中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080417

怨言不斷～探討排列人數與怨言數的關係

學校名稱：高雄市鼓山區中山國民小學

作者：	指導老師：
小六 許家哲	邱郁芳

關鍵詞：怨言數、排列組合

怨言不斷～探討排列人數與怨言數的關係

摘要

本研究主要探討怨言數y與排列人數x的關係，根據研究發現，怨言數的排列個數$f(x,y)$與人數x的排列組合有關。當x個人排列時，怨言數y為$0 \le y \le \frac{x(x-1)}{2}$；而怨言數的排列個數$f(x,y)$有對稱性，即$f(x,y) = f(x,\frac{x(x-1)}{2} - y)$。

從 1 個人排列開始，依序列出 1～x個人排列人數的$f(x,y)$後，以$f(x,y) = f(x-1,y) + f(x-1,y-1) + f(x-1,y-2) + \cdots + f(x-1,y-x+1)$可算出$f(x,y)$。最後，我發現用組合公式$\frac{n!}{m!(n-m)!}$可直接計算出$f(x,0)$～$f(x,3)$的數值，並根據研究結果限制對未來研究提出建議。

壹、研究動機

在某個小學數學競賽中有一個數學問題，題目是：

有從一年級到六年級的兒童各一人，排成一列領取糖果。

如果一個高年級的兒童站在低年級兒童前，那他後面所有比他低年級的兒童都各有 1 次怨言，而怨言的總數叫怨言數，例如：下面的排列，其怨言數就是 4。

		怨言
前	1 年級	0 次
↑	4 年級	0 次
	3 年級	1 次
	2 年級	2 次
↓	6 年級	0 次
後	5 年級	1 次

此組合怨言數為 4

請問怨言數為 7 的排列方式有幾個？

在解題的過程中我發現怨言數好像跟排列組合有關，因此想更進一步瞭解它們之間的關係，於是開始進行研究。

與教材的相關性如下：

一、第十二冊第二章 怎樣解題 1

二、第十二冊第五章 怎樣解題 2

三、第十二冊第六章 等量公理

貳、研究目的

一、找出計算怨言數的方法。

二、探討排列人數和怨言數之間的關係。

三、找出各個怨言數排列個數的算法。

參、研究器材

紙、筆、橡皮擦、電腦

肆、名詞定義

一、 $f(x,y)$ 表示 x 個人怨言數為 y 的排列方式的個數。

二、 x 表示 1、2、3、…、 $x-1$、 x 個人。

三、 y 指怨言數。

伍、文獻探討

本研究所稱的怨言數其實就是數學上的逆序數，但本研究是探討怨言數排列方式的個數，並沒有研究逆序數在數學上的計算與應用，研究主要與排列組合有關，以下分別敘述：

一、乘法原理

如果要完成某件事有 k 個步驟，完成第一步驟有 m_1 種方法，完成

第二步驟有m_2種方法…，完成第k步驟有m_k種方法，則完成這件事共有$m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$種方法。

二、完全相異物直線排列

有n個不同的事物，將它們排成一列，則會有$n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$種排法，為了使用上的方便我們將$n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$的連乘積叫作$n$的階乘，並以符號$n!$表示。

有n個不同的事物，從其中任取m個 $(m \le n)$ 排成一列，會有幾種不同的排法呢? 根據乘法原理歸納出共有$\frac{n!}{(n-m)!}$種排法。

三、相異物的組合

從不同的東西中要選出其中幾個到底有多少種選法？從n個不同物件中，不重複且不計其前後次序取m個($0 \le m \le n$)物件為一組，稱作n中取m的組合，其組合數為$\frac{n!}{m!(n-m)!}$。

陸、研究過程、結果與討論

研究一 計算怨言數的方法

計算怨言數的方法有兩種，一種是從前面算，另一種則是從後面算，以下分別敘述：

（一）從前面計算

根據排列，看前面有沒有比它大的數字，有幾個就計幾次怨言，以此類推，都算完後把每個人的怨言加起來就是怨言數，舉例如下：

怨言

前 1 年級　0 次（前面沒有數字較大，所以怨言為 0）

↑ 4 年級　0 次（前面沒有比 4 大的數字，所以怨言為 0）

3 年級　1 次（前面的 4 比較大，所以怨言為 1）

2 年級　2 次（前面的 4 和 3 都比 2 大，所以怨言為 2）

↓ 6 年級　0 次（前面沒有比 6 大的數字，所以怨言為 0）

後 5 年級　1 次（前面的 6 比較大，所以怨言為 1）

將怨言加起來 0＋0＋1＋2＋0＋1＝4，

怨言數為 4

（二）從後面算

根據排列，看後面有沒有比它小的數字，有幾個就計幾次怨言，以此類推，都算完後把每個人的怨言加起來就是怨言數，舉例如下：

怨言

前 1 年級　0 次（後面沒有數字比 1 小，所以怨言為 0）

↑ 4 年級　2 次（後面的 3 和 2 比較小，所以怨言為 2）

3 年級　1 次（後面的 2 比較小，所以怨言為 1）

2 年級　0 次（後面沒有數字比較小，所以怨言為 0）

↓ 6 年級　1 次（後面的 5 比較小，所以怨言為 1）

後 5 年級　0 次（後面沒有數字，所以怨言為 0）

將怨言加起來 0＋2＋1＋0＋1＋0＝4，

怨言數為 4

由上面兩種方法可知，不管是從前面算或是從後面算，怨言數都會一樣。

研究二 找出 6 個學生怨言數為 7，f（6，7）的排列個數

一到六年級學生各一人時，怨言數為 7 的排列方式有幾個？我用下列方式解決這個題目：

1.列出 1 到 6 個學生所有的排列組合，並算出怨言數。

2.將怨言數為 7 的排列以不同顏色標示。

3.計算怨言數為 7 的全部排列的總數。

舉例如下：

前 ←——————————————→ 後

排列	1	6	4	5	3	2	怨言數
怨言	0	0	1	1	3	4	9
排列	1	6	4	5	2	3	
怨言	0	0	1	1	3	3	8
排列	1	6	4	3	5	2	
怨言	0	0	1	2	1	4	8
排列	1	6	4	3	2	5	
怨言	0	0	1	2	3	1	7
排列	1	6	4	2	5	3	
怨言	0	0	1	2	1	3	7

研究結果與發現：

（一）6 個學生總共有 720 種排列方式，6！＝720。

（二）怨言數為 7 的排列方式有 101 個，也就是 f（6，7）＝101

以上述方法雖然可順利解題，但將全部排列組合列出再計算的方式太費力耗時，且中間是否有遺漏或計算錯誤的情形，都需要再檢查，因此我希望能再探究看看是否有更簡單的方法。

研究三 從 1 個人排列開始，找出 x、y 與 $f(x,y)$關係

在研究二中做排列組合時，我發現其實怨言數都依不斷重複的排列出現，因此我從排列 1 人、2 人、…，依序排列出各人數的怨言數及其排列方式，希望能發現排列人數與怨言數的關係。

（一） $x=1$

排列方式	1
怨言數	0

因為沒有較大或較小數，因此怨言數為 0。

怨言數 y	0	總和
1 排頭	1	
排列個數 $f(x,y)$	1	1

$f(1,0)=1$

（二） $x=2$

排列方式	1 2	2 1
怨言數	0	1

怨言數有 0、1，排列方式共 2 種。

怨言數 y	0	1	總和
1 排頭	1		
2 排頭		1	
排列個數 $f(x,y)$	1	1	2

$f(2,0)=f(1,0)=1$

$f(2,1)=f(1,0)=1$

（三） $x=3$

排列方式	1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1
怨言數	0	1	1	2	2	3

怨言數為 0～3，排列方式共 6 種。

怨言數 y	0	1	2	3	總和
1 排頭	1	1			
2 排頭		1	1		
3 排頭			1	1	
排列個數 $f(x,y)$	1	2	2	1	6

$f(3,0)=1$

$f(3,1)=f(2,1)+f(2,0)=2$

$f(3,2)=f(2,1)+f(2,0)=2$

$f(3,3)=1$

（四） $x=4$

排列方式	1 2 3 4	1 2 4 3	1 3 2 4	1 3 4 2	1 4 2 3	1 4 3 2
怨言數	0	1	1	2	2	3

排列方式	2 1 3 4	2 1 4 3	2 3 1 4	2 3 4 1	2 4 1 3	2 4 3 1
怨言數	1	2	2	3	3	4

排列方式	3 1 2 4	3 1 4 2	3 2 1 4	3 2 4 1	3 4 1 2	3 4 2 1
怨言數	2	3	3	4	4	5

排列方式	4 1 2 3	4 1 3 2	4 2 1 3	4 2 3 1	4 3 1 2	4 3 2 1
怨言數	3	4	4	5	5	6

怨言數為 0～6，排列方式共 24 種。

怨言數 y	0	1	2	3	4	5	6	總和
1 排頭	1	2	2	1				
2 排頭		1	2	2	1			
3 排頭			1	2	2	1		
4 排頭				1	2	2	1	
排列個數 $f(x,y)$	1	3	5	6	5	3	1	24

$f(4,0)=1$

$f(4,1)=f(3,1)+f(3,0)=3$

$f(4,2)=f(3,2)+f(3,1)+f(3,0)=5$

$f(4,3)=f(3,3)+f(3,2)+f(3,1)+f(3,0)=6$

$f(4,4)=f(3,3)+f(3,2)+f(3,1)=5$

$f(4,5)=f(3,3)+f(3,2)=3$

$f(4,6)=1$

以此方法直接推算 $x=5$、$x=6$ 的怨言數的排列個數。

（五） $x=5$

怨言數 y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	總和
1 排頭	1	3	5	6	5	3	1					
2 排頭		1	3	5	6	5	3	1				
3 排頭			1	3	5	6	5	3	1			
4 排頭				1	3	5	6	5	3	1		
5 排頭					1	3	5	6	5	3	1	
排列個數 $f(x,y)$	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	120

怨言數為 0～10，共有 120 種排列方式。

$f(5,0)=1$

$f(5,1)=f(4,1)+f(4,0)=4$

$f(5,2)=f(4,2)+f(4,1)+f(4,0)=9$

$f(5,3)=f(4,3)+f(4,2)+f(4,1)+f(4,0)=15$

$f(5,4)=f(4,4)+f(4,3)+f(4,2)+f(4,1)+f(4,0)=20$

$f(5,5)=f(4,5)+f(4,4)+f(4,3)+f(4,2)+f(4,1)=22$

$f(5,6)=f(4,6)+f(4,5)+f(4,4)+f(4,3)+f(4,2)=20$

$f(5,7)=f(4,6)+f(4,5)+f(4,4)+f(4,3)=15$

$f(5,8)=f(4,6)+f(4,5)+f(4,4)=9$

$f(5,9)=f(4,6)+f(4,5)=4$

$f(5,10)=1$

（六）$x=6$

怨言數 y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	總和
1 排頭	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1						
2 排頭		1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1					
3 排頭			1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1				
4 排頭				1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1			
5 排頭					1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1		
6 排頭						1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	
排列個數 $f(x,y)$	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1	720

怨言數為 0～15，共有 720 種排列方式。

$f(6,0)=1$

$f(6,1)=f(5,1)+f(5,0)=5$

$f(6,2)=f(5,2)+f(5,1)+f(5,0)=14$

$f(6,3)=f(5,3)+f(5,2)+f(5,1)+f(5,0)=29$

$f(6,4)=f(5,4)+f(5,3)+f(5,2)+f(5,1)+f(5,0)=49$

$f(6,5)=f(5,5)+f(5,4)+f(5,3)+f(5,2)+f(5,1)+f(5,0)=71$

$f(6,6)=f(5,6)+f(5,5)+f(5,4)+f(5,3)+f(5,2)+f(5,1)=90$

$f(6,7)=f(5,7)+f(5,6)+f(5,5)+f(5,4)+f(5,3)+f(5,2)=101$

$f(6,8)=f(5,8)+f(5,7)+f(5,6)+f(5,5)+f(5,4)+f(5,3)=101$

$f(6,9)=f(5,9)+f(5,8)+f(5,7)+f(5,6)+f(5,5)+f(5,4)=90$

$f(6,10)=f(5,10)+f(5,9)+f(5,8)+f(5,7)+f(5,6)+f(5,5)=71$

$f(6,11)=f(5,10)+f(5,9)+f(5,8)+f(5,7)+f(5,6)=49$

$f(6,12)=f(5,10)+f(5,9)+f(5,8)+f(5,7)=29$

$f(6,13)=f(5,10)+f(5,9)+f(5,8)=14$

$f(6,14)=f(5,10)+f(5,9)=5$

$f(6,15)=1$

研究結果與發現：

1. x 個人排列，各怨言數排列個數的總和＝ $x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times 2\times 1$，也是 x 個人排列組合的總數 x！。
2. x 個人排列，按照順序依序排列｛1、2、3、…、x－1、x｝的怨言數最小，為 y＝0；而完全相反的排列｛x、x－1、…、3、2、1｝的怨言數最大，這種排列方式的怨言數可以用梯形公式計算總和，$y=\dfrac{x(x-1)}{2}$，因此 x 個人排列時，怨言數 y 一定是從 0 到 $\dfrac{x(x-1)}{2}$，也就是 $0\le y\le\dfrac{x(x-1)}{2}$ 。

3. 從上列各表中可以發現怨言數的排列個數呈現對稱性，第一個怨言數與最後一個怨言數的排列個數一樣，以此類推：

$f(x,0)=f(x,\frac{x(x-1)}{2})$

$f(x,1)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-1)$

$f(x,2)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-2)$

因此， $f(x,y)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-y)$

4. x 個人排列時，如果將排頭分別依序計算排列個數，後面人的怨言數排列個數即為 $x-1$ 人的怨言數排列個數，而 1 排頭怨言數從 0 開始；2 排頭的怨言數從 1 開始，因為後面 1 比 2 小，至少有 1 個怨言；3 排頭的怨言數從 2 開始，因為後面 1、2 都比 3 小，至少有 2 個怨言，以此類推到 x 排頭，最後再將該怨言數的個數加總，就是該怨言數的排列個數。如下表所示：

怨言數 y	0	1	2	…	…	y	…
1 排頭	$f(x-1,0)$	$f(x-1,1)$	$f(x-1,2)$	…	…	$f(x-1,y)$	…
2 排頭		$f(x-1,0)$	$f(x-1,1)$	…	…	$f(x-1,y-1)$	…
3 排頭			$f(x-1,0)$	…	…	$f(x-1,y-2)$	…
⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
x 排頭				$f(x-1,0)$	…	$f(x-1,y-x+1)$	…

當 x 個人排列時，怨言數 y 的排列個數 $f(x,y)$ 為

$$f(x,y)=f(x-1,y)+f(x-1,y-1)+f(x-1,y-2)+\cdots+f(x-1,y-x+1)$$

以 $f(6,7)$ 為例：

$$\begin{aligned}f(6,7)&=f(5,7)+f(5,6)+f(5,5)+f(5,4)+f(5,3)+f(5,2)\\&=15+20+22+20+15+9\\&=101\end{aligned}$$

在計算的過程中，超過$x-1$的最大怨言數的排列個數不列入計算，以 $f(6,14)$ 舉例，將 $f(6,14)$ 代入上述公式：

$$f(6,14)=f(5,14)+f(5,13)+f(5,12)+f(5,11)+f(5,10)+f(5,9)$$

因$x=5$的最大怨言數為 10，超過 10 則不列入計算，因此

$$f(6,14)=f(5,10)+f(5,9)=1+4=5$$

研究四 計算f（x , y）排列個數的方法

研究三的方法雖然可以算出 $f(x,y)$ 的答案，但需要從 1 開始依序列出各人數的 $f(x,y)$ ，才能計算出答案，我希望能夠找到直接計算 $f(x,y)$ 的方法。從怨言數的排列方式中發現，怨言數為各怨言在不同位置做排列組合，可以自 n 個不同物件中，每次不重覆地取 m 個為一組（ $0\le m\le n$ ），則其組合數為 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 的組合公式推算出 $f(x,y)$ 答案的方法。

（一） $f(x,0)$ 和 $f(x,\frac{x(x-1)}{2})$

從研究三的各表中可以發現怨言數 0 和怨言數 $\frac{x(x-1)}{2}$ 的排列個數都是 1，因此推論 $f(x,0)=f(x,\frac{x(x-1)}{2})=1$

討論：

x 個人排列時，只有 1 種完全按照順序依序排列｛1、2、3、…、x －1、x }的方式怨言數才會為 0，;而完全相反的排列{ x、x －1、…、3、2、1｝也一定只有 1 種，怨言數為 $y=\frac{x(x-1)}{2}$ ，因此可知道，

$$f(x,0)=f(x,\frac{x(x-1)}{2})=1$$

（二） $f(x,1)$ 和 $f(x,\dfrac{x(x-1)}{2}-1)$

研究三各表 $y=1$ 的排列個數如下：

人數 x	1	2	3	4	5	6
$f(x,1)$	╳	1	2	3	4	5

從上表不難發現 $f(x,1)=x-1$， $y=1$ 就是在排列時只能有 1 人出現 1 次怨言，當 x 個人排列時，排頭不可能有怨言，其他位子都各出現 1 次怨言數為 1 的排列方式如下：

x 個人

	$y=1$			
a	0	0	…	0
b	1	0		0
c	0	1		0
⋮				
x	0	0	0	1

x 個人排頭不計，共有 $x-1$ 個排列方式。

所以 $f(x,1)$ 排列個數為 $x-1$，因 $f(x,y)$ 有對稱性，所以

$f(x,\dfrac{x(x-1)}{2}-1)$ 也一樣，因此推論： $f(x,1)=f(x,\dfrac{x(x-1)}{2}-1)=x-1$

討論：

$y=1$ 時，怨言的組合方式只有 (1)， x 個人排列，第一位排除為 $x-1$，每次取 1 個，代入組合公式： $\dfrac{(x-1)!}{1!(x-2)!}=\dfrac{(x-1)(x-2)!}{1!(x-2)!}=x-1$

故 $f(x,1)=f(x,\dfrac{x(x-1)}{2}-1)=x-1$

（三） $f(x,2)$ 和 $f(x,\dfrac{x(x-1)}{2}-2)$

研究三各表 $y=2$ 的排列個數如下：

人數 x	1	2	3	4	5	6
$f(x,2)$	╳	╳	2	5	9	14

從上表可歸納出 $f(x,2)=\frac{x(x-1)}{2}-1$ ，因此推論

$$f(x,2)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-2)=\frac{x(x-1)}{2}-1$$

討論：

$y=2$時，怨言可分成的組合方式有(2) (1,1) 這 2 種，分別計算：

x個人排列，

(2)：每次取 1 個位置，怨言為 2，則第一位與第二位都不可能，需排除為$x-2$，排列個數：

$$\frac{(x-2)!}{1!(x-3)!}=\frac{(x-2)(x-3)!}{1!(x-3)!}=x-2$$

(1,1)：每次取 2 個位置，怨言為(1,1)，第一位排除為$x-1$，

$$\frac{(x-1)!}{2!(x-3)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)!}{2!(x-3)!}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

將分別計算所得的算式相加，就是 $f(x,2)$ 的值。

$$f(x,2)=x-2+\frac{(x-1)(x-2)}{2}=\frac{2(x-2)+(x-1)(x-2)}{2}=\frac{(x-2)(x+1)}{2}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{2}=\frac{x(x-1)}{2}-1$$

由此可知 $f(x,2)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-2)=\frac{x(x-1)}{2}-1$

（四） $f(x,3)$ 和 $f(x,\frac{x(x-1)}{2}-3)$

研究三各表 $y=3$ 的排列個數如下：

人數 x	1	2	3	4	5	6
$f(x,3)$			1	6	15	29

因從上表中無法推論出 $f(x,3)$ 與 x 關係，因此直接以組合公式進行討論。

討論：

$y=3$時，怨言可分成的組合方式有(3) (1,2) (2,1) (1,1,1)，分別計算如下：

(3)：取 1 個位置，怨言 3，第一、二、三位排除為$x-3$

$$\frac{(x-3)!}{1!(x-4)!}=x-3$$

(1,2)：取 2 個位置，怨言(1,2)，第一位排除為$x-1$

$$\frac{(x-1)!}{2!(x-3)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)!}{2!(x-3)!}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

(2,1)：取 2 個位置，怨言(2,1)，第一、二位排除為$x-2$

$$\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{2!(x-4)!}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

(1,1,1)：取 3 個位置，怨言(1,1,1)，第一位排除為$x-1$

$$\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!}{3!(x-4)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

將上述各算式相加，則

$$f(x,3)=x-3+\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}=\frac{x(x^2-7)}{6}$$

因此，$f(x,3)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-3)=\frac{x(x^2-7)}{6}$

（五）$f(x,4)$和$f(x,\frac{x(x-1)}{2}-4)$

$y=4$時，怨言可分成的組合方式有(4) (1,3) (3,1) (2,2) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) (1,1,1,1)，以上述方法代入組合公式，可得到下列計算式：

$$x-4+\frac{(x-1)!}{2\ !(x-3)!}+\frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}+\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}+\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}+\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}+\frac{(x-2)!}{3!(x-5)!}+\frac{(x-1)!}{4!(x-5)!}$$

在組合$(1,3)$時，以$x-1$排除第一位計算排列個數，需考慮第三

位也不可能出現怨言 3，因此第二位怨言 1、第三位怨言 3 的組合就要排除，所以總和需要再減 1，

$$f(x,4)=x-4+\frac{(x-1)!}{2\ !(x-3)!}+\frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}+\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}+\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}+\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}+\frac{(x-2)!}{3!(x-5)!}+\frac{(x-1)!}{4!(x-5)!}-1$$

自 $f(x,4)$ 以後，不止分的項目多，且在用組合公式推論時還需考慮有些位置不可能出現的怨言組合需一一排除，如上述的 $f(x,4)$ 用組合公式列出後還需減 1，因此排列個數的計算變得複雜而困難。

柒、結論與建議

一、結論

（一）計算怨言數的方法有二種：

1.從前面算，該數前面有幾個比該數大的數就記幾個怨言，再算各個怨言的總和就是怨言數。

2.從後面算，該數後面有幾個比該數小的數就記幾個怨言，再算各個怨言的總和就是怨言數。

（二）x 個人排列，怨言數最小 $y=0$，最大 $y=\frac{x(x-1)}{2}$，即 $0\le y\le\frac{x(x-1)}{2}$。

（三）怨言數的排列個數有對稱性，也就是 $f(x,y)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-y)$。

（四）依序列出 1~x 個人的各怨言數的排列個數，再依

$$f(x,y)=f(x-1,y)+f(x-1,y-1)+f(x-1,y-2)+\cdots+f(x-1,y-x+1)$$

即可算出 $f(x,y)$ 的值。

（五）以組合公式 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 可推算出怨言數 0~3 的排列個數，

$$f(x,0)=f(x,\frac{x(x-1)}{2})=1$$

$$f(x,1)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-1)=x-1$$

$$f(x,2)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-2)=\frac{x(x-1)}{2}-1$$

$$f(x,3)=f(x,\frac{x(x-1)}{2}-3)=\frac{x(x^2-7)}{6}$$

二、建議

自 $f(x,4)$ 以上，怨言組合方式的項目愈來愈多，且各項中又有不同要排除的個數，以目前時間及能力的限制，本研究只推算到 $f(x,3)$，建議未來的研究可再繼續探究，或思考除了用組合公式外，是否有更為簡單快速的計算方法。

捌、參考資料

一、高雄市資優教育資源中心（2010）。**獨立研究指導實務工作坊（數理領域）**。高雄市資優教育資源中心。

二、機率學習館（2002）。**排列組合**。2012 年 2 月 20 日取自：http://eprob.math.nsysu.edu.tw/PerComb.htm

三、**排列組合**。2012 年 2 月 22 日取自：http://emath.kyu.edu.tw/formula/for15.html

四、國家教育研究院籌備處（2010）。**數學六下**。台南：翰林。

【評語】080417

1. 問題的趣味性相當不錯，數學分析能力，對國小學生來說已相當成熟。
2. 對怨言數為 4 時，有很完整的說明，分析條理也很清楚。
3. 若能對 f(x, y)有更完整的了解，將是一件很好的作品。