中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080413

層層相鄰、邊邊相護

學校名稱：新竹縣新埔鎮新星國民小學

作者：	指導老師：
小六　劉邦琦	陳雪美
小五　陳振紘	鍾祥賜
小五　張淳馭	

關鍵詞：六邊形總數、組合、相鄰

摘要

蜜蜂在分泌蜂蠟築巢時，蜜蜂利用固定量的蠟，選擇了最佳的正六邊形來圍成最大的面積。本研究藉蜂巢為六邊形的圖形延伸了問題:「若有灰色及白色的六邊形多個，利用這些六邊形堆砌成一個蜂巢，最外圍的六邊形一定要白色，若現在要利用 10 個灰色六邊形堆砌一個蜂巢，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」我們利用蓋連棟別墅的手法,將每個組合當成一個基模,在最多只有兩個基模以角或邊相對的條件下，以增加外牆的方式來組合可能的類型，找出最符合需求的蜂巢模式；本研究希望經由這邏輯化的思考及解題過程，提供一個較經濟、有效率及減少失誤的尋解策略。

壹、 研究動機

有一天，我們學校中廊發現了蜂窩，於是數學課時，老師便講了『蜜蜂築巢的方式』，提及蜜蜂在分泌蜂蠟築巢時，如何利用固定量的蠟來圍成最大的面積，而蜜蜂選擇了最佳的正六邊形。老師當下提出一個問題：「若有灰色及白色的六邊形多個，利用這些六邊形堆砌成一個蜂巢，最外圍的六邊形一定要白色，若現在要利用 10 個灰色六邊形堆砌一個蜂巢，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」雖然當時用畫的就能計算出結果，可是花的時間卻很久，老師告訴我們這其實有方法可循的：只要將可能的組合找出，再觀察規律性就能找出最佳的模式。我們覺得很有趣，於是大家一起腦筋激盪，想想有哪些可能的類型。

貳、 研究目的

本研究將重點放在灰色六邊形及白色六邊形的組合上，希望找出其類型及最佳組合模式。

本研究我們想要探討下列事項：

一、找出灰色六邊形組合的類型及外圍所需的白色六邊形總數。

二、探討增加灰色六邊形後可能的組合類型，並找出最佳(最經濟)的組合模式。

三、運用最佳(最經濟)模式原理解決原問題。

參、 研究設備及器材

紙、色筆。

肆、 研究方法

一、類型的找尋

先簡化問題：「2 個灰色六邊形不相鄰時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」

我們每個人用自己的方法算出其中的白色六邊形總數，只有邦琦得到的個數不同，仔細分析發現：原來大家不相鄰的方式有所不同，如下圖所示(圖 1-1-1 及圖 1-1-2)：

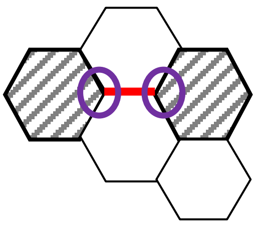


圖 1-1-1

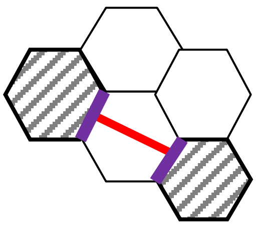


圖 1-1-2

圖 1-1-1 中，2 個灰色六邊形是角對角的不相鄰（紫色圈出處），而圖 1-1-2 中，2 個灰色六邊形是邊對邊的不相鄰（紫色線），因為和白色六邊形相鄰的邊數不同，當然所需的白色六邊形會有差異。

既然要相鄰，就有涉及的邊，且即使是三個相鄰，方式也有所不同。如圖 1-1-3 及圖 1-1-4 所示。

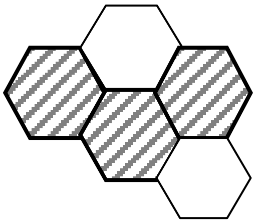


圖 1-1-3

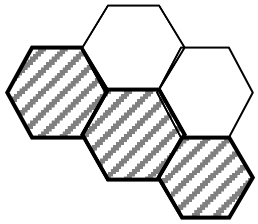


圖 1-1-4

六邊形有六個邊及六個角，而堆砌一個蜂巢，就如同蓋連棟房子一樣；我們利用蓋連棟別墅的手法，將每個組合當成一個基模，以增加外牆的方式來組合可能的類型，找出最符合需求的蜂巢模式。因此以邊跟角及相鄰與否作為區分的標準；因為是以灰色六邊形為主來計算外包的白色六邊形總數，以 1 個灰色六邊形能產生的配對方式為考量的依據，也就是說以中心單 1 個灰色六邊形外圍能連接的灰色六邊形為主，若其外圍再連接的灰色六邊形不與中心的灰色六邊形相鄰，則不在此討論範圍，像下圖 1-1-5 的方式就不納入考量。

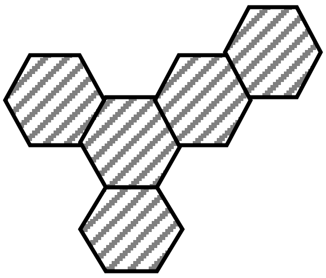


圖 1-1-5

我們找到以下幾種基模類型，為分類方便，將每種基模組合邊碼定義為

C_{N*W}：N 代表基本灰色的組合數，W 則代表包圍在其外的白色六邊形總數。

（一） 任 2 個灰色六邊形不相鄰的類型。

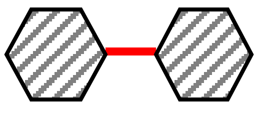


圖 1-1-6

1. 兩個頂點相對的類型(圖 1-1-6) – C_{1*6}

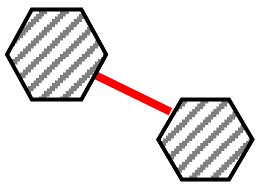


圖 1-1-7

2. 兩個邊相對的類型(圖 1-1-7) – C_{1*6}

（二） 灰色六邊形有相鄰情形的類型

1. 有 2 個灰色六邊形相鄰的類型(圖 1-1-8) -- C_{2*8}

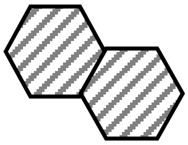


圖 1-1-8

2. 有 3 個灰色六邊形相鄰的類型

此類型有 3 種組合方式，如圖 1-1-9、圖 1-1-10 及圖 1-1-11

-- C_{3*10}

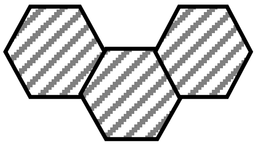


圖 1-1-9

-- C_{3*9}

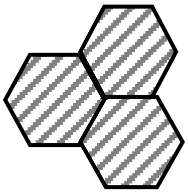


圖 1-1-10

-- C_{3*10}

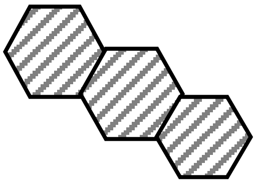


圖 1-1-11

3. 有 4 個灰色六邊形相鄰的類型

此類型有 3 種組合方式，如圖 1-1-12、圖 1-1-13 及圖 1-1-14

-- C_{4*10}

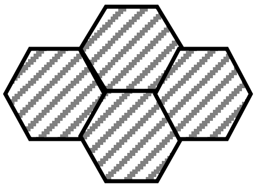


圖 1-1-12

-- C_{4*11}

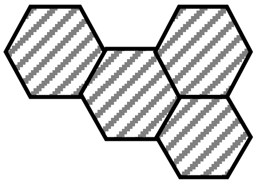


圖 1-1-13

-- C_{4*12}

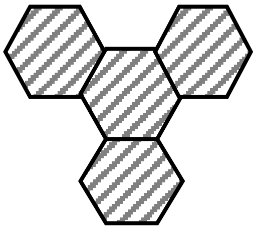


圖 1-1-14

4. 有 5 個灰色六邊形相鄰的類型

此類型有 3 種組合方式，如圖 1-1-15、圖 1-1-16 及圖 1-1-17

-- C_{5*11}

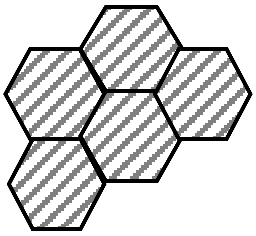


圖 1-1-15

-- C_{5*12}

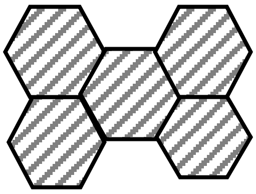


圖 1-1-16

-- C_{5*12}

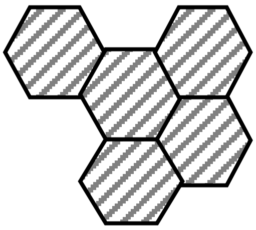


圖 1-1-17

5. 有 6 個灰色六邊形相鄰的類型

此類型只有 1 種組合方式，如圖 1-1-18

-- C_{6*12}

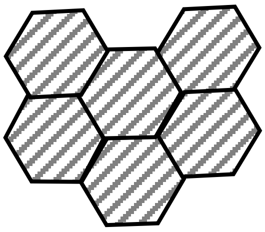


圖 1-1-18

6. 有 7 個灰色六邊形相鄰的類型

此類型只有 1 種組合方式，如圖 1-1-19

-- C_{7*12}

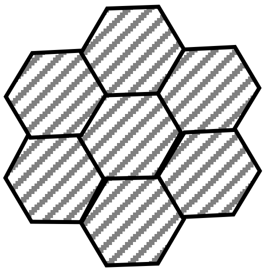


圖 1-1-19

二、計算所需的白色六邊形總數的方法

每種基模組合所需的白色六邊形總數（假設為 K）不同，首先依題目所指定的灰色六邊形總數（設為 P)，我們將各個基模予於組合，在最多只有兩個基模以角或邊相對的條件下，如同蓋房子的原理一般，以增加外牆的方式來找出可能的組合類型，並依據能相鄰的最多的 N 個灰色六邊形（設為 N_{MAX}）考量，找出指定的灰色六邊形總數的可能配對模式，從中找出最符合需求的蜂巢模式（亦即最佳的組合模式)，求出 K 值。

伍、 研究過程

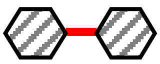
活動一、各類型增加灰色六邊形後所需的白色六邊形個數探討

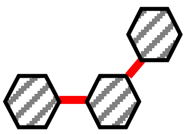
一、任 2 個灰色六邊形不相鄰的類型

過程：

(一)、兩個頂點相對的類型：

1 、不相鄰的方式為：兩個灰色六邊形的角相對，如圖



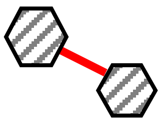


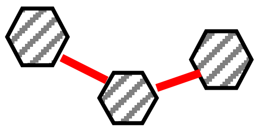
2、研究資料列＜表 1-1-1＞　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　表 1-1-1

灰色 六邊形個數	1	2	3	4	5	6	7	…
所需的白色 六邊形總數	6	10	14	18	22	26	30	…

（二）、兩個邊相對的類型，

1 、不相鄰的方式為：兩個灰色六邊形的邊相對，如圖



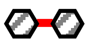
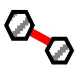


2、研究資料列＜表 1-1-2＞　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　表 1-1-2

灰色 六邊形個數	1	2	3	4	5	6	7	…
所需的白色 六邊形總數	6	11	16	21	26	31	36	…

討論與結果：

將上述 2 個類型研究資料整理如表 1-1-3。　　　　　　　　　　　　　　表 1-1-3

灰色 六邊形個數		1	2	3	4	5	6	7	…
所需的白色六邊形總數	 角相對	6	10	14	18	22	26	30	…
	 邊相對	6	11	16	21	26	31	36	…

1. 角相對時，每增加 1 個灰色六邊形，白色六邊形就增加 4 個。蓋連棟房子時，加蓋第二棟時，相連的牆壁不需再加水泥，只要加蓋另一面牆；同樣道理，角相對的兩個灰色六邊形，會共用兩者中間兩個白色六邊形的兩個邊，因此每增加一個灰色六邊形，外圍的白色六邊形總數就比原先的基模所應被包圍的白色六邊形總數少 2 個。

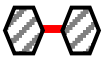
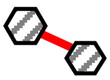
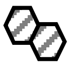
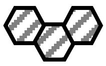
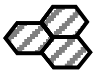
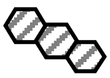
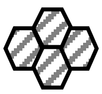
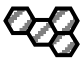
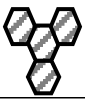
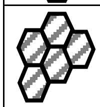
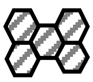
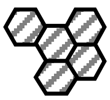
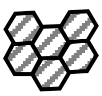
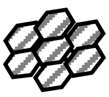
2. 邊相對時，每增加 1 個灰色六邊形，白色六邊形就增加 5 個。邊相對的兩個灰色六邊形，會共用兩者中間一個白色六邊形的兩個邊，因此每增加一個灰色六邊形，外圍的白色六邊形總數就比原先的基模所應被包圍的白色六邊形總數少 1 個。

二、灰色六邊形相鄰的類型

過程：

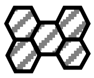
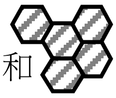
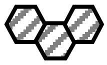
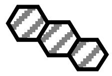
灰色六邊形相鄰的組合有多種，依照上一個活動的模式，分角相對及邊相對兩種方式探討。將結果記錄於表 1-2-1，活動一的結果也一併納入。

表 1-2-1

圖形	編碼	各圖形每增加一個配對所需的白色六邊形
	C_{1*6}	角相對：每多 1 個灰色六邊形就需多 4 個白色六邊形。
	C_{1*6}	邊相對：每多 1 個灰色六邊形就需多 5 個白色六邊形。
	C_{2*8}	1.角相對：每多 2 個灰色六邊形就需多 6 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 2 個灰色六邊形就需多 7 個白色六邊形。
	C_{3*10}	1.角相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 8 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 9 個白色六邊形。
	C_{3*9}	1.角相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 7 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 8 個白色六邊形。
	C_{3*10}	1.角相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 8 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 3 個灰色六邊形就需多 9 個白色六邊形。
	C_{4*10}	1.角相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 8 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 9 個白色六邊形。
	C_{4*11}	1.角相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 9 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。
	C_{4*12}	1.角相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 4 個灰色六邊形就需多 11 個白色六邊形。
	C_{5*11}	1.角相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 9 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。
	C_{5*12}	1.角相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。
	C_{5*12}	1.角相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 5 個灰色六邊形就需多 11 個白色六邊形。
	C_{6*12}	1.角相對：每多 6 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 6 個灰色六邊形就需多 11 個白色六邊形。
	$C_{7\times12}$	1.角相對：每多 7 個灰色六邊形就需多 10 個白色六邊形。 2.邊相對：每多 7 個灰色六邊形就需多 11 個白色六邊形。

討論與結果：

1. 我們發現：不管是哪一種類型，只要是角相對的，每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 2 個，若是是邊相對的，每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 1 個，其原理和上一個活動的討論相同。

2.  C_{5*12} 和  C_{5*12} 雖然圖形不同，但其配對產生的邊數差是相同的，因此，我們將兩者歸為一類，配對總數是相同的； 和  都是 C_{3*10} 亦視為相同一類型。

活動二、增加灰色六邊形後可能的類型探討

一、任 2 個灰色六邊形基模以單 1 個角或單 1 個邊相對的組合類型

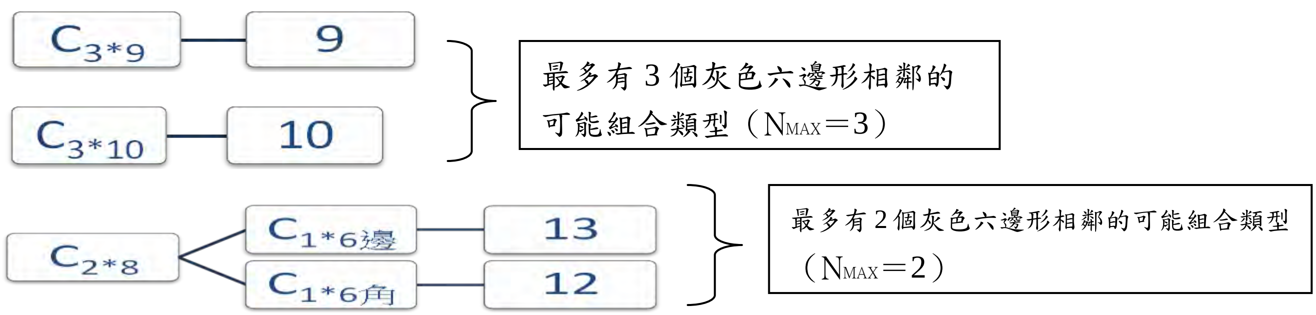
灰色六邊形組合的類型有多種，我們將利用活動一（表 1-2-1）的結果，來探討可能的組合類型，我們將灰色六邊形的個數（假設為 P）設定探討至 6，且每種配對方式單單以 1 個角或 1 個邊相對的差別來探討，希望從中找出最有利的配對模式。

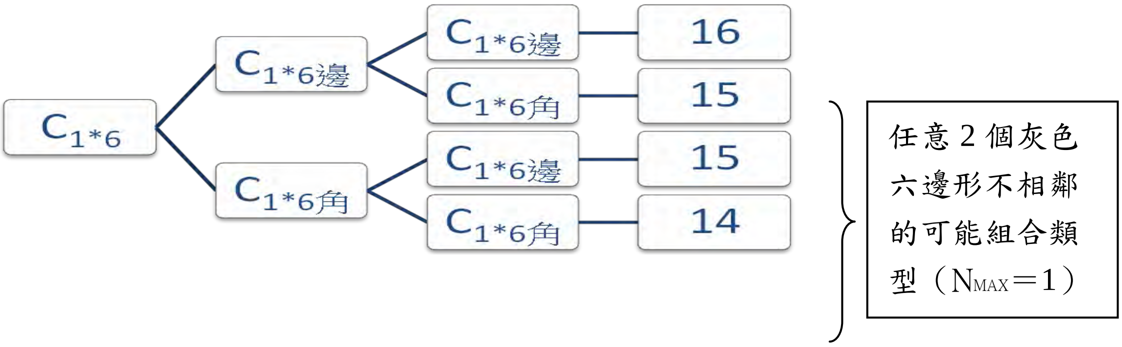
過程：

1. 利用表 1-2-1，將可能的基模配對方式列出如下（表 2-1-1、表 2-1-2、表 2-1-3 及表 2-1-4）。
2. 每種配對方式，有角及邊相對的差別，若是以邊方式組合則在編碼右下角註明「邊」字，角的註明方式亦同。我們以樹狀圖清楚呈現配對方式，並將題目中所有可能需求的最大相鄰值（假設為 N_{MAX}）依序排列出，也就是以基模大的排列於前，依序減少 N 值，其所有的 N 值總和為 P（即 $N_{MAX}+N_{MAX-1}+N_{MAX-2}+\cdots+N_1=P$），得出最後所需的白色六邊形總數（K 值）。

(一)、蜂巢中共有 3 個灰色六邊形（P＝3）

表 2-1-1





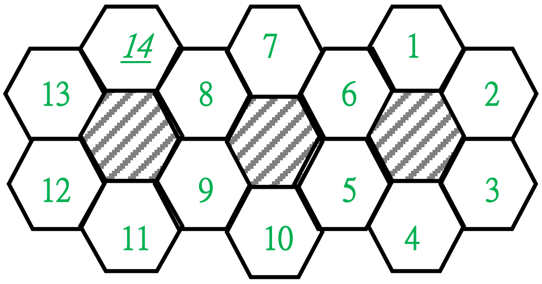
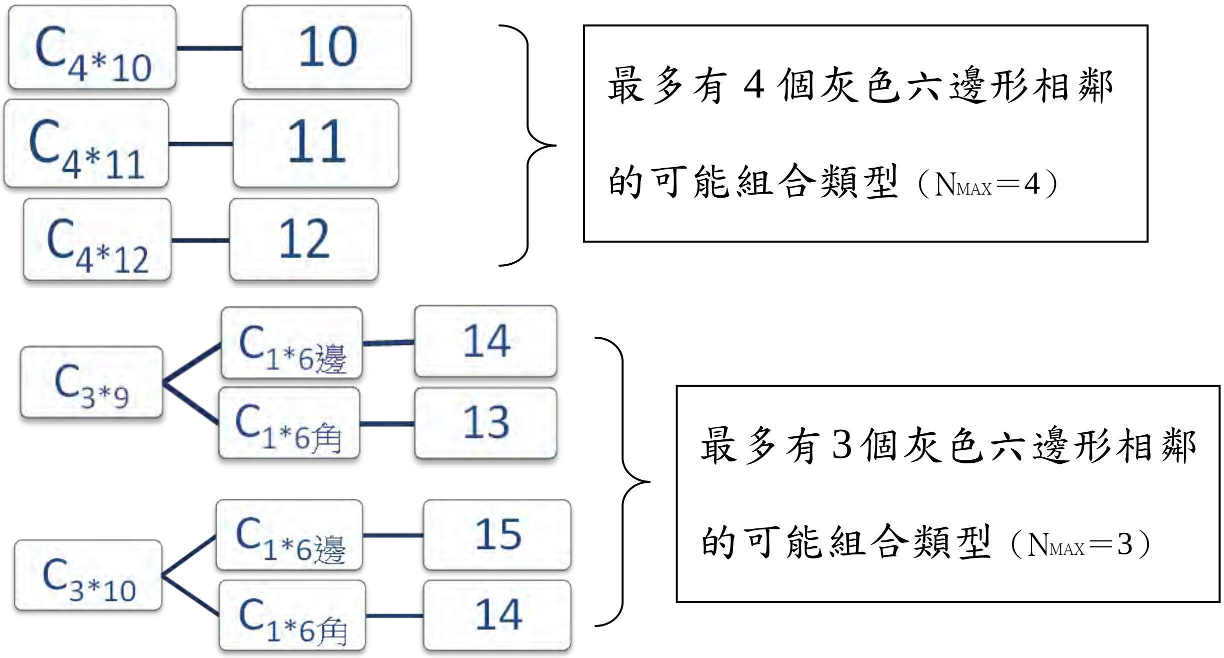


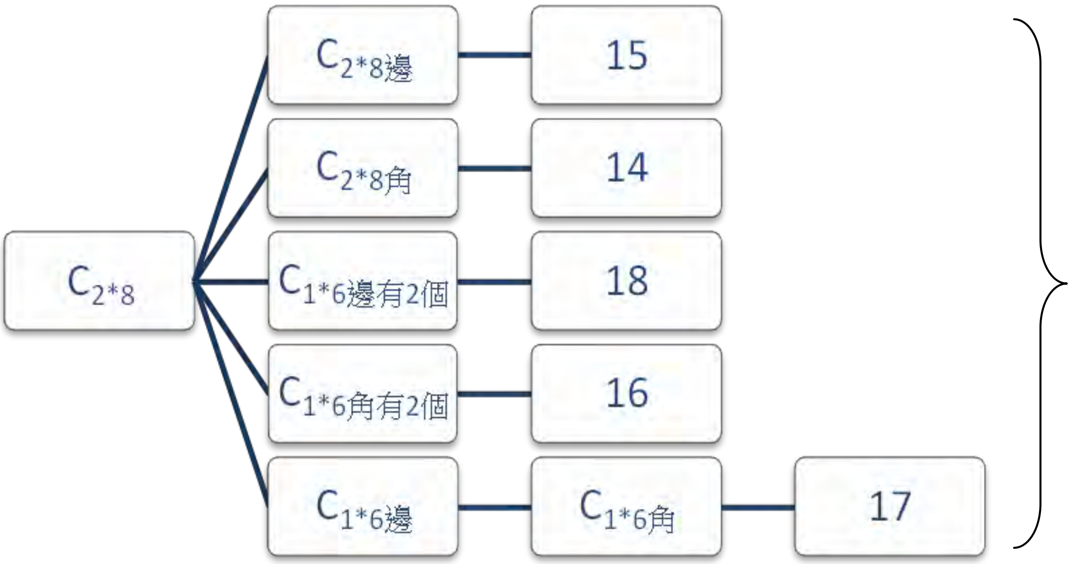
圖 2-1-1

上圖 2-1-1 為 C_{1*6}＋C_{1*6} 角＋C_{1*6} 角的**單 1 個角相對的**組合圖示。

(二)、蜂巢中共有 4 個灰色六邊形（P＝4）

表 2-1-2



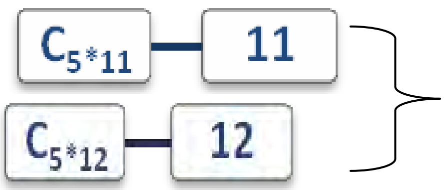


最多有 2 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝2）

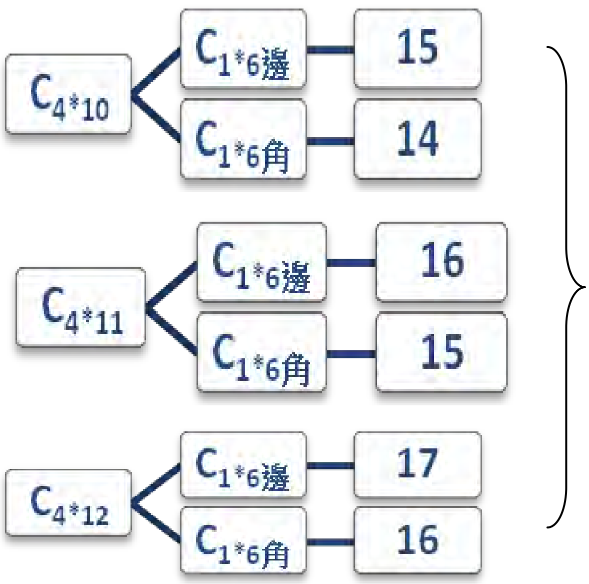
任意 2 個灰色六邊形不相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝1）

(三)、<u>蜂巢中共有 5 個灰色六邊形</u>（P＝5）

表 2-1-3



最多有 5 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝5）



最多有 4 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝4）

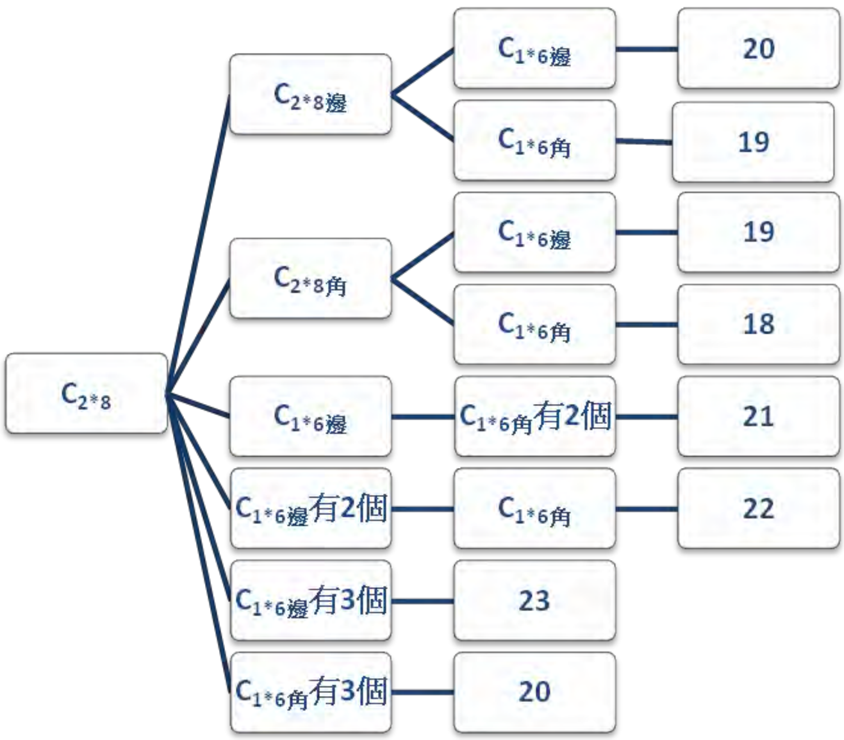
最多有 3 個

灰色六邊形

相鄰的可能

組合類型

（N_{MAX}＝3）



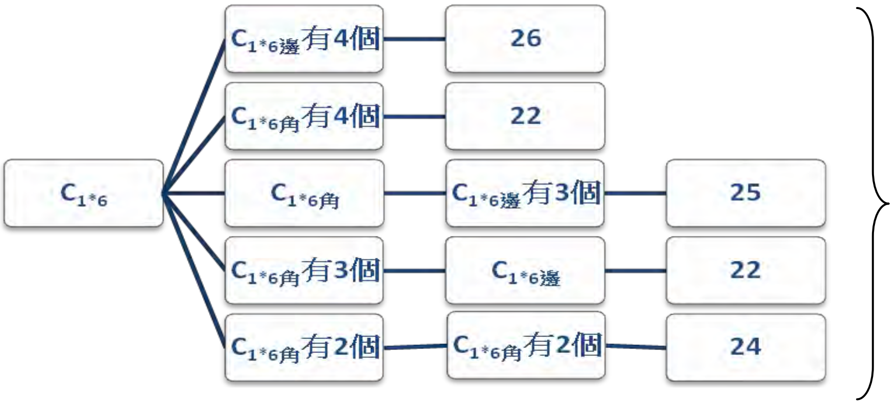
最多有 2 個

灰色六邊形

相鄰的可能

組合類型

（N_{MAX}＝2）

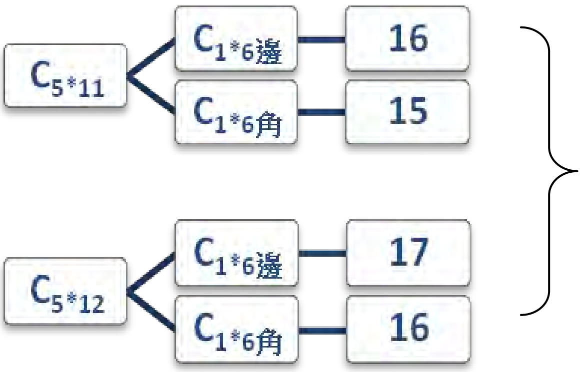


任意 2 個灰色六邊形不相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝1）

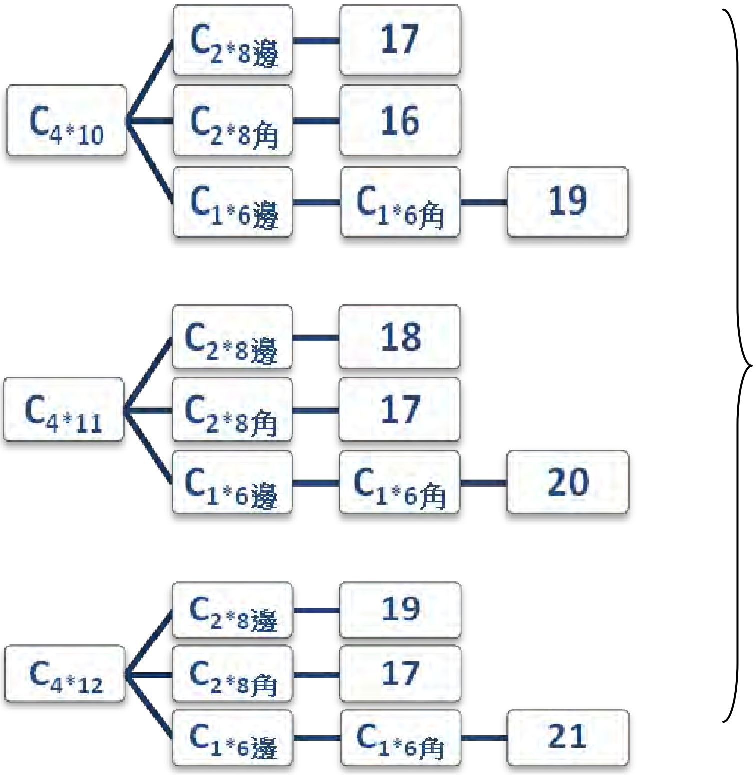
(四)、<u>蜂巢中共有 6 個灰色六邊形</u>（P＝6）

表 2-1-4

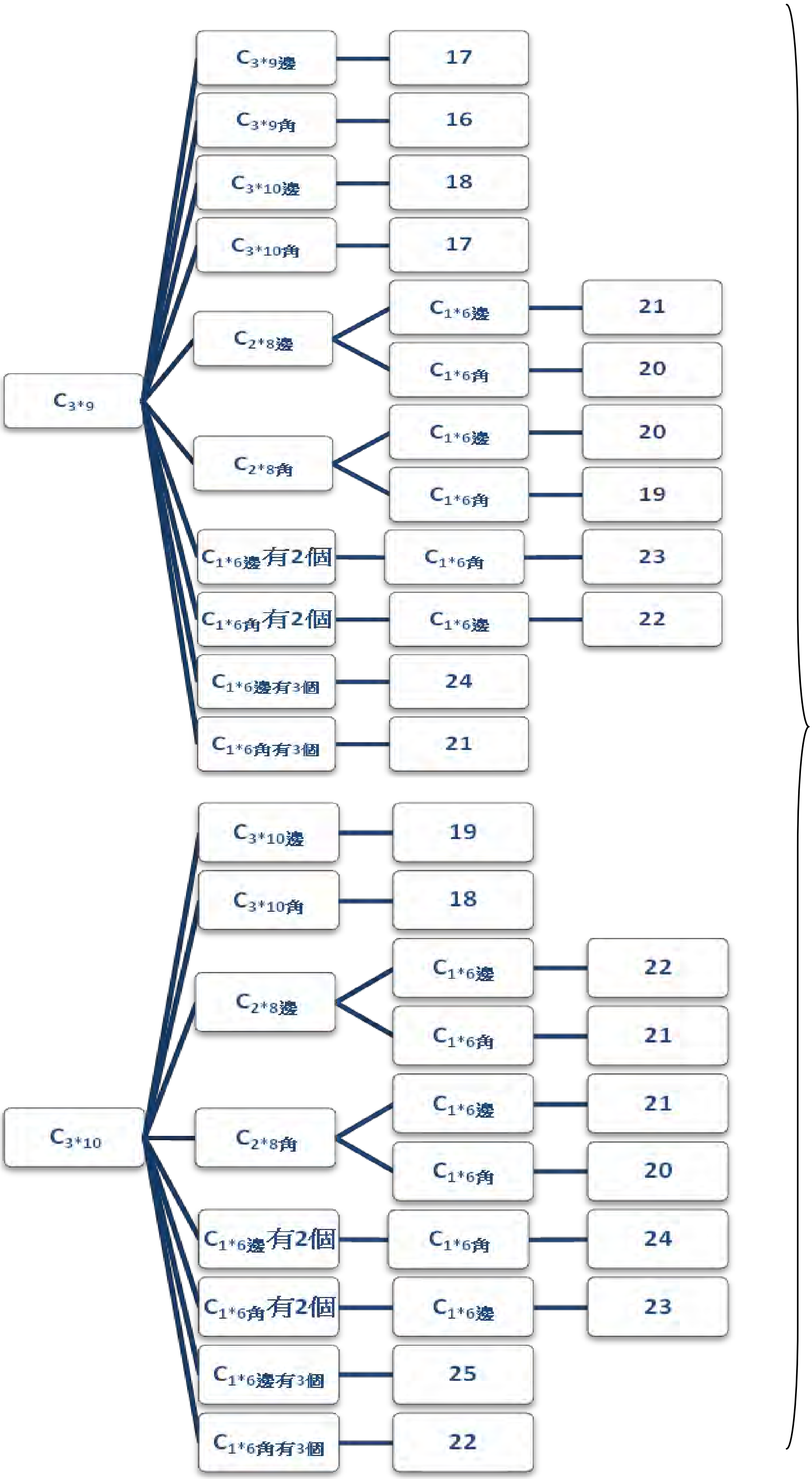
最多有 6 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝6）



最多有 5 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝5）



最多有 4 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型（N_{MAX}＝4）



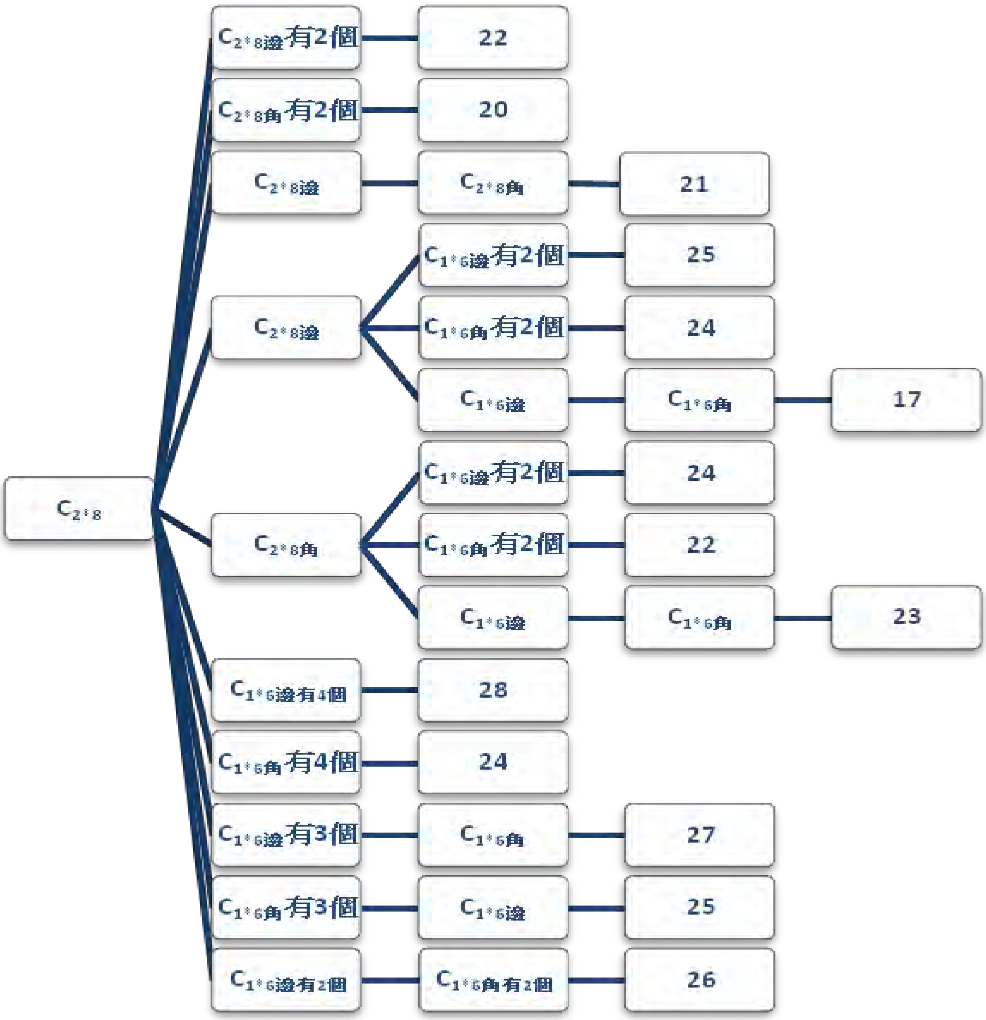
最多有 3 個

灰色六邊形

相鄰的可能

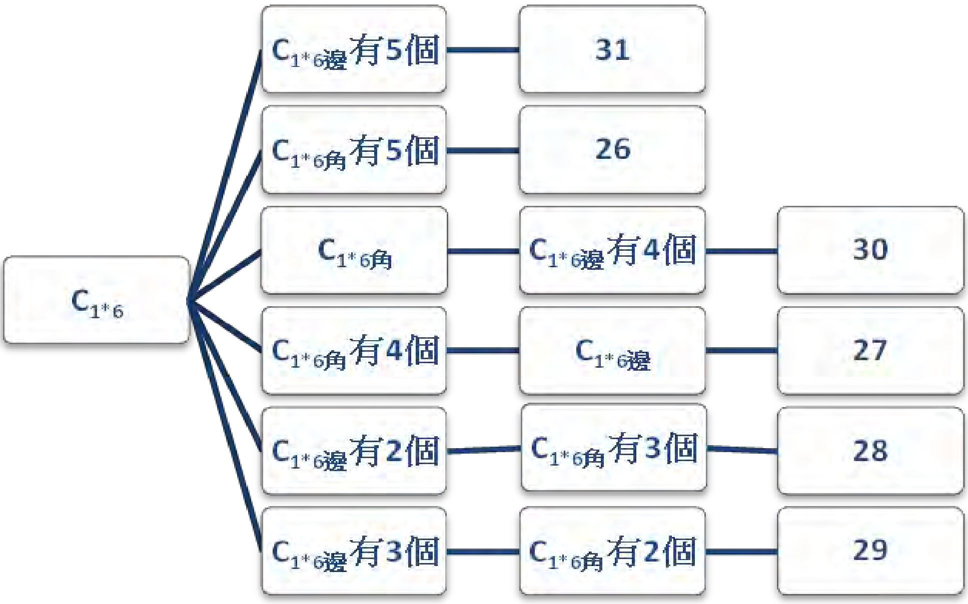
組合類型

（N_{MAX}＝3）



最多有 2 個灰色六邊形相鄰的可能組合類型

（NMAX＝2）



任意 2 個灰色六邊形不相鄰的可能組合類型

（NMAX＝1）

討論與結果：

1. 不同的基模組合，只要是角相對的，每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 2 個，若是是邊相對的，每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 1 個，其原理和上一個活動的討論相同。

2. 配對基模的前後順序並不會影響外圍所需的白色六邊形總數（K 值），因為配對基模會共用的邊數是相同的。舉例說明如下：

$C_{2*8}+C_{1*6}$ 邊＝13

$C_{1*6}+C_{2*8}$ 邊＝13

因此，位置不同但配對基模相同，視為同一組配對模式。

3. 最經濟的組合模式是 N 值由大而小相加組合，也就是說以越大的 N 值來考量，N 值愈大的基模使用越多，所需的外圍白色六邊形越少。

舉例來說：『同樣 5 個灰色六邊形要組織成一個蜂巢，最多只能有 3 個灰色六邊形相鄰的基模出現，那所得的白色六邊形最少是多少？』

依題目所示，P＝5，因為最多只能有 3 個灰色六邊形，因此基模的最大 N 值為 3（即 N_{MAX}＝3），若以 C_{3*9} 為例，有下列幾個組合模式：

B. $C_{3*9}+C_{2*8}$ 邊＝16

C. $C_{3*9}+C_{2*8}$ 角＝15

D. $C_{3*9}+C_{1*6}$ 邊＋C_{1*6} 邊＝19

E. $C_{3*9}+C_{1*6}$ 角＋C_{1*6} 角＝17

F. $C_{3*9}+C_{1*6}$ 邊＋C_{1*6} 角＝18

P 值為 3+2 的組合遠比 3+1+1 的組合，其所需的外圍白色六邊形還少了 2~4 個，那是因為：N 個相鄰的灰色六邊形，其共用的邊數遠比 N 個灰色六邊形任兩個不相鄰的共用邊數來的多，以 N 值和為 3（即 P＝3）來說，C_{3*9}＝9，而

C_{1*6}邊＋C_{1*6}邊＋C_{1*6}邊＝15，因此，組合時用越多大一點的 N 值，白色六邊形也用得越少。

4. 若是同一種基模不斷組合時，以角相對的模式組合者，比以邊相對的模式組合所需的白色六邊形少，其理論和上述第 1 點相同。舉例說明如下：

C_{1*6}＋C_{1*6}邊＋C_{1*6}邊＝16

C_{1*6}＋C_{1*6}角＋C_{1*6}角＝14

上述的例子明顯看出：以角相對的模式組合者所需的白色六邊形總數是 14，比以邊相對的模式組合少 2 。因此在同樣的 P 值下，基模的組合以角相對方式配對較有利。

5. 我們同時也發現：當所要求的灰色六邊形個數為偶數時，配對模式中有很多所需的六邊形總數是相同的，舉例來說：

A. C_{2*8}＋C_{2*8}角＝14

B. C_{3*9}＋C_{1*6}角＝13

C. C_{2*8}＋C_{1*6}角 C_{1*6}角＝16

上述 B 和所得的答案比 A 少，C 的答案則是多 2 個白色六邊形（依據上述第 3 點），所以在考量這些可能的組合時，以越少基模來組合愈能達到經濟效益。

二、任 2 個灰色六邊形基模有多個角或多個邊相對的組合類型

灰色六邊形基模組合相對的類型有多種，不單僅以 1 個角或 1 個邊相對，而在活動一及活動二的子活動一，我們清楚的得知：配對最有利的相對方式為角對角的方式。在此，我們亦大膽的僅以角對角相對方式，來延伸探討多個角相對的可能組合類型。

本活動中，我們將分 3 個方面探討：一為灰色六邊形基模配對方式若有多個角相對的情況時，外圍所需的白色六邊形總數 K 和角的關係如何？二則是探討任意 2 個灰色六邊形基模最多能有幾個角相對的情況，希望從中找出相對關係；三為探討最有利的組合方式，即探討使用最少白色六邊形總數 K 的基模排列組合的方式。

(一)、多個角相對時，外圍所需的白色六邊形總數 K 和角的關係探討

過程：

1. 在這個活動中，我們採配對最有利的角對角的相對方式來作探討。將結果記錄於表 2-2-1。

表 2-2-1

角相對的組合	K 值	計算方式	角相對的數量
$C_{2*8} \leftrightarrow C_{2*8}$	13	8+8-2 -1	2
$C_{3*9} \leftrightarrow C_{3*9}$	15	9+9-2 -1	2
$C_{3*10} \leftrightarrow C_{3*10}$	16	10+10-2 -2	3
$C_{4*10} \leftrightarrow C_{4*10}$	17	10+10-2 -1	2
$C_{4*11} \leftrightarrow C_{4*11}$	19	11+11-2 -1	2
$C_{4*12} \leftrightarrow C_{4*12}$	21	12+12-2 -1	2
$C_{5*11} \leftrightarrow C_{5*11}$	18	11+11-2 -2	3
$C_{5*12} \leftrightarrow C_{5*12}$	21	12+12-2 -1	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{6*12}$	21	12+12-2 -1	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{7*12}$	21	12+12-2 -1	2
…	…	…	…

討論與結果：

1. 若依據前一個子活動的結果，表 2-2-1 中紫色劃線的「－2」部份是指 1 個角相對所需的扣除額，若再多 1 個角，則再減 1，以下圖 2-2-1 說明。

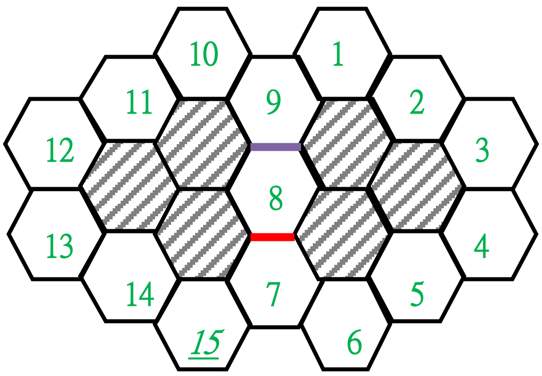
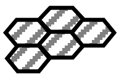
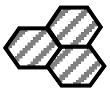


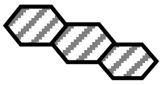
圖 2-2-1

僅有 1 個角相對時，會共用 2 個白色六邊形，即如圖 2-2-1 中， 1 個相對角時(紫色線)，會共用編號 8 及編號 9 的白色六邊形；當再多 1 個角相對時(紅色線)，則會再共用編號 7 的白色六邊形；延伸上一子活動的結果，若以算式表示，則所需再扣除的數字(表 2-2-1 中紅色部分所示)，均比角相對的總數量再少 1 。

2. 由表 2-2-1 發現：只有  C5*11 和 C5*11 以角相對組合模式的角相對數量為 3，這是因為圖形中的六邊形偏橫向相鄰，因此在相對上有更多角相對的數量。

3. 雖然基模排列的橫向越長能相對的角越多，扣除的數值越多，但 K 值卻不如越密集的相鄰組合模式來得省，如下說明：

 C3*9 和 C3*9 以角相對組合後 K 值為 <u>9+9-2</u> -1＝15

 C3*10 和 C3*10 以角相對組合後 K 值為 <u>10+10-2</u> -2＝16

因此在考量基模時，如活動一所得結果相同，在 N 值相同下，須選擇 W 值最小，較有利。

(二)、<u>任意 2 個灰色六邊形基模最多能有幾個角相對的關係探討</u>

在最多只有兩個基模以角或邊相對的條件下，因為 C1*6 與其他基模相對時僅可能有 1 個角或 1 個邊和另一基模相對的模式，因此在這個子活動中不予討論多個角相對的模式。

過程：

1. 活動一中，我們得知在 N 值相同下，須選擇 W 值最小（外圍所需白色六邊形最少的基模）的當基模來配對，因此在這個活動中，我們採 W 值最小來做配對探討，並將題目中所有可能需求的角相對最大數量值（假設為 Q）列出。將結果記錄於表 2-2-2。

表 2-2-2

角相對的組合	角相對的最大的數量值(Q)
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{7*12}$	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{6*12}$	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{5*11}$	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{4*10}$	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{3*9}$	2
$C_{7*12} \leftrightarrow C_{2*8}$	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{6*12}$	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{5*11}$	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{4*10}$	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{3*9}$	2
$C_{6*12} \leftrightarrow C_{2*8}$	2
$C_{5*11} \leftrightarrow C_{5*11}$	3
$C_{5*11} \leftrightarrow C_{4*10}$	2
$C_{5*11} \leftrightarrow C_{3*9}$	2
$C_{5*11} \leftrightarrow C_{2*8}$	2
$C_{4*10} \leftrightarrow C_{4*10}$	2
$C_{4*10} \leftrightarrow C_{3*9}$	2
$C_{4*10} \leftrightarrow C_{2*8}$	2
$C_{3*9} \leftrightarrow C_{3*9}$	2
$C_{3*9} \leftrightarrow C_{2*8}$	2
…	…

討論與結果：

1. 除了 C_{5*11} 和 C_{5*11} 以角相對組合模式的最大角相對數量(Q)為 3 外，其餘配對能產生最大的角相對數量均為 2，因此，除了原本有的角相對減少的 2 外，須加扣(Q－1)，亦即再扣 1。

(三)、使用最少白色六邊形總數 K 的最有利的基模排列組合的方式探討

根據上述二個子活動的結果，我們考量各種可能的基模排列組合方式，發現：

1. 從使用最少白色六邊形總數上考量，以能相鄰的最多的 N 個灰色六邊形為首，依序減少 N 值的基模，以一直線蓋連棟別墅的方式來做排列組合，所需的外圍白色六邊形總數 K 最少。

2. 綜合上述活動一及活動二的整個過程，要找出最佳(最經濟)的組合模式，其操作策略如下：
   A. 依據能相鄰的最多的 N 個灰色六邊形（N_{MAX}）考量，先找出指定的灰色六邊形總數的可能配對模式，以基模的最大值 N（N_{MAX}）為首，依序減少 N 值，並根據活動二的模式尋得可能的組合模式，其組合基模的所有 N 值總和需為題目所指定的值（即 $P=N_{MAX}+N_{MAX-1}+N_{MAX-2}+\cdots+N_1$）。

   B. 在可能的組合模式中，找出最佳組合模式後，而在 N 值相同下，選擇 W 值最小（外圍所需白色六邊形最少的基模）的當第一個基模，再以角相對的方式連結，並找出每個基模最大角相對數量(Q)，除扣減 2 外(角相對的扣減值)，須加扣(Q－1)，最後計算外圍所需的白色六邊形總數 K，其式子為

$$K=C_{N_{MAX}*W_{MAX}}+\left[C_{N_{MAX-1}*W_{MAX-1}}-2-(Q_{MAX-1}-1)\right]+\cdots+\left[C_{N_1*W_1}-2-(Q_1-1)\right]$$

活動三、原問題的解決

經由活動二的探討我們從中找出最有利的配對模式；在活動三中，我們將活動二的結果延伸應用於原問題：「利用 10 個灰色六邊形堆砌一個蜂巢，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」

1. 依題目所示，P＝10，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形，因此基模的最大 N

值為 3(即 $N_{MAX}=3$),先找出 10 個灰色六邊形的可能配對模式,以 C_{3*9} 為例,有下列幾個組合模式:

A. 10＝3＋3＋3＋1
B. 10＝3＋3＋2＋2
C. 10＝3＋3＋2＋1＋1
D. 10＝3＋3＋1＋1＋1＋1
E. 10＝3＋2＋2＋2＋1
F. 10＝3＋2＋2＋1＋1＋1
:
:
:

顯而易見的，A 的答案一定少於 B、C、D、E、F…等的答案（依據活動二的子活動一結果 3、結果 5），因此 A 是最佳的組合模式。

2. 在可能的組合模式中，找出最佳組合模式 A 後，而在 N 值相同下，選擇 W 值最小（外圍所需白色六邊形最少的基模）的當第一個基模，再以角相對的方式連結，並找出每個基模最大角相對數量(Q)，除扣減 2 外(角相對的扣減值)，須加扣(Q－1)，最後計算外圍所需的白色六邊形總數。(依據活動二的子活動二結果 3)。

3. 在最多只有兩個基模以角或邊相對的條件下，根據上述第 1 及第 2 點，因此可得出原問題中符合最經濟原理的白色六邊形總數為 25 個，如下圖 3-1-1 所示。

$$K = C_{3*9} + C_{3*9\text{角}} + C_{3*9\text{角}} + C_{1*6\text{角}}$$
$$= 9+(9-2-1)+(9-2-1)+(6-2-0)$$
$$= 25$$

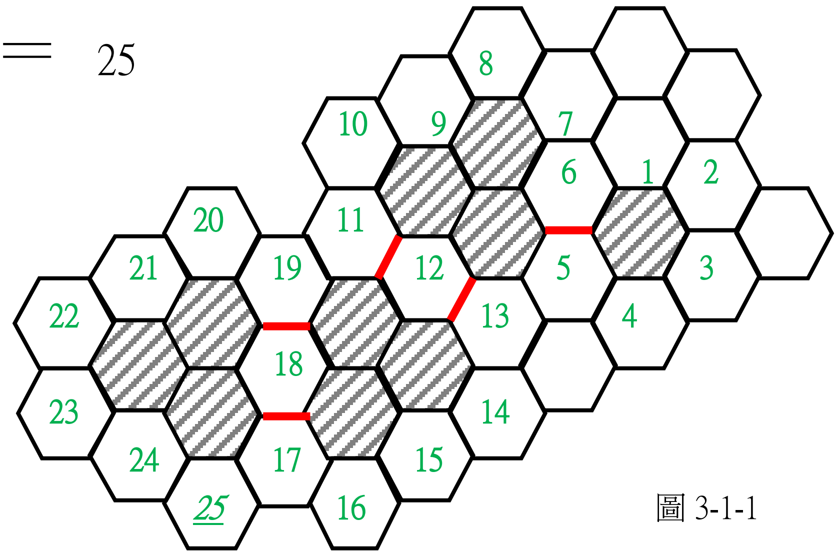
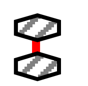
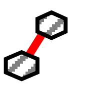
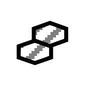
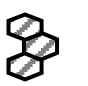
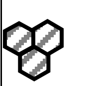
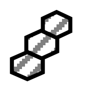
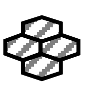
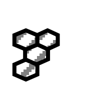
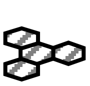
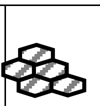
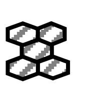
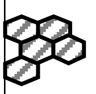
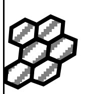
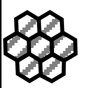


圖 3-1-1

陸、 結論

一、 本研究中，外圍所需的白色六邊形總數的考量，我們採類似蓋連棟房子的方式，將灰色六邊形組合的類型當成基模來操作，而從以上的研究，關於灰色六邊形組合的類型，我們一共找出 14 種不同的基模類型。關於外圍所需的白色六邊形總數，詳列於下表。

基模類型														
外圍所需的白色六邊形總數	4 單個，以角相對連接	5 單個，以邊相對連接	8	10	9	10	10	11	12	11	12	12	12	12

由上表可知：

1、 基模的 N 值越大，共用邊越多，外圍所需的白色六邊形總數也越省。

2、 組合配對時，每增加一個基模配對，外圍所需的白色六邊形總數變化均可找出規律性：

(1)、連接組合時，以角相對的情況：每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 2 個。

(2)、連接組合時，以邊相對的情況：：每增加一個基模配對就會比原基本基模所需的白色六邊形少 1 個。

3、 基模的 N 值與 W 值相同時（即灰色及白色六邊形的值均相同），其配對出的總數是相同的，可視為同一類。

二、 本研究中，增加灰色六邊形後可能的組合類型，可依 N_{MAX}、N_{MAX-1}、N_{MAX-2}…，依序找出配對組合，以越大的 N 值、越少的基模數來組合，愈能達到經濟效益。
透過本研究，提供一個邏輯性的思考及求解策略，期望可縮短時間及減少失誤。要找出最佳(最經濟)的組合模式，其操作策略說明如下：

1. 在最多只有兩個基模以角或邊相對的條件下，依據能相鄰的最多的 N 個灰色六邊形（N_{MAX}）考量，先找出指定的灰色六邊形總數（P）的可能配對模式，以基模的最大值 N（N_{MAX}）為首，依序減少 N 值，並根據活動二的模式尋得可能的組合模式，其組合基模的所有 N 值總和需為題目所指定的值（即 $P=N_{MAX}+N_{MAX-1}+N_{MAX-2}+\cdots+N_1$）。

2. 在可能的組合模式中，找出最佳組合模式後，而在 N 值相同下，選擇 W 值最小（外圍所需白色六邊形最少的基模）的當第一個基模，再以角相對的方式連結，並找出每個基模最大角相對數量(Q)，除扣減 2 外(角相對的扣減值)，須加扣(Q－1)，最後計算外圍所需的白色六邊形總數 K，其式子為：

$$K = C_{N_{MAX}} * W_{MAX} + \left[C_{N_{MAX-1}} * W_{MAX-1} - 2 - (Q_{MAX-1} - 1) \right] + \cdots + \left[C_{N_1} * W_1 - 2 - (Q_1 - 1) \right]$$

三、 運用本研究得出的最佳(最經濟)模式原理解決原問題，得到符合最經濟原理的白色六邊形總數為 25 個。

柒、 參考資料及其他

蔡聰明（民 99）。**數學的發現趣談**（259-279 頁）（修訂二版）。台北：三民書局股份有限公司。

翰林文教事業（民 100）。國小 6 下數學。**第六單元 算術的應用問題**（76-89 頁）台南：翰林出版事業股份有限公司。

康軒文教事業（民 97）。國小 5 上數學。**第五單元 數列與圖形序列**（60-66 頁）台北：康軒文教事業股份有限公司。

附錄

◎操作各類型基模，尋找配對的方式，並記錄結果。

◎校園中廊發現的蜂窩

【評語】080413

利用蓋連棟別墅的手法，以“基模”的概念解決六邊形的組合問題，頗具創意，也值得嘉許，惟因只討論某些特定範圍的問題，導致研究成果較為有限比較可惜。