

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 物理科

第二名

030105

繩波急先鋒-抓住速度

學校名稱：花蓮縣立國風國民中學

作者： 國二 黃子嘉 國二 葉彥廷	指導老師： 黃耀輝
---------------------------------	------------------

關鍵詞：繩波波速、頻率、光電計時器

繩波急先鋒－抓住速度

摘要

我們歸納了繩波波速的經驗公式和理論公式做一的對照。以簡易版的光電計時系統設計出兩種測量繩波波速的方法。第一種：固定繩線兩端點，測量它的振動頻率計算出波速。第二種：以固定的繩波傳遞距離除以測到的繩波傳遞時間而得到波速。這兩種測量方法對一條粗細均勻的繩子或不同粗細串接在一起的組合繩線，測量結果都非常吻合。若繩子只是粗細有變化，可以用固定繩的振動頻率求得波速，也可以由粗繩細繩分別測得的頻率去計算組合繩的頻率以求得波速，這是很方便的做法。但是根據我們的檢驗，繩上黏附物體的繩子不能這樣簡化處理，第一種方法有明顯的錯誤，只能靠第二種測量法這種硬功夫。

壹、研究動機

上自然課講到發聲體的頻率時，老師示範吉他弦線轉得愈緊，發出的聲音音調就愈高。手將弦線按在枕木上，使弦線振動的長度變短，也會使音調升高。手撥不同粗細的弦線，愈細的弦線發出聲音的音調也愈高。我們想了解弦線振動的頻率改變和上述變因的關係，於是做實驗探究。檢驗頻率和波長關係的過程中，我們發現這種方式可以用來計算繩波波速。於是我們再設計實驗嘗試由實驗測出繩波波速作為對照，發現許多驚人有趣的東西。

貳、研究目的

- 一、比較不同拉力作用時的頻率變化。
- 二、比較不同粗細弦線的頻率變化。
- 三、比較不同長短弦線的頻率變化。
- 四、推論影響繩波波速的變因。
- 五、實際測量繩波波速。

參、實驗器材

網貨物的橡皮繩	粗、細棉線若干
40 磅釣魚線(粗)	4 磅釣魚線(細)
軟體 Pa 模擬示波器	筆記型電腦
紅光雷射筆	小太陽能板
500 g 和 100g 砝碼	顯微鏡的接目鏡



肆、實驗方法

第一部份：測量頻率

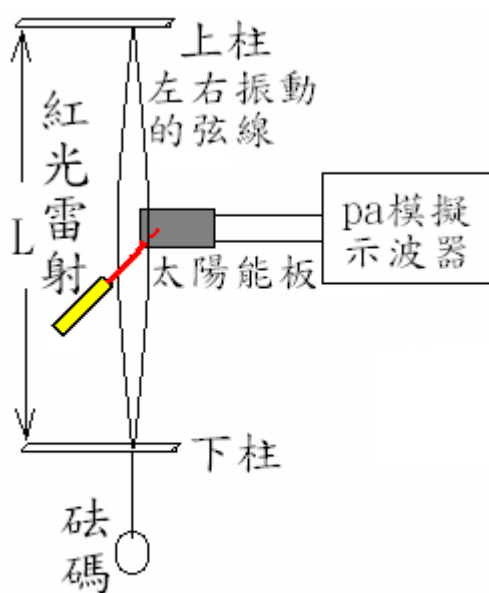
在學習多變的聲音時，老師在課堂中用麥克風接到模擬示波器，當場收錄聲音呈現在示波器上，然後放大波形讓我們可以看見聲音是奇奇怪怪的波形。老說這是麥克風接收聲波的訊號

後轉換成電流訊號而呈現在示波器上。讀到 49 屆科展國小組作品，有一組作者自製透明度分析儀，使用一束光線垂直照射起霧的玻璃，另一側用太陽能板接收通過玻璃的光量，用接收到的光量推論玻璃板的不透光性來測定除霧效果。我們做了以下的推測：

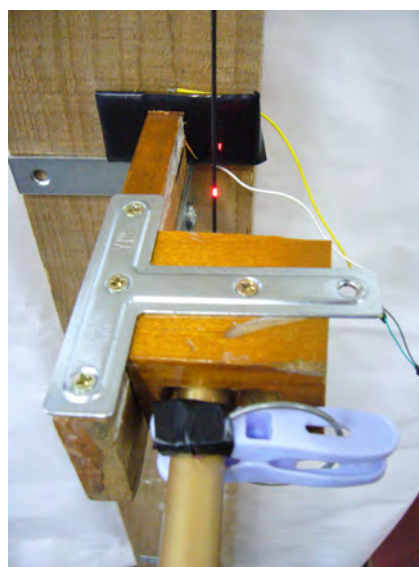
麥克風：強弱變化的聲波→強弱變化的電流→呈現於模擬示波器
太陽能板：強弱變化的光→強弱變化的電流→呈現於模擬示波器

我們的實驗裝置圖如下圖所示：

使用雷射光照射太陽能板，在雷射光行進路徑中撥動一條垂直於雷射光的弦線，當弦線來回振動就可以規率遮斷雷射光，於是太陽能板會產生規律變化的電流訊號而送到 Pa 模擬示波器，這個軟體可以呈現變化的頻率。

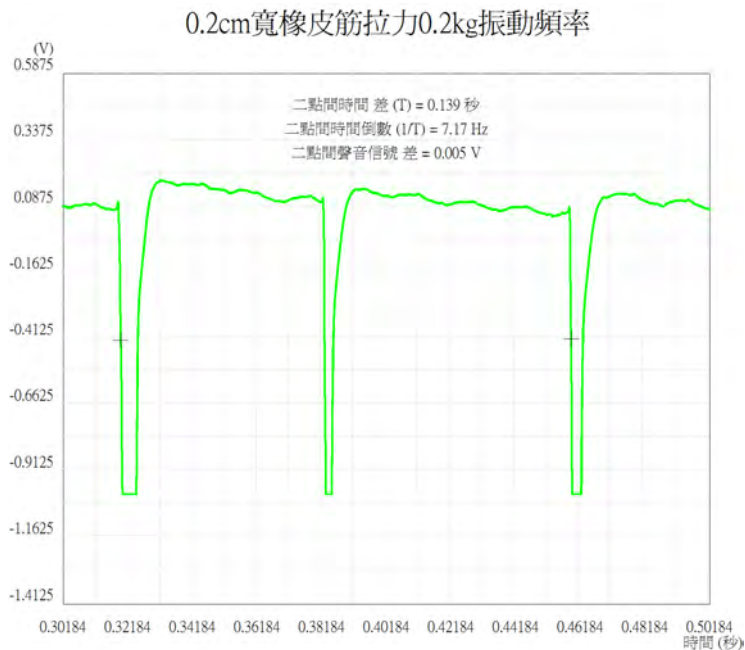


實驗示意圖



圖：紅光雷射照射振動的繩線

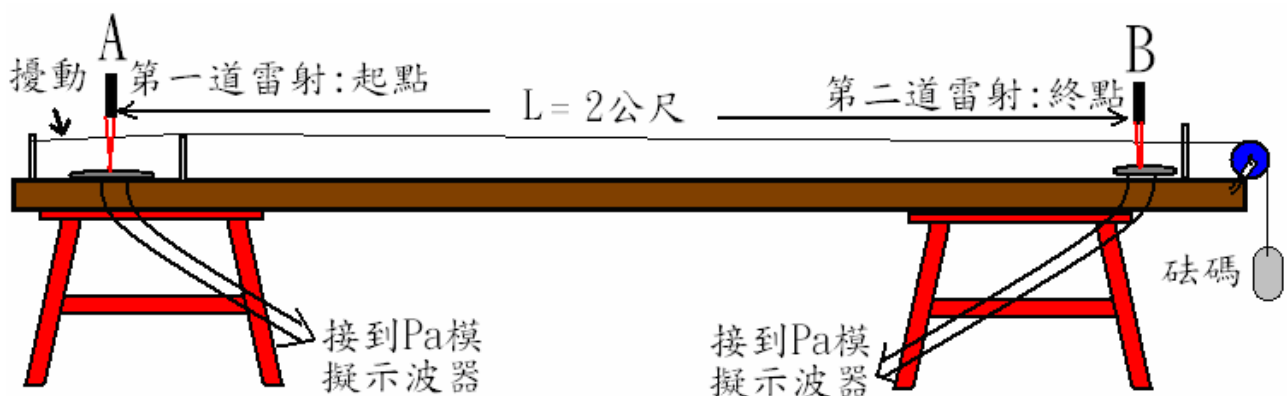
先調整上、下柱距離 L 為 2 公尺，我們把網貨物的橡皮繩分別剪成寬度 0.2cm、0.4cm、0.6cm，長度約 2 公尺的長條線，其中一端夾在上柱，另一端懸吊砝碼自然下垂，用夾子夾在下柱。在繩長一半的位置，垂直設置一紅光雷射恰好照射在繩上，太陽能板大部分區域用黑色膠帶覆蓋，只留下一小縫隙恰使雷射光可以照射到。當橡皮繩左右振動，就可斷續遮斷雷射光，產生規律變化的電流傳送到模擬是波器。增加懸掛的砝碼數，測量不同拉力之後再換線，所有的線都測量好了之後再把長度 L 改成 1.5 公尺、1.0 公尺、0.5 公尺，重複所有的實驗。Pa 模擬示波器呈現的是兩個訊號之間的時間差，自動轉成倒數就是頻率。要注意的是：當線阻擋一次雷射光就會產生一個訊號，而一條線完成一次振盪，來、回各一次，會遮住兩次光線，產生兩個訊號，所以我們應以兩個訊號的時間差當作懸線完成一次週期的時間。要注意的是：釣魚線透明度較高，不容易遮住光線，使用黑色奇異筆把應遮蔽雷射光的部分塗黑，訊號才會比較明顯。下圖是一個範例：軟體會自己計算你標示的兩個十字間的時間差，再倒數換算成頻率。
Ex：此繩的振動頻率 $f=7.17\text{Hz}$



第二部分：實際測量波速

我們仍使用 Pa 模擬示波器，但是這次不是要用它來測頻率，我們用它來抓住極短的時間差。和第一部分的實驗裝置類似，我們使用了兩套，實驗的側視圖如下所示。兩個雷射光分別垂直照射兩個太陽能板，兩個太陽能板一起接上 Pa 模擬示波器。起點 A 產生一個波，第一個太陽能板產生一個訊號傳到示波器，當波動傳送到終點 B 時，第二個太陽能板再產生另一個訊號，示波器接收到來自兩太陽能板的訊號有個時間差，這是波動從第一太陽能板傳到第二太陽能板所需的時間。以兩個太陽能板的距離(2 公尺)除以時間差就是波速。

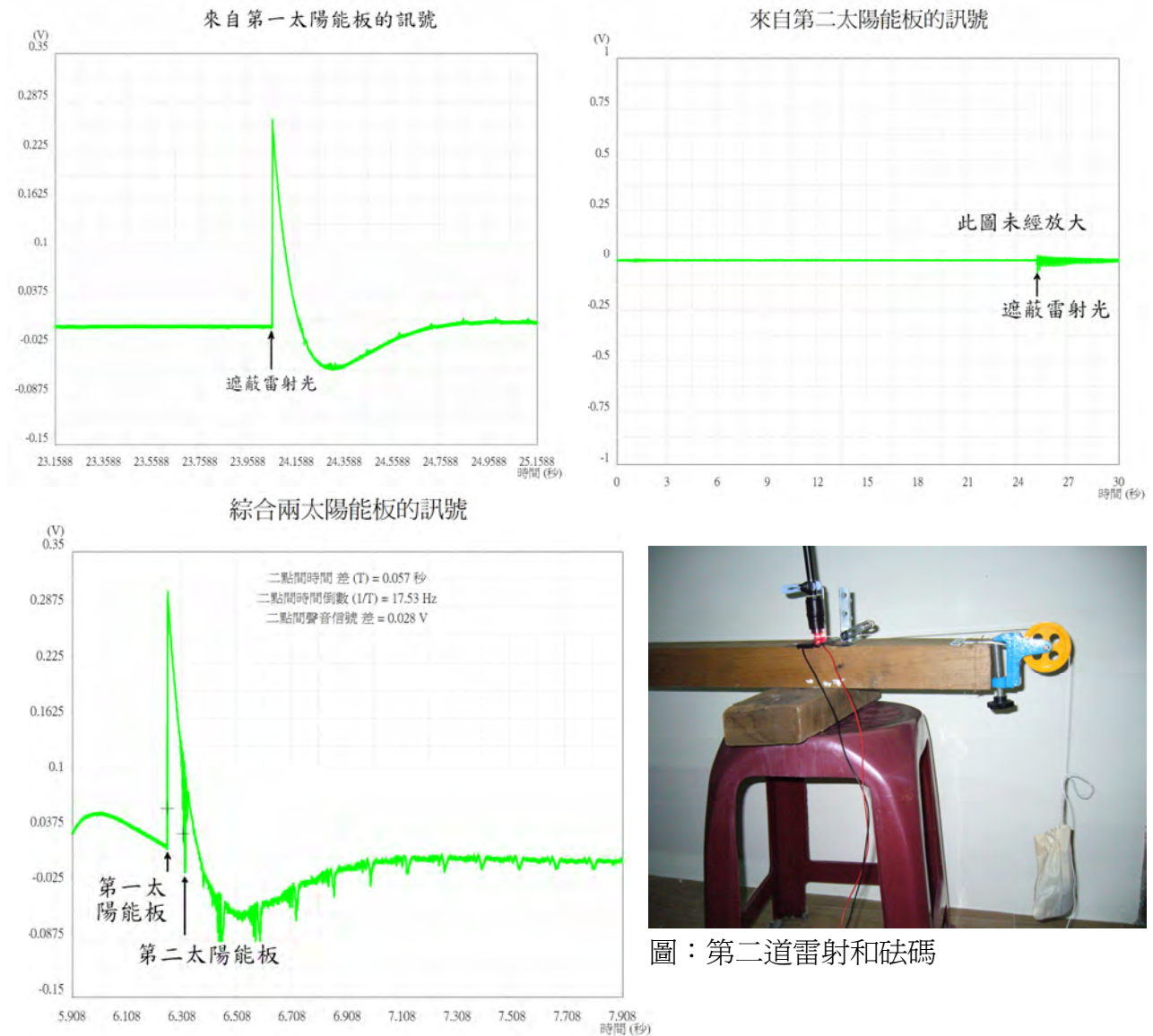
$$\boxed{\text{定 } \overline{AB} = 2 \text{ 公尺}} \rightarrow \boxed{\text{測出時間 } t_{AB}} \rightarrow \boxed{\text{波速 } V_{AB} = \frac{AB}{t_{AB}}}$$



圖：平放測量波速裝置側視示意圖

要注意的是，擾動傳遞到終點已經很微弱，所以訊號相當微小不容易測得，我們使用顯微鏡的接目鏡把雷射光束能量集中在一小點打在棉線邊緣，當棉線有些微的振動就可以產生明顯的變化。以下是我們獲取訊號數據的說明：先分別只開啓一道雷射光，分別了解來自個別太陽能板的訊號，再把它們綜合起來就可以在兩道雷射光都開的時候，識別哪個訊號來自第一道或是第二道雷射，這樣就

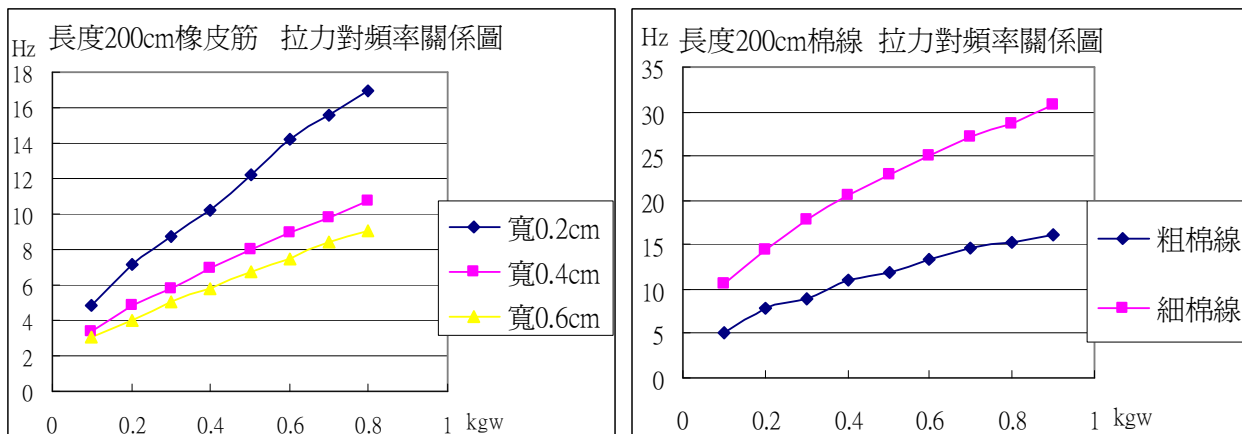
可以抓到兩訊號時間差。以下面的系列圖為例，測到的時間是 0.057 秒。

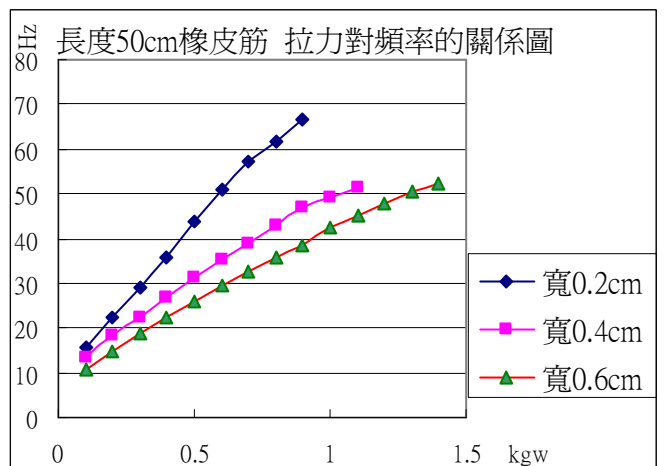
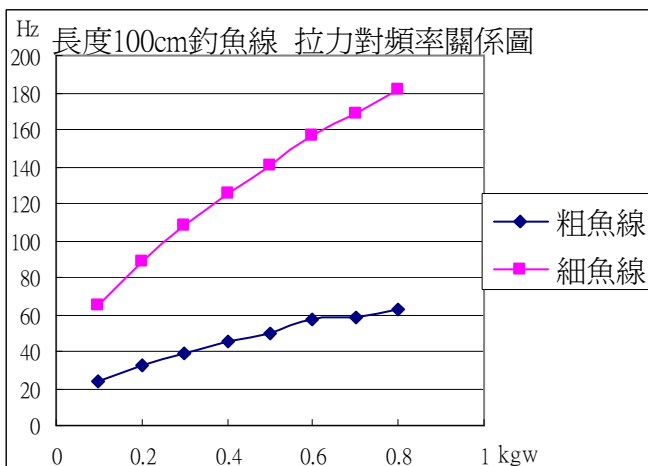
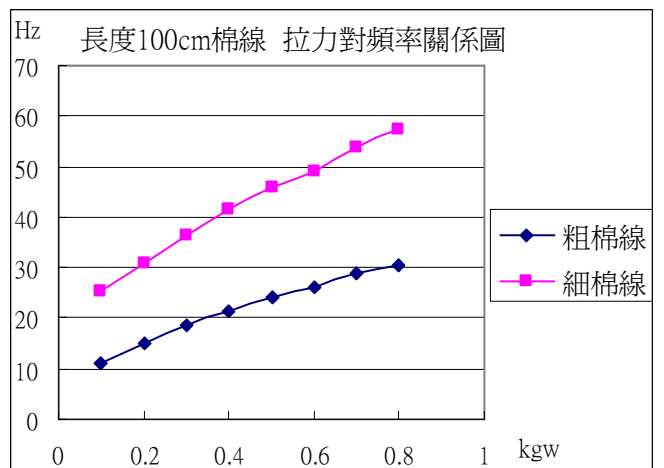
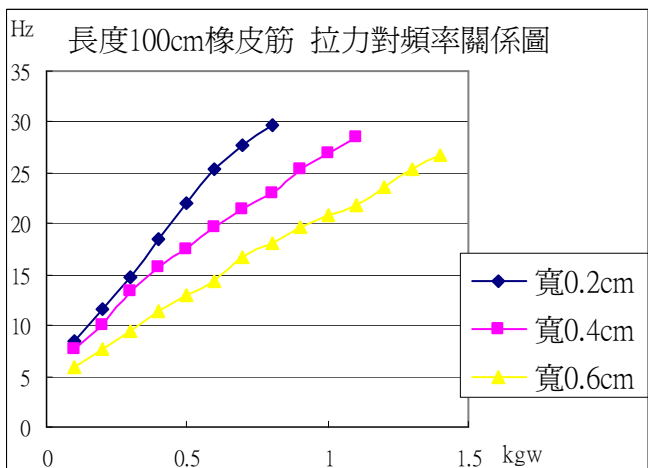
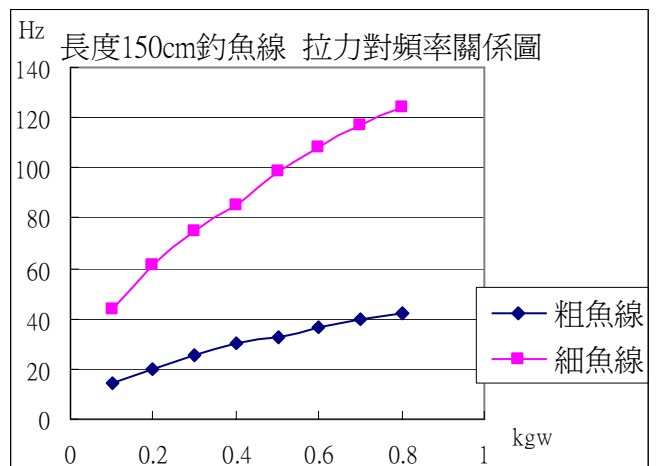
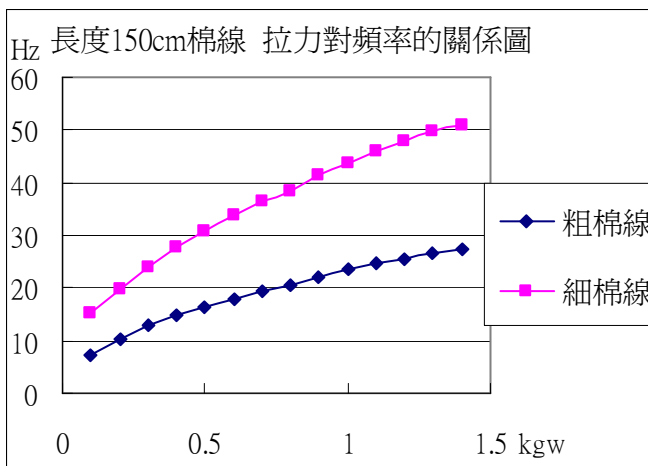
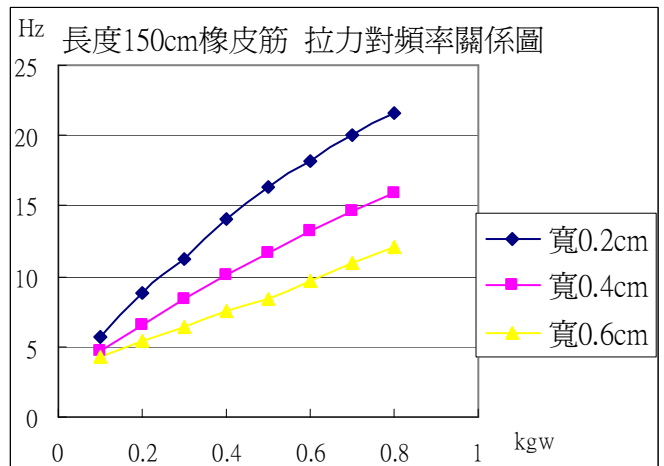
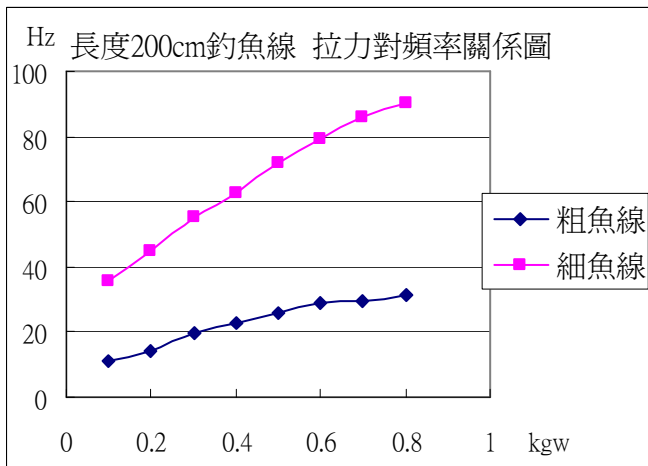


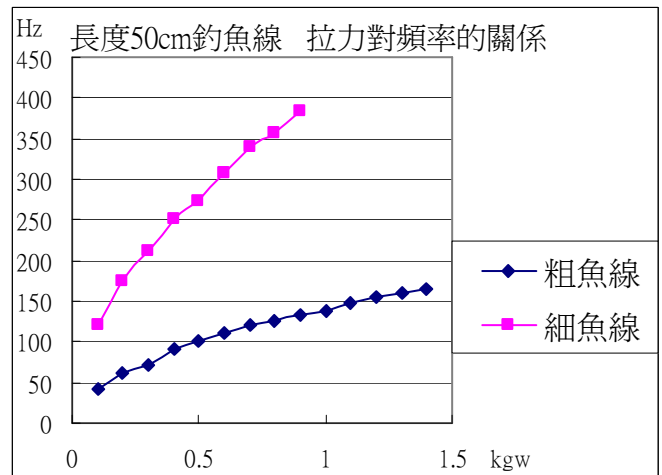
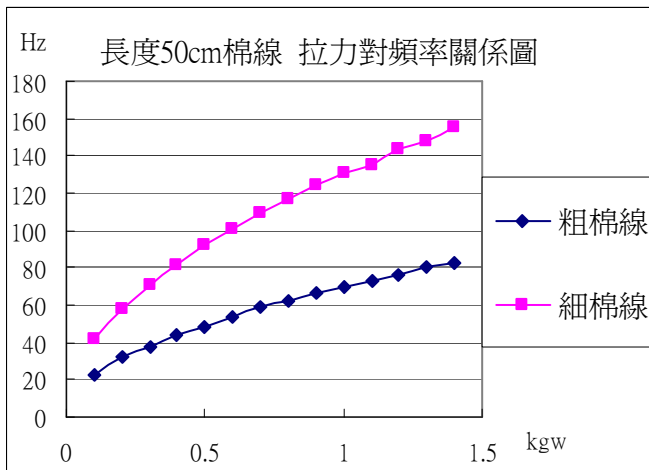
伍、 實驗成果：

一、第一部分實驗：測量頻率

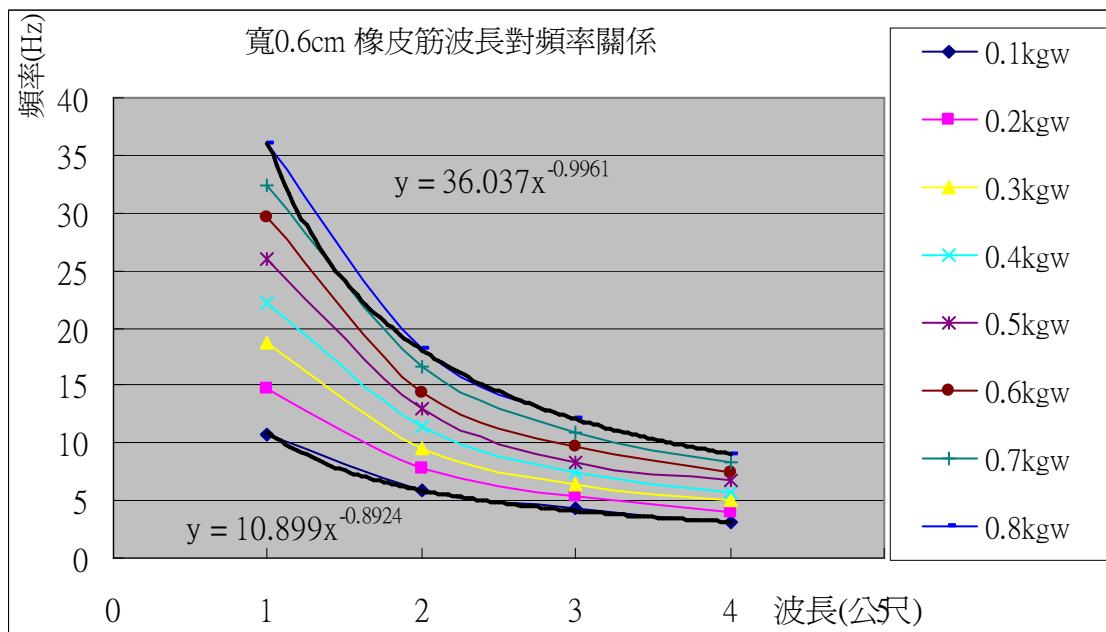
當我們懸掛不同的砝碼個數改變繩子的拉力，在粗細、長短不同的線測到的繩子振動頻率數據，以表格整理在附錄 A，這裡僅用圖形呈現如下的結果：



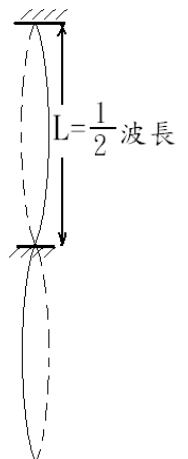




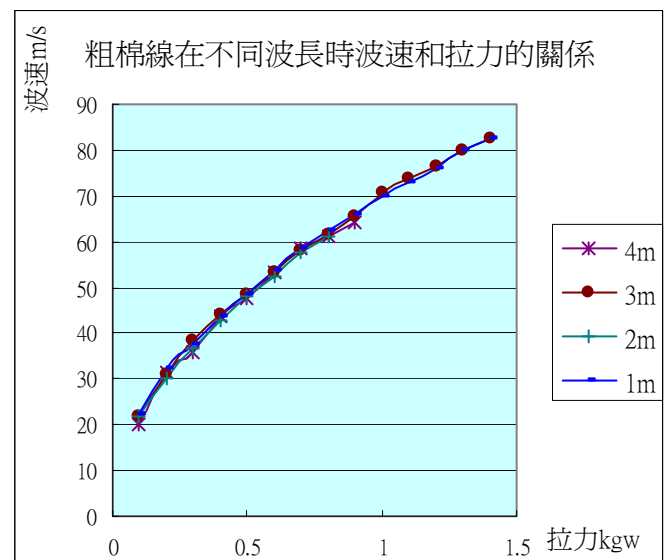
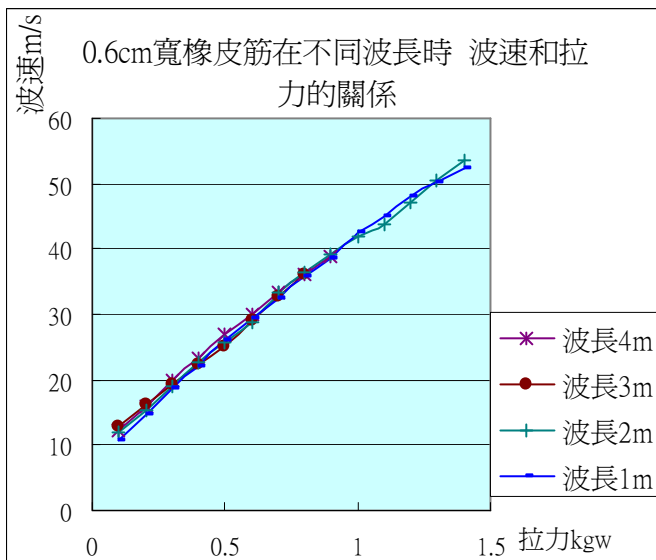
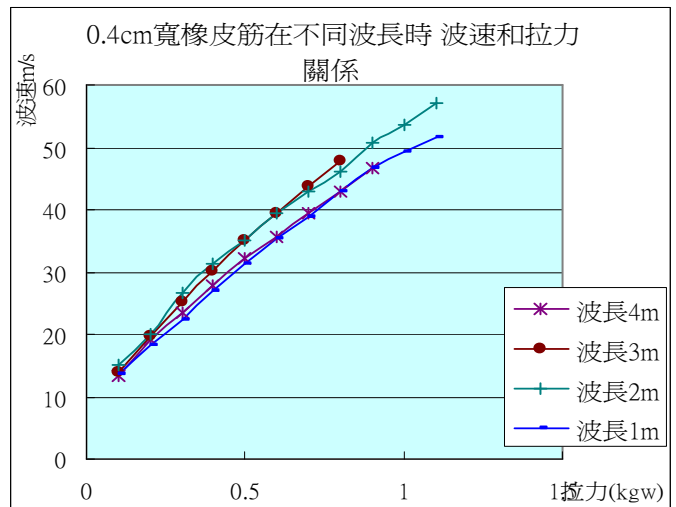
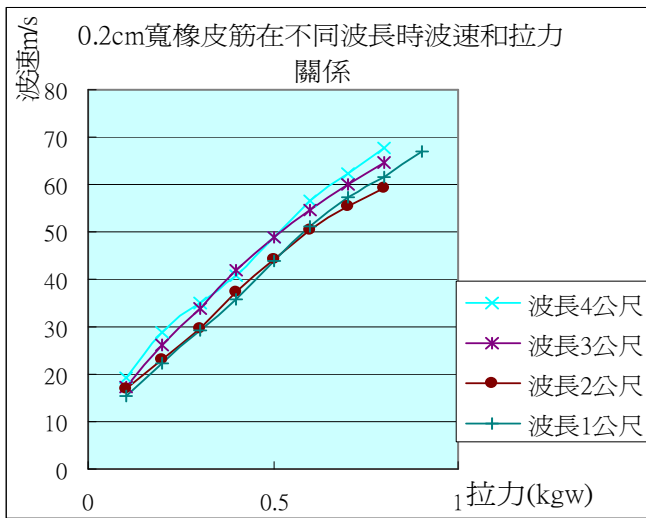
- 結果：1. 對同一條繩子，拉力愈大則繩子振動頻率愈大，這部分符合吉他弦線繃得愈緊音調愈高的事實。但是可以看出頻率隨著拉力變大的關係並不是一次方正比的關係，拉力增加時雖然振動頻率增加，但是增加的量愈來愈少。
2. 不論是寬度不同的橡皮筋還是粗細不同的繩子，愈細的繩子在相同拉力下它的振動頻率就愈大。這也驗證吉他弦線愈細的，它的音調愈高的事實。
3. 如果仔細核對這些圖，可以感覺到繩子愈短，在相同拉力下它的振動頻率就愈高。於是我們把不同長度的繩子振動頻率集合起來整理，因為圖形大同小異，所以我們選取其中一張圖來看，其餘的圖放在附錄 B 中以供參考。因為它很像反比的圖形，因此我們使用 Excel 回歸分析的功能大致看看波長和頻率的關係，如下圖：



如右圖所示，左右振動的弦線長度只有全波的一半，所以我們把弦線長度 0.5、1.0、1.5、2.0 公尺直接改成波長 1、2、3、4 公尺，由此圖我們發現波長越長則振動頻率越低。而且隨著拉力增大時，它的函數愈接近負一次方，也就是說：頻率 $f \times$ 波長 $\lambda =$ 定值 K ，按照課堂所學的內容， $f \times \lambda = v$ ，此定值 K 就是波速。



二、根據以上的結果，我們又進一步把不同波長的數據分別在不同拉力下，以頻率 $f \times$ 波長 λ ，計算他們的波速，這次我們放四張圖如下所示，其餘仍然收錄在附錄 B 中：



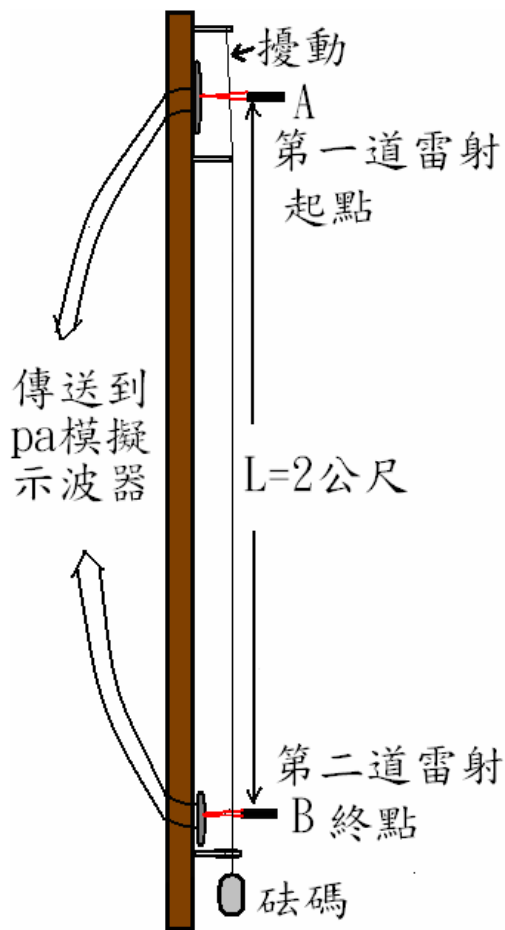
以上的圖顯示出：不論使用哪一種長度的繩子，它測到的頻率乘 2 倍的繩長（相當於頻率 $f \times$ 波長 λ ），計算得到的波速大致都是一樣的，差別在於 0.2cm、0.4cm 寬度的橡皮筋太細了，掛上砝碼之後很容易伸長而改變原本的粗細狀態，落差比較大。又因為橡皮筋是我們自己剪的，雖然想剪出寬度 0.2cm 或 0.4cm 的長長一條線，但是寬度不太均勻，這點需要有材料上的改進才能整理出規律。

三、實際測量波速

這部分的實驗受限於波動傳到終點時已經太微弱，使用釣魚線很難測量到訊號，暫時先不測量，等日後我們技術改良後再來嘗試。因為細棉線受到拉力時，長度變化較小，我們就選擇先測量細棉線的波速，但是當我們把測量結果和第一部分的波速作比較，發現有些落差。我們認為是因為第一部分實驗的砝碼是垂直懸吊，第二部分實驗的砝碼是經過一個定滑輪傳遞力量，可能因滑輪的摩擦力而有所差異。後來我們把繩子直立（如下圖所示），就像第一部分的作法一樣再重新測量，然後兩種方式都和第一部分實驗計算四種波長所得平均波速（理論波速）作比較。以下是我們的測量、比較結果：



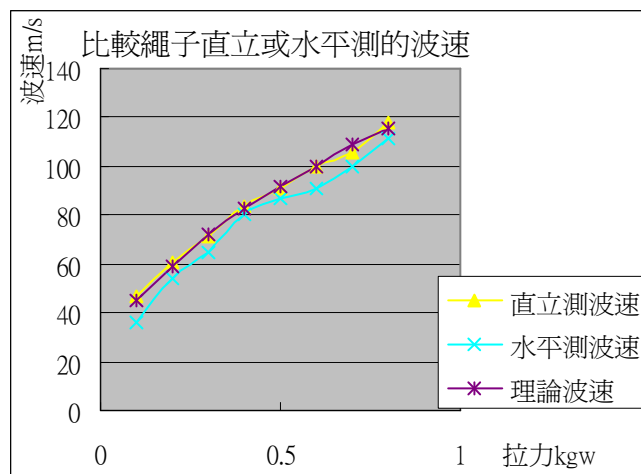
圖：實際測量波速改成直立擺放。



圖：實際測量波速直立圖

表 1：繩子直立和水平測波速的比較，相似度＝垂直測量波速/理論波速。

以細棉線實測波速				
拉力 kgw	直立測 波速	水平測 波速	理論 波速	直立測的 相似度
0.1	46.5116	36.3636	45.1	1.031
0.2	60.6061	54.0541	59.04	1.027
0.3	71.4286	64.5161	71.85	0.994
0.4	83.3333	80	82.51	1.01
0.5	90.9091	86.9565	91.97	0.988
0.6	100	90.9091	100	1
0.7	105.263	100	108.8	0.967
0.8	117.647	111.111	115.3	1.02



結果：我們發現繩子水平擺放時做測量，雖然比較方便去操作，不必爬上爬下。但是測到的波速比較慢，這可能是因為定滑輪和棉繩有摩擦力，不能把所有的力傳遞給棉繩。如果直立繩子，砝碼可以拉住繩子自然下垂，測到的數據比水平擺放時測到的數據更接近第一部分的實驗所得。所以我們把繩子直立起來，波動由上方傳到下方，以下的測量都是這樣做。

表 2：粗棉線實測波速；相似度＝測量值/理論值

拉力 kgw	時間	測量波速	理論波速	相似度
0.1	0.081	24.6914	21.57	1.14471
0.2	0.066	30.303	31.25	0.9697
0.3	0.051	39.2157	37.13	1.05617
0.4	0.041	48.7805	43.69	1.11651
0.5	0.037	54.0541	48.17	1.12215
0.6	0.034	58.8235	53.19	1.10591
0.7	0.032	62.5	58.19	1.07407
0.8	0.031	64.5161	61.47	1.04955
平均				1.07985

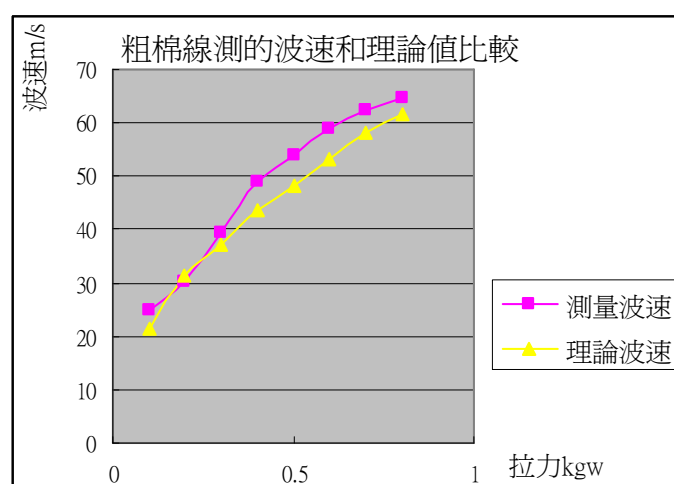


表 3：0.4cm 寬橡皮筋實測波速

拉力 kgw	時間	測量波速	理論波速	相似度
0.1	0.141	14.1844	14.03	1.011
0.2	0.103	19.4175	19.31	1.00557
0.3	0.078	25.641	24.41	1.05043
0.4	0.066	30.303	29.07	1.04242
0.5	0.055	36.3636	33.35	1.09036
0.6	0.049	40.8163	37.44	1.09018
0.7	0.045	44.4444	41.24	1.0777
0.8	0.041	48.7805	44.96	1.08498
平均				1.05658

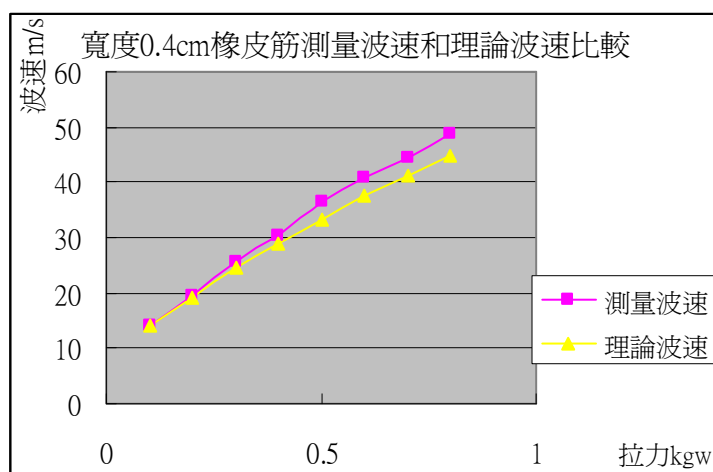
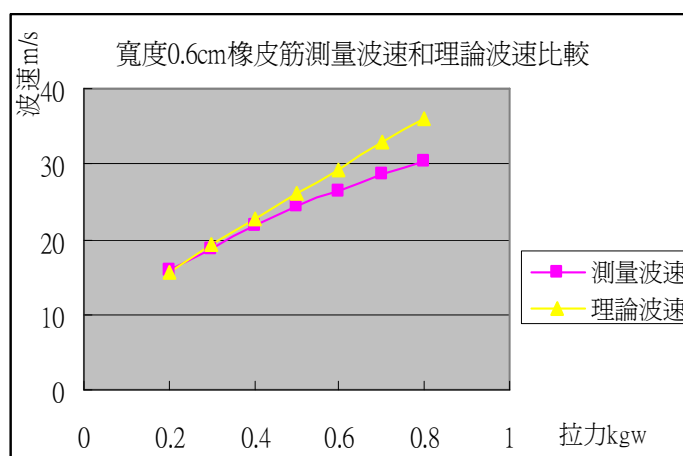


表 4：0.6cm 寬橡皮筋實測波速

拉力 kgw	時間	測量波速	理論波速	相似度
0.2	0.125	16	15.65	1.02236
0.3	0.107	18.6916	19.28	0.96948
0.4	0.092	21.7391	22.61	0.96148
0.5	0.082	24.3902	25.99	0.93845
0.6	0.076	26.3158	29.36	0.89631
0.7	0.07	28.5714	32.99	0.86606
0.8	0.066	30.303	36.15	0.83826
平均				0.92749



陸、 實驗討論

一、在實驗中發現：繩波振動頻率和拉力不是成一次方正比。我們藉由 Excel 回歸分析工具的幫助，整理出二者之間的相關性。若頻率 f ；拉力 F ，設二者的幕次函數 $f = kF^n$ ，其中 k 是常數， n 是指數。我們畫出其中一張圖為例子，然後把種類、長短不同繩子的指數 n 整理於下的表格中：

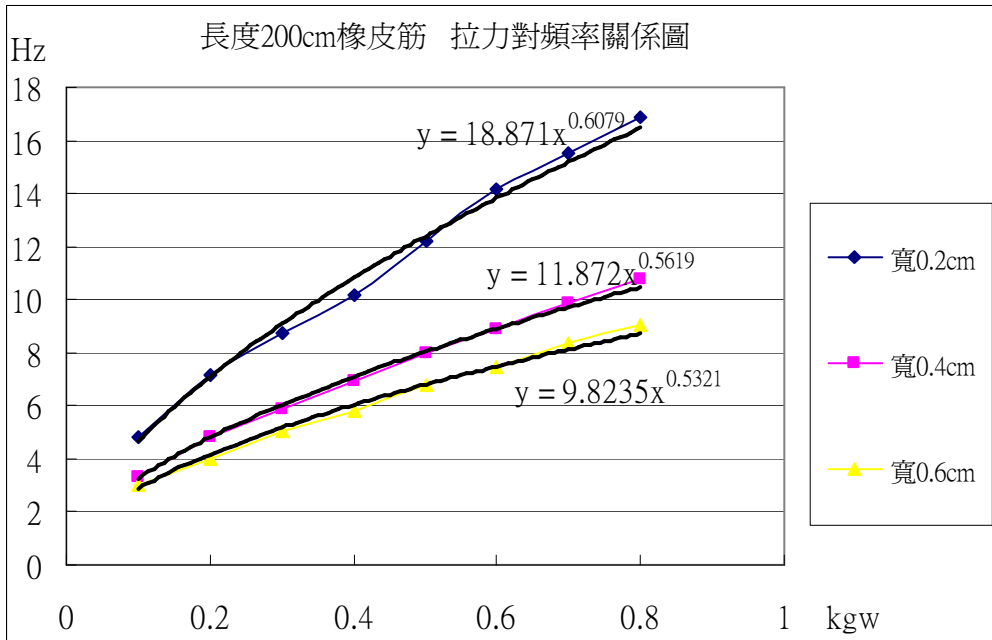


表 5：不同繩子 f 與 F 關係函數

$f = kF^n$	指數 n 的值				
各種繩子	2 公尺	1.5 公尺	1 公尺	0.5 公尺	平均值
寬 0.2cm 橡皮筋	0.6079	0.647	0.6323	0.6922	0.6449
寬 0.4cm 橡皮筋	0.5619	0.5975	0.5662	0.5814	0.5768
寬 0.6cm 橡皮筋	0.5321	0.4994	0.5943	0.6261	0.563
細棉線	0.4888	0.4716	0.4037	0.4994	0.4659
粗棉線	0.5253	0.5033	0.4964	0.494	0.5048
細魚線	0.4667	0.509	0.5008	0.5235	0.5
粗魚線	0.5213	0.5283	0.4693	0.5248	0.5109

由表格中可以看出：除了細棉線之外，頻率 f 大約是拉力 F 的 0.5 次方關係，但這部分的指數關係在橡皮筋有比較顯著的誤差，它們都大於 0.5 次方，尤其是最細的橡皮筋（寬度 0.2cm）高出的愈多。

我們查師大物理系網站，發現繩波波速和拉力（或張力）的關係是：波速 v 和 $(\frac{F}{\mu})^{0.5}$ 成正比，其中 μ 指的是繩子的線密度，是單位長度的質量，例如繩子每公分長度的質量是多少公克。因此，如果繩子受一拉力作用時，若繩子不會伸長，線密度就不會改變。波速 v 或是頻率 f 就隨著拉力 F 的 0.5 次方正比，我們的實驗結果很符合這關係式。但是在橡皮筋的實驗中，因為橡

皮筋受到拉力 F 作用時會被拉長，和未伸長時相比，相同的質量分散在更大的長度，所以繩子的線密度 μ 變小，分母變小會使整個分數數值變大，呈現的結果就是指數變得比 0.5 還大，而且愈細的橡皮筋伸長量愈大導致數值大得愈多。

二、在繩子粗細的部分，根據上述的資料：波速 v 或頻率 f 和 $(\frac{F}{\mu})^{0.5}$ 成正比，繩子的線密度 μ 愈大，也就是繩子愈粗，波速或頻率愈小，這部分和我們做的內容一致。如果我們進一步檢查拉力不變時，繩波的波速是否和繩子的線密度 μ 的 0.5 次方成反比？爲了能在 Excel 計算，我們先處理算式：

$$V \text{ 正比於 } (\frac{F}{\mu})^{0.5} ; V^2 \text{ 正比於 } \frac{F}{\mu} ; \text{若 } F = \text{定值}, \text{則 } V^2 \text{ 正比於 } \frac{1}{\mu}。$$

我們先整理出相同種類的各繩分別在不同拉力時的平均波速，再計算它們彼此的速度平方比值。先假設橡皮筋寬度剪得很均勻，而且在受到拉力時不伸長，這樣他們的線密度就跟寬度成正比。於是 0.2cm、0.4cm 和 0.6cm 橡皮筋的線密度 μ 的比等於 1：2：3。接著測量 2m 長的各種繩線，質量如下：

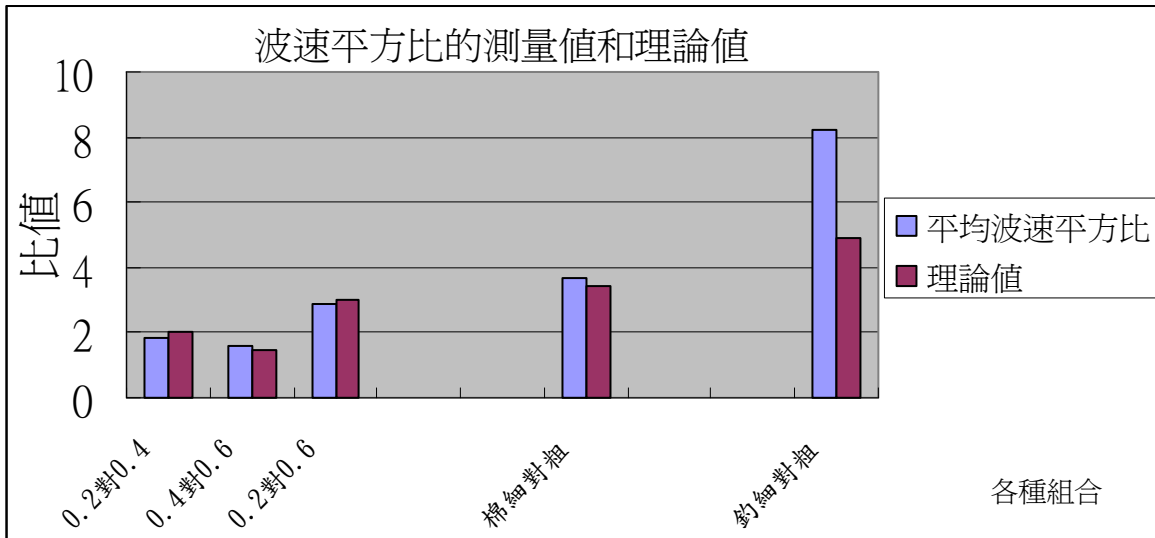
表 6：實驗用的各線 2 公尺的質量比(分別是粗細棉繩和粗細釣魚線的線密度比)

粗棉線	細棉線	棉線(粗/細)線密度比	粗釣魚線	細釣魚線	釣魚線(粗/細)線密度比
4.23 g	1.24 g	$\frac{4.23}{1.24} = 3.411$	1.03 g	0.21 g	$\frac{1.03}{0.21} = 4.905$

現在來看看固定拉力時，波速平方比是否和線密度成反比？

表 7：各繩線的速度平方比

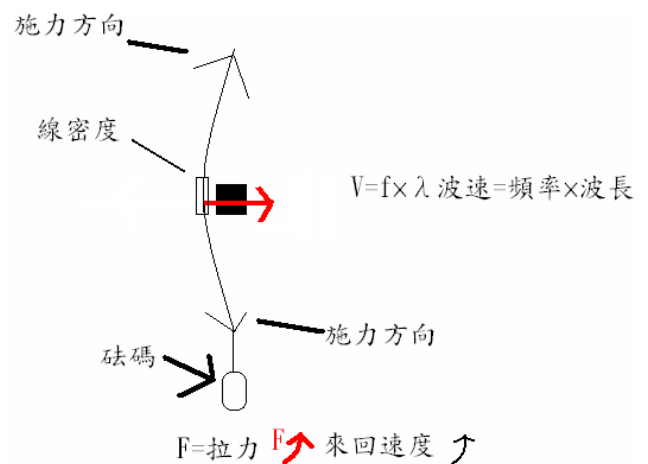
平方比 拉力	0.2cm 對 0.4cm	0.4cm 對 0.6cm	0.2cm 對 0.6cm	細棉線對 粗棉線	細魚線對 粗魚線
0.1kgw	1.49945	1.39	2.084	4.372	8.605499
0.2kgw	1.68556	1.5224	2.566	3.569	8.734896
0.3 kgw	1.70569	1.603	2.734	3.745	8.330401
0.4 kgw	1.79986	1.6531	2.975	3.567	7.771894
0.5 kgw	1.93823	1.6466	3.191	3.645	7.932493
0.6 kgw	2.01983	1.6261	3.285	3.535	7.827086
0.7 kgw	2.02531	1.5627	3.165	3.496	8.368448
0.8 kgw	1.98474	1.5468	3.07	3.518	8.372236
波速平方 比平均值	1.83233	1.5688	2.884	3.681	8.242869
理論值	2	1.5	3	3.411	4.904762



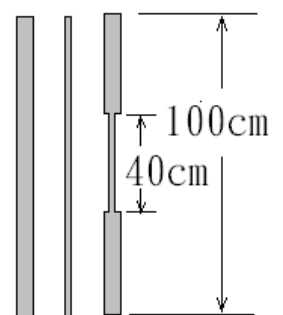
結果：在相同材料的繩子作比較時，粗細不同的繩子其繩波傳遞的速度平方大致和繩子的線密度成反比，但是關於釣魚線的驗證差距過大，這裡一定還有其他未知的因素共同影響繩波傳遞的快慢。

三、爲了追尋公式的由來，我們問老師關於波速的公式的原理，老師的解釋大概如右圖所示：

當一條細繩受力繃緊且被拉到左側時，細繩兩端的拉力會把繩子拉向中間，如果繩子繃得愈緊，兩端拉回的力量就愈大，對中間某小段細繩來說就會被拉回得愈快，表示每秒跑較多次，頻率 f 就愈大。反之，若拉力相同，中間某小段細繩愈重就愈不容易拉回去，頻率 f 就愈小。因爲 $v = f \times \lambda$ ，頻率和速度成正比，因此說明了速度和拉力 F 、線密度 μ 的關係。要證明 0.5 次方的關係要等將來學更多理論再說。



即使不能證明公式，我們也努力想辦法試驗以上的說明。我們再剪一條長度 1m 寬度 0.6cm 的橡皮筋，中間一段長度 40cm 剪成寬度 0.2cm，如右圖所示，嘗試證明在拉力相同時，把中間段變輕，看看是否有什麼改變？發現振動真的比原來寬度 0.6cm 的橡皮筋快，比 0.2cm 寬的慢。現在我們嘗試推算它的頻率 f 應該是多少：如右圖：粗繩 0.6m、細繩 0.4m 波在粗繩傳遞時間 + 細繩傳遞時間 = 全部時間

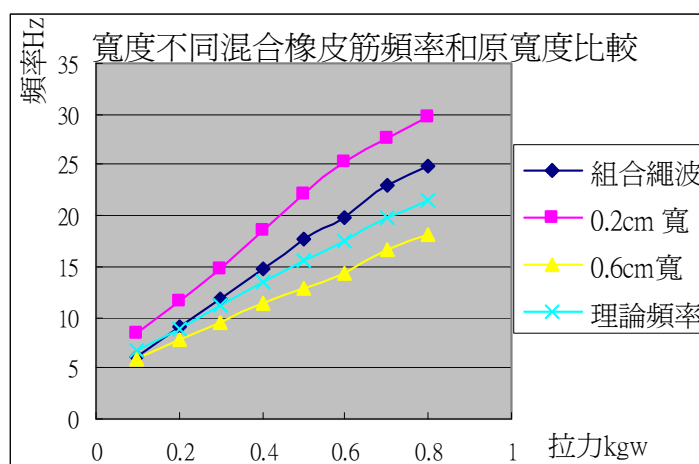


$$\begin{aligned}
 t_{\text{粗}} + t_{\text{細}} &= t_{\text{全}} \\
 \frac{l_{\text{粗}}}{v_{\text{粗}}} + \frac{l_{\text{細}}}{v_{\text{細}}} &= \frac{l_{\text{全}}}{v_{\text{全}}} \quad ; \quad v = f \times \lambda \quad ; \quad \lambda = 2 \text{ 代入} \\
 \therefore \frac{0.6}{f_{\text{粗}} \times 2} + \frac{0.4}{f_{\text{細}} \times 2} &= \frac{1}{f \times 2} \\
 \therefore f &= \frac{5 \times f_{\text{粗}} \times f_{\text{細}}}{2f_{\text{粗}} + 3f_{\text{細}}} \quad \text{(一式)}
 \end{aligned}$$

把原先分別在第一部分測到的頻率代入(一式)，得到粗細混合橡皮筋理論頻率，整理如下：

表 8：粗橡皮筋 60cm，細橡皮筋 40cm 串成 100cm 橡皮筋的頻率

粗細混合橡皮筋					
拉力 kgw	組合 繩波	0.2cm 寬	0.6cm 寬	理論頻 率	頻率比
0.1	6.15	8.45	5.94	6.74093	0.9123
0.2	9.08	11.54	7.71	8.89023	1.0213
0.3	11.84	14.76	9.51	11.0875	1.0679
0.4	14.76	18.58	11.36	13.4507	1.0973
0.5	17.75	22.09	12.93	15.5011	1.1451
0.6	19.75	25.27	14.42	17.4101	1.1344
0.7	22.99	27.64	16.65	19.7989	1.1612
0.8	24.93	29.68	18.16	21.4976	1.1597



我們發現：當橡皮筋受到的拉力不大時，頻率的測量值和理論的預測值極為接近。但是當拉力增大時，我們認為：粗、細橡皮筋的長度組合變化太大，細的部分伸長太多，長度所佔的比例超過一半，導致整個頻率預測的結果超過理論計算所得。這種可預測的精準度給我們很大的鼓舞，於是我們又想：如果把會伸長的橡皮筋改成幾乎不伸長的棉繩呢？是否會更好？我們把第一部分實驗用的粗、細棉線打結，使兩條棉線連成一條。粗棉線在上，細棉線在下，調整上下長度的比例如右圖所示的比例，分別測量它們的振動頻率 f ，仿照在橡皮筋實驗推論的(一式)，代入在第一部分實驗測到的 100cm 粗、細棉線的頻率，分別計算它們的理論值。二者對照後得到振動頻率的相似度整理在下面的表格：

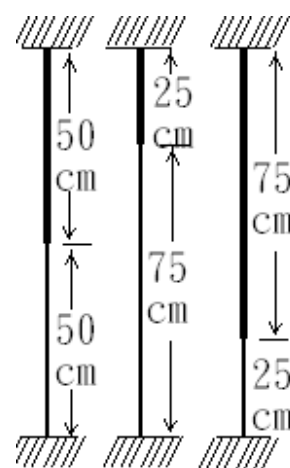
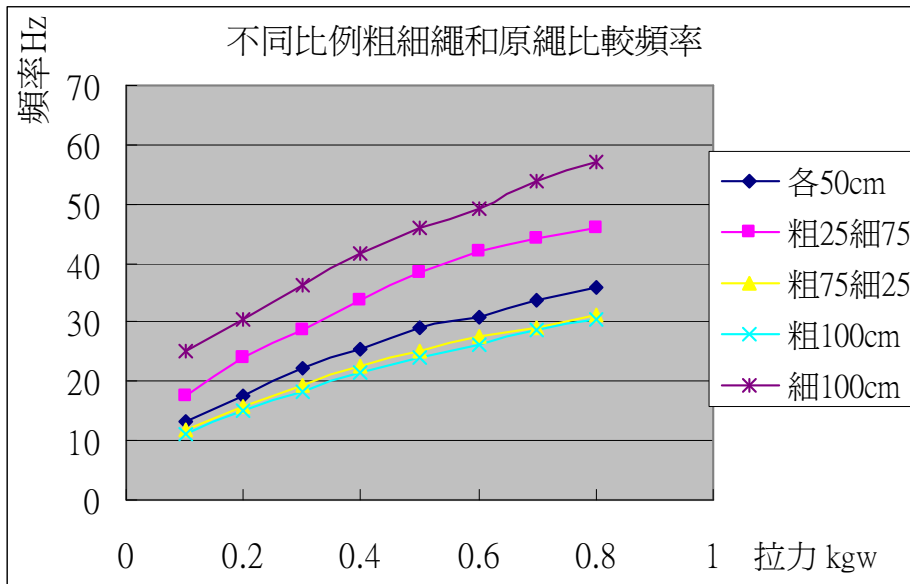


表 9：測到的組合線振動頻率和理論值的比較：相似度：測量值和理論值的比值

繩組 拉力	粗細各 50cm	粗 25 細 75	粗 75 細 25	粗 100cm	細 100cm	5050 理論 頻率	2575 理論 頻率	7525 理論 頻率	5050 相似 度	25 75 相似 度	75 25 相似 度
0.1 kgw	13.36	17.53	11.69	10.96	25.16	15.27	19	12.76	0.875	0.9224	0.9161
0.2 kgw	17.53	24.18	15.76	15.08	30.66	20.22	24.37	17.27	0.867	0.9923	0.9123
0.3 kgw	22.26	28.62	19.21	18.45	36.43	24.49	29.29	21.05	0.909	0.977	0.9127
0.4 kgw	25.5	33.8	22.44	21.41	41.56	28.26	33.64	24.36	0.902	1.0046	0.9211
0.5 kgw	28.92	38.42	25.27	23.97	45.98	31.51	37.4	27.23	0.918	1.0274	0.9281
0.6 kgw	30.82	41.87	27.5	26.21	49.21	34.2	40.36	29.68	0.901	1.0375	0.9266
0.7 kgw	33.8	44.17	29.22	28.77	53.94	37.53	44.26	32.57	0.901	0.998	0.8972
0.8 kgw	35.96	45.98	31.17	30.49	57.24	39.79	46.94	34.52	0.904	0.9795	0.9029
平均									0.897	0.9923	0.9146



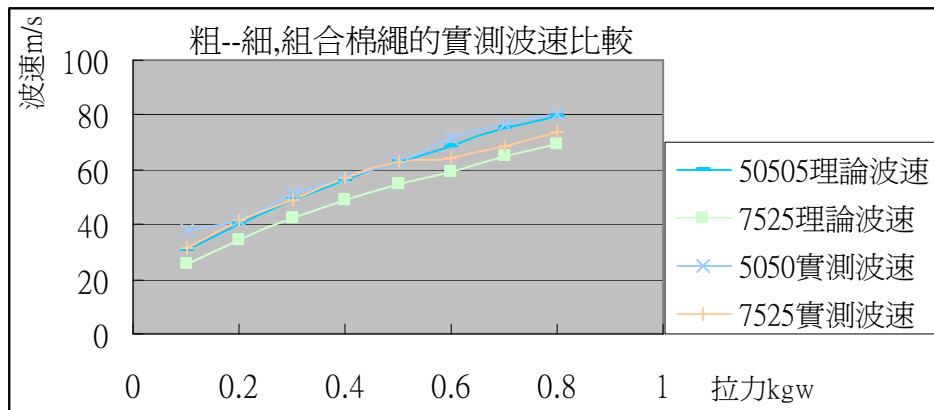
這些粗細棉線組合的測量顯示：細繩振動比粗繩快，若細繩佔的比例比較大，它的頻率就會比較大。如果我們先分別測量粗、細棉線的振動頻率後，可以用這個測量結果去預估粗、細棉線串接在一起的振動頻率準確度大約是 9 成~9 成 9。這裡有個小細節，兩線串接的地方是打一個結，就算我們盡量剪掉多餘的繩線，但是打結的位置仍然增加了一點點質量，而且這小團的質量愈靠近粗繩的一端似乎比較容易被拉動，在中間比較難被拉動，所以頻率減少的量比較多，相似度比較小。我們會再設計實驗去推敲這個現象。

四、 現在我們先來看看，這種粗細棉線串接的組合，預測到的頻率變化或是計算的頻率變化，是否能適當的反應在利用第二部分實驗實際測到的波速？以下我們測量粗 50cm—細 50cm，粗 75cm—細 25cm，兩種串接組合棉線的測量和計算數據圖形：

表 10：實際測到的組合線波速和理論波速值的比較：相似度：波速測量值和理論值的比值

繩組 拉力	粗 100cm 頻率 f	細 100cm 頻率 f	5050 理 論波速	7525 理論 波速	5050 實 測波速	7525 實測 波速	5050 相似 度	7525 相似 度
0.1kgw	10.96	25.16	30.54	25.521	37.736	31.25	1.235722	1.224485
0.2 kgw	15.08	30.66	40.43	34.549	41.667	41.66667	1.030508	1.206014
0.3 kgw	18.45	36.43	48.99	42.094	51.282	48.78049	1.046801	1.158851
0.4 kgw	21.41	41.56	56.52	48.726	57.143	57.14286	1.010982	1.172736
0.5 kgw	23.97	45.98	63.02	54.457	62.5	62.5	0.991678	1.147696
0.6 kgw	26.21	49.21	68.41	59.355	71.429	64.51613	1.044187	1.086945
0.7 kgw	28.77	53.94	75.05	65.139	76.923	68.96552	1.024953	1.058745
0.8 kgw	30.49	57.24	79.57	69.047	80	74.07407	1.005359	1.072808

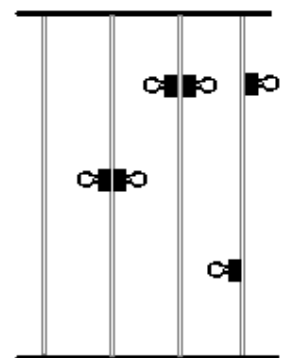
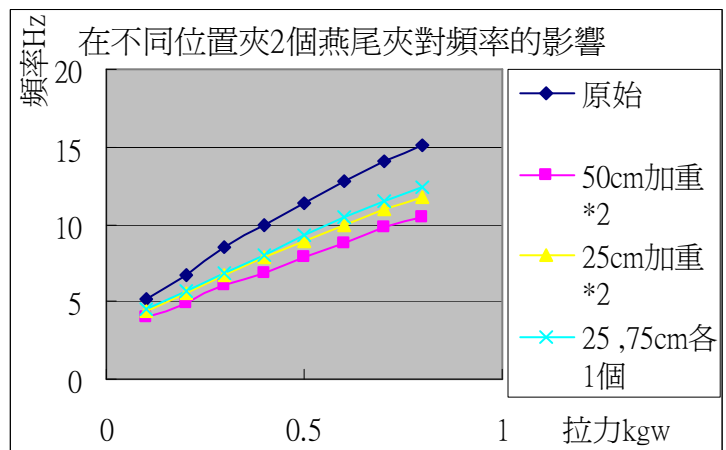
粗繩—細繩，50—50 組合的平均相似度 1.05；75—25 組合的平均相似度 1.14。這和原先第 7、第 8 頁分別測量整條粗、細棉線得到的結果相似，我們的測量值都大於理論預測值一些，可能有些地方還可以想辦法改善實驗操作。我們原本認為打結的地方會影響繩波傳遞的速度，測量時卻沒發生。



五、對相同一段同質量、同拉力振動中的繩子，如果他們的質量分佈不均勻而且位置也不一樣，對它們的振動頻率會做什麼改變？我們把一條寬度 0.6cm，長度 100cm 的橡皮筋分別在不同位置夾 2 個燕尾夾，分別是 50cm 處夾兩個，25cm 處夾 2 個，25、75cm 處各夾 1 個，如右圖，分別測它們的振動頻率，然後跟原來不夾燕尾夾的狀況作比較得到如下表的結果：

表 11：燕尾夾夾在不同位置對頻率的影響

0.6cm 寬橡皮筋在不同位置夾 2 個燕尾夾				
拉力 kgw	原始	50cm 加重*2	25cm 加重*2	上下 25cm 各 1 個
0.1	5.15	3.95	4.45	4.52
0.2	6.76	4.96	5.5	5.72
0.3	8.5	6.12	6.68	6.84
0.4	9.91	6.84	7.9	8.01
0.5	11.4	7.9	8.88	9.35
0.6	12.75	8.77	9.88	10.39
0.7	14.02	9.84	11	11.45
0.8	15.16	10.39	11.69	12.41

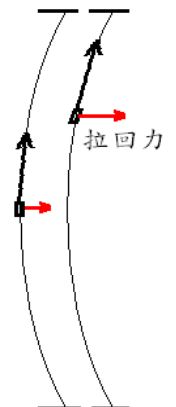


圖：在不同位置夾2個燕尾夾

可以看出來，在第 12 頁討論三用的圖必須要修正，如果仍然探討中間段的質量受力的狀況，由原始未加重的比較 50cm 夾 2 個燕尾夾的頻率就可以知道質量愈重愈不容易被拉動，頻率就變小。但中間位置夾燕尾夾的和靠近兩端夾燕尾夾的相比，可以知道兩端夾燕尾夾的比較容易被拉回，頻率就愈大。

我們認為因為振動細繩的彎曲度的關係，燕尾夾在不同的位置被往中間方向拉回的力量不一樣，愈靠近兩端處她被拉回的力量愈大，所以動得愈快、頻率愈大。而且只拉一個又比拉兩個容易，所以分散在上下各一個燕尾夾的橡皮筋振動就愈快。所以，在相同的總繩重、相同拉力 F 的繩子，若是它的線密度 μ 分佈不均勻，測量到的振動頻率就會不一樣。重的部分愈靠近兩端，它的振動頻率就會愈快。接下來，加了燕尾夾對橡皮筋的振動頻率產生的影響會反映在實際測量到的波速嗎？

我們把 0.6cm 寬的橡皮筋夾各數不等的燕尾夾，實際測量波速如下：

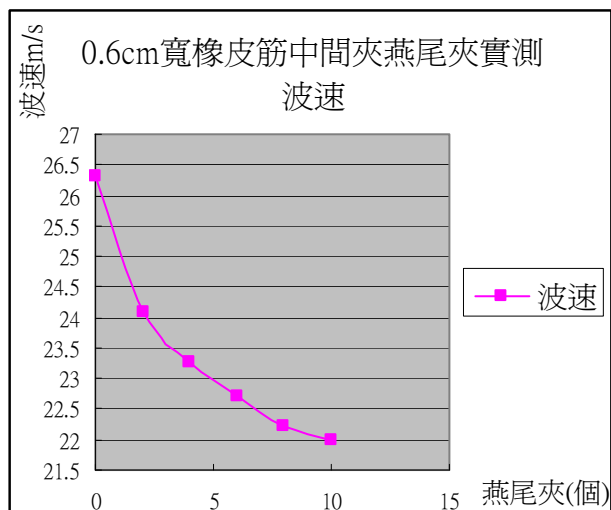


圖：不同位置的燕尾夾被拉回的力大小不同

表 12：中間夾了重物對實測波速的影響，拉力都是 0.6kgw。

0.6cm 橡皮筋加重量實測波速

燕尾夾	時間	波速
0	0.076	26.3158
2	0.083	24.0964
4	0.086	23.2558
6	0.088	22.7273
8	0.09	22.2222
10	0.091	21.978



發現橡皮筋夾了重物真的會影響到波速的傳遞，夾愈多波速就傳的愈慢，但是減慢的幅度不會太大。如果我們把繩子兩端固定，測頻率求得波速， $v = f \times \lambda$ ，這種測量方式受重物的影響有多大？因為繩子夾了燕尾夾之後，在振動時會多了燕尾夾晃動造成測量時的干擾。所以修改了在繩上附重物的方式：以雙面膠帶貼 6 小段保險絲在繩上，然後在以熱收縮套固定，不讓它晃動。總重量恰好跟兩個燕尾夾相等，都是 4.4 公克。

把兩種測波速的方式超級比一比：(拉力都是 0.6kgw，夾的重物都是 4.4 g)



圖：附保險絲的細繩

(一) 測頻率轉換成波速： $(v = f \times \lambda ; \lambda = 2m)$

(二) 實際測的波速： $v = \frac{\text{距離2公尺}}{\text{時間}}$

表 13：中間夾重物，兩種測波速方法的比較
夾 4.4g 重物，頻率測波速和實測波速比較

繩線 測波速方法	0.6cm 寬橡皮筋	細棉線	粗棉線
原以頻率算波速	27.92	98.42	52.42
原實測波速	26.32	100	57.14
夾物以頻率測波速	17.54	24.4	21.16
夾物實測波速	24.02	95.24	50

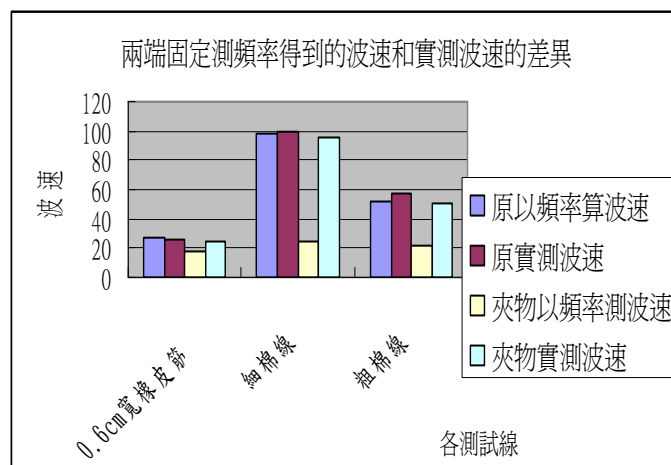


表 14：兩種測量波速的方式對細繩中間附有重物和原繩的波速比：

	0.6cm 寬橡皮筋	細棉線	粗棉線
測頻率轉換成波速	0.63	0.25	0.40
實際測的波速	0.91	0.97	0.95

現在我們知道，當細繩中間附了重物(保險絲)會在波前進時減慢了速度。但只是變慢一點點，若採

用第一種測波速的方式，以測到的頻率去計算波速，是嚴重的錯誤。

柒、 結論

- 一、 兩端固定的弦線，振動頻率 f 大約和拉力 $F^{0.5}$ 成正比，所以繃得愈緊的弦線頻率愈大，音調愈高。容易被拉長的橡皮筋， F 的次方值大於 0.5，愈容易被拉長的橡皮筋次方值大愈多。振動頻率 f 大約和弦線的線密度 $\mu^{-0.5}$ 成正比，但是這規律對於釣魚線不適用，細釣魚線比起粗釣魚線應有的頻率大很多，這部分原因不明。所以，以拉力大小來推算應有的音調高低(振動頻率)比較容易，反之，以粗、細的線密度比來推算應有的音調高低比較有風險。
- 二、 兩端固定的振動弦線，它的長度 L 等於半波長 $\frac{1}{2}\lambda$ 。改變長度 L 等於改變波長。把測得的頻率 $f \times$ 波長 λ 幾乎是一個定值，這定值就是繩波的波速。於是我們可以把繩線的兩端固定，測量繩線的振動頻率 f 就可以推算繩波波速。這是我們學到的第一種繩波波速的測量方法，簡單好用，但是有使用上的條件限制。
- 三、 用 AB 兩點間的距離 $2m$ 測量繩波在 AB 兩點之間傳播的時間 t ，可以直接實際測量到繩波在 AB 兩點傳播的波速。這是我們學到的第二種繩波波速的測量方法。這方法是直接測量波速，沒有條件限制。
- 四、 實驗上測量粗細不同的橡皮筋串接成一條組合橡皮筋的振動頻率 f ，和經由理論計算的推論結果非常吻合，要注意拉力較大時橡皮筋細的部分伸長量較大、佔的長度比例提高，使得測量值高於理論值。
- 五、 仿照結論四，粗細不同的串接組合繩改以棉線取代，它的振動頻率仍然隨著粗繩、細繩所佔的長度比例而調變，就算使用第二種方式實際測量組合繩的波速，它和理論值仍然高度的吻合，幾乎不受交界處打結的影響。因此以後要想知道一條粗細不均勻的組合繩頻率 f 或者是它的波速，只要先測到粗繩和細繩的振動頻率，再依公式帶入計算即可，可以非常便捷的得到粗、細串接組合繩的波速。
- 六、 兩端固定的繩子某部分被異物附著時，它的振動頻率 f 會因受到附著在繩子上物體的牽絆而變小。若附著的物體愈接近繩子中央，它的頻率減慢的效果就愈明顯，愈接近兩端頻率減少就愈不明顯，若質量均分成兩部分，分別靠近兩端，則頻率減慢的程度最少，這部分沒有公式可運用來推算，只能實驗測量實際的繩波振動頻率 f 。
- 七、 仿照結論六，當夾了物體的繩子振動頻率 f 減小，如果代入公式 $v = f \times \lambda$ ，波速 v 是大幅減小。但根據實際測量結果，波速其實只減少一點點。所以簡易的測量（第一種測量方式）有它的限制。當細繩被某物體黏附上，就不能採用第一種方式測量波速。

捌、 實驗展望

這個簡易版的光電計時系統的時間測量能測到小數點以下三位，非常精確。Pa 模擬示波器對於微小的電流變化非常敏銳，所以系統設計對太陽能板的規格要求不高，很容易普及應用到各中等學校。而且這個系統的設立非常具有彈性，理論上只要小太陽能板夠多，能接受到的訊號就可以有很多點數據，對於實驗的精準度就可以提升，它如果被用來測量水波波速、滑車速度、加速度，自由落體的加速度等，應該比傳統的光電計時器具有更大的優勢。我們九年級會學到加速度和力量，現在我們已經在想辦法擴充這個系統，期待檢驗課本的知識或者創造知識。

玖、 參考資料

- 一、 康軒版國中自然課本第四冊第三章。
- 二、 師大物理系網站－繩波的波速。
- 三、 觀念物理學IV，聲學。
- 四、 基礎物理學第七版（上）
- 五、 49 屆科展，國小組：大「撒」大「霧」－防霧探討與應用。

附錄 A：不同材質、粗細、長度的線，拉力對頻率(Hz)的關係

長 200cm 橡皮筋拉力對頻率關係			
拉力 kgw	寬 0.2cm	寬 0.4cm	寬 0.6cm
0.1	4.79 Hz	3.34	3.05
0.2	7.17	4.79	4.01
0.3	8.74	5.84	5.01
0.4	10.2	6.93	5.78
0.5	12.2	8.01	6.75
0.6	14.17	8.9	7.48
0.7	15.53	9.84	8.37
0.8	16.9	10.75	9.05
0.9		11.69	9.71

200cm 棉線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗棉線	細棉線
0.1	5.01	10.58
0.2	7.86	14.38
0.3	8.99	17.87
0.4	10.96	20.47
0.5	11.94	22.99
0.6	13.29	25.04
0.7	14.69	27.23
0.8	15.29	28.62
0.9	16.03	30.82

200cm 釣魚線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗魚線	細魚線
0.1	11.22	35.51
0.2	14.38	44.52
0.3	19.34	55
0.4	22.44	62.33
0.5	25.5	71.92
0.6	28.85	79.01
0.7	29.53	85.65
0.8	31.17	90.48

長 150cm 橡皮筋拉力對頻率關係			
拉力 kgw	寬 0.2cm	寬 0.4cm	寬 0.6cm
0.1	5.75	4.68	4.25
0.2	8.75	6.6	5.45
0.3	11.27	8.37	6.45
0.4	14.03	10.05	7.48
0.5	16.31	11.69	8.37
0.6	18.21	13.17	9.71
0.7	20.04	14.61	10.91
0.8	21.58	15.94	12.04

150cm 棉線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗棉線	細棉線
0.1	7.29	15.29
0.2	10.39	19.82
0.3	12.75	24.08
0.4	14.76	27.91
0.5	16.21	30.66
0.6	17.75	33.8
0.7	19.34	36.43
0.8	20.47	38.42

150cm 釣魚線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗魚線	細魚線
0.1	14.46	43.49
0.2	19.55	60.98
0.3	25.73	74.8
0.4	29.84	85
0.5	33	98.42
0.6	36.91	107.88
0.7	39.51	116.87
0.8	42.5	124.12

長 100cm 橡皮筋拉力對頻率關係			
拉力 kgw	寬 0.2cm	寬 0.4cm	寬 0.6cm
0.1	8.45	7.58	5.94
0.2	11.54	9.98	7.71
0.3	14.76	13.36	9.51
0.4	18.58	15.71	11.36
0.5	22.09	17.48	12.93
0.6	25.27	19.68	14.42
0.7	27.64	21.41	16.65
0.8	29.68	23.09	18.16

100cm 棉線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗棉線	細棉線
0.1	10.96	25.16
0.2	15.08	30.66
0.3	18.45	36.43
0.4	21.41	41.56
0.5	23.97	45.98
0.6	26.21	49.21
0.7	28.77	53.94
0.8	30.49	57.24

100cm 釣魚線拉力對頻率關係		
拉力 kgw	粗魚線	細魚線
0.1	23.97	64.48
0.2	32.62	89.05
0.3	38.42	107.88
0.4	45.61	125.78
0.5	50.09	140.25
0.6	57.24	156.7
0.7	58.44	168.98
0.8	62.33	182.14

長 50cm 橡皮筋拉力對頻率關係			
拉力 kgw	寬 0.2cm	寬 0.4cm	寬 0.6cm
0.1	15.42	13.55	10.75
0.2	22.26	18.33	14.8
0.3	29.22	22.44	18.7
0.4	35.96	26.97	22.17
0.5	43.82	31.34	25.97
0.6	51	35.28	29.53
0.7	57.24	38.96	32.43
0.8	61.65	42.82	35.96

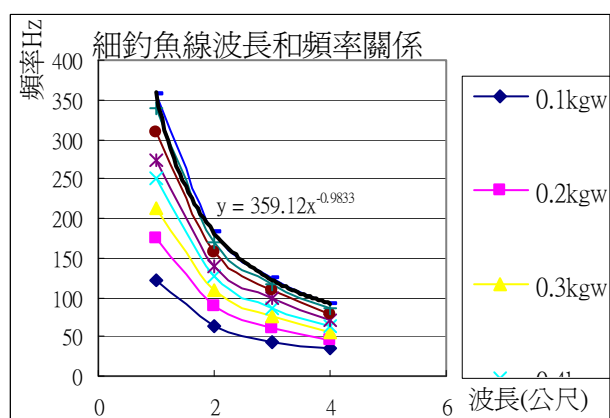
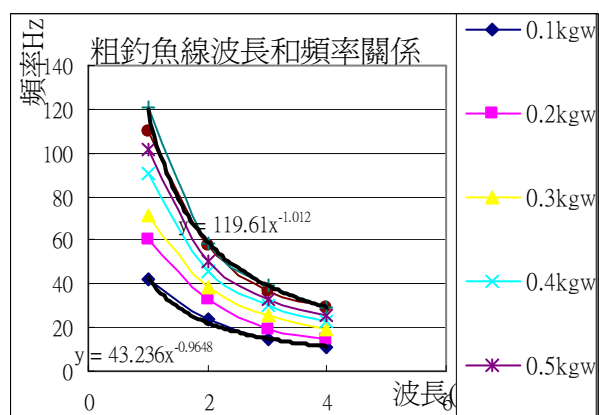
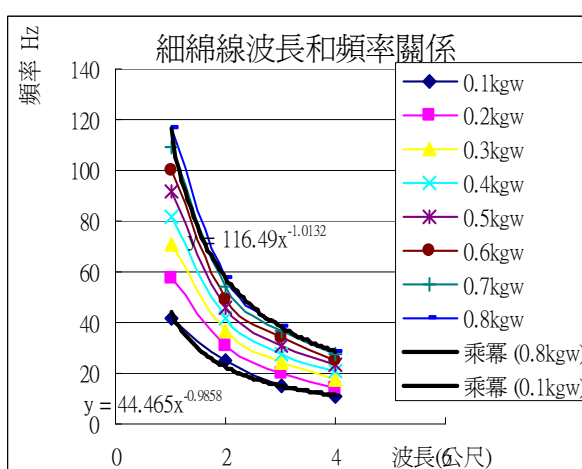
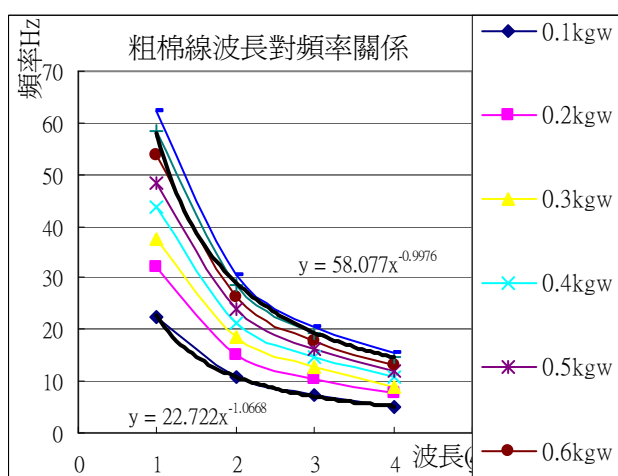
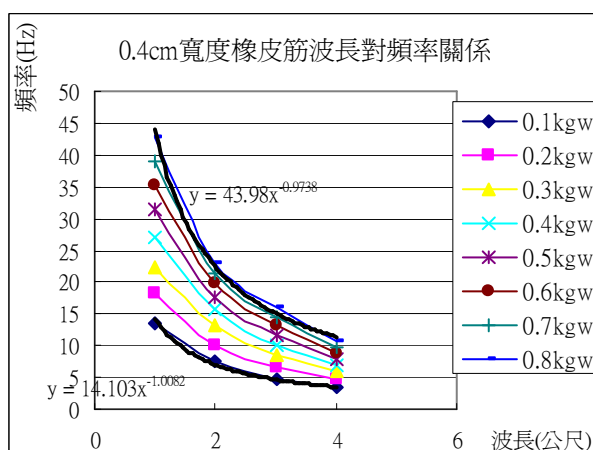
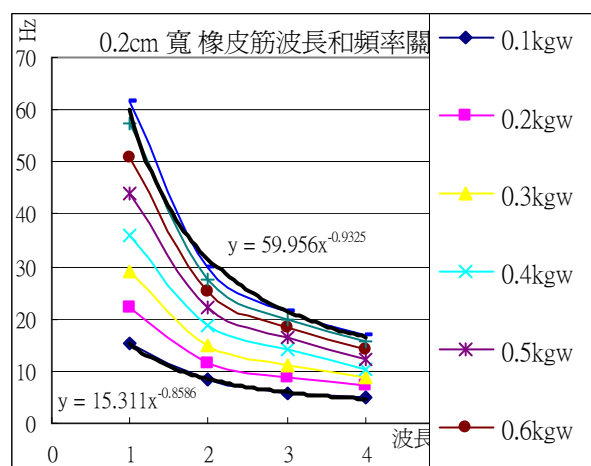
50cm 棉線拉力對頻率關係

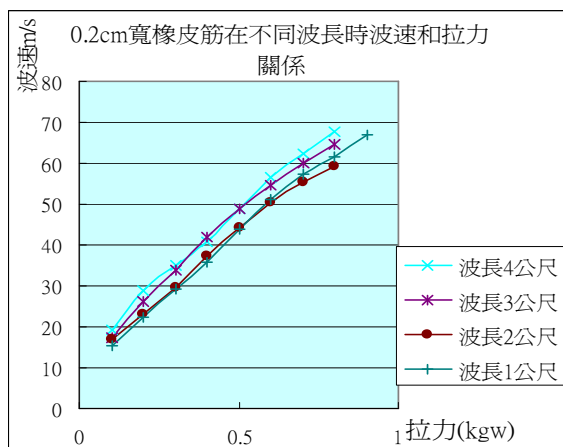
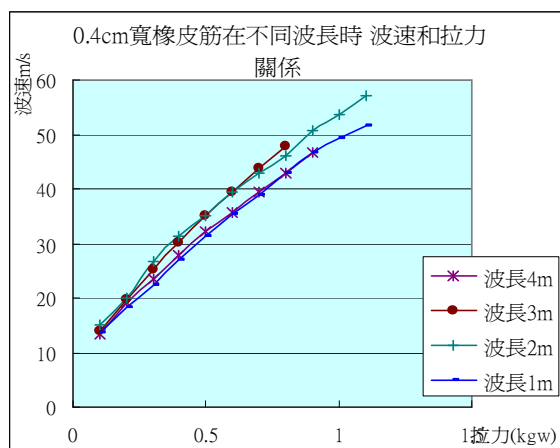
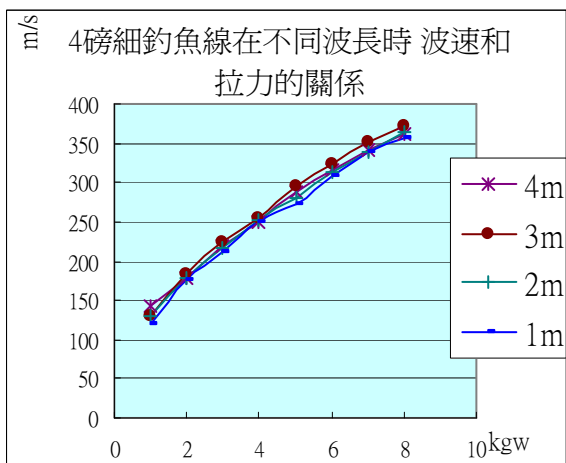
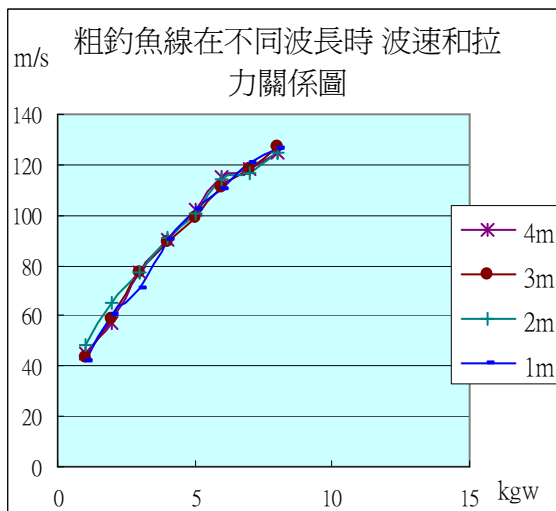
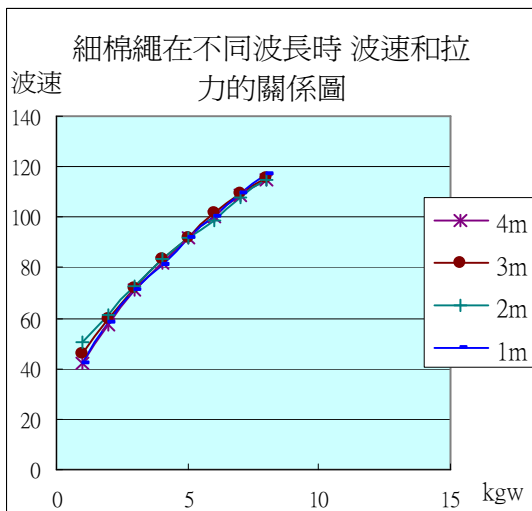
拉力 kgw	粗棉線	細棉線
0.1	22.44	41.87
0.2	32.24	57.84
0.3	37.4	70.83
0.4	43.83	81.3
0.5	48.36	91.97
0.6	53.94	100.18
0.7	58.44	109.14
0.8	62.33	116.87

50cm 釣魚線拉力對頻率關係

拉力 kgw	粗魚線	細魚線
0.1	41.87	120.91
0.2	60.32	175.31
0.3	71.01	212.5
0.4	90.48	250.45
0.5	102	272.33
0.6	110	308.24
0.7	120.39	340
0.8	126.35	357.32

附錄 B 細繩波長和頻率的指數關係，回歸分析函數圖形暨不同的波長測到的波速





【評語】 030105

1. 本作品以簡易雷射筆與小太陽能電池板製作出繩子的位移感測器，並用以測量繩波的速度，創意很好。數據擷取部分使用筆電的音效卡及公程式，十分方便。
2. 數據處理方面可以稍加改善，利用 V 平方對 F 作圖分析會更容易判斷繩重的影響。