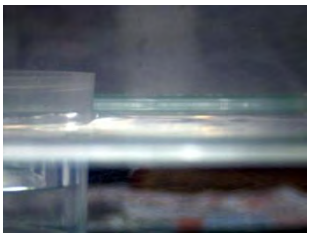
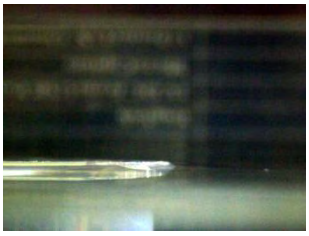
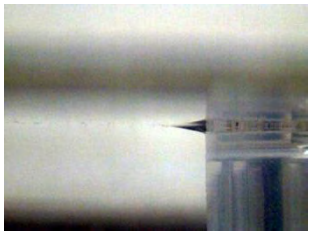
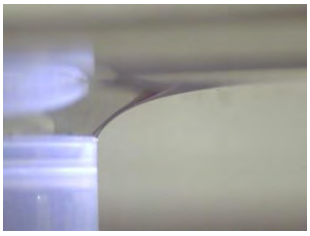
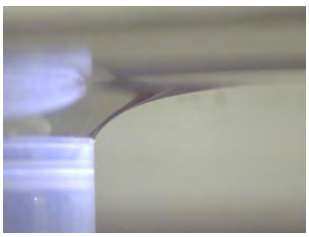
[11] 康竣閔等，2004，”曲率的奧秘” 臺灣二 OO 四年國際科學展覽物理科，國立臺灣科學教育館，台北。

附錄

實驗五：探討漂浮物體的表面材質對其漂浮行為之影響。

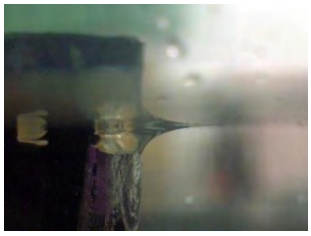
一般塑膠 (磁鐵是兩大一的小組合)

水杯+磁鐵總重：24.3gw　　水杯+磁鐵體積：45.92ml

			
杯內加水 0 ml 接觸角 78.28°	杯內加水 5ml 接觸角 75.42°	杯內加水 10ml 接觸角 77.09°	杯內加水 15ml 接觸角 75.07°
			
杯內加水 20ml 接觸角 80.34°	杯內加水 22ml 接觸角 116.38°	杯內加水 23 ml 接觸角 123.21°	杯內加水 24ml 接觸角 132.89°
			
杯內加水 25ml 接觸角 154.01°	杯內加水 26ml 接觸角 165.18°		

碳黑

水杯+碳黑+磁鐵總重：24.5gw　　水杯+碳黑+磁鐵體積：45.92ml

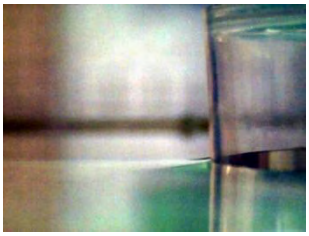
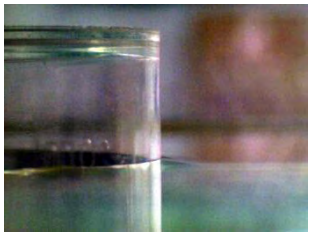
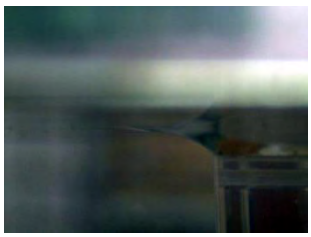
			
杯內加水 0ml 接觸角 139.4°	杯內加水 5ml 接觸角 139.4°	杯內加水 10ml 接觸角 140.36°	杯內加水 15ml 接觸角 139.16°

杯內加水 20ml 接觸角 139.01°	杯內加水 21ml 接觸角 128.51°	杯內加水 22ml 接觸角 122.52°	杯內加水 23ml 接觸角 135.00°
杯內加水 24ml 接觸角 150.87°	杯內加水 25ml 接觸角 160.2°		

親水性塗料

塑膠水杯+磁鐵總重：23.8gw

水杯加水面下強力磁鐵總體積：45.92 cm^3

			
杯內加水 0ml 接觸角 80.25°	杯內加水 5ml 接觸角 75.67°	杯內加水 10ml 接觸角 78.31°	杯內加水 15ml 接觸角 77.4°
			
杯內加水 20ml 接觸角 90°	杯內加水 23 ml 接觸角 138.23°	杯內加水 24 ml 接觸角 150.88°	杯內加水 25 ml 接觸角 160.23°

【評語】030107

本件作品對沉體浮於液體表面之行為從事實驗觀察探討，實驗方法能夠設計數項控制變因，並系統化從事觀察分析，並據以歸納、討論、得到結論。建議本項作品應更深入分析造成觀察現象之物理機制，並以實驗分析確證物理發生機制變因，並據以建構數據模型。