中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080414

天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊

學校名稱：高雄市楠梓區楠梓國民小學

作者：	指導老師：
小五 林翊欽 小五 李暐霆 小五 王惠萱 小五 王佑恩 小五 周禹彤	陳幸永

關鍵詞：六連塊、窮舉法、圖形操作

作品名稱：天羅地網尋芳蹤　只為盡訪六連塊

摘要

本研究以五連塊為基礎，利用窮舉法、圖形操作推導與驗證六連塊之所有組合方式。研究結果發現連塊個數、連接邊數、L 形轉角數與連塊可擴充位置數量及連塊組合方式有關，此研究可做為後續推導七以上連塊組合方式之參考。

壹、　研究動機

有一次數學課老師拿出一箱教具，讓全班同學一起找出所有五連塊的排列，當同學們一起努力尋找五連塊的各種不同組合方式時，我們發現有些看起來不一樣的組合方式，透過旋轉、鏡射之後卻是同一種幾何形狀。老師不斷的激勵我們找不同的組合方式，當大家找到了 12 種組合之後，老師端出重金獎賞，激勵我們找出第 13 種組合。當我們發現第 13 種五連塊的獎勵只是綁在兔子面前的胡蘿蔔時，大家都洩了氣；但老師一記回馬槍，追問我們：「你如何能確定真的只有這 12 種組合呢？」，這個問題使我們不服輸的展開一連串的思考與討論，也引發我們對於多方連塊的興趣，試圖以系統性的方法從 12 種五連塊擴充一個方塊，尋找出所有的六連塊，並且探究這其中到底有多少我們不知道的祕密。

貳、　研究目的

一、　透過圖形操作找出二～六連塊的全部組合方式。

二、　在 N 連塊建構過程中，探討連塊個數、連接邊數、連塊幾何形狀與組合方式之關係。

三、　運用窮舉法與旋轉及鏡射概念檢視是否窮盡六連塊的全部組合方式。

參、　名詞解釋

一、　六連塊

六連塊是指六個同樣大小的正方形，邊與邊對齊相接而形成的幾何圖形。依此類推，一個正方形稱為單方塊，兩個正方形組成叫做二連塊或骨牌、三個為三連塊、四個為四連塊；用五個正方形組成的就叫做五連塊。在 20 世紀初數學家已經建立多接塊的概念，並且把這些概念做為益智遊戲的題材。葛登能（Martin Gardner）在 2002 年曾介紹四連塊、五連塊推理遊

戲，使五連塊成為大家所熟悉的多方塊遊戲。這些以方塊組成的形態通稱為「多方塊」（polyomino）。如果不限於正方形，則稱之為多接塊（polyoform）。多接塊是「多方塊」的基礎概念來源。由 N 個正方形組成的「多方塊」稱為 N 連塊，本文以「N」表示 N 連塊中方塊個數。

二、 連接邊個數 n

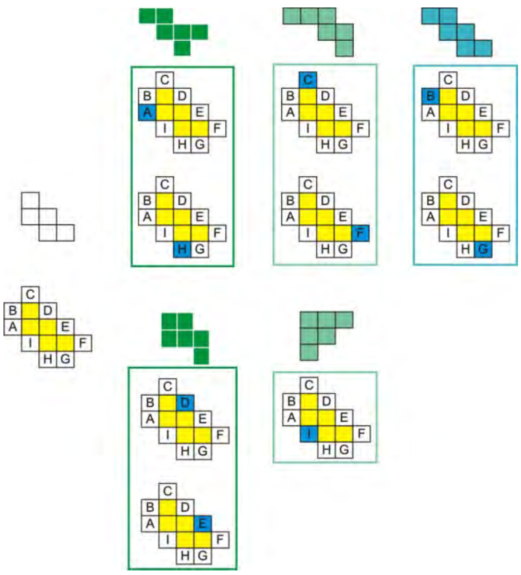
N 連塊因正方形邊對邊連接方式不同而有不同幾何形狀，為探討不同幾何形狀的 N 連塊外圍可連接正方形的擴充位置個數之規律，本文以「n」表示 N 連塊中方塊邊對邊相接的連接邊個數。

三、 L 形轉角個數 a

N 連塊因正方形邊對邊連接方式不同而有不同幾何形狀，為探討不同幾何形狀的 N 連塊外圍可連接正方形的擴充位置個數之規律，本文以「a」表示 N 連塊的幾何形狀中的 L 形轉角個數，每個 L 形轉角兩側方塊的擴充位置重疊，這會使 N 連塊外圍的擴充位置個數減少一個。

四、 擴充位置個數 P

N 連塊因正方形彼此邊對邊相接的連接方式不同而有不同的幾何形狀，為了確認由 N 連塊擴充一個正方形組成 N+1 連塊的過程中能夠有效率又縝密的窮舉所有可能組合方式，本文以「P」表示 N 連塊外圍可連接正方形的擴充位置個數。例如：「$P_{5W}=9$」，指五連塊 W 外圍可連接正方形的擴充位置個數有 9 個。也就是說只要在這 9 個位置上，逐一加上一個正方形方塊，就可以找出 9 種由五連塊 W 擴充成的六連塊，接著再透過旋轉、鏡射，除去相同形狀的圖形，就可以確認五連塊 W 可以擴充成 5 種不同形狀的六連塊。（如右圖）



五、 窮舉法

根據維基百科的說法：窮舉法，針對數學問題可能的解法，進行逐個推算直到找出真正解答為止。例如一個已知是四位並且全部由數字組成的密碼，其可能共有 10000 種組合，因此最多嘗試 10000 次就能找到正確的解答。理論上利用這種方法可以解決任何一種問題，解題快慢的關鍵只在於如何縮短試誤時間。

本研究嘗試透過尋找五連塊外圍可連接正方形的擴充位置個數，窮舉所有組合方式，再除去旋轉、鏡射後相同形狀的組合形態，確認六連塊所有組合形狀。

六、 圖形操作

圖形操作是本研究的主要方法，我們將教具操作所發現的連塊組合方式繪製成圖形，並標示出其外圍可連接正方形的擴充位置，將這些位置標上代號（A、B、C、D……）。

透過圖形操作使 N 連塊擴充成 N＋1 連塊之組合方式能夠有系統的呈現，也使本文得以使用窮舉法窮盡所有由 N 連塊擴充成 N＋1 連塊的組合方式，再除去旋轉、鏡射後相同的幾何形狀，進而檢驗、確認六連塊所有組合形狀。

肆、 研究方法與過程

一、 研究方法

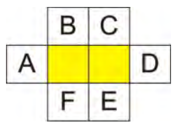
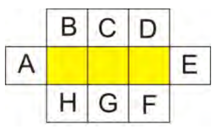
研究過程中，透過圖形操作並運用窮舉法推導 N 連塊擴充成 N＋1 連塊之組合方式。

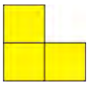
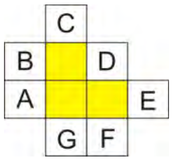
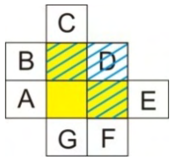
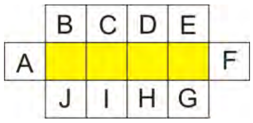
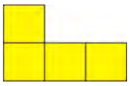
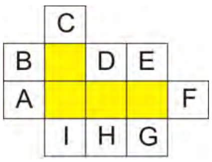
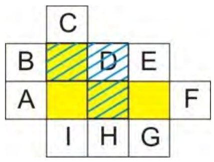
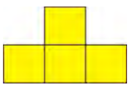
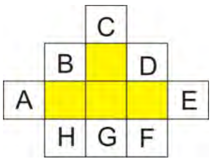
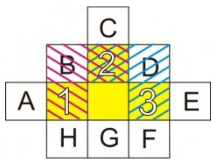
二、 研究過程

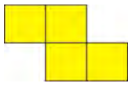
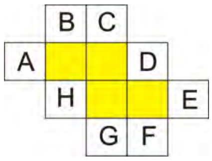
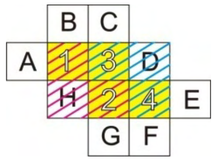
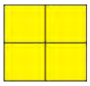
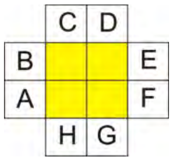
（一） 透過簡單的 N 連塊（N＝2、3、4）圖形操作，尋找是否存在 N+1 連塊組合規律的初階探究。

開始進行正式研究之初，我們先使用教具做出二～四連塊，試圖簡化問題並尋找組合規律。在操作過程中，我們注意到連塊外圍的邊，這些邊正好就是要增加一個連塊的位置，我們發覺透過圖形操作並標示出 N 連塊外圍的位置將有助於討論，於是，我們將討論整理如下表：

簡單的 N 連塊（N＝2、3、4）外圍可擴充位置（P）之規律初階探究

連塊名稱與圖示		算式與圖示	說明
二連塊		$4\times2-2\times1=6$  $P_2=6$	一個正方形有 4 個邊，二連塊由 2 個正方形組成，共有 8 個邊（4×2），有 1 個連接邊由兩個正方形相連，所以要扣掉（2×1），故，二連塊外圍共有 6 個可擴充位置。
三連塊Ⅰ		$4\times3-2\times2=8$  $P_{3I}=8$	三連塊Ⅰ共有 12 個邊（4×3），有 2 個連接邊，所以要扣掉（2×2）。故，三連塊Ⅰ外圍共有 8 個可擴充位置。

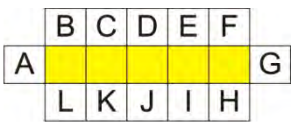
連塊名稱與圖示		算式與圖示	說明
三連塊 V		$4\times3-2\times2-1=7$  $P_{3V}=7$	三連塊 V 中斜線所指的兩個正方形（造成 1 個 L 形轉角）共用一個擴充位置 D，所以擴充位置個數要（-1）。故，三連塊 V 外圍共有 7 個可擴充位置。
四連塊 I		$4\times4-2\times3=10$  $P_{4I}=10$	四連塊 I 共有 16 個邊（4×4），有 3 個連接邊，所以要扣掉（2×3）。故，四連塊 I 外圍共有 10 個可擴充位置。
四連塊 L		$4\times4-2\times3-1=9$  $P_{4L}=9$	下圖中斜線所指的兩個正方形（造成 1 個 L 形轉角）共用一個擴充位置 D，所以擴充位置個數要（-1）。故，四連塊 L 外圍共有 9 個可擴充位置。
四連塊 T		$4\times4-2\times3-2=8$  $P_{4T}=8$	下圖中四連塊 T 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 B，編號 2、3 兩個正方形共用一個擴充位置 D；（一共造成 2 個 L 形轉角），所以擴充位置個數要（-2）。故，四連塊 T 外圍共有 8 個可擴充位置。

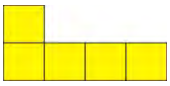
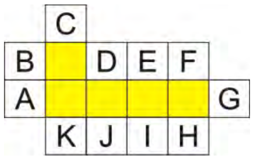
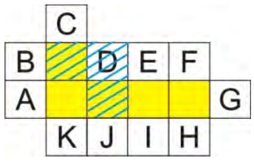
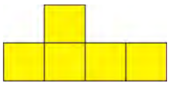
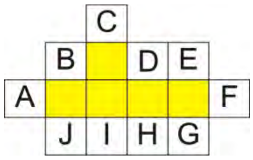
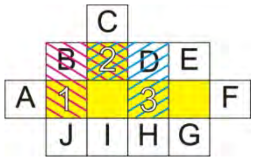
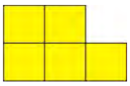
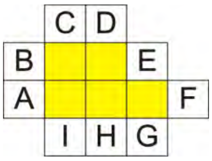
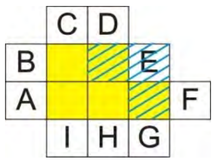
連塊名稱與圖示		算式與圖示	說明
四連塊 N		$4\times4-2\times3-2=8$  $P_{4N}=8$	下圖中四連塊 N 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 H，編號 3、4 兩個正方形共用一個擴充位置 D；（一共造成 2 個 L 形轉角），所以擴充位置個數要（-2）。故，四連塊 N 外圍共有 8 個可擴充位置。 
四連塊 O		$4\times4-2\times4=8$  $P_{4O}=8$	四連塊 O 由 4 個正方形組成，彼此兩兩、邊邊相連，共有 16 個邊（4×4），有 4 個連接邊，所以要扣掉（2×4）。故，四連塊 O 外圍共有 8 個可擴充位置。（這種緊密的田字形使四連塊 O 的連接邊比其他四連塊多出 1 個連接邊。）
發現	從簡單的二～四連塊外圍可擴充位置圖形操作中，我們找到了一些規律，N 連塊的外圍可擴充位置個數（P）和連塊個數（N）、方塊連接邊個數（n）及連塊形狀 L 形轉角個數（a）有關，我們找到一個公式：「$P=4\times N-2\times n-a$」。接著就以這個公式來預測五連塊的外圍可擴充位置。		

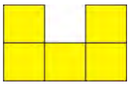
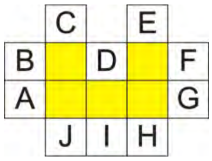
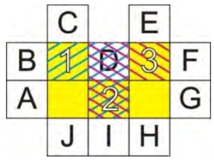
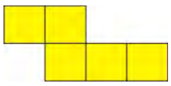
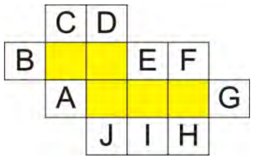
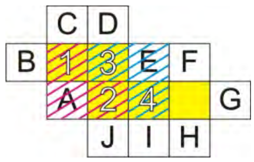
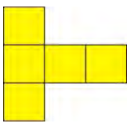
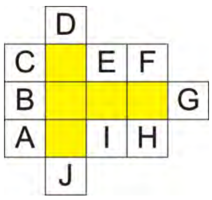
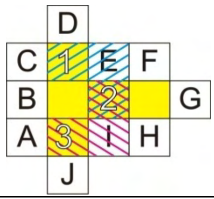
（二） 一般 N 連塊（N＝5）之 n 個連接邊、a 個 L 形轉角與外圍可擴充位置（P）之規律探究與公式可行性之試探

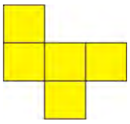
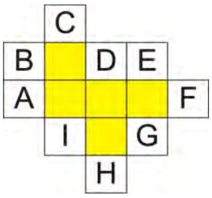
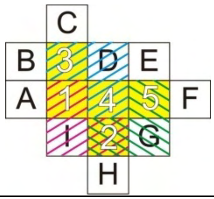
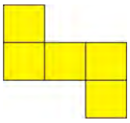
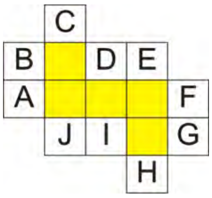
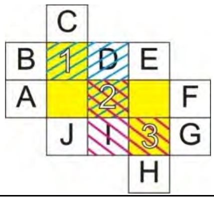
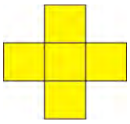
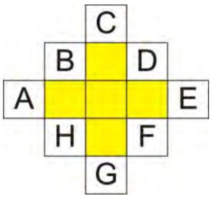
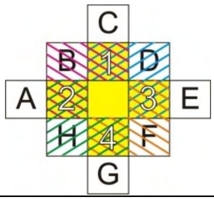
我們先用發現的公式推測 12 種五連塊的外圍可擴充位置個數（P），接著再以圖形操作驗證公式的正確性，發現這個公式可以正確的算出每一種五連塊的外圍可擴充位置個數（P）。將我們的推論過程整理如下表：

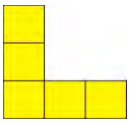
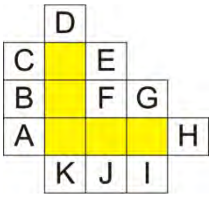
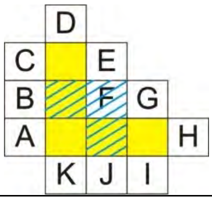
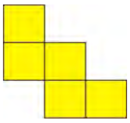
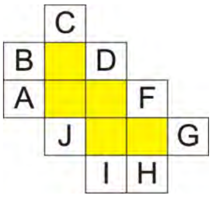
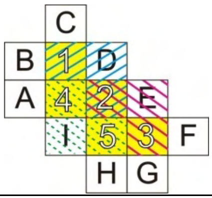
一般 N 連塊（N＝5）之 n 個連接邊、a 個 L 形轉角與外圍可擴充位置（P）之規律

連塊名稱與圖示		算式預測與圖示驗證	說明
五連塊 I		$P_{5I}=4\times5-2\times4=12$ 	五連塊 I 由 5 個正方形組成，共有 20 個邊（4×5），有 4 個連接邊（$5-1$），由兩個正方形彼此相連，所以要扣掉（2×4）。故，五連塊 I 外圍共有 12 個可擴充位置。

連塊名稱與圖示		算式預測與圖示驗證	說明
五連塊 L		$P_{5L}=4\times5-2\times4-1$ $=11$ 	下圖中五連塊 L 斜線所指的兩個正方形（造成 1 個 L 形轉角）共用一個擴充位置 D，所以擴充位置個數要（−1）。故，五連塊 L 外圍共有 11 個可擴充位置。 
五連塊 Y		$P_{5Y}=4\times5-2\times4-2$ $=10$ 	下圖中五連塊 Y 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 B，編號 2、3 兩個正方形共用一個擴充位置 D；（一共造成 2 個 L 形轉角），所以擴充位置個數要（−2）。故，五連塊 Y 外圍共有 10 個可擴充位置。 
五連塊 P		$P_{5P}=4\times5-2\times5-1$ $=9$ 	五連塊 P 的組合形狀中，有 4 個正方形緊密排列成「田」字形，這個結構使五連塊 P 的連接邊個數（n＝5），比其他五連塊多出 1 個連接邊。 下圖中斜線所指的兩個正方形（造成 1 個 L 形轉角）共用一個擴充位置 E，所以擴充位置個數要（−1）。故，五連塊 P 外圍共有 9 個可擴充位置。 

<table>
<tr><th colspan="2">連塊名稱與圖示</th><th>算式預測與圖示驗證</th><th>說明</th></tr>
<tr>
<td>五
連
塊
U</td>
<td></td>
<td>$P_{5U}=4\times5-2\times4-2$
$=10$

</td>
<td>下圖中五連塊 U 編號 1、2、3 三個正方形共用一個擴充位置 D，(如果把擴充位置看作編號 2 正方形的擴充位置，那麼編號 1、3 就沒有擴充位置了。D 的位置剛好是 2 個 L 形轉角的共同交會處)，所以擴充位置個數要 (−2)。故，五連塊 U 外圍共有 10 個可擴充位置。

</td>
</tr>
<tr>
<td>五
連
塊
N</td>
<td></td>
<td>$P_{5N}=4\times5-2\times4-2$
$=10$

</td>
<td>下圖中五連塊 N 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 A，編號 3、4 兩個正方形共用一個擴充位置 E;(一共造成 2 個 L 形轉角)，所以擴充位置個數要 (−2)。故，五連塊 N 外圍共有 10 個可擴充位置。

</td>
</tr>
<tr>
<td>五
連
塊
T</td>
<td></td>
<td>$P_{5T}=4\times5-2\times4-2$
$=10$

</td>
<td>下圖中五連塊 T 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 E，編號 2、3 兩個正方形共用一個擴充位置 I ;(一共造成 2 個 L 形轉角)，所以擴充位置個數要 (−2)。故，五連塊 T 外圍共有 10 個可擴充位置。

</td>
</tr>
</table>

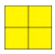
連塊名稱與圖示		算式預測與圖示驗證	說明
五連塊 F		$P_{5F}=4\times5-2\times4-3$ $=9$ 	下圖中五連塊 F 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 I，編號 3、4 兩個正方形共用一個擴充位置 D，編號 2、5 兩個正方形共用一個擴充位置 G；(一共造成 3 個 L 形轉角)，所以擴充位置個數要（−3）。故，五連塊 F 外圍共有 9 個可擴充位置。 
五連塊 Z		$P_{5Z}=4\times5-2\times4-2$ $=10$ 	下圖中五連塊 Z 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 D，編號 2、3 兩個正方形共用一個擴充位置 I；(一共造成 2 個 L 形轉角)，所以擴充位置個數要（−2）。故，五連塊 Z 外圍共有 10 個可擴充位置。 
五連塊 X		$P_{5X}=4\times5-2\times4-4$ $=8$ 	下圖中五連塊 X 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 B，編號 1、3 兩個正方形共用一個擴充位置 D，編號 3、4 兩個正方形共用一個擴充位置 F，編號 2、4 兩個正方形共用一個擴充位置 H；（一共造成 4 個 L 形轉角），所以擴充位置個數要（−4）。故，五連塊 X 外圍共有 8 個可擴充位置。 

連塊名稱與圖示		算式預測與圖示驗證	說明
五連塊 V		$P_{5V}=4\times5-2\times4-1$ $=11$ 	下圖中五連塊 V 斜線所指的兩個正方形（造成 1 個 L 形轉角）共用一個擴充位置 F，所以擴充位置個數要（−1）。故，五連塊 V 外圍共有 11 個可擴充位置。 
五連塊 W		$P_{5W}=4\times5-2\times4-3$ $=9$ 	下圖中五連塊 W 編號 1、2 兩個正方形共用一個擴充位置 D，編號 2、3 兩個正方形共用一個擴充位置 E，編號 4、5 兩個正方形共用一個擴充位置 I；（一共造成 3 個 L 形轉角），所以擴充位置個數要（−3）。故，五連塊 W 外圍共有 9 個可擴充位置。 

（三） 發現主要定理——「P = 4×N - 2×n - a」

經由上述的討論，我們從簡單的二～四連塊發現組合規律與公式，並且以五連塊作為一般式的推測與驗證，我們將 N 連塊外圍可擴充位置個數 P 表徵成：

「P = 4×N - 2×n - a」

其中 N 表示連塊個數。例：五連塊 N＝5。n 表示連接邊數，通常是$n=N-1$，例如：五連塊 L有 4 個連接邊，但若連塊有 1 個田字形（如：）則$n=N$，例如：五連塊 P有 5 個連接邊。a 表示連塊造型中的 L 形轉角個數，1 個 L 形轉角$a=1$，2 個 L 形轉角$a=2$，……。

我們決定利用上述結果，使用窮舉法將 12 種五連塊外圍可擴充連塊位置有系統的畫出來，來尋找所有的六連塊組合方式，並從圖形操作的過程中，尋找組合規律。

（四） 透過圖形操作，由二連塊擴充到五連塊之規律探究。

1. 二連塊

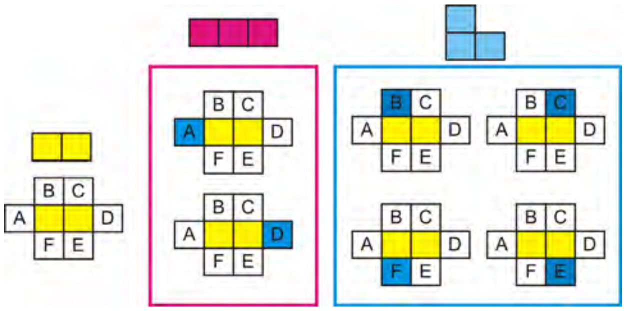
<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>


圖 1

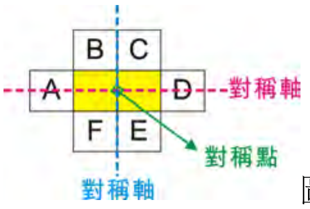


圖 2
</td><td>
$P_2 = 4\times2-2\times1=6$

二連塊共有 6 個擴充位置，我們將這 6 個位置分別加上一個方塊形成三連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 2 種三連塊組合（如左圖 1 所示）。

二連塊是線對稱圖形，有兩條對稱軸，將二連塊旋轉 180°後，發覺它也是點對稱圖形（如左圖 2）。

從藍色對稱軸來看，擴充位置 A 和 D 是對稱軸兩側相對應的點。

從對稱點來看，擴充位置 B、C、E 和 F 是相對應的點。

所以，二連塊共有 6 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 2 種三連塊組合。

故，我們可以用左圖 1 的圖形操作方式，窮盡三連塊的所有組合方式。
</td></tr>
</table>

2. 三連塊

<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>
三連塊 I

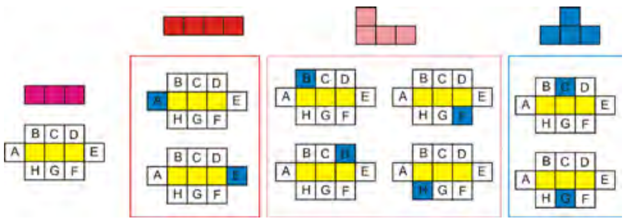


圖 1

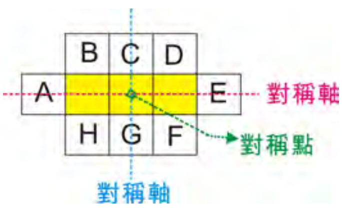


圖 2
</td><td>
$P_{3I} = 4\times3-2\times2=8$

三連塊 I 共有 8 個擴充位置，我們將這 8 個位置（A、B、C、D、E、F、G、H）分別加上一個方塊形成四連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 3 種四連塊組合（如左圖 1 所示）。

仔細觀察三連塊 I，發現三連塊 I 是線對稱圖形，有兩條對稱軸，將三連塊 I 旋轉 180°後，發覺它也是點對稱圖形（如左圖 2）。

從藍色對稱軸來看， A 和 E 是對稱軸兩側相對應的點。

從紅色對稱軸來看， C 和 G 是對稱軸兩側相對應的點。

從對稱點來看， B、D、F 和 H 是相對應的點。

所以，三連塊 I 有 8 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 3 種四連塊組合。
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>三連塊 V

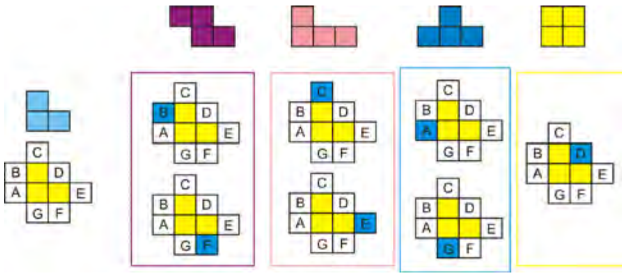



圖 1

圖 2</td><td>$P_{3V}= 4\times3-2\times2-1=7$
三連塊 V 共有 7 個擴充位置，我們將這 7 個位置分別加上一個方塊形成四連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 4 種四連塊組合（如左圖 1 所示）。
三連塊 V 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如左圖 2）。
從對稱軸來看，（ A 和 G）、（B 和 F）、（C 和 E）是對稱軸兩側相對應的點，可以形成三種四連塊的組合方式，擴充位置 D 沒有對應點，組合成的四連塊不會和其他位置重複。
所以，三連塊 V 有 7 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 4 種四連塊組合。</td></tr>
<tr><td colspan="2">發現：經由上述圖形操作，我們找出三連塊 I 可以擴充成 3 種四連塊，而三連塊 V 可以擴充成 4 種四連塊，這些四連塊有 2 組互相重複，扣除重複只有 5 種四連塊組合方式。故，我們可以用上述的圖形操作方式，分別找出 2 種三連塊擴充成四連塊的組合方式，再扣除重複的組合，就可以窮盡四連塊所有組合方式。
我們再以四連塊操作擴充成五連塊，來檢驗是否真的可以窮盡 12 種五連塊組合。</td></tr>
</table>

3. 四連塊

<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>四連塊 I

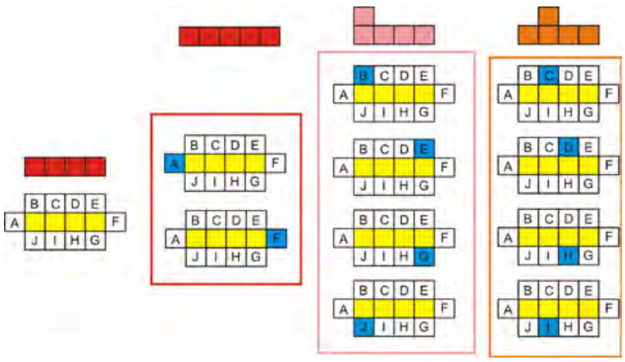



圖 1

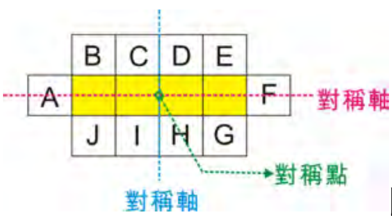
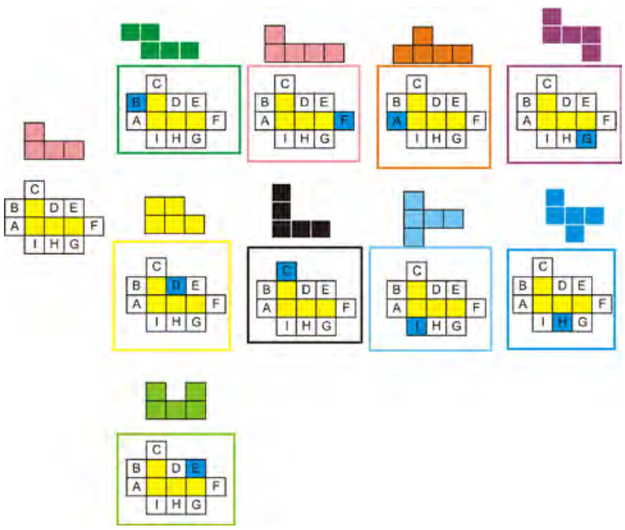
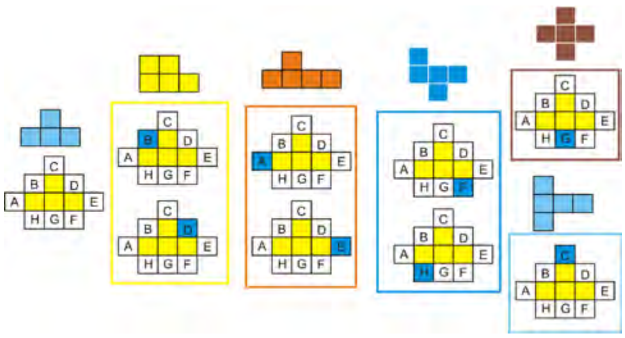
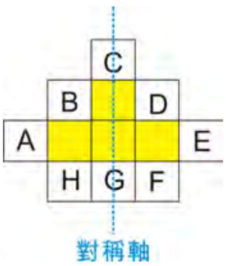
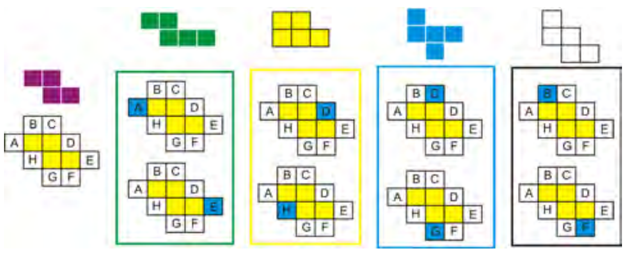
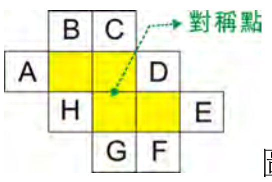



圖 2</td><td>$P_{4I}= 4\times4-2\times3=10$
四連塊 I 共有 10 個擴充位置，我們將這 10 個位置（A、B、C、D、E、F、G、H、I、J）分別加上一個方塊形成五連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 3 種五連塊組合（如左圖 1 所示）。
仔細觀察四連塊 I，發現四連塊 I 是線對稱圖形，有兩條對稱軸，將四連塊 I 旋轉 180°後，發覺它也是點對稱圖形（如左圖 2）。
從藍色對稱軸來看， A 和 F 是對稱軸兩側相對應的點。
從對稱點來看，（ B、E、G 和 J）和（C、D、H 和 I）是二組相對應的點。所以，四連塊 I 共有 10 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 3 種五連塊組合。</td></tr>
</table>

圖形操作	發現與說明
四連塊 L 	$P_{4L} = 4\times4-2\times3-1=9$ 四連塊 L 共有 9 個擴充位置，我們將這 9 個位置，加上一個方塊就可以形成 9 種五連塊組合。
四連塊 T  圖 1  圖 2	$P_{4T} = 4\times4-2\times3-2=8$ 四連塊 T 共有 8 個擴充位置，我們將這 8 個位置，分別加上一個方塊形成五連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 5 種四連塊組合（如左圖 1 所示）。 仔細觀察四連塊 T，發現四連塊 T 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如左圖 2）。 從對稱軸來看，(A 和 E)、(B 和 D)、(F 和 H）是對稱軸兩側相對應的點。 所以，四連塊 T 的 8 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 5 種五連塊組合。
四連塊 N  圖 1  圖 2	$P_{4N} = 4\times4-2\times3-2=8$ 四連塊 N 的 8 個擴充位置，只能形成 4 種四連塊組合（如左圖 1 所示）。 仔細觀察四連塊 N，發現四連塊 N 是點對稱圖形，有一個對稱點（如左圖 2）。 從對稱點來看，(A 和 E)、(B 和 F)、(C 和 G)、（D 和 H）是相對應的點。 所以，四連塊 N 的 8 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 4 種五連塊組合。

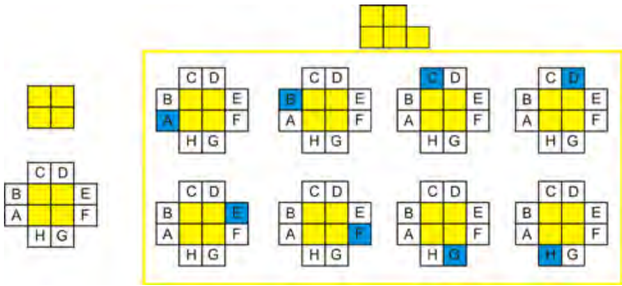
<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>四連塊 O


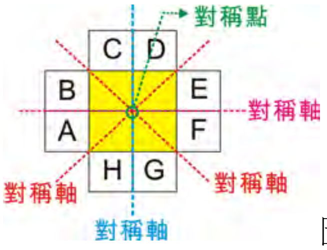
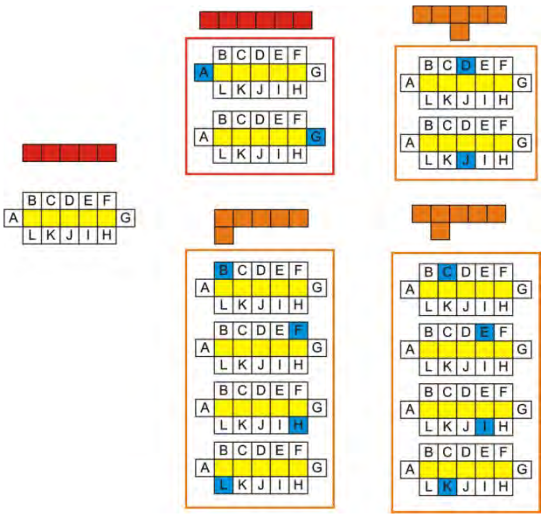
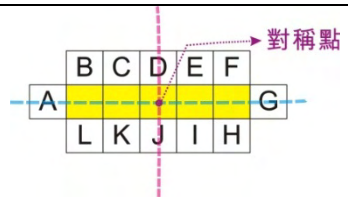
圖 1


圖 2</td><td>$P_{4O} = 4 \times 4 - 2 \times 4 = 8$
四連塊 O 共有 8 個擴充位置，只能形成 1 種四連塊組合（如左圖 1 所示）。
仔細觀察四連塊 O，發現四連塊 O 是線對稱圖形，有四條對稱軸，將四連塊 O 旋轉 180° 後，發覺它也是點對稱圖形（如左圖 2）。
從對稱點來看，（A、C、E、G）和（B、D、F、H）是相對應的點，從粉紅色對稱軸來看，（A、B）、（C、H）、（D、G）和（E、F），也分別是對稱軸兩側的對應點。
所以，四連塊 O 的 8 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 1 種五連塊組合。</td></tr>
<tr><td colspan="2">發現：經由上述圖形操作，我們以四連塊 L 所形成的 9 種五連塊為基礎，分別檢驗其他 4 種四連塊的擴充組合方式是否重複，發現四連塊 I 只剩 1 種（五連塊 I）不重複，四連塊 T 只剩 1 種（五連塊 X）不重複，四連塊 N 只剩 1 種（五連塊 W）不重複，四連塊 O 只能形成 1 種（五連塊 P）已重複；扣除重複組合，真的只有 12 種五連塊，（9+3）。
從二連塊、三連塊、四連塊擴充到五連塊的圖形操作中，確認可以經由圖形操作，窮盡 12 種五連塊組合。
接著，我們將以這種方式窮舉所有由五連塊擴充成六連塊的組合方式。</td></tr>
</table>

（五） 透過圖形操作，以五連塊外圍可連接正方形的擴充位置個數，窮舉所有由五連塊擴充成六連塊的組合方式。

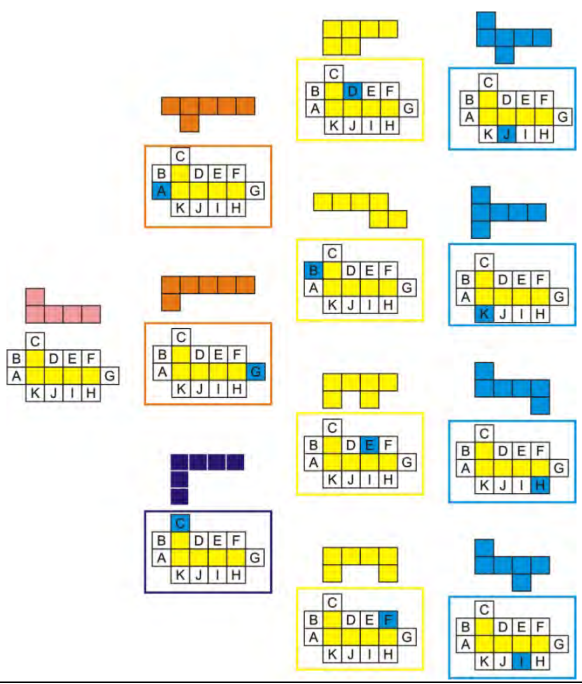
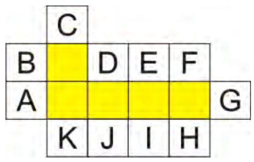
1. 五連塊 I

<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$P_{5I} = 4 \times 5 - 2 \times 4 = 12$
五連塊 I 共有 12 個擴充位置，我們將這 12 個位置（A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L）分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 4 種六連塊組合（如左圖所示）。
仔細觀察五連塊 I，發現五連塊 I 是線對稱圖形，有兩條對稱軸（如下圖），將五連塊 I 旋轉 180° 後，發覺它也是點對稱圖形。</td></tr>
</table>

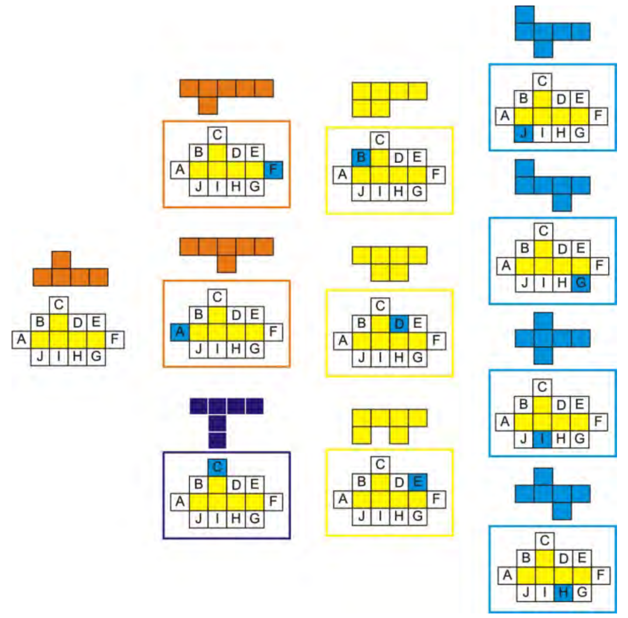
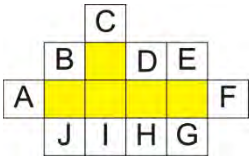
<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td></td><td>

從紅色對稱軸來看，擴充位置 A 和 G 是對稱軸兩側相對應的點。從藍色對稱軸來看，擴充位置 D 和 J 是對稱軸兩側相對應的點。所以，只能組合成兩種六連塊。
從對稱點來看，擴充位置（B、F、H 和 L）和（C、E、I 和 K）是兩組相對應的點。故，只能組合成兩種六連塊。
因此，五連塊 I 共有 12 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 4 種六連塊組合。 </td></tr>
</table>

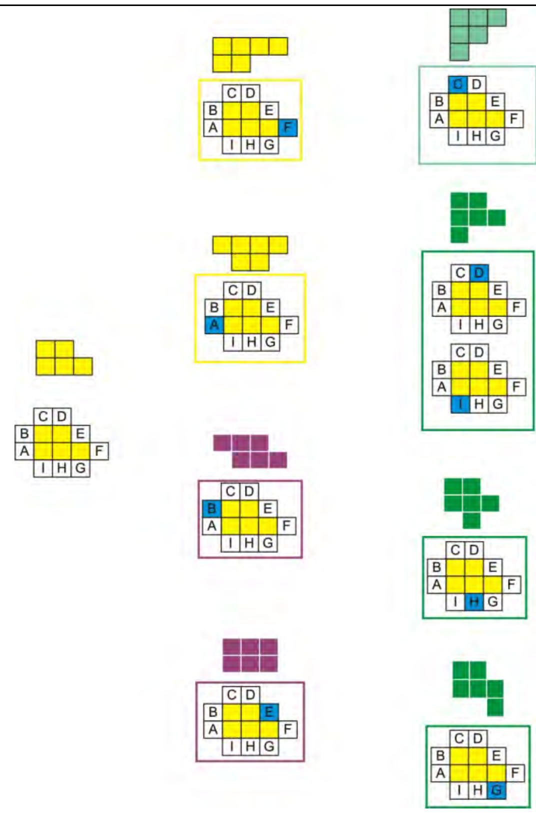
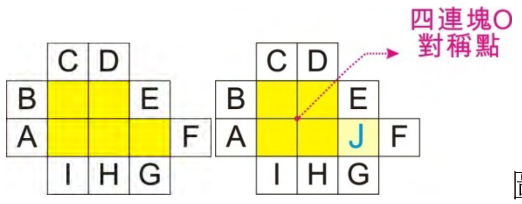
2. 五連塊 L

<table>
<tr><th>圖形操作</th><th>發現與說明</th></tr>
<tr><td></td><td>
$P_{5L} = 4 \times 5 - 2 \times 4 - 1 = 11$
五連塊 L 共有 11 個擴充位置，分別加上一個方塊形成 11 種六連塊（如左圖）。由於五連塊 L 並不是對稱圖形，所以 11 個擴充位置擴充成 11 種六連塊都是不同的組合方式。

</td></tr>
</table>

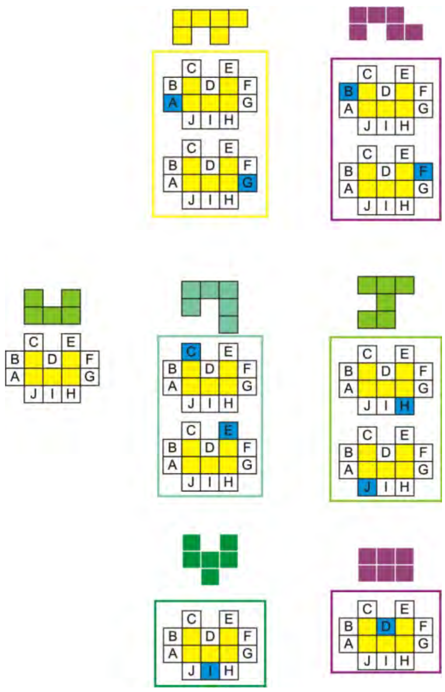
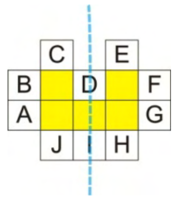
3. 五連塊 Y

圖形操作	發現與說明
	$P_{5Y} = 4 \times 5 - 2 \times 4 - 2 = 10$ 五連塊 Y 共有 10 個擴充位置，分別加上一個方塊形成 10 種六連塊（如左圖所示）。 由於五連塊 Y 並不是對稱圖形，所以 10 個擴充位置擴充成 10 種六連塊都是不同的組合方式。 

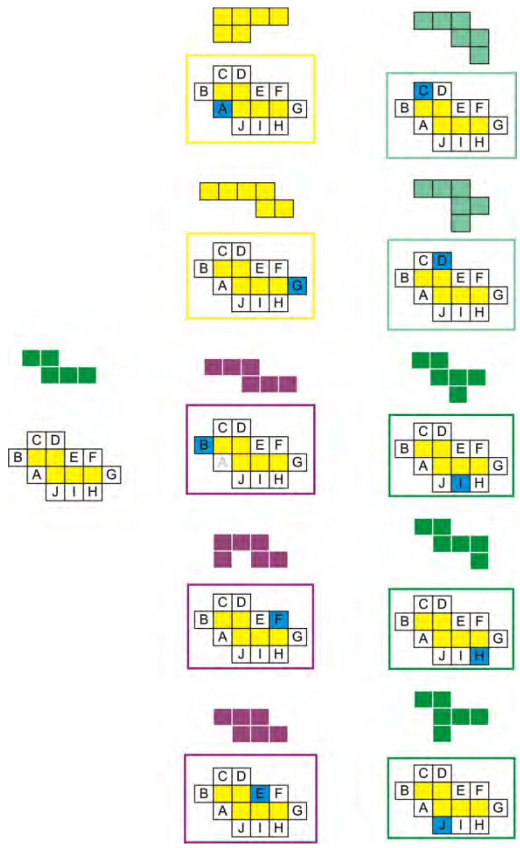
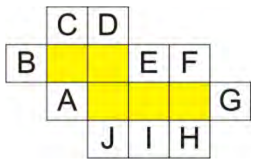
4. 五連塊 P

圖形操作	發現與說明
 圖 1  圖 2	$P_{5P} = 4 \times 5 - 2 \times 5 - 1 = 9$ 五連塊 P 共有 9 個擴充位置，將這 9 個位置分別加上一個方塊形成 8 種六連塊（如左圖所示）。 五連塊 P 並不是對稱圖形，但是，從左圖中我們發現擴充位置 D 所形成的六連塊旋轉 90° 後和擴充位置 I 所形成的六連塊是同一種組合方式。 針對這個現象，發現五連塊 P 雖然不是對稱圖形，但是若將左圖 2 中所標示的 J 方塊略去，就變成了四連塊 O，四連塊 O 是一個點對稱圖形，以四連塊 O 的對稱點為旋轉中心旋轉 90° 後，擴充位置 D 的位置就在五連塊 P 的 J 位置上，同時 J 也會被旋轉到擴充位置 I 上。所以，擴充位置 D 和擴充位置 I 所形成的六連塊是同一種組合方式。 故，五連塊 P 有 9 個擴充位置，經過旋轉刪除重複後只能形成 8 種六連塊組合。

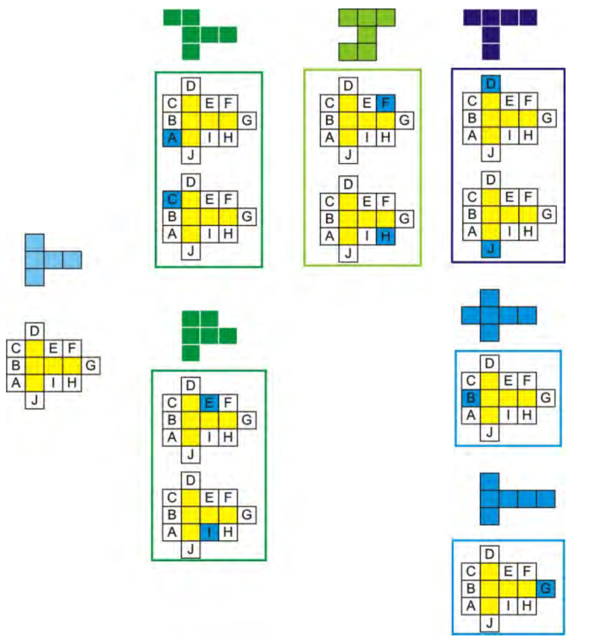
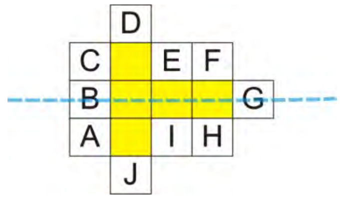
5. 五連塊 U

圖形操作	發現與說明
	$P_{5U}= 4\times 5-2\times 4-2=10$ 五連塊 U 共有 10 個擴充位置，將這 10 個位置分別加上一個方塊，發現經過鏡射後形成 6 種六連塊組合（如左圖所示）。 仔細觀察五連塊 U 發現，五連塊 U 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如右圖）。  從對稱軸來看，擴充位置 A 和 G 是對稱軸兩側相對應的點。所以，組合成六連塊會是同一種組合方式。 擴充位置 B 和 F、C 和 E 以及 H 和 J 都是對稱軸兩側相對應的點。所以，這六個擴充位置只能組合成三種六連塊組合方式。 故，五連塊 U 共有 10 個擴充位置，經過鏡射後形成 6 種六連塊組合。

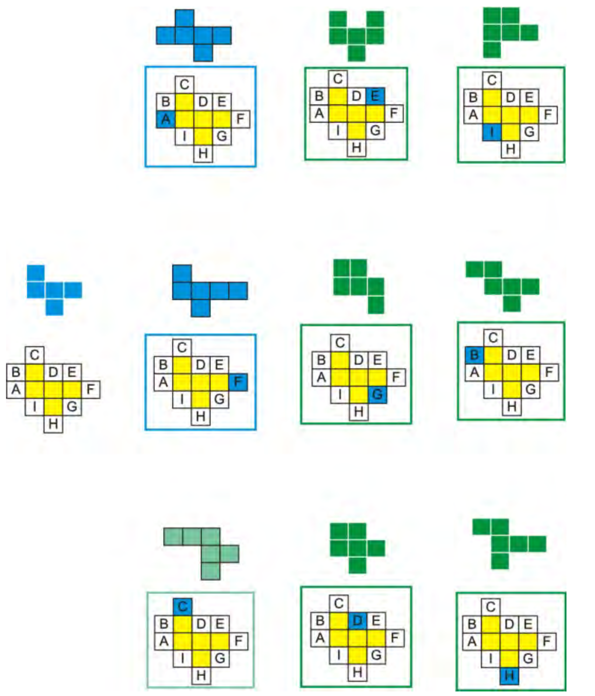
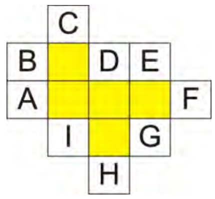
6. 五連塊 N

圖形操作	發現與說明
	$P_{5N}= 4\times 5-2\times 4-2=10$ 五連塊 N 共有 10 個擴充位置（如下圖），將這 10 個位置，分別加上一個方塊形成 10 種六連塊（如左圖所示）。  由於五連塊 N 並不是對稱圖形，所以 10 個擴充位置擴充成 10 種六連塊都是不同的組合方式。

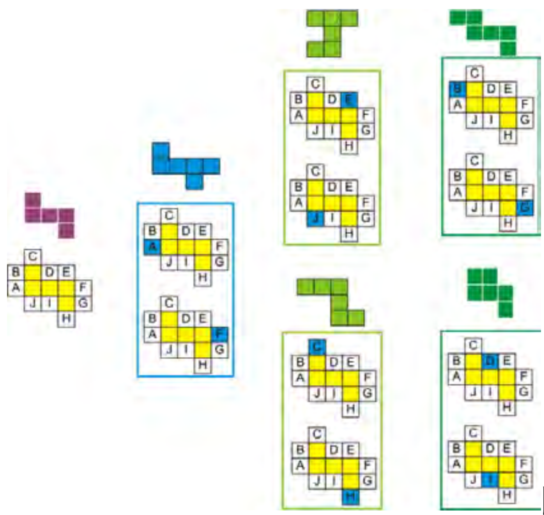
7. 五連塊 T

圖形操作	發現與說明
	$P_{5T} = \quad 4 \times 5 - 2 \times 4 - 2 = 10$ 五連塊 T 共有 10 個擴充位置，將這 10 個位置分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過鏡射後形成 6 種六連塊組合（如左圖所示）。仔細觀察五連塊 T，發現五連塊 T 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如下圖）。  從對稱軸來看，擴充位置（A 和 C）、（D 和 J）、（E 和 I）、（F 和 H）都是對稱軸兩側相對應的點。故，只能組合成 4 種六連塊組合方式。因此，五連塊 T 共有 10 個擴充位置，經過鏡射後形成 6 種六連塊組合。

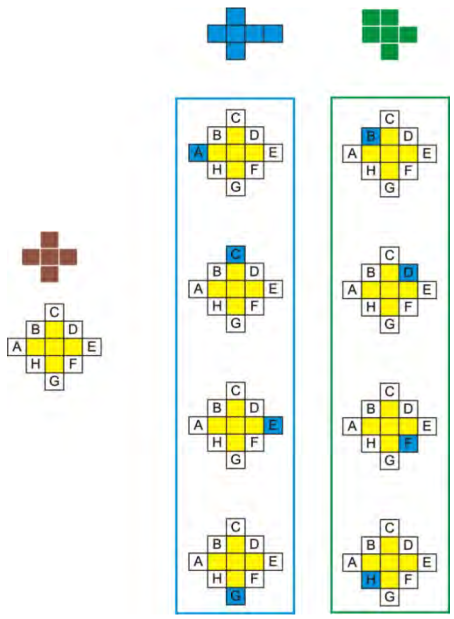
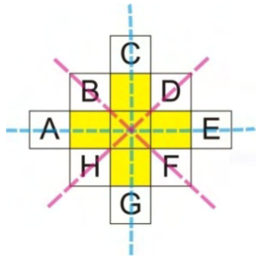
8. 五連塊 F

圖形操作	發現與說明
	$P_{5F} = \quad 4 \times 5 - 2 \times 4 - 3 = 9$ 五連塊 F 共有 9 個擴充位置（如下圖），將這 9 個位置分別加上一個方塊形成 9 種六連塊（如左圖所示）。由於五連塊 F 並不是對稱圖形，所以 9 個擴充位置擴充成 9 種六連塊都是不同的組合方式。 

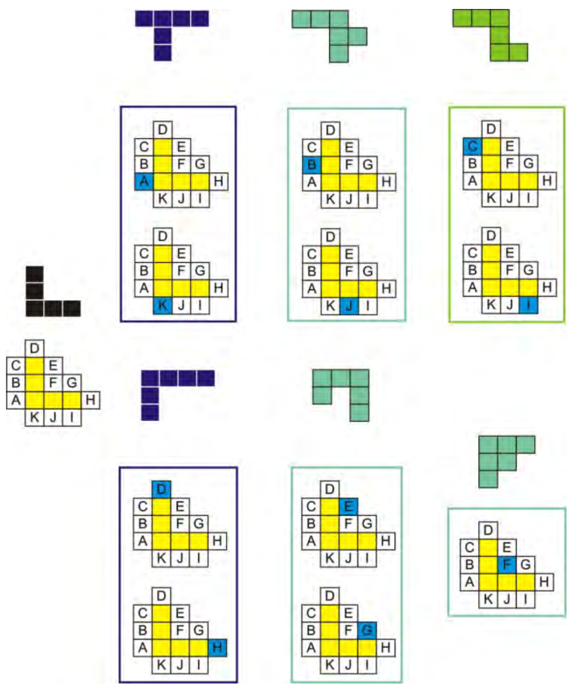
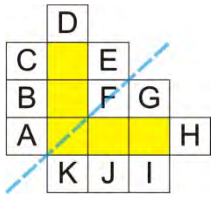
9. 五連塊 Z

圖形操作	發現與說明
 圖 1  圖 2	$P_{5Z}= \quad 4\times5-2\times4-2=10$ 五連塊 Z 共有 10 個擴充位置，將這 10 個位置分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過旋轉後只能形成 5 種六連塊組合(如左圖 1)。五連塊 Z 不是線對稱圖形，沒有對稱軸，將五連塊 I 旋轉 180˚後，發現它是點對稱圖形（如左圖 2)。 從上圖中五連塊 Z 的對稱點來看，擴充位置 A 和 F、B 和 G、C 和 H、D 和 I、E 和 J 都是相對應的點。所以這 10 個擴充位置組合成 5 種六連塊組合方式。 故，五連塊 Z 共有 10 個擴充位置，經過旋轉後只能形成 5 種六連塊組合。

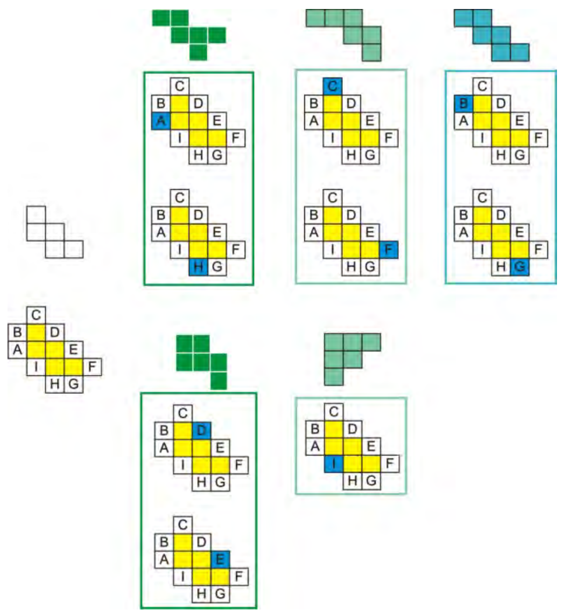
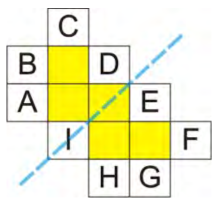
10. 五連塊 X

圖形操作	發現與說明
	$P_{5X}= \quad 4\times5-2\times4-4=8$ 五連塊 W 共有 8 個擴充位置，將這 8 個位置分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過旋轉、鏡射後只能形成 2 種六連塊組合（如左圖所示)。 五連塊 I 是線對稱圖形，有四條對稱軸（如右圖)，將五連塊 X 旋轉 180˚後，發覺它也是點對稱圖形。  從上圖中五連塊 X 的對稱點和四條對稱軸來看，擴充位置 A、C、E 和 G 以及 B 、D 、F 和 H 是兩組相對應的點。所以這 8 個擴充位置組合成 2 種六連塊組合方式。 故，五連塊 W 共有 8 個擴充位置，經過旋轉、鏡射後只能形成 2 種六連塊組合。

11. 五連塊 V

圖形操作	發現與說明
	$P_{5V} = \quad 4 \times 5 - 2 \times 4 - 1 = 11$ 五連塊 V 共有 11 個擴充位置，將這 11 個位置分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過鏡射後形成 6 種六連塊組合（如左圖所示）。 五連塊 V 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如下圖）。  從對稱軸來看擴充位置 A 和 K、B 和 J、C 和 I、D 和 H 以及 E 和 G 都是對稱軸兩側相對應的點。所以，這十個擴充位置只能組合成 5 種六連塊組合方式。 故，五連塊 V 共有 11 個擴充位置，經過鏡射後形成 6 種六連塊組合。

12. 五連塊 W

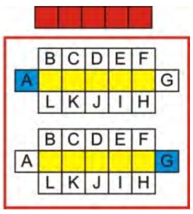
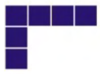
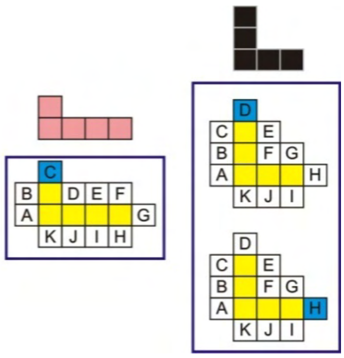
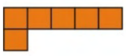
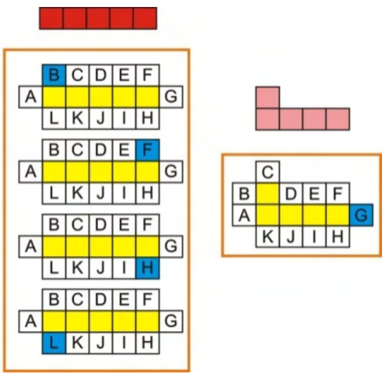
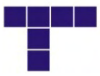
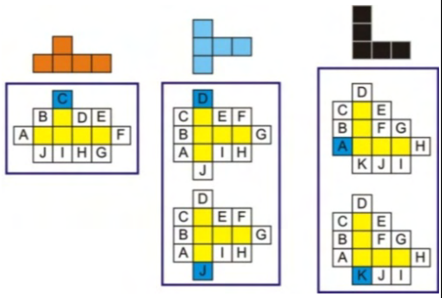
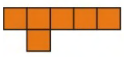
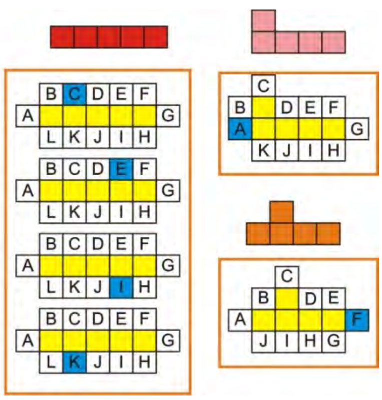
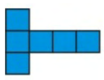
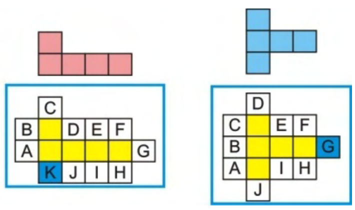
圖形操作	發現與說明
	$P_{5W} = \quad 4 \times 5 - 2 \times 4 - 3 = 9$ 五連塊 W 共有 9 個擴充位置，我們將這 9 個位置分別加上一個方塊形成六連塊，發現經過旋轉、鏡射後形成 5 種六連塊組合（如左圖）。 五連塊 W 是線對稱圖形，有一條對稱軸（如下圖）。  從對稱軸來看，擴充位置 A 和 H、B 和 G、C 和 F、D 和 E 都是對稱軸兩側相對應的點。所以，這八個擴充位置只能組合成 4 種六連塊組合方式。 故，五連塊 W 共有 9 個擴充位置，經過鏡射後形成 5 種六連塊組合。

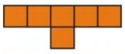
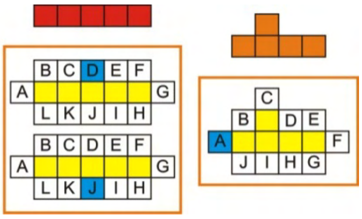
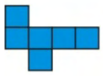
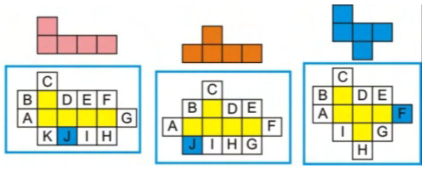
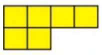
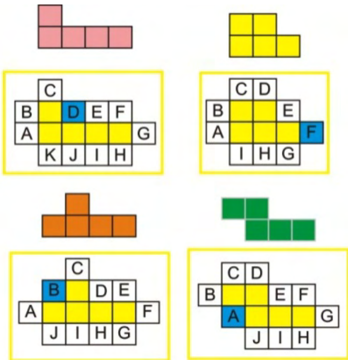
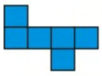
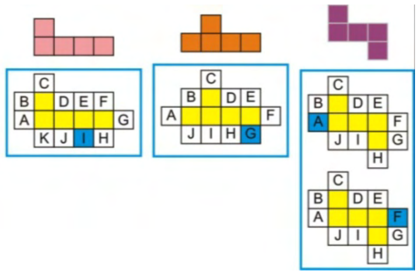
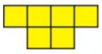
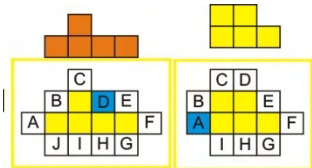
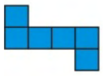
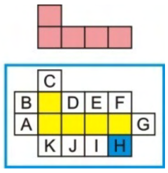
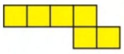
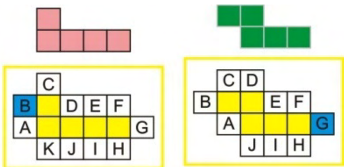
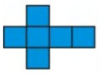
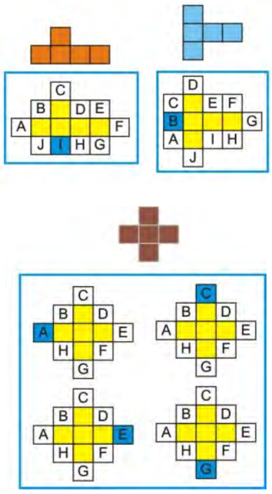
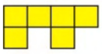
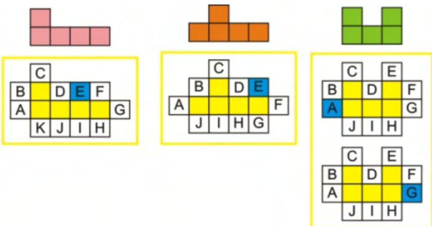
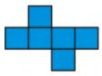
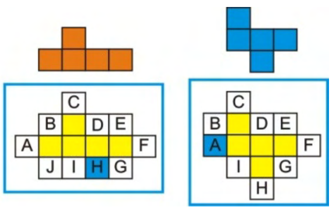
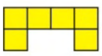
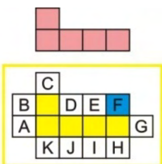
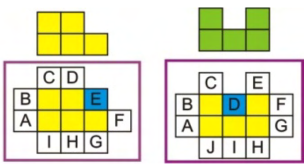
（六） 透過圖形操作，窮舉由 12 種五連塊擴充成六連塊的所有組合方式，再除去旋轉、鏡射後同形的形態，確認六連塊只有 35 種組合形狀。

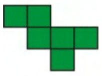
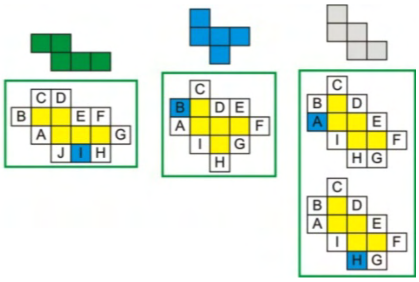
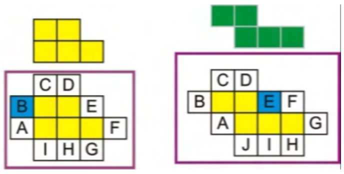
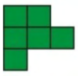
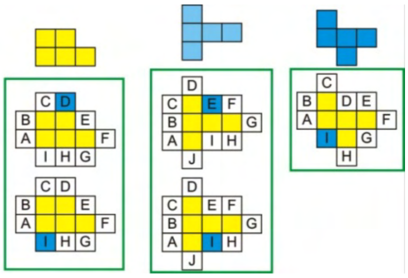
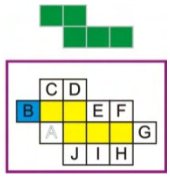
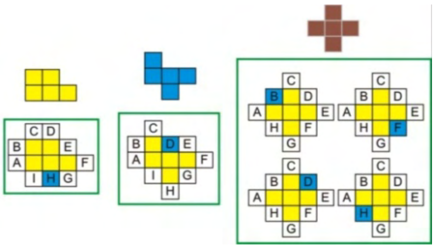
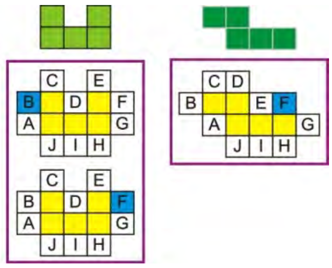
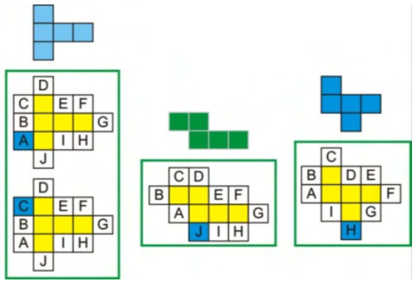
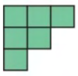
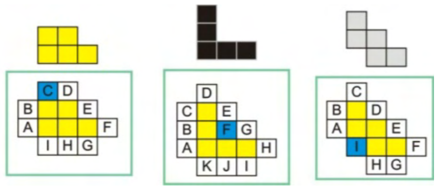
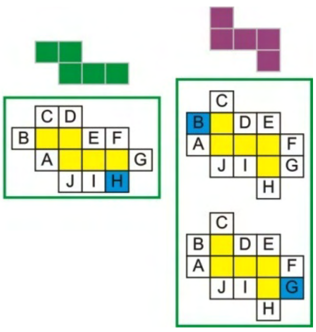
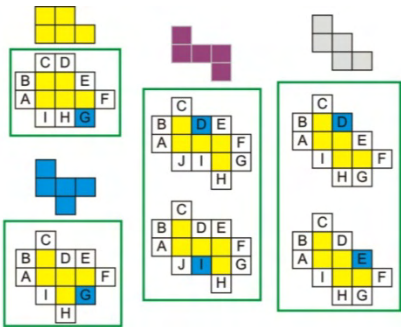
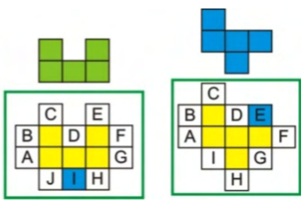
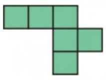
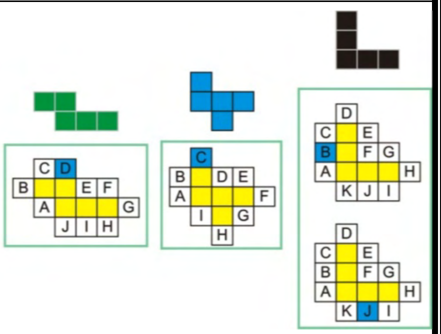
經由上述圖形操作，我們利用窮舉法分別將 12 種五連塊擴充成六連塊的組合方式找出來。12 種五連塊擴充成六連塊的組合方式個數分別為：五連塊 I 可以擴充成 4 種六連塊、五連塊 L 可以擴充成 11 種六連塊、五連塊 Y 可以擴充成 10 種六連塊、五連塊 P 可以擴充成 8 種六連塊、五連塊 U 可以擴充成 6 種六連塊、五連塊 N 可以擴充成 10 種六連塊、五連塊 T 可以擴充成 6 種六連塊、五連塊 F 可以擴充成 9 種六連塊、五連塊 Z 可以擴充成 5 種六連塊、五連塊 X 可以擴充成 2 種六連塊、五連塊 V 可以擴充成 6 種六連塊、五連塊 W 可以擴充成 5 種六連塊。

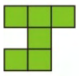
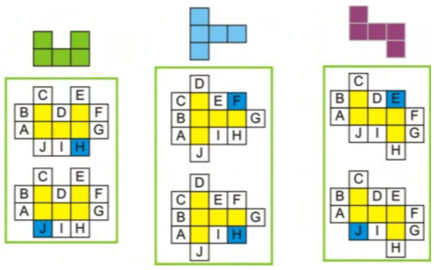
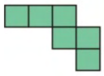
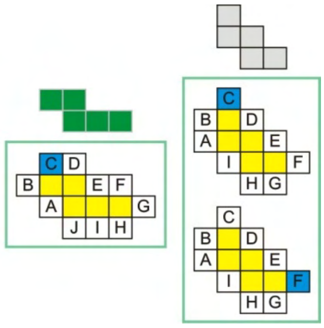
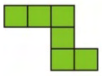
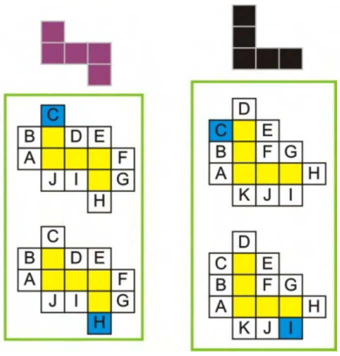
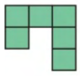
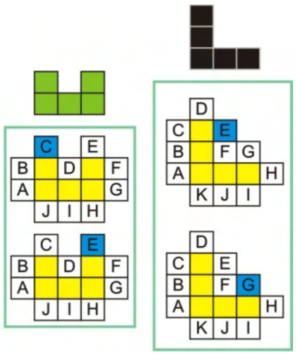
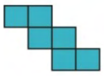
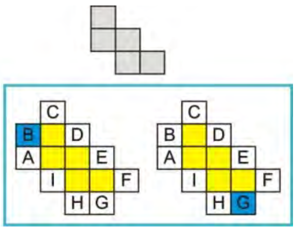
我們利用教具操作逐一檢視這些六連塊，透過旋轉、鏡射檢驗，找出組合形狀相同的六連塊，刪除組合相同的六連塊後，一共找出 35 種不同組合的六連塊，整理如下列圖表。

從 12 種五連塊的擴充位置彙整相同組合形狀以尋找不同六連塊組合之整理圖表

六連塊編號	五連塊擴充圖	六連塊編號	五連塊擴充圖
1 		19 	
2 		20 	
3 		21 	

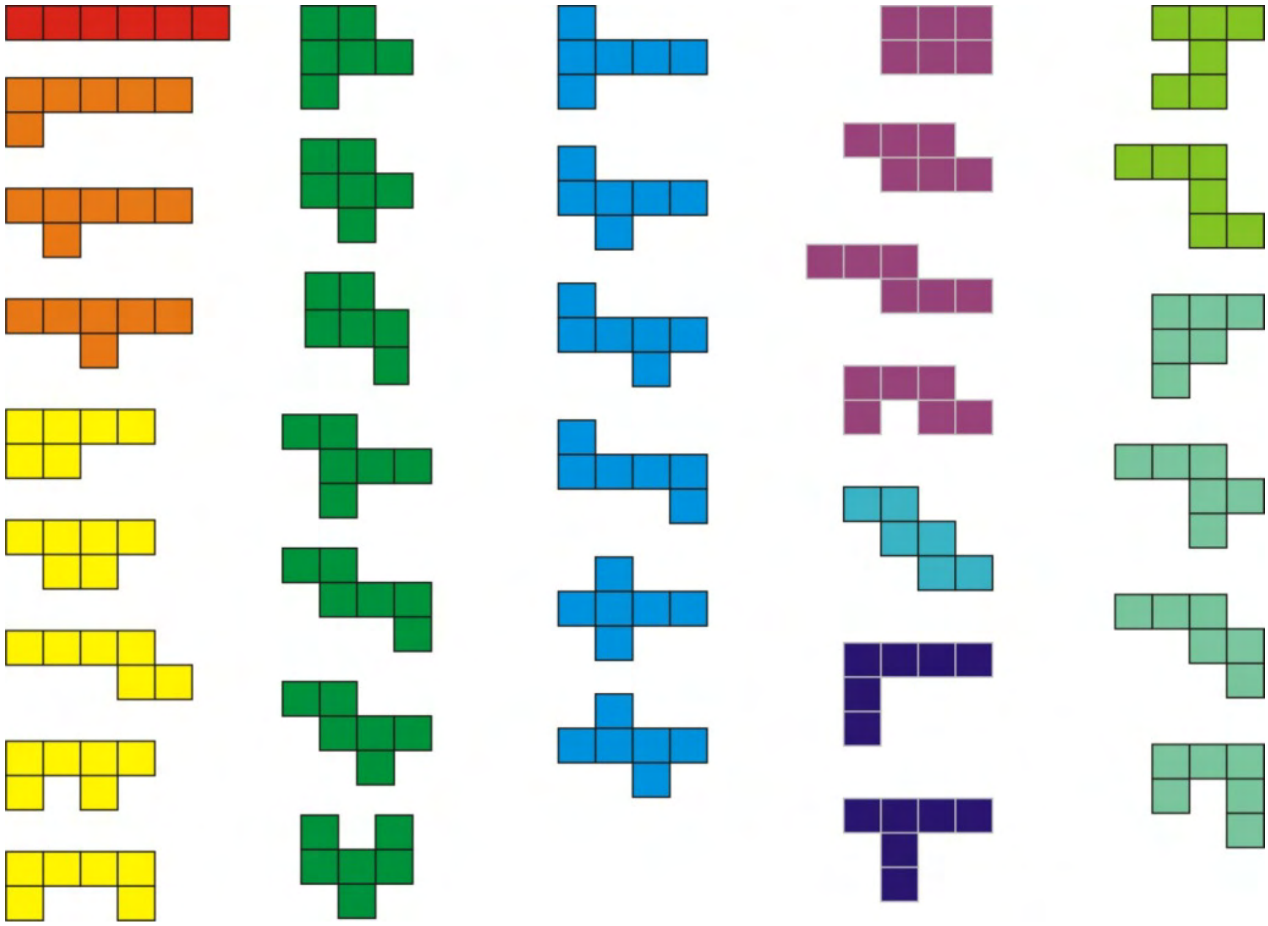
六連塊編號	五連塊擴充圖	六連塊編號	五連塊擴充圖
4 		22 	
5 		23 	
6 		24 	
7 		25 	
8 		26 	
9 		27 	

六連塊編號	五連塊擴充圖	六連塊編號	五連塊擴充圖
10 		28 	
11 		29 	
12 		30 	
13 		31 	
14 		32 	
15 		33 	

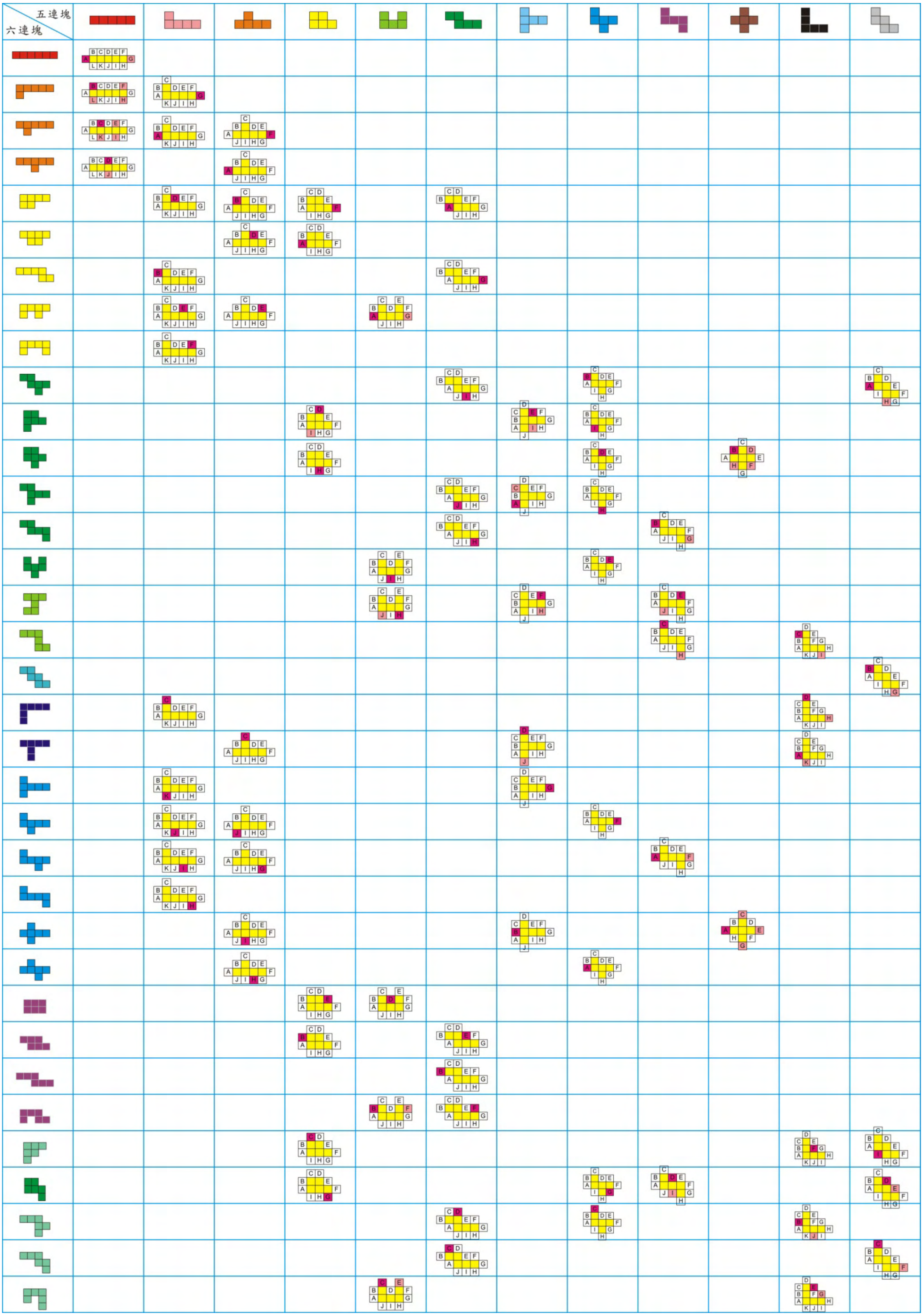
六連塊編號	五連塊擴充圖	六連塊編號	五連塊擴充圖
16 		34 	
17 		35 	
18 			

伍、 研究結果與討論

經過上述圖形操作將旋轉、鏡射後相同的組合整理在同一個圖片中，將所有由五連塊擴充成的六連塊刪去重複的相同形狀、整理成上述 35 種六連塊組合方式。終於，我們可以說，六連塊只有 35 種組合方式，如下圖。



為了讓五連塊和六連塊之間的擴充關係與組合規律可以更清楚呈現，我們又整理了下圖。透過下圖，我們清楚的看出五連塊與六連塊之間的擴充關係。


五連塊
六連塊

陸、　結論與建議

一、　二～六連塊可透過連塊個數（N）、連接邊數（n）、L 形轉角數（a）求得其外圍可連接正方形的擴充位置個數（P）。（$P = 4\times N-2\times n-a$）然後利用圖形操作推導出所有的組合形式。

二、　七連塊和七以上之連塊的組合種類也可以參考本文方式加以推導，但因七連塊以上的組合方式有可能產生空心之組合形狀，則本文所歸納出來的 N 連塊外圍可擴充位置個數 P 的公式（$P = 4\times N-2\times n-a$）是否依然成立？或是該如何修正？則待後續研究加以驗證。

柒、　參考資料

一、葛登能（著），葉偉文（譯）（2002年）。葛老爹的推理遊戲2。台北：天下遠見。

二、洪雪芬。數學PBL/專題式學習「五連塊探索－窮舉法在小學課堂之運用」。

三、第四十五屆國小組數學科展最佳創意獎。「正立方體的變裝秀---五連塊（Pentominoes）拼拼樂」

四、台北市私立復興國民小學。「柏拉圖的天空——正多面體展開圖之研究」。第四十六屆國小組數學科展第三名作品。

五、南投縣立平林國民小學。「五方連塊之乾坤大挪移武功秘笈」。第五十屆國小組數學科展作品。

【評語】080414

1. 作品的主題相當明確，也有一定的趣味。在方塊 6 個以下有相當完整的討論。
2. 討論相當有條理，逐步分析的 logic 性相當好。
3. 整體討論的豐富度還有待加強，深度及廣度也稍嫌不足。