

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

第三名

080415

配對奇「跡/機」—SET 遊戲的探討與變型

學校名稱：臺北市松山區民權國民小學

作者： 小六 張哲睿 小六 簡暉倫 小六 吳家韻 小六 陳文悅 小六 張婉婷	指導老師： 連婉婷 顏稚仁
---	-------------------------

關鍵詞：配對類型、組牌軌跡、機率

配對奇「跡/機」-SET 遊戲的探討與變型

摘要

以探討 SET 遊戲紙牌配對的所有組合情形為研究起點，分析歸納而窮盡出 15 種配對類型。針對「如何不剩牌」的目標，進行猜想並驗證「在操作上若自始至終皆用同一種配對類型便可把 81 張牌全配對完」，也意外發現紙牌構成的大九宮格中任一小九宮格中皆有「4 條組牌軌跡」構成的胚騰(pattern)，若放大到大九宮格中觀察則也有相同的胚騰。若在大九宮格中進一步運用組牌軌跡換牌，最多可同時出現 7 種配對類型；但我們也發現「小九宮格內若出現例外情況(未出現四條組牌軌跡)時，則最多可讓大九宮格的內部同時出現 15 種 SET 配對類型」。此外，從機率的角出發，經特殊化到一般化的推演歷程，獲致「桌上牌最少要發 21 張才必有 SET 出現」。

壹、研究動機

同學們流行玩一種紙牌遊戲-SET，它的規則是從桌上牌中設法依規定進行配對取出，最後依手上擁有成功 SET 組數最多者為贏家。我們觀察到「每當遊戲結束後桌上總會剩下幾張牌無法成功組成 SET」，這引發我們的好奇：「是否可能在遊戲結束後桌上不會剩下任何牌？」在數學課中，老師也常常鼓勵我們從遊戲中觀察並試著提出值得研究的數學問題，進行探討解題，於是試想：「如果要在遊戲結束時桌上完全不剩牌，表示『要讓 81 張牌全配對完並恰好形成數組 SET』」便成為研究的起點。

尋求解答的過程中，發現此遊戲與「組合、機率、找規律」等數學主題有關。我們以探討 SET 遊戲及其變型做為數學科展的主題，發展出系列研究問題，從分析單張牌本身的牌面設計開始、針對所有「成功的 SET」是否存在某些共通性並進行分析歸納、探討一副牌中隨機取走的 N 張牌中出現一組 SET 的機率、並討論要至少發出多少張桌上牌才會必定出現一組 SET。

貳、研究目的

- 一.探討如何把一副 81 張 SET 牌恰好用完以成功配對成數組 SET。
- 二.在 SET 遊戲過程中探討 SET 出現的機率。

參、研究設備及器材


















































































- 一.SET 遊戲紙牌
- 二.紙和筆
- 三.電腦
- 四.相機

肆、研究過程或方法

一. SET 遊戲簡介

一副牌由 81 張完全沒有重複的紙牌所組成，而單張牌的牌面設計則由四種屬性所構成。為方便討論，將 81 張紙牌全亮出來，依據四種屬性-「顏色、形狀、個數、網底」的順序，進行系統化的分類及編碼：

我們先按照四屬性中的「顏色」將 81 張紙牌進行第一層分類，其中可區分出 3 種特徵元素分別為「紅、綠、紫」；接著在不同顏色的紙牌分類區塊中依第二種屬性-「形狀」進行區分為「膠囊、波浪、菱形」3 種不同特徵元素；再者，依第三種屬性「個數」進行內部分類為「一個、二個、三個」共 3 種特徵元素；最後，按第四種屬性「網底」分別再細分為「實心、空心、線條」共 3 種不同特徵元素。編碼結果，如下圖所示：

 1	 2	 3	 4	 5	 6	 7	 8	 9
 10	 11	 12	 13	 14	 15	 16	 17	 18
 19	 20	 21	 22	 23	 24	 25	 26	 27
 28	 29	 30	 31	 32	 33	 34	 35	 36
 37	 38	 39	 40	 41	 42	 43	 44	 45
 46	 47	 48	 49	 50	 51	 52	 53	 54
 55	 56	 57	 58	 59	 60	 61	 62	 63
 64	 65	 66	 67	 68	 69	 70	 71	 72
 73	 74	 75	 76	 77	 78	 79	 80	 81

由上圖可知 81 張牌的共同點為「皆由四種屬性所構成」，而每張牌彼此間的相異點是「由各屬性內涵中的三種不同元素之相互配對產生的結果」所造成的。

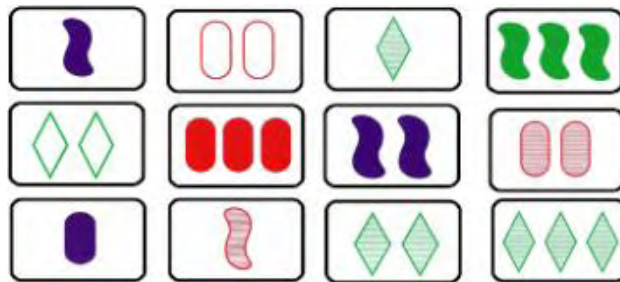
(一) 遊戲目標：成功配對出 SET

此遊戲所定義的 SET 必須包含三張牌，且四屬性中的任意數量的屬性在這三張不同的牌面之間必為都相同或都不同的特徵元素，舉例如下：

<p>實例一：</p> 	<p>實例二：</p> 
<p>三張牌的四種屬性之中有三種屬性完全相同（顏色都是紅色、形狀都是膠囊、以及個數都是一個）；而四屬性之中剩下的一種屬性在三張牌彼此之間完全不同（網底分別為實心、空心、線條）。</p>	<p>三張牌的四種屬性之中有兩種屬性完全相同（形狀都是膠囊、個數都是一個）；而四屬性之中另外兩種屬性在三張牌彼此之間完全不同（顏色分別為紅色、綠色、紫色；網底分別為實心、空心、線條）。</p>
<p>* 上述兩個實例皆符合 SET 組成條件。</p>	

(二) 遊戲規則

1. 由發牌者將一副牌「洗牌」，依序發出 12 張牌並亮出在桌面上排成矩陣，我們稱之為**桌上牌**，以下圖為例：

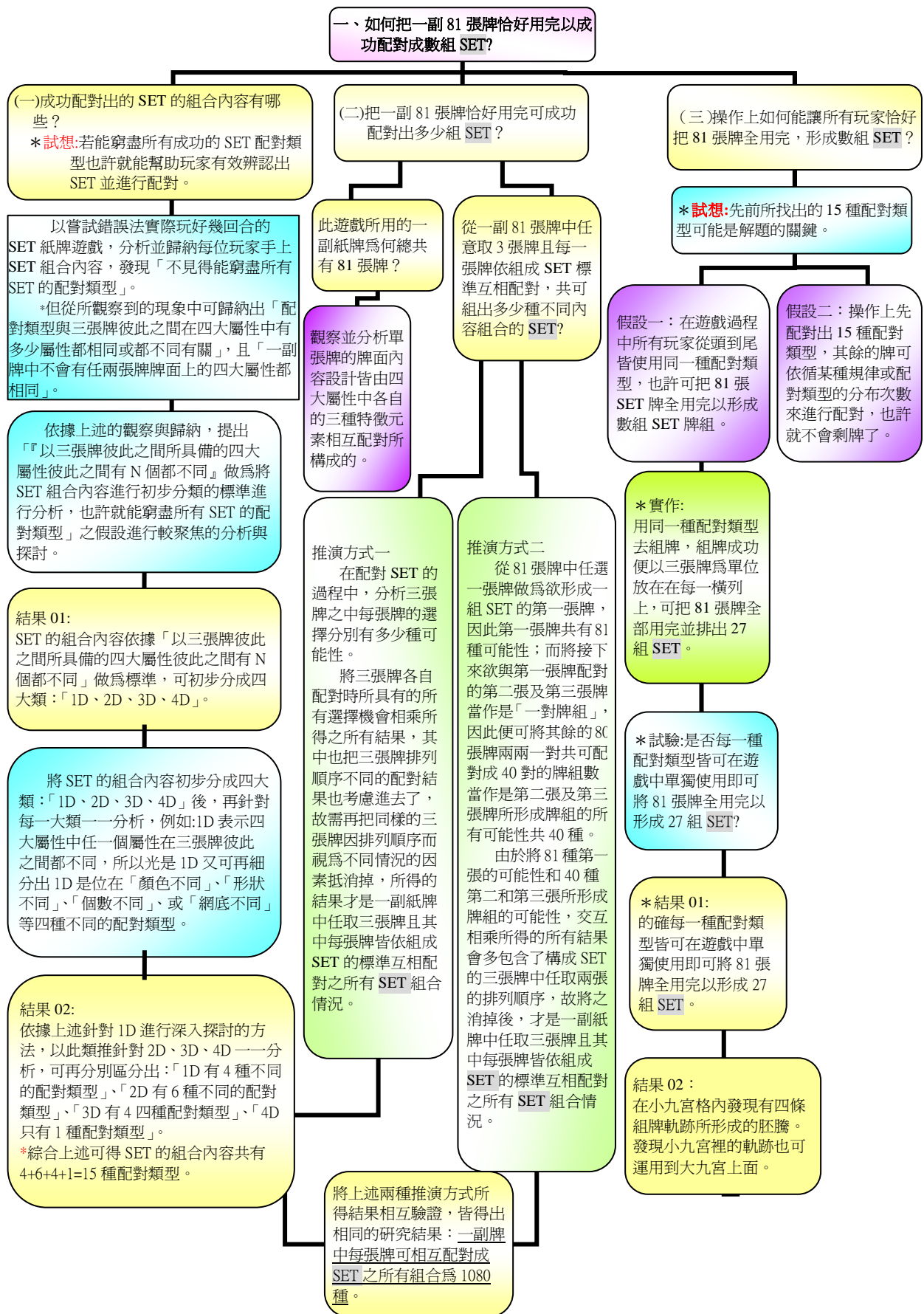


2. 當玩家從**桌上牌**辨識出一組 SET 時，立即喊：「SET！」，若其所得 SET 經確認為不符合成功 SET 之條件，則須將此 3 張牌重新放回矩陣中；反之，若所得 SET 經確認後為符合成功組成 SET 之條件，則獲得一組 SET，由該玩家取走。
3. 隨後再由發牌者發出 3 張牌加入**桌上牌**；若所有玩家皆確認**桌上牌**中找不到任一組 SET，則由發牌者再發 3 張牌加入**桌上牌**，直到有玩家找到一組 SET 為止。
4. 一副牌全發完且所有玩家皆無法再組成 SET 時，看誰獲得最多的 SET 即為贏家。

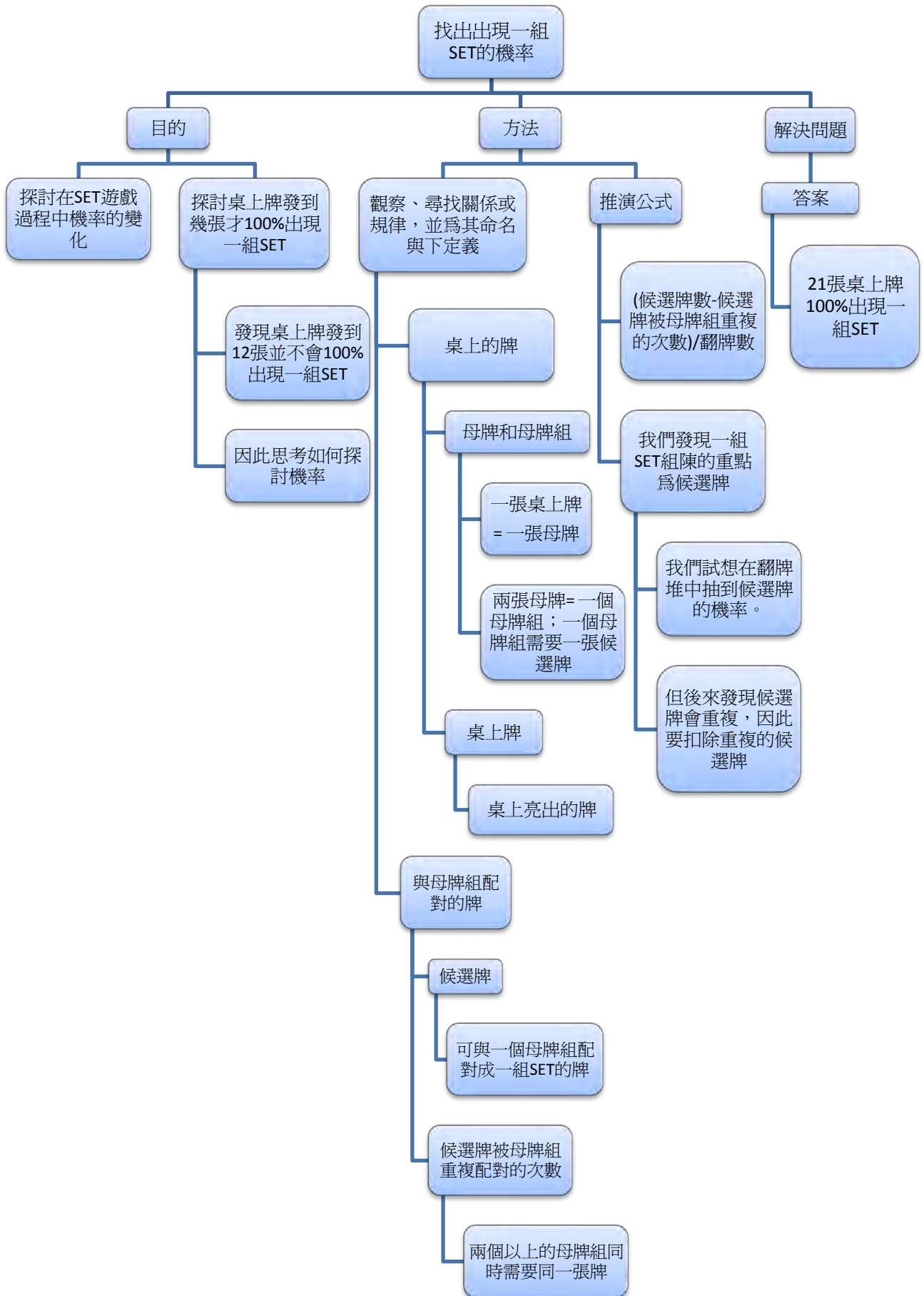
二、名詞定義

- (一) SET：是指由三張牌配對成一組成功的 SET。
- (二) 桌上牌：遊戲過程中，在桌上已翻開供玩家配對的牌之統稱。
- (三) 配對類型：將所有配對的型態分類歸納後之總稱。
- (四) 母牌和候選牌：欲組成一組 SET 時，從一副牌中任選兩張牌，這兩張任選的牌就稱為**母牌**；而欲加入與**母牌**一起配對的第三張牌，則稱為**候選牌**。

三、目的一：探討如何把一副 81 張 SET 牌恰好用完以成功配對成數組 SET。



四、 **目的二**：在 SET 遊戲過程中探討一組 SET 出現的機率。



伍、研究結果

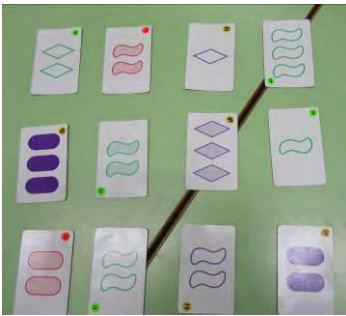
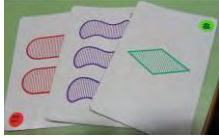




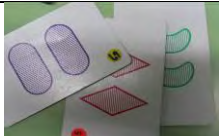

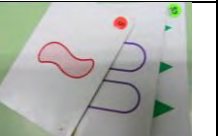







一.目的一：探討如何把一副 81 張牌恰好用完以組成數組「SET」。











當我們拿出一副牌開始以 SET 的規則玩牌時，經過多次的操作，總是無法完全將 81 張牌全數配對完，於是我們企圖在遊戲結束時讓 81 張牌全數配對完。

(一) SET 配對組合的內容與哪些因素有關? SET 共有多少種不同的配對類型?

1、從實作中觀察、分析與歸納，提出有根據的猜想。

實際玩 SET 紙牌遊戲，分析並歸納每位玩家手上 SET 組合內容，舉例如下：

◎以某次遊戲結束的局勢為例，說明：				
一副牌全發完且剩下的桌上牌，無法再配對出任何一組 SET，即為遊戲結束；此時桌上牌的情況：				
				
此時，蒐集並分析每位玩家手上所有 SET 的組合情況：				
 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數 (2)三張牌都相同: 網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 形狀、個數 (2)三張牌都相同: 顏色、網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 形狀、個數 (2)三張牌都相同: 顏色、網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數 (2)三張牌都相同: 網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、網底 (2)三張牌都相同: 個數</p>
 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀 (2)三張牌都相同: 網底、個數</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數 (2)三張牌都相同: 網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數、網底 (2)三張牌都相同: 無</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數 (2)三張牌都相同: 網底</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個數 (2)三張牌都相同: 網底</p>
 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、個數 (2)三張牌都相同: 網底、形狀</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、形狀 (2)三張牌都相同: 網底、個數</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 形狀、個數、網底 (2)三張牌都相同: 顏色</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 網底 (2)三張牌都相同: 顏色、個數、形狀</p>	 <p>(1)三張牌都不同: 顏色、個數、形狀、網底 (2)三張牌都相同: 無</p>

				
(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、網底 (2)三張牌都相同: 個數	(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、 網底、個數 (2)三張牌都相同: 無	(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、網 底 (2)三張牌都相同: 個數	(1)三張牌都不同: 網底 (2)三張牌都相同: 顏色、形狀、個 數	(1)三張牌都不 同:網底 (2)三張牌都相同: 顏色、形狀、 個數
				
(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、個 數 (2)三張牌都相同: 網底	(1)三張牌都不同: 顏色、形狀、 個數 (2)三張牌都相同: 網底	(1)三張牌都不同: 形狀 (2)三張牌都相同: 顏色、個數、網底	(1)三張牌都不同: 顏色、網底 (2)三張牌都相同: 形狀、個數	(1)三張牌都不 同:顏色、形 狀、網底 (2)三張牌都相 同: 個數

發現：

- 透過此種方法不能確定我們是否歸納出所有 SET 的配對類型。
- 從所觀察到的現象中可歸納出「配對類型與三張牌彼此之間在四大屬性中有多少屬性都相同或都不同有關」，且「一副牌中不會有任兩張牌牌面上的四大屬性都相同」。

2.綜合上述提出**猜想**：配對類型與三張牌彼此之間四大屬性的異同所決定，若欲窮盡所有配對類型內容之種類，我們可從下列兩個角度著手分析：(1)以任意個數的屬性「都不同」分類，作為 SET 的配對類型窮盡的起點；(2)在四種屬性之中，分別取 N 種屬性都不同做為配對類型窮盡的標準。

(1)**途徑一**：以任意個數的屬性「都不同」分類，再分項探討列舉：

以三張牌彼此之間四屬性中任意屬性「都不同」為標準，進行**配對類型**之窮盡列舉；三張牌彼此的特徵元素完全相同用 S (the same)來表示，完全不同用 D (difference)表示，依四個屬性分析歸納後並依序命名，如下表：

配對類型的命名		不同配對類型的 SET 示例	顏色	形狀	個數	網底
1D	第 1 種		D	S	S	S
	第 2 種		S	D	S	S
	第 3 種		S	S	D	S
	第 4 種		S	S	S	D
2D	第 5 種		D	D	S	S
	第 6 種		S	D	D	S
	第 7 種		S	S	D	D
	第 8 種		D	S	S	D
	第 9 種		D	S	D	S
	第 10 種		S	D	S	D

3D	第 11 種		D	D	D	S
	第 12 種		S	D	D	D
	第 13 種		D	S	D	D
	第 14 種		D	D	S	D
4D	第 15 種		D	D	D	D

★發現：

- A. 由上表可知，SET 的組合內容共可分類為 15 種不同的配對類型。
- B. 若以四種屬性之中在三張牌彼此之間分別有「都相同或都不同」共兩種情況，那麼我們可以用 $2^4=16$ 所得結果表示所有的配對類型，但是這樣所得的 16 種配對類型會包含「四種屬性在三張牌彼此之間都相同」的情況（此情況即為三張牌為重複的同一張牌），又因一副牌是由 81 張完全沒有重複的紙牌所組成，故將 16 種配對類型減掉此種三張牌為重複的同一張牌之情況： $16-1=15$ ，共 15 種配對類型。
- C. 前項 A、B 所得結果可相互驗證。

(2) 途徑二：在三張牌所共有的四種屬性之中，分別取 N 種屬性都不同做為配對類型窮盡的標準，進行計算：

四個屬性當中任取數個屬性都不同做為三張牌配對的標準，進行配對，計算結果如下：

◎四種屬性之中任取其中 N 種屬性在三張牌彼此間都不同，做為配對類型的分類標準：			
情況一	顏色	1D	在四種屬性中任取一種屬性之所有組合情況： $\frac{4}{1}=4$ *故 1D 為四種。
	形狀		
	個數		
	網底		
情況二	顏色	2D	在四種屬性中任取二種屬性不同之所有組合情況： $\frac{4 \times 3}{2 \times 1}=6$ *故 2D 為六種。
	形狀		
	個數		
	網底		
情況三	顏色	3D	四種屬性中任取三種屬性不同之所有組合情況： $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1}=4$ *故 3D 為四種。
	形狀		
	個數		
	網底		
情況四	顏色	4D	四種屬性中任取四種屬性不同之所有組合情況： $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1}=4$ *故 4D 為一種。
	形狀		
	個數		
	網底		

★發現：

- A. 在三張牌所共有的四種屬性之中，分別取 N 種屬性都不同做為配對類型窮盡的標準，進行計算，由上述表格分析可知四大類標準分別包括了四種、六種、四種、一種，共 15 種不同的組合情況，故 SET 共可分

為 15 種配對類型。

B.綜合途徑一的研究發現相比較，與本途徑所得之 15 種配對類型結果相同。

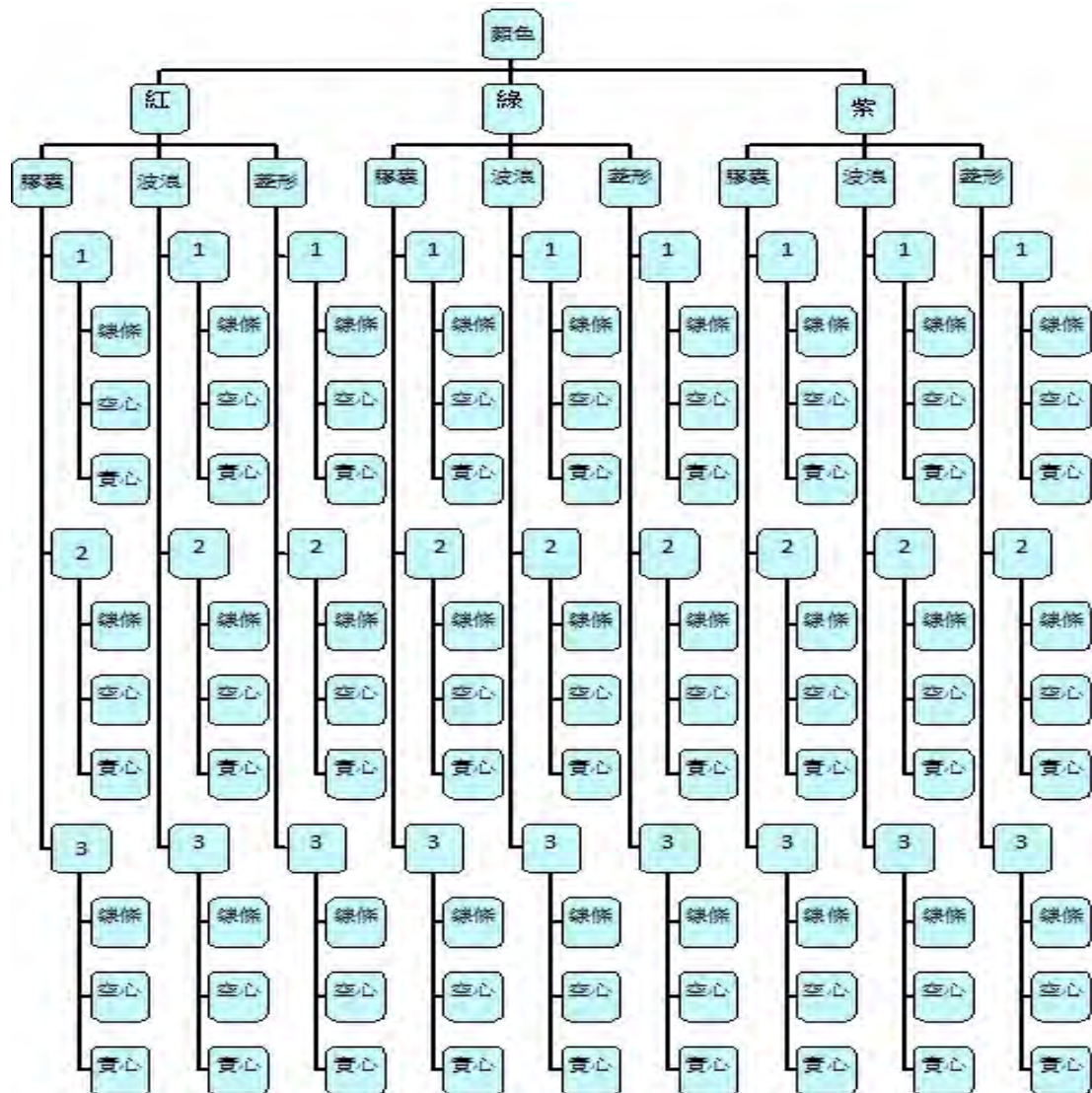
3.結果：綜合比較實作觀察所歸納的結果、途徑一與途徑二所得結果，皆可發現「SET 配對類型是由三張牌的四屬性中任取其中 N 個屬性不同來做初步決定，以及究竟是哪些屬性不同做最後分類的決定」，並且進一步獲得所有 SET 的組合情況共可分為 15 種配對類型。

(二) 把一副 81 張牌恰好用完可成功配對出多少組 SET？

欲回答此問題，我們想從三個方向提問並著手解決，以達分進合擊之效，如下：

1. 一副牌為何是由 81 張牌所構成？

從我們亮出 81 張牌進行系統化的分類編碼，可觀察到一副牌的牌面內容設計，每張牌皆由四種屬性共同建構而成，但是每張牌彼此之間不相同是因為單張牌是由每種屬性各自的三種特徵元素中取一種互相配對構成的，以樹狀圖表示，如下：



★發現：

- (1)由屬性顏色中任一特徵元素的位置(紅、綠、紫)開始出發，連線到屬性形狀中任一特徵元素的位置(膠囊、波浪、菱形)、屬性個數任一特徵元素的位置(一個、兩個、三個)、最後連線到屬性網底任一特徵元素的位置(實心、空心、線條)，便形成一條路線。
- (2)從樹狀圖中可得 81 條路線，且每一條路線在過程中所配對的特徵元素最

後會形成一張牌，且每一條路線代表不同的牌面組合，分別代表 1 張牌，故一副牌共有 81 張不同的牌。

***結果**：簡言之，單張牌是由「顏色、形狀、個數、網底」四種屬性各具備的三種特徵元素之一，彼此配對形成 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ 張不同的牌。

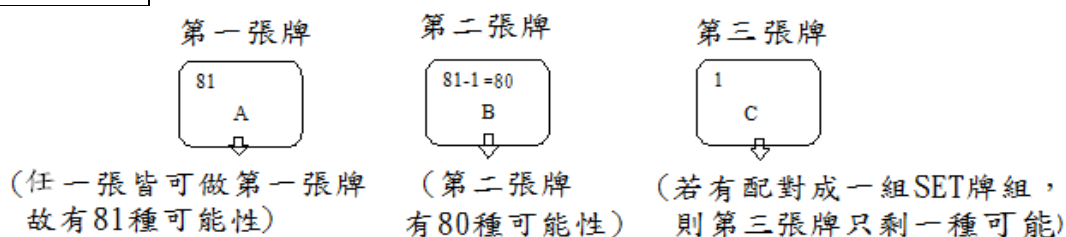
2. 從一副 81 張牌中任意取 3 張牌且每張牌依組成 SET 的條件互相配對，共可組出多少種不同內容組合的 SET?

(1) 配對 SET 時觀察所得的規律：

一副牌中的 81 張牌，每張皆可和其他任兩張牌配對成一組 SET。拿取第一張牌後，可隨意決定第二張為何，但最後第三張則是決定此組合是否符合成為 SET 條件的關鍵。

(2) 運用所得的規律，產生兩種推演方式的假想如下：

A. 推演方式一：

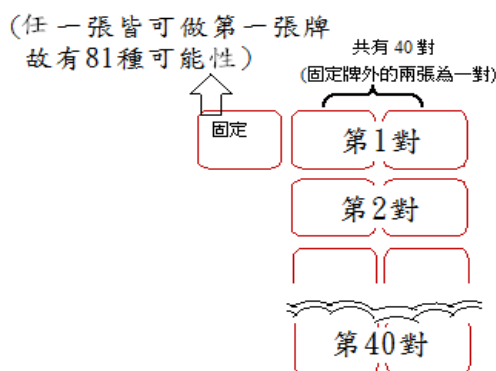


一副牌抽出第一張後，抽第二張牌時有 80 種可能。第二張一旦被抽出，符合組成 SET 條件的第三張牌便只有一種可能，因第三張牌必須與前面兩張的牌的屬性完全相同或完全不同，故只有一種可能可作為與之配對的第三張牌，算式： $81 \times 80 \times 1 = 6480$ 。

將三張牌各自配對時所具有的所有選擇機會相乘所得之所有結果，其中也把三張牌排列順序不同的配對結果也考慮進去了，故需再把同樣的三張牌因排列順序而視為不同情況的因素抵消掉，所得的結果才是一副紙牌中任取三張牌且其中每張牌皆依組成 SET 的標準互相配對之所有 SET 組合情況，算式： $6480 \div (3 \times 2 \times 1) = 1080$ 。

***結果**：一副牌中每張牌能有 1080 種可配對成 SET 的組合。

★推演方式二：



從 81 張牌中任選一張牌做為欲形成一組 SET 的第一張牌，因此第一張牌共有 81 種可能性；而將接下來欲與第一張牌配對的第二張及第三張牌當作是「一對牌組」，因此便可將其餘的 80 張牌兩兩一對共可配對成 40 對的牌組數當作是第二張及第三張牌所形成牌組的所有可能性共 40 種。

由於將 81 種第一張的可能性和 40 種第二和第三張所形成牌組的可能性，交互相乘所得的所有結果會多包含了構成 SET 的三張牌中任取兩張的排列順序，故將之消掉後，才是一副紙牌中任取三張牌且其中每張牌皆依組成 SET 的標準互相配對之所有 SET 組合情況，故算式： $(81 \times 40) \div \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3240 \div 3 = 1080$ 。

***結果**：一副牌中每張牌能有 1080 種可配對成 SET 的組合。

(3) 將上述兩種推演方式所得結果相互驗證，皆得出相同的**研究結果**：一副牌中每張牌可相互配對成 SET 之所有組合為 1080 種。

3. 操作上，在遊戲中如何恰好能把一副 81 張牌全用完，形成數組 SET？

假設一：在遊戲過程中所有玩家從頭到尾皆使用同一種配對類型可以把 81 張 SET 牌全用完形成數組 SET。

實作試驗：用同一種配對類型把 81 張牌全部用完在**橫列上**組牌，看是否在遊戲中單獨使用同一種配對類型皆可，即可把 81 張 SET 牌全用完以配對成 27 組 SET？

***結果**：

每一種配對類型皆能單獨使用將一副牌 81 張牌全用完，形成 27 組 SET。

第 1 種配對類型	第 2 種配對類型	第 3 種配對類型
第 4 種配對類型	第 5 種配對類型	第 6 種配對類型
第 7 種配對類型	第 8 種配對類型	第 9 種配對類型
第 10 種配對類型	第 11 種配對類型	第 12 種配對類型
第 13 種配對類型	第 14 種配對類型	第 15 種配對類型

★**發現**：

(1) 每一種配對類型皆可各自用完 81 張牌，配對成 27 組不重複的 SET，形成大九宮格。

(2) 進一步將大九宮的定位命名，方便觀察：

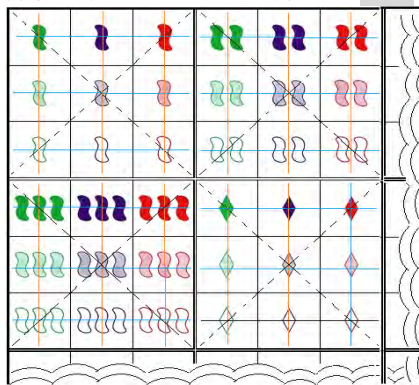
以第 1 種配對類型全配完的大九宮格為例，我們將其分割為九個小九宮格，命名一區~九區，如下：

	小九宮 1	小九宮 2	小九宮 3						
	一區-1	一區-2	一區-3	二區-1	二區-2	二區-3	三區-1	三區-2	三區-3
	一區-4	一區-5	一區-6	二區-4	二區-5	二區-6	三區-4	三區-5	三區-6
	一區-7	一區-8	一區-9	二區-7	二區-8	二區-9	三區-7	三區-8	三區-9
	小九宮 4	小九宮 5	小九宮 6						
	四區-1	四區-2	四區-3	五區-1	五區-2	五區-3	六區-1	六區-2	六區-3
	四區-4	四區-5	四區-6	五區-4	五區-5	五區-6	六區-4	六區-5	六區-6
	四區-7	四區-8	四區-9	五區-7	五區-8	五區-9	六區-7	六區-8	六區-9
	小九宮 7	小九宮 8	小九宮 9						
七區-1	七區-2	七區-3	八區-1	八區-2	八區-3	九區-1	九區-2	九區-3	
七區-4	七區-5	七區-6	八區-4	八區-5	八區-6	九區-4	九區-5	九區-6	
七區-7	七區-8	七區-9	八區-7	八區-8	八區-9	九區-7	九區-8	九區-9	

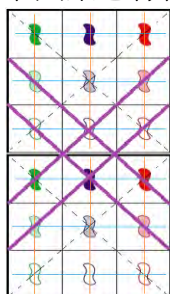
(3)再從上述十五種同一種類型配對的記錄中，取一小九宮格，觀察小範圍內 SET 的配對情形：

A.從一區的小九宮格 找出 SET 配對的方式：

①在小九宮裡，發現橫(藍色線，3 組)、直(橙色線 3 組)及斜(虛線，2 組)線段所連的 3 張牌都成為 SET。



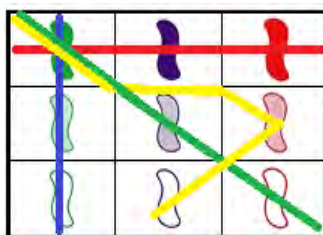
②若把同一小九宮格複製往下移，還可以找出在小九宮裡的 4 組 SET，如下圖紫色線條所示：



故可算出小九宮格內能排出 12 組 SET。

B. 找出小九宮格中之 SET 組牌軌跡

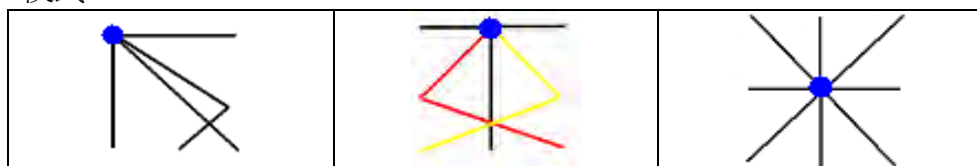
①若只以左上角單一張牌為基準，在小九宮內，它能組成 4 組 SET，其組牌軌跡，如下圖：



②鎖定小九宮格內 4 組 SET 分別形成的組牌軌跡，再依小九宮格內的定位，可再找出 9 種軌跡模式，軌跡模式之間具有下列特性存在：

小九宮格內，鎖定任意位置的一張牌可組成 SET 牌組之四條組牌軌跡所構成的軌跡模式：		
軌跡模式 1	軌跡模式 2	軌跡模式 3
軌跡模式 4	軌跡模式 5	軌跡模式 6
軌跡模式 7	軌跡模式 8	軌跡模式 9

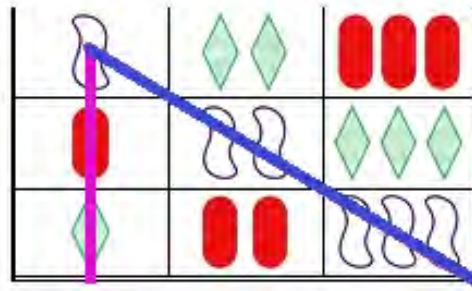
- 鏡射**：除了軌跡模式 5 外，軌跡模式 4 和軌跡模式 6 為一組線對稱，軌跡模式 2 和軌跡模式 8 為一組線對稱，而軌跡模式 1、軌跡模式 3、軌跡模式 9、軌跡模式 7 則兩兩互為線對稱。
- 經過剛體運動(平移、鏡射、旋轉)的檢驗，可歸納出三種不同的軌跡模式：



C. 同一種配對類型組成小九宮格所衍伸出的他種配對類型之情形

使用同一種配對類型形成一個小九宮格，鎖定此小九宮格進行觀察，可發現除了原本的同一種配對類型在每一橫列上之外，還可發現有其他種配對類型分別在直行上與對角線上。在每一種配對類型的基本型中，除自己本身的配對類型外，還出現另外兩種配對類型。

例如：第 15 種配對類型的小九宮格中還出現了第 3 種和第 14 種配對類型。



第 14 種類型

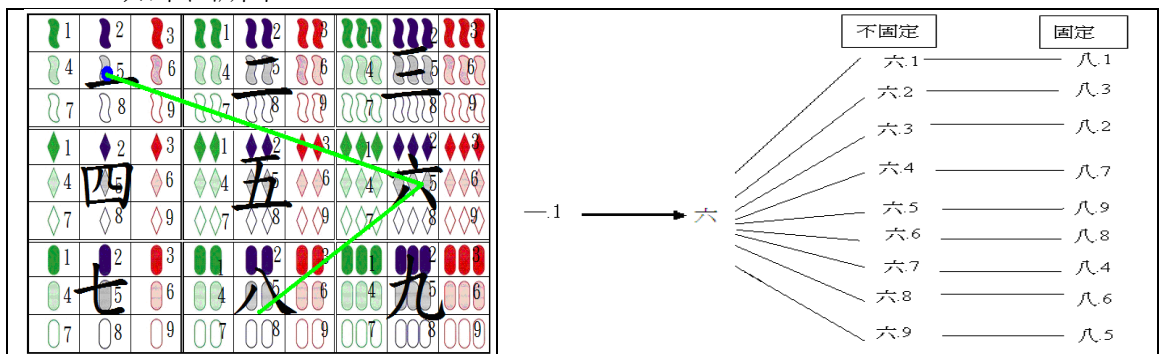
第 3 種類型

(4)檢視小九宮格內的組牌軌跡能否在大九宮格中(跨區)組出 SET

A.組牌軌跡在大九宮的 SET 路徑

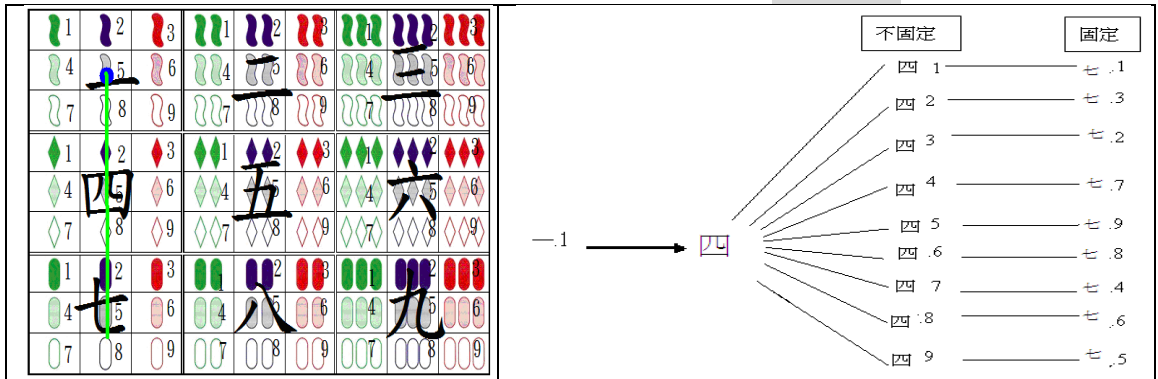
a.使用 \searrow ，鎖定一區 1、六區和八區組成的 SET 組牌軌跡:

選第二張牌時可任意選擇，但第二張牌抽完時，第三張牌已經被決定了，如下圖所示。

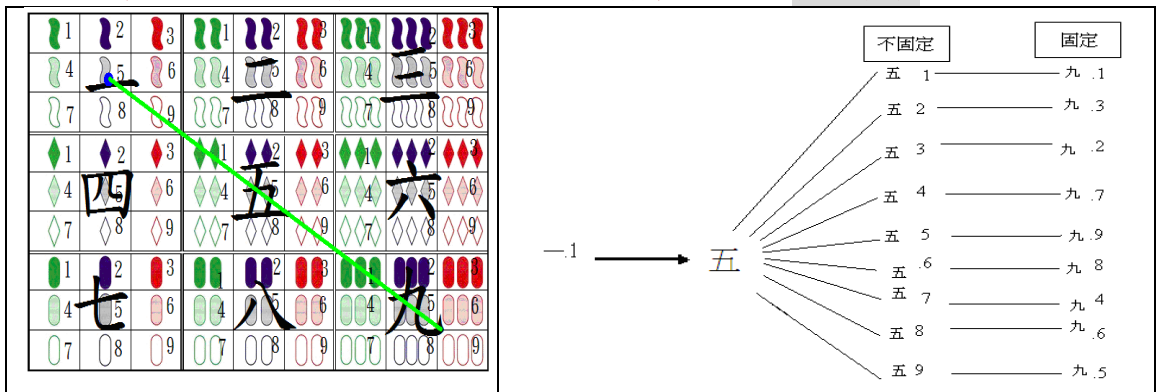


鎖定一之 1 為例，不固定代表那張牌可在六區內任選；若選了六.5，即固定以八.9 配成 SET。

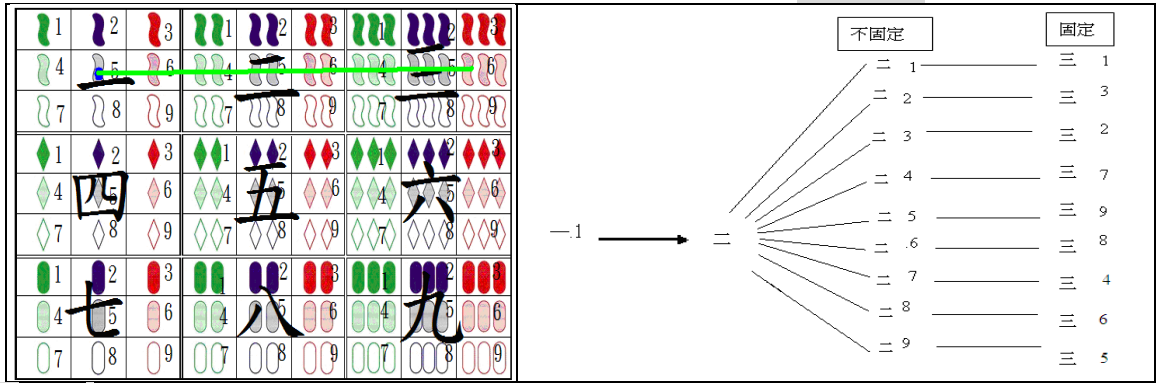
b.使用 \downarrow ，鎖定一區 1、四區和七區組成的 SET 組牌軌跡:



c.使用 \swarrow ，鎖定一區 1 和五、九區組成的 SET 組牌軌跡:

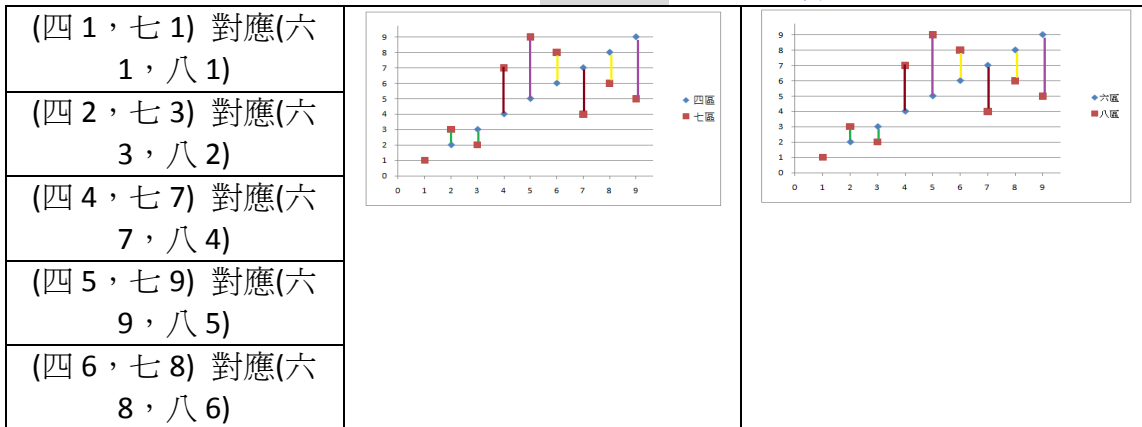


d.使用 --- ，鎖定一區 1 和二、三區組成的 SET 組牌軌跡:



◆**綜合:**

上述 $>$ 、 $|$ 、 \diagdown 、 --- 的組牌軌跡內的對應會出現相同位置的配對組合:

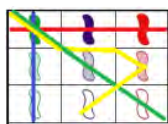


★**發現:**

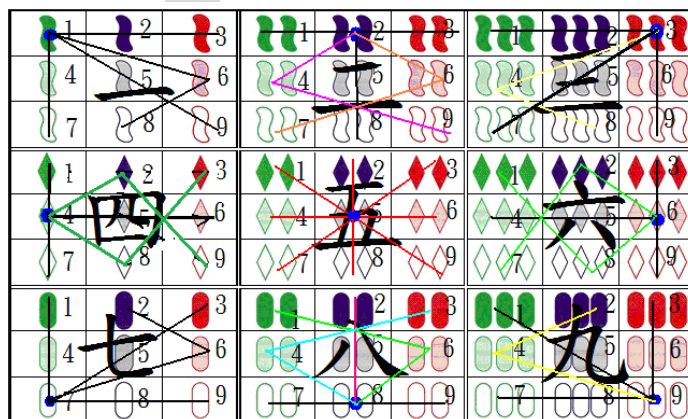
1. 它的區域位置可任意調換但剩下的兩張母牌組在大九宮的編號路徑不變。
2. 「小九宮格」的組牌規律可，運用到「大九宮格」上面！

B. 融合各種組牌規律配對出新 SET

在大九宮格中每個小九宮格和其他小九宮格的牌，也可以依

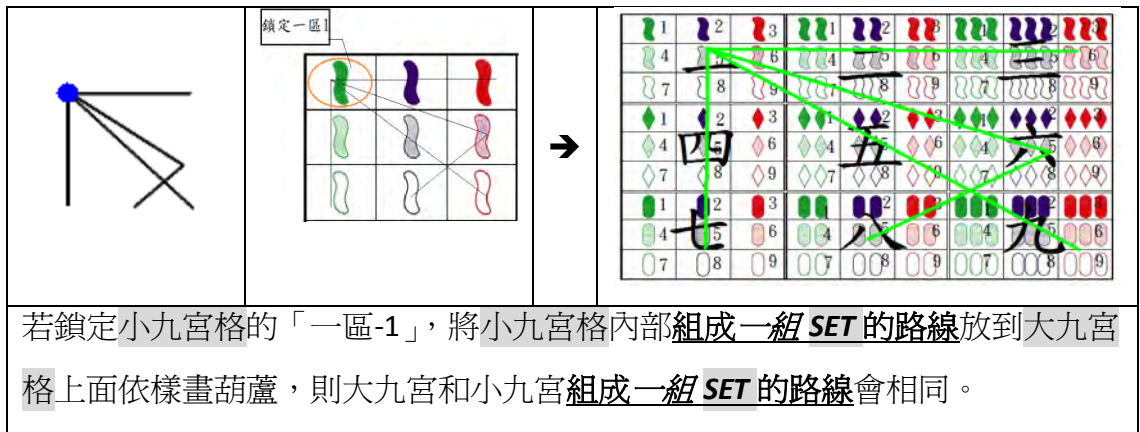


的組牌軌跡與其他小九宮格的牌，按旋轉、線對稱等規律性，可再配成 40 組新的 SET，如下圖:

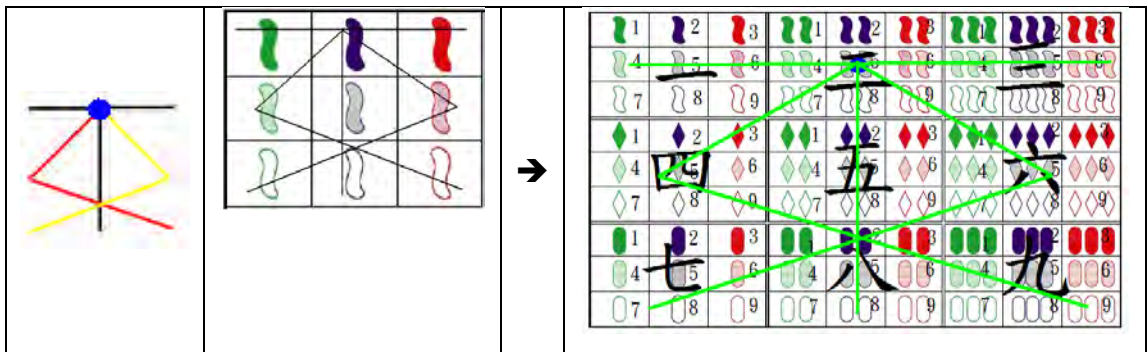


★**發現:** 小九宮格與大九宮格的胚騰

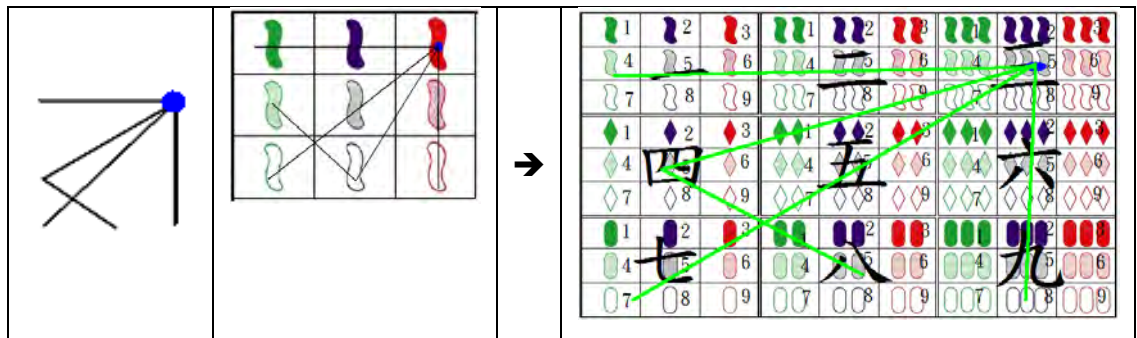
A. 軌跡模式 1 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



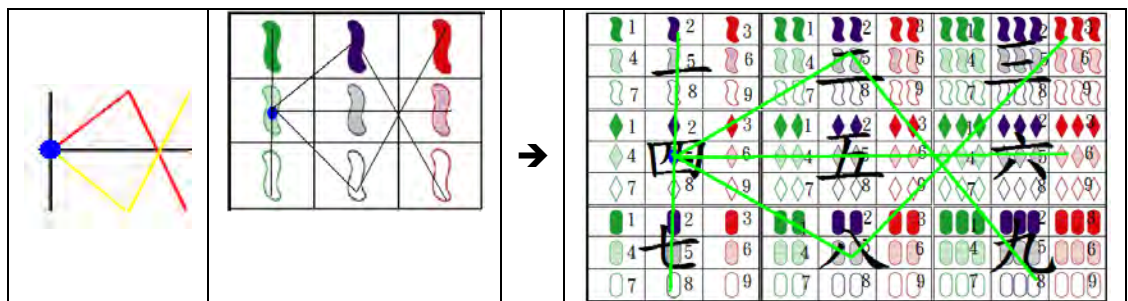
B. 軌跡模式 2 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



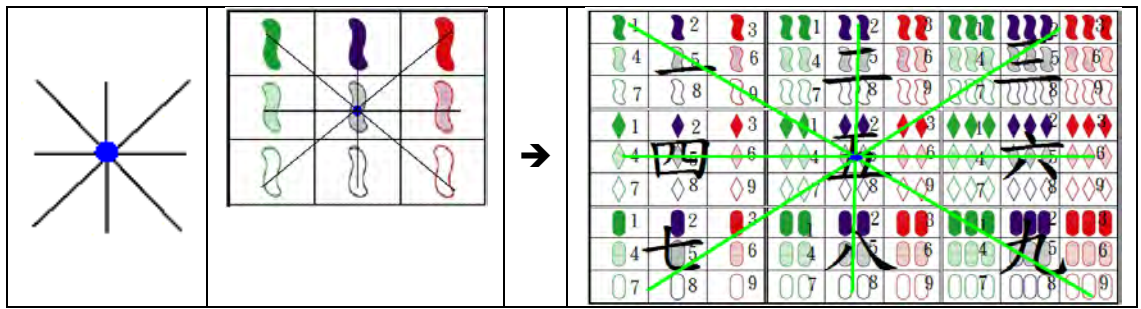
C. 軌跡模式 3 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



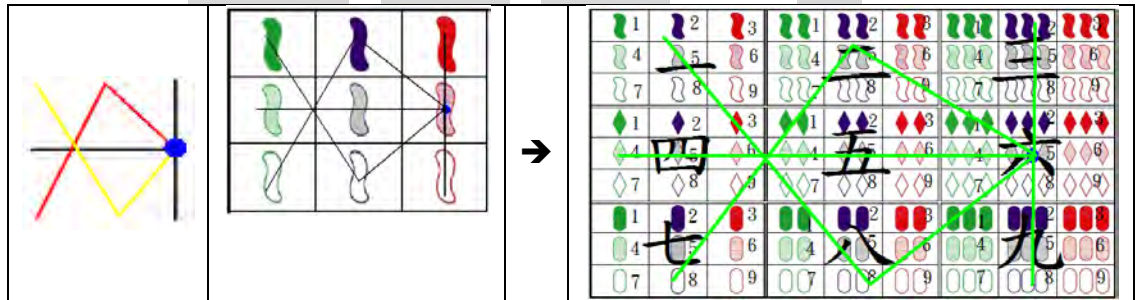
D. 軌跡模式 4 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



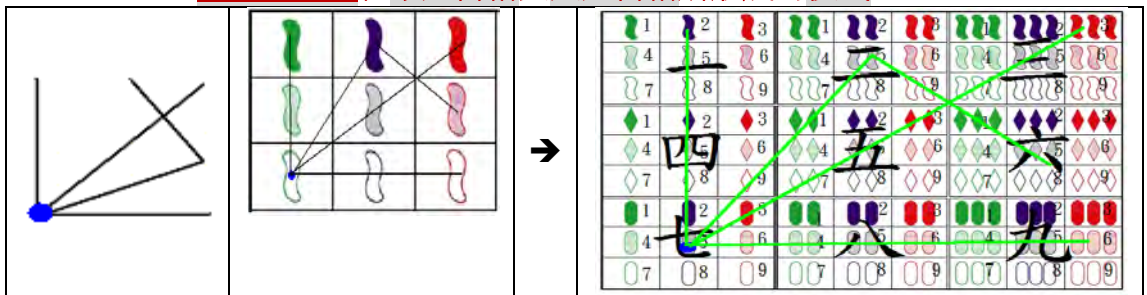
E. 軌跡模式 5 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



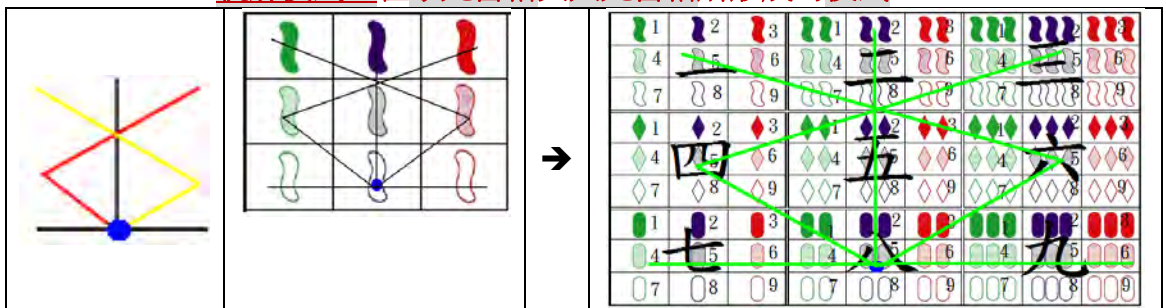
F. 軌跡模式 6 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



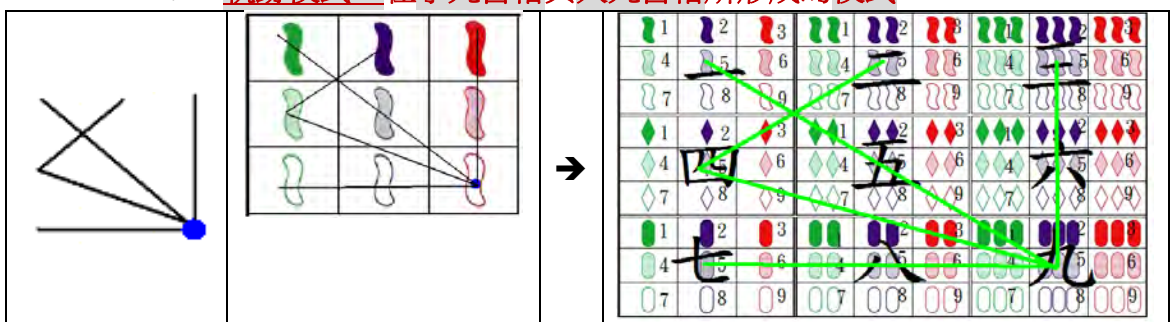
G. 軌跡模式 7 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



H. 軌跡模式 8 在小九宮格與大九宮格所形成的模式

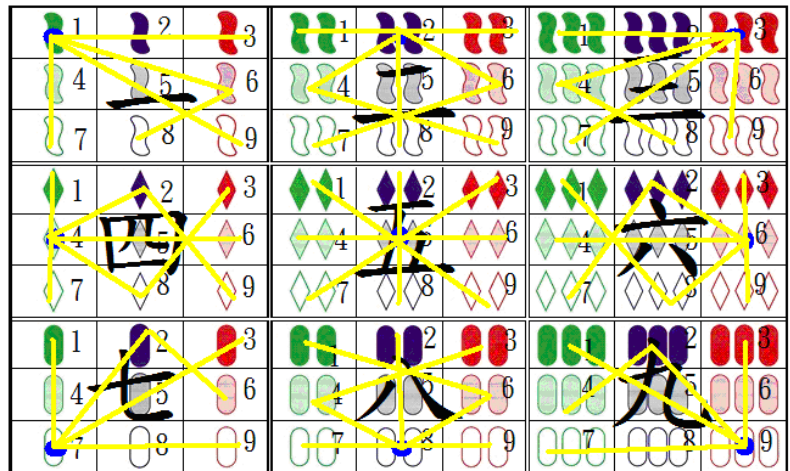


I. 軌跡模式 9 在小九宮格與大九宮格所形成的模式



★**發現一**:從上述九個小九宮格與大九宮格的軌跡模式比較圖中發現

小九宮格的組牌軌跡模式可運用到大九宮格的組牌軌跡模式，產生胚騰。



★**發現二**: 觀察大九宮格中的每一小九宮格，分析該範圍內 SET 的配對類型，得知不需要從頭到尾只用同一種配對類型才能將一副牌全用完以配成 27 組 SET!

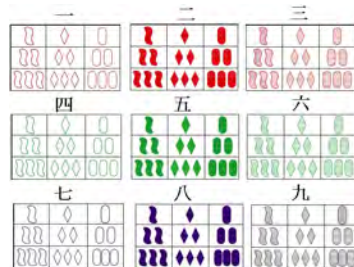
★**發現三**: 可應用組牌軌跡做為新的研究工具-換牌法。

1.以小九宮為單位換牌

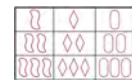
***分析與說明**:

我們以第二種配對類型為例，首先把大九宮分成九個小九宮，在同一種配對類型的小九宮中使用軌跡模式換牌。設想有九個小九宮會有 9 種換法，但實際操作只有換出 7 種不同的配對類型。

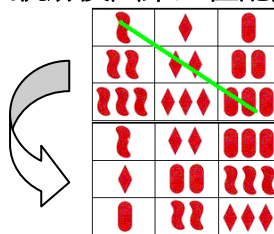
(1)首先，先把第二種配對類型的大九宮劃分成九個小九宮



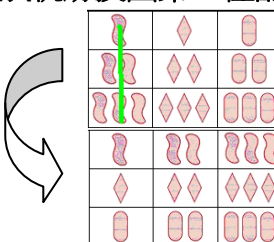
(2)然後處理圖一，不用換牌就有第二種配對類型。



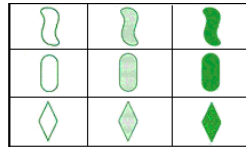
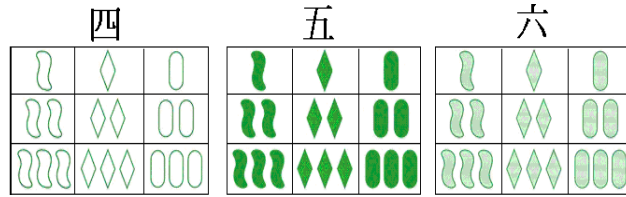
(3)利用\軌跡換出第六種配對類型。



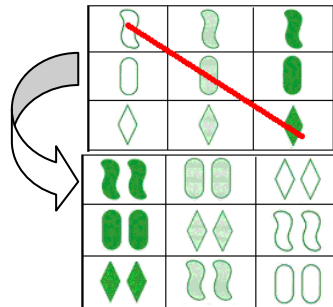
(4)利用\軌跡換出第三種配對類型。



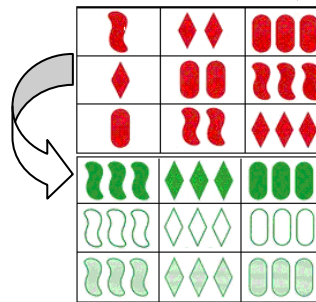
(5) 利用 3 個小九宮彼此之間的換牌所排出第四種配對類型。



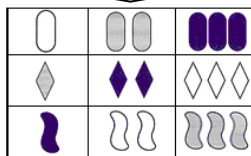
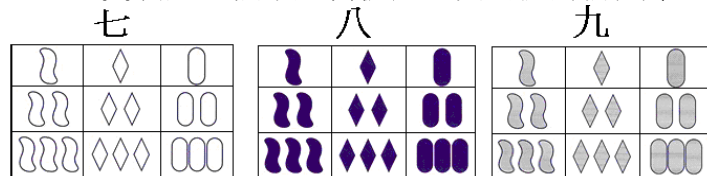
(6) 圖五是利用圖四使用\軌跡所排出的第十種配對類型。



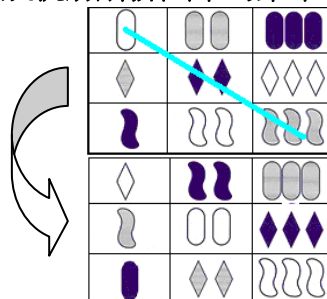
(7) 仿圖二利用剩餘的牌組成小九宮，為第六種配對類型。



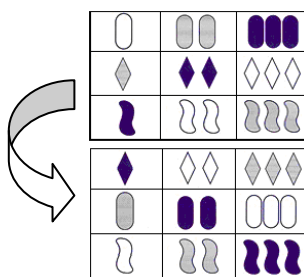
(8) 利用 3 個小九宮彼此之間的換牌排出第七種配對類型。



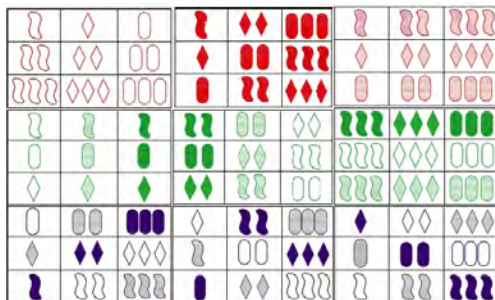
(9) 用\軌跡所排出來的第十二種配對類型。



(10) 利用剩下的牌組成一個小九宮排出第七種配對類型。



因此，大九宮最多可換出七種不同的配對類型，如下圖：



★**發現三**: 從上表可知在大九宮格內不僅僅只能有一種 SET 的配對類型，還能透過「小九宮格換牌法」或「大九宮格換牌法」產生在同一大九宮格中出現不同種配對類型。

◆**綜合**: 先前在目的二的研究問題(二)「如何在遊戲過程中，讓所有玩家恰好能把一副 81 張的 SET 牌全用完，形成數組 SET？」一連串探討所引發的好奇:「難道只能從頭到尾用同一種配對類型才能將一副牌全用完配成 27 組 SET 嗎？」也可在此獲致解答:

* 欲將一副牌全用完配出 27 組 SET，並非只能使用單一一種配對類型，還可同時使用他種配對類型;目前我們確認由 27 組 SET 所形成大九宮格內可同時出現的配對類型種類 最多為七種。

二. 目的二：探討在 SET 遊戲過程中機率的變化。

(一) 玩牌時，發 1 2 張桌上牌時，會出現一組 SET 的機率有多少？

(二) 至少發出多少張桌上牌才會必定出現一組 SET？

* **試想**: 上述所提的兩個問題，似乎都能從觀察與聚焦探討「一副牌中隨機取走的 N 張牌中出現一組 SET 的機率」而獲致解答。

1. 首先，縮小範圍探討-當隨機發出 3 張桌上牌時，至少會出現一組 SET 的機率。








配對一組 SET 需要 3 張牌，配對一組 SET 時的第一張和第二張可任選，但第三張牌是特定的，需視前兩張所形成的母牌組配對類型為何才能決定那關鍵的第三張牌。一副牌共有 81 張牌，隨機抽出 2 張牌後成為桌上牌之後，可以跟它配對的牌只有一張，此時尚有 79 張牌可抽出來做為第三張桌上牌，因此，抽中這張可被配對的牌的機率是 1/79。

為後續探討方便，將桌上牌稱為「母牌」，桌上牌的個數稱為「母牌數」;發牌者預備發出的牌稱為「翻牌」，發牌者手上所有翻牌的總數稱為「翻牌數」;可與母牌配對成功的 SET 牌組的特定牌稱為「候選牌」，則與可母牌配對成 SET 牌組的特定牌總數稱為「候選牌數」。桌上牌中任 2 張牌可以先配對的母牌，稱為「母牌組」。

2. 進一步擴大觀察-隨機發出 6 桌上牌時至少會出現一組 SET 的情況。

以下圖 6 張桌上牌的情形為例:



若以   為母牌組，則其「候選牌」為 ；且另一「母牌組」 ，也是以  為「候選牌」，因此「候選牌」 被稱為「共用的候選牌」，而在桌上牌中出現的「共用的候選牌」之總個數稱為「候選牌被母牌組共用配對的總數」。

★**發現**：「候選牌數」由「母牌組的個數」決定的。

***分析與說明：**

一組 SET 牌組由三張牌組成，故一開始都由抽第三張牌開始計算，依序算出“翻牌中組成 SET 牌組的機率”。因每一母牌組都需搭配另一張牌才能組成一組 SET 牌組，故翻牌數中會有一定數量的候選牌數，而候選牌數也會因母牌數增多而逐漸增加。但也有可能有兩對母牌組同時需要同一張牌，而出現共用的候選牌數。由於原本候選牌數當中包含了共用的候選牌數已包括候選牌被母牌組共用的次數重複，故將多被重複計算到的候選牌數減去。

∴「翻牌中組成 SET 的機率」是翻牌數中出現候選牌數的機率，其算法：「(候選牌數-候選牌多被重複計算的總數)÷ 翻牌數」。

3.綜合上述以表列出抽第 N 張牌組成 SET 的機率

4 種屬性,3 種特徵元素,總共有 81 張牌						
桌上牌數	正在抽第 N 張牌	翻牌數	候選牌數	候選牌多被重複計算的總數	翻牌被抽中，組成 SET 的機率	
					算式	結果 (%)
2	3	79	1	0	(1-0)/79	1.27
3	4	78	3	0	(3-0)/78	3.85
4	5	77	6	0	(6-0)/77	7.79
5	6	76	10	0	(10-0)/76	13.16
6	7	75	15	1	(15-1)/75	18.67
7	8	74	21	3	(21-3)/74	24.32
8	9	73	28	6	(28-6)/73	30.14
9	10	72	36	6	(36-6)/72	41.67
10	11	71	45	9	(45-9)/71	50.70
11	12	70	55	14	(55-14)/70	58.57
12	13	69	66	22	(66-22)/69	63.77
13	14	68	78	27	(78-27)/68	75.00
14	15	67	91	37	(91-37)/67	80.60
15	16	66	105	47	(105-47)/66	87.88
16	17	65	120	59	(120-59)/65	93.80
17	18	64	136	75	(136-75)/64	95.31
18	19	63	153	92	(153-92)/63	96.83
19	20	62	171	110	(171-110)/62	98.39
20	21	61	190	129	(190-129)/61	100.00

★**結果**：

1. 遊戲時，隨機發 12 張桌上牌時，會出現一組 SET 的機率有 58.57%。
2. 至少發出 21 張桌上牌才會必定出現一組 SET。

陸、結論

- 一、探討如何把一副 81 張的牌恰好用完以組成數組「成功的 SET」。
 - (一)一副 81 張的 SET 牌可利用同一種配對類型配對完。
 - (二)一副 81 張的 SET 牌可利用軌跡和 6 張換牌法上、中換出最多七種配對類型配對完。
 - (三)在大九宮內一次可利用全部 15 種配對類型把 81 張牌全數配完，而將其配對所形成的所有小九宮中最多可出現兩條軌跡。
- 二、在 SET 遊戲過程中探討 SET 出現的機率。
 - (一)計算出現一組 SET 的機率之計算公式： $(\text{候選牌數}-\text{候選牌被重複配對的次數})/\text{翻牌數}$
 - (二)抽到第 21 張牌會 100%出現一組 SET，也就是說隨機抽 21 張牌至少會出現一組 SET。

柒、參考資料及其他

- 一、遊戲物件源自 Marsha Jean Falco 於 1974 所發明的 SET 紙牌遊戲並創立了 SET Enterprises Inc.，我們所使用的 SET 牌是從桌上遊戲專賣店-卡卡城所購得的。

【評語】 080415

1. Set 遊戲的趣味相當高及有一定的複雜性，分析討論也有可觀之處。
2. 對遊戲的各種可能性也有相當完整的分析。
3. 數學分析的深度稍嫌不足，但已有不錯的嘗試。