

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080412

自動化智慧機器人～組件排列次序探討

學校名稱：臺中市中區光復國民小學

作者：	指導老師：
小六 周乃全	林筆藝
小六 夏宗緯	張東瑋
小六 溫勝凱	
小六 王俐文	
小六 周欣芸	
小六 李浚廷	

關鍵詞：組件、次序、排列

作品名稱：自動化智慧機器人~組件排列次序探討

摘要：我們想要解決在 ABCD 順序的組件中，利用前二組件互換，以及後推一個組件的這兩種操作方法，完成所有排列組件，並從中研究最少次數以及規律。研究中，我們從簡化原題目的 3 個組件作為起始，研究了 4 個、5 個組件的自動化智慧機器人~組件排列次序探討。我們利用編號、EXCEL 試算表等工具以及方法，找出 3 個組件的所有排列需要 2 個操作步驟、4 個組件的所有排列需要 6 個操作步驟、5 個組件的所有排列需要 11 個操作步驟。我們還發現【t】操作以及【r】操作會有不同的特性，其中多次的【r】操作會出現循環重複。利用此性質來做分組，發現組與組之間的各種性質。結果若能運用在實際的組件操作上，也許對於機器人的效能會有所提升！

壹、研究動機

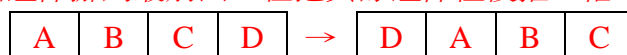
學過了整數四則的數字規律（2011 年康軒版國小數學第十一冊第八單元）與簡化問題（2011 年康軒版國小數學第十二冊第六單元）單元後，有一次，老師拿了一本趣味數學遊戲的書：數學遊戲樂園之舉一反三，裡面有一個有趣的問題，老師請我們分組比賽，看看能不能找出答案。這個問題是這樣規定的：

在生產線上的某一點，四個組件原本的順序為 ABCD，但是在下一製程中可能需要變動至其他不同的順序。因此，在該生產線上裝置一個機器人，可以執行下列兩項基本操作：

t：將前面兩個組件的位置交換。



r：將最後一個組件挪到最前面，在把其餘組件往後推一格。



現在必須將組件的順序調整成 DACB，請問機器人應該如何運用上列兩項基本操作完成這項任務呢？

在同學們的討論中，有許多不同的解決方法。這些方法雖然都能解決這個問題，但是必須操作的步驟多寡不同。在所有人的答案中，操作步驟次數最少的是六次，操作步驟如下圖 1：

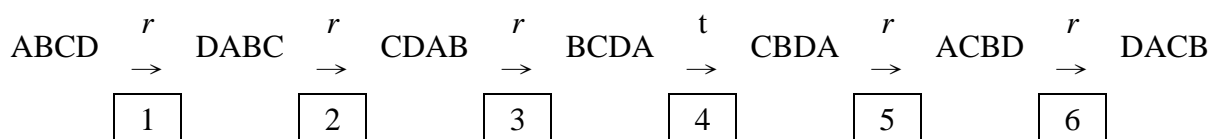


圖 1

在這個操作步驟中，前三次的操作是進行【r】操作，第四次是進行【t】操作，第五次以及第六次則是進行【r】操作。為了紀錄上的方便，我們把這樣的過程寫成 rrrtrrr。

另外有兩個不同的操作步驟，也是需要六個步驟，分別是 trtrrrr、trrrtrt。

找到了這個問題的解答後，老師又請我們想想看，如果要把 A、B、C、D 這幾個組件做任意的排列，而且這個機器人只能做這兩個動作，有可能達成嗎？若要達成又需要幾個操作步驟呢？為了找到這個問題的答案，以及找出這個問題中的規律，我們決定先把問題簡化成三個組件的排列，進行這一個數學問題的研究。

在本研究中有一些特定名詞，解釋如下：

- (一) 組件：結合多項元件所製成，而具有特定功能的組合體。(教育部電子辭典簡編本)
在本研究中指的是由 3 個 (ABC) 或 4 個 (ABCD) 或 5 個 (ABCDE) 不同名稱的元件，結合成線性具有次序的組合體。
- (二) 排列：依照次序排成行列。(教育部電子辭典簡編本)
- (三) 操作【t】：在本研究中的各組組件中，將前面兩個組件的位置交換。
- (四) 操作【r】：在本研究中的各組組件中，將最後一個組件挪到最前面，在把其餘組件往後推一格。

貳、 研究目的

- 一、 計算組件不同排列次序的次數。
- 二、 在 3 個組件 ABC 中，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，找出最少移動次數及其規律。
- 三、 在 4 個組件 ABCD 中，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，找出最少移動次數及其規律。
- 四、 在 5 個組件 ABCDE 中，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，找出最少移動次數及其規律。
- 五、 歸納在搬移 3、4、5 個組件中，各種排列的變化規則。

參、 研究設備及器材

紙張、筆、電腦、計算機

肆、 研究過程或方法

一、 3 個組件

首先，我們先把問題簡化成 3 個組件來做研究，看看能不能從簡化的問題中找到規律。

(一) 3 個組件的排列與編號

先把各種不同排列方式的組件直接寫下來。在老師的建議下，我們把每一種組合的情況編號。排列的情況如下表 1。

表 1

編號	排列
(1)	ABC
(2)	ACB
(3)	BAC
(4)	BCA
(5)	CAB
(6)	CBA

從表 1 中可以發現，三個組件的排列只有 6 種可能。

(二) 互換與前推

在這個題目當中，機器人所能操作的兩個步驟分別是：【 t 】將前面兩個組件互換；【 r 】將最後一個組件挪到最前面，在把其餘組件往後推一格。而為了研究過程中的討論方便，我們又把這兩個步驟簡稱為【 t 】互換和【 r 】後推。

(三) 找出三個組件的所有組合之步驟

三個組件的原始排列方式為 ABC。操作步驟如下表 2。而下表 1 也包含了所有目標組合（(1) ~ (6)）的步驟。

原始	第一次操作	第二次操作	目標
(1) ABC			(1) ABC
(1) ABC	【r】 CAB	【t】 ACB	(2) ACB
(1) ABC	【t】 BAC		(3) BAC
(1) ABC	【r】 CAB	【r】 BCA	(4) BCA
(1) ABC	【r】 CAB		(5) CAB
(1) ABC	【t】 BAC	【r】 CBA	(6) CBA

表 2

(四) 利用「r 操作」和「t 操作」做成樹狀圖

從上表 2 中可以發現，從 (1) ABC 到 (6) CBA 的過程中，由於機器人必須操作 2 個步驟，所以一定會有一個過渡的排列組件：(3) BAC。(灰底部分) 而這一個過渡組件也會是我們的目標之一。所以我們便把過渡的組件也編上號碼。

另外，我們試著把「r 操作」和「t 操作」做成樹狀圖，如此一來就也可以以「過渡組件」：(5) CAB 和 (3) BAC 來分類。如下表 3

原始	第一次操作	第二次操作	目標
(1) ABC			(1) ABC
(1) ABC	【r】 (5) CAB		(5) CAB
(1) ABC	【r】 (5) CAB	【r】 (4) BCA	(4) BCA
(1) ABC	【r】 (5) CAB	【t】 (2) ACB	(2) ACB
(1) ABC	【t】 (3) BAC		(3) BAC
(1) ABC	【t】 (3) BAC	【r】 (6) CBA	(6) CBA

表 3

在上表中，我們使用灰底的區域，都是第一次操作為【r】步驟的結果；粉紅底的部分就是操作一為【t】步驟的結果。

第二次操作又可以分成【r】步驟或【t】步驟。有了這樣的分類方式，我們試著用樹狀圖來分類，從原始的(1) ABC 開始，每一次操作都可以有兩類的步驟。歸納後如下圖 2

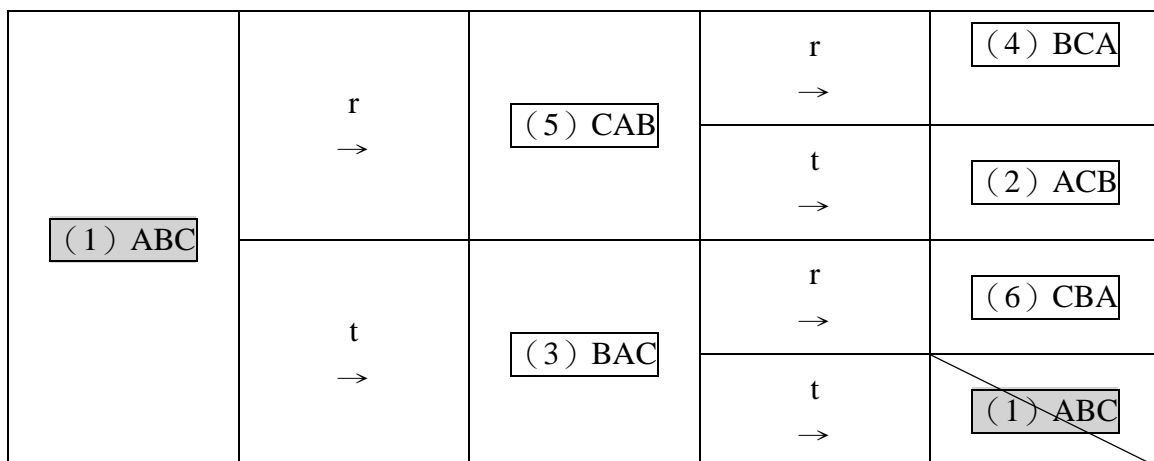


圖 2

由於我們是想要找出所有經由操作【t】和操作【r】的組合，若是利用這種樹狀圖的方式，就可以把已經出現過的組合刪除。當所有的組件都出現過，也就是找到所有答案了！而其操作次數也可由樹狀圖中找到。

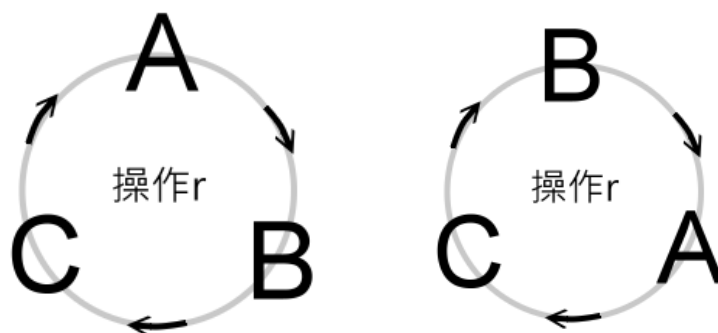
(五) 兩次的操作【t】與三次的操作【r】：復原狀況與循環狀況

在圖 2 中，我們發現有組件(1)已經出現過。這是因為操作【t】為前兩組件前後互換，而 2 次的操作【t】其實又會回到起始的排列方式。



圖 3

兩次的操作【t】會回到起始，那麼兩次的操作【r】呢？觀察與討論後發現，兩次的操作【r】會得到不同的組件。但是，如果再作一次操作【r】，會回到起始組件。這是因為我們在這裡討論的是3個一組的組件。而操作【r】很像是將一個個的組件圍成繞圈圈的圖形，只是經過不同次數的操作【r】，帶頭的組件各有不同。如下圖4。



【r】操作的循環現象

圖 4

依照【r】操作的循環現象，我們就可以把這6種排列方式的組件分成同一個循環圈的兩大組，分別是(1)、(4)、(5)與(2)、(3)、(6)。

	<p>(1) ABC (5) CAB (4) BCA</p>
	<p>(2) ACB (6) BAC (3) BAC</p>

表 4

(六) 最多步驟組件

在三個組件中，若要完成所有排列，需要 1 個或 2 個步驟。最多是 2 個步驟。需要兩個步驟的組件是 (4) BCA、(2) ACB、(6) CBA。這三個組件也可以說是在樹狀圖中，和 (1) ABC 關係最「遠」的組件。

(七) 不同的起始排列

前面已經討論以 (1) ABC 作為起始排列的狀況。我們還想知道若是以其它排列狀況的組件作為起始，會不會也有相同的狀況。利用編號，我們把所做出來的結果列在下表中：

起始排列	1 次操作		2 次操作	
(1) ABC	t	(3) BAC	tr	(6) CBA
	r	(5) CAB	rr	(4) BCA
			rt	(2) ACB
(2) ACB	t	(5) CAB	tr	(4) BCA
	r	(3) BAC	rr	(6) CBA
			rt	(1) ABC
(3) BAC	t	(1) ABC	tr	(5) CAB
	r	(6) CBA	rr	(2) ACB
			rt	(4) BCA
(4) BCA	t	(6) CBA	tr	(2) ACB
	r	(1) ABC	rr	(5) CAB
			rt	(3) BAC
(5) CAB	t	(2) ACB	tr	(3) BAC
	r	(4) BCA	rr	(1) ABC
			rt	(6) CBA
(6) CBA	t	(4) BCA	tr	(1) ABC
	r	(2) ACB	rr	(3) BAC
			rt	(5) CAB

表 5

在不同的起始排列中，我們試著找出每一組件最「遠」的組件。由上表中可以發現，(1) 最遠組件是 (6)(4)(2)，而 (2) 最遠組件是 (4)(6)(1)。組件 (4)(6) 是重複出現，而 (1) 和 (2) 卻互為最遠組件。

歸納後發現，其他起始組件也有相同狀況，互為最遠組件的是：(1) 和 (2)、(3) 和 (4)、(5) 和 (6)。

所以如果在一個真實的情境中，最遠組件的配對，對於必須注意時間、消耗能源等問題的生產活動來說，就是一個必須注意的問題。

這樣的結構是不是也會出現在 4 個組件的排列中呢？還有沒有我們沒發現的規律？我們緊接著下面四個組件的研究。

二、 4 個組件

(一) 4 個組件的排列與編號

如同 3 個組件的模式，我們先找出 4 個組件時的所有排列情形。如果假設四個組件放入四個空位，那麼第一個位置可以放入任意某個組件 (A~D)；接下來第二個位置就只能放入剩下的三個組件之一。依此類推，總共會有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種排列方式。

第一個位置	第二個位置	第三個位置	第四個位置	
(4) ×	(3) ×	(2) ×	(1) =	24

圖 4

把這 24 種可能列出來，並且依照起頭為 ABCDEF 的排列規律，加入編號，如下表 3。

編號	排列	編號	排列	編號	排列	編號	排列
(1)	ABCD	(7)	BACD	(13)	CABD	(19)	DABC
(2)	ABDC	(8)	BADC	(14)	CADB	(20)	DACB
(3)	ACBD	(9)	BCAD	(15)	CBAD	(21)	DBAC
(4)	ACDB	(10)	BCDA	(16)	CBDA	(22)	DBCA
(5)	ADBC	(11)	BDAC	(17)	CDAB	(23)	DCAB
(6)	ADCB	(12)	BDCA	(18)	CDBA	(24)	DCBA

表 6

我們可以了解，當組件數為 N 時，排列的組數便是： $N \times (N-1) \times (N-2) \cdots \times 1$ 。

(二) 互換與前推

接著要做四個組件的互換與前推，並找出所有的組合情況。每一個的組件都是分成操作【t】和操作【r】。除了 2 次操作【t】將會被刪除之外（因為有復原狀況），已經出現過的組件排列情況也被刪除，得到結果如下圖 5-1、5-2：

我們發現，以 (1) ABCD 為起始的排列，要利用此兩種操作模式，作出所有的排列狀況，最多需要 6 個操作 即可完成。

【第一次操作為 t】

起始	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	
ABCD (1)	BACD (7)	ABCD (1)	BACD (7)	ABCD (1)	BACD (7)	ABCD (1)	
						DBAC (21)	
						DABC (19)	ADBC (5)
						CDAB (17)	
						DBAC (21)	BDAC (11)
						CBDA (16)	
						CDBA (18)	DCBA (24)
						ACDB (4)	
						DABC (19)	ADBC (5)
						CDAB (17)	
		CADB (14)	ACDB (4)				
		BCAD (9)					
		CDAB (15)	DCAB (23)				
		CDAB (17)					
		BCDA (10)	CBDA (16)				
		ABCD (1)					
		DBAC (21)	BDAC (11)				
		DBAC (21)	BDAC (11)				
		CBDA (16)					
		CDBA (16)	DCBA (24)				
ACDB (4)							
CBDA (16)	BCDA (10)						
ABCD (1)							
ACBD (3)	CABD (13)						
DACB (20)							
CDBA (18)	DCBA (24)						
CDBA (18)	DCBA (24)						
ACDB (4)							
ADCB (6)	DACB (20)						
BADC (8)							
ACDB (4)	CADB (14)						
ACDB (4)							
BCAD (9)							
BACD (7)	ABCD (1)						
DBAC (21)							

說明 1：白底表格為 t 操作，灰底表格為 r 操作

說明 2：重複的組件出現後，後面的組件也會重複出現，不必再討論。

圖 5-1

【第一次操作為 r】

起始	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
ABCD (1)	DABC (19)	ADBC (5)	DABC (19)	ADBC (5)	DABC (19)	ADBC (5)
					CDAB (17)	CDAB (17)
					CADB (14)	ACDB (4)
					BCAD (9)	BCAD (9)
					DCAB (23)	DCAB (17)
					BCDA (10)	BCDA (16)
				ABCD (1)	ABCD (1)	
				CADB (14)	ACDB (4)	
				BCAD (9)	BCAD (9)	
				BACD (7)	ABCD (1)	
				DBAC (21)	DBAC (21)	
				BCAD (9)	BCAD (9)	
		CBAD (15)	CBAD (15)			
		DCBA (24)	DCBA (24)			
		DBCA (22)	DBCA (12)			
		ADBC (5)	ADBC (5)			
		CDAB (17)	CDAB (17)			
		BDCA (12)	BDCA (12)			
		BCDA (10)	BCDA (16)			
		ABCD (1)	ABCD (1)			
		BDCA (12)	BDCA (12)			
		ADBC (5)	ADBC (5)			
		ABDC (2)	ABDC (2)			
		BADC (7)	BADC (7)			
CABD (13)	CABD (13)					
BCDA (10)	BCDA (16)					
ABCD (1)	ABCD (1)					
ACBD (3)	ACBD (3)					
CABD (13)	CABD (13)					
DACB (20)	DACB (20)					
ABCD (1)	ABCD (1)					
BACD (7)	BACD (7)					
DBAC (21)	DBAC (21)					
DABC (19)	DABC (19)					
ADBC (5)	ADBC (5)					
CDAB (17)	CDAB (17)					
CDAB (17)	DCAB (23)	CDAB (17)				
BDCA (12)	BDCA (12)	BDCA (12)				
BCDA (10)	BCDA (16)	BCDA (16)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
BDCA (12)	BDCA (12)	BDCA (12)				
ADBC (5)	ADBC (5)	ADBC (5)				
ABDC (2)	ABDC (2)	ABDC (2)				
BADC (7)	BADC (7)	BADC (7)				
CABD (13)	CABD (13)	CABD (13)				
BCDA (10)	BCDA (16)	BCDA (16)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
ACBD (3)	ACBD (3)	ACBD (3)				
CABD (13)	CABD (13)	CABD (13)				
DACB (20)	DACB (20)	DACB (20)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
BACD (7)	BACD (7)	BACD (7)				
DBAC (21)	DBAC (21)	DBAC (21)				
DABC (19)	DABC (19)	DABC (19)				
ADBC (5)	ADBC (5)	ADBC (5)				
CDAB (17)	CDAB (17)	CDAB (17)				
CDAB (17)	DCAB (23)	CDAB (17)				
BDCA (12)	BDCA (12)	BDCA (12)				
BCDA (10)	BCDA (16)	BCDA (16)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
BDCA (12)	BDCA (12)	BDCA (12)				
ADBC (5)	ADBC (5)	ADBC (5)				
ABDC (2)	ABDC (2)	ABDC (2)				
BADC (7)	BADC (7)	BADC (7)				
CABD (13)	CABD (13)	CABD (13)				
BCDA (10)	BCDA (16)	BCDA (16)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
ACBD (3)	ACBD (3)	ACBD (3)				
CABD (13)	CABD (13)	CABD (13)				
DACB (20)	DACB (20)	DACB (20)				
ABCD (1)	ABCD (1)	ABCD (1)				
BACD (7)	BACD (7)	BACD (7)				
DBAC (21)	DBAC (21)	DBAC (21)				
DABC (19)	DABC (19)	DABC (19)				
ADBC (5)	ADBC (5)	ADBC (5)				
CDAB (17)	CDAB (17)	CDAB (17)				

說明 1：白底表格為 t 操作，灰底表格為 r 操作

說明 2：重複的組件出現後，後面的組件也會重複出現，不必再討論。

圖 5-2

(三) 循環性質

與三個組件時相同的狀況是，當有兩次的操作【t】時，就會有相同的組件出現，必須刪去。但是在四個組件中，操作【r】則要有 4 次才會回到起始組件。我們試著把操作【r】的組件排列以及操作狀況列出來討論。

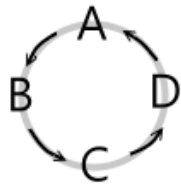
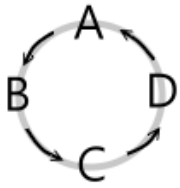
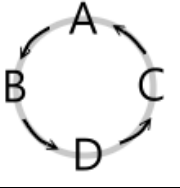
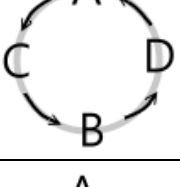
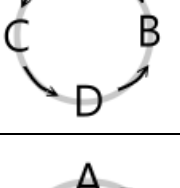
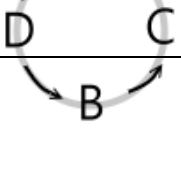
(1) ABCD	r	(19) DABC	
(1) ABCD	rr	(21) CDAB	
(1) ABCD	rrr	(10) BCDA	
(1) ABCD	rrrr	(1) ABCD	

表 7

我們發現，組件 (1) (19) (21) (10) 經過多次的操作【r】，會出現循環。於是我們就把他們歸納成具有循環性質的一大組。

在其他四個組件中的排列情形，是否也有循環性質的組件呢？經過討論以及歸納，我們發現具有循環性質的總共可以分成 6 大組，每一組共有 4 種組件排列方式，而所有的組件剛好就是 24 種。歸納的分組狀況如下：

第一組 (一)	(1) ABCD	r	(19) DABC	
	(1) ABCD	rr	(21) CDAB	
	(1) ABCD	rrr	(10) BCDA	
	(1) ABCD	rrrr	(1) ABCD	
第二組 (二)	(2) ABDC	r	(13) CABD	
	(2) ABDC	rr	(23) DCAB	
	(2) ABDC	rrr	(12) BDCA	
	(2) ABDC	rrrr	(2) ABDC	
第三組 (三)	(3) ACBD	r	(20) DACB	
	(3) ACBD	rr	(11) BDAC	
	(3) ACBD	rrr	(16) CBDA	
	(3) ACBD	rrrr	(3) ACBD	
第四組 (四)	(4) ACDB	r	(7) BACD	
	(4) ACDB	rr	(21) DBAC	
	(4) ACDB	rrr	(18) CDBA	
	(4) ACDB	rrrr	(4) ACDB	
第五組 (五)	(5) ADBC	r	(14) CADB	
	(5) ADBC	rr	(9) BCAD	
	(5) ADBC	rrr	(22) DBCA	

	(5) ADBC	rrrr	(5) ADBC	
第六組 (六)	(6) ADCB	r	(8) BADC	
	(6) ADCB	rr	(15) CBAD	
	(6) ADCB	rrr	(24) DCBA	
	(6) ADCB	rrrr	(6) ADCB	

表 8

(四) 最多步驟組件

我們已經知道在 4 個組件中最多需要 6 個操作。在上圖 5 中還把已經重複出現的組件先刪除。

我們發現，以 (1) ABCD 為起始，最多步驟也就是最「遠」組合有三個，分別是 (8) BADC、(13) CABD、(20) DACB。她們的操作步驟以及分組資料整理如下：

起始組合	最遠組合	分組資料	操作步驟	操作步驟分析	
(1) ABCD	(8) BADC	第六組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(13) CABD	第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrt	t : 3	r : 3
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(20) DACB	第三組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrt	t : 3	r : 3

表 9

在前面的研究過程中我們已經知道，同一個目標組合，可以有不同的操作步驟、操作步驟次數。在樹狀圖中我們還發現，由起始組合經過 5 個操作後，只剩下 (8)、(13)、(20) 這三個最遠組合還沒有出現，緊接著第 6 次操作後，這三個組合便全部達成了。

這三個 6 次操作的組合，分別有 2 或 3 種操作步驟。(例如 (1) → trtrrr 或 rrtrrt → (8)，2 種操作步驟)

再深入分析它們的操作步驟，發現 (1) → trtrrr 或 rrtrrt → (8)，剛好分別是 2 次操作 **[t]** 和 4 次的操作 **[r]**。這是巧合嗎？

於是，我們利用 EXCEL 試算表，將資料輸入後轉換，把 24 種排列方式都當成起始組合，研究起始組合與最遠組合的關係。

(五) 利用 EXCEL 試算表

在老師的協助下，我們利用 EXCEL 試算表中，輸入「\$」可以指定資料，以及在每一格的複製功能中，可以複製公式的特性，幫助我們更快速的進行本研究。使用 EXCEL 的功能說明如下。

- 1.在檔案中選擇一區作為輸入區。例如：A4 格輸入 A、A5 格輸入 B、A6 格輸入 C、A7 格輸入 D。
- 2.接下來作組件的排列，或是【t】操作以及【r】操作。（此時以指定顯示的資料，例如：D2 格的函數資料：=\$A\$7，而不在每一格中輸入 ABCD 等組件名稱）
- 3.用上面輸入指定格的方法，手動進行 6 次的【t】操作以及【r】操作。（此動作較費時費力，但暫時找不到其他更好的辦法）
- 4.在輸入區更改資料，即可改變起始組合的組件名稱。
- 5.找出 24 種組合方式作為起始組合的結果。

於是，我們順利的把 24 種不排列，分別作為起始組合，進行操作的結果整理出來，如附件一。

(六) 24 種排列分別作為起始組合

我們把 24 種起始組合的結果整理出來，如附件一。下表是第一組(1)(19)(17)(10)的資料。

起始組合	最遠組合	分組資料	操作步驟	操作步驟分析	
第一組 (1) ABCD	(8) BADC	第六組	trtrr	t: 2	r: 4
			rrtrt	t: 2	r: 4
	(13) CABD	第二組	rrtrr←	t: 1	r: 5
			rrtrt←	t: 2	r: 4
			trtrt←	t: 3	r: 3
	(20) DACB	第三組	rrtrr←	t: 1	r: 5
			trtrr←	t: 2	r: 4
			trtrt←	t: 3	r: 3
	第一組 (19) DABC	(6) ADCB	第六組	trtrr	t: 2
rrtrt				t: 2	r: 4
(11) BDAC		第三組	rrtrr	t: 1	r: 5
			rrtrt	t: 2	r: 4
			trtrt	t: 3	r: 3
(18) CDBA		第四組	rrtrr	t: 1	r: 5
			trtrr	t: 2	r: 4
			trtrt	t: 3	r: 3
第一組 (17) CDAB		(24) DCBA	第六組	trtrr	t: 2
	rrtrt			t: 2	r: 4
	(4) ACDB	第四組	rrtrr	t: 1	r: 5
			rrtrt	t: 2	r: 4

			trrrt	t : 3	r : 3
	(9) BCAD	第五組	rrrrt	t : 1	r : 5
			trrrr	t : 2	r : 4
			trrrt	t : 3	r : 3
第一組 (10) BCDA	(15) CBAB	第六組	trrrr	t : 2	r : 4
			rrrrt	t : 2	r : 4
	(22) DBCA	第五組	rrrrr	t : 1	r : 5
			rrrrt	t : 2	r : 4
			trrrt	t : 3	r : 3
	(2) ABDC	第二組	rrrrr	t : 1	r : 5
			trrrr	t : 2	r : 4
			trrrt	t : 3	r : 3

表 10

從上表中，我們發現許多有趣的規律！整理如下：

1. **【黃色標示】**在第一組作為起始排列的 (1) (19) (17) (10) 中的最遠組合，都有第六組的組合，而且剛好是第六組中全部的四種組合。
2. **【黃色標示】**這四種最遠組合，都剛好有 2 種操作步驟，而且都是 2 個 **【t】** 4 個 **【r】**。
3. **【黃色標示】**這四種最遠組合的 2 種操作步驟完全相同！
4. **【綠色標示】**另兩種最遠組合的操作步驟為 3 種。而且這三種都分別是 1 個 **【t】** 5 個 **【r】**、2 個 **【t】** 4 個 **【r】**、3 個 **【t】** 3 個 **【r】**
5. **【箭頭標示】**在同一組最遠組合 (1) → (13)、(1) → (20) 的步驟中，操作步驟剛好互相反向。例如 (1) → (rrrrr) → (13)，那麼 (1) → (rrrrr) → (20)。而這個規律在每一組都相同。

另外，在附件中，我們也發現每一組的最遠組合中，操作步驟都有相同的結構。同時由上面的說明中也發現，最遠組合的操作「t」和操作「r」有對稱的現象。

在分組的配對中，我們再整理出比較簡潔的表格。

編號		2 種操作步驟： 2 個 【t】 4 個 【r】	3 種操作步驟： 1 個 【t】 5 個 【r】 、 2 個 【t】 4 個 【r】 、 3 個 【t】 3 個 【r】	3 種操作步驟： 1 個 【t】 5 個 【r】 、 2 個 【t】 4 個 【r】 、 3 個 【t】 3 個 【r】
(阿拉伯數字為編號，國字為組別)				
第一組	1	8 六	13 二	20 三
	19	6 六	11 三	18 四
	17	24 六	4 四	9 五
	10	15 六	22 五	2 二
第二組	2	7 四	19 一	14 五

	13	4 四	9 五	24 六
	23	18 四	6 六	11 三
	12	21 四	16 三	1 一
第三組	3	14 五	7 四	19 一
	20	5 五	17 一	12 二
	11	22 五	2 二	15 六
	16	9 五	24 六	4 四
第四組	4	13 二	20 三	8 六
	7	2 二	15 六	22 五
	21	12 二	5 五	17 一
	18	23 二	10 一	3 三
第五組	5	20 三	8 六	13 二
	14	3 三	23 二	10 一
	9	16 三	1 一	21 四
	22	11 三	18 四	6 六
第六組	6	19 一	14 五	7 四
	8	1 一	21 四	16 三
	15	10 一	3 三	23 二
	24	17 一	12 二	5 五

表 11

在兩個操作步驟的最遠組合中，第一組和第六組分別為最遠組合，其餘的配對是第二組和第四組、第三組和第四組。

這樣的最遠組合中，第一組和第六組有什麼關係？或者說第一組和第六組、第二組和第四組、第三組和第四組中是否有相同的差異存在？我們試著找出來！

(七) 最遠組合的組別關係

我們先從起始組別第一組與第二組、第三組、第四組、第五組的關係作討論。在操作步驟中，其實有很多種可能。下表所選擇呈現的操作步驟，在表後說明。

起始組別	操作步驟	目標組別		起始組別	操作步驟	目標組別	
第一組 (1)	r-r-t-r-r	(2)	第二組	第一組 (1)	r-r-r-t-r	(3)	第三組
	r-r-t-r-r-r	(13)			r-r-r-t-r-r	(20)	
	r-r-t	(23)			r-r-r-t-r-r-r	(11)	
	r-r-t-r	(12)			r-r-r-t	(16)	
	1【t】				1【t】		
第一組	r-t-r-r	(2)	第二組	第一組	r-r-t-r	(3)	第三組

(19)	r-t-r-r-r	(13)		(19)	r-r-t-r-r	(20)	
	r-t	(23)			r-r-t-r-r-r	(11)	
	r-t-r	(12)			r-r-t-	(16)	
	1【t】				1【t】		
第一組 (17)	t-r-r	(2)	第二組	第一組 (17)	r-t-r	(3)	第三組
	t-r-r-r	(13)			r-t-r-r	(20)	
	t	(23)			r-t-r-r-r	(11)	
	t-r	(12)			r-t	(16)	
1【t】			1【t】				
第一組 (10)	r-r-r-t-r-r	(2)	第二組	第一組 (10)	t-r	(3)	第三組
	r-r-r-t-r-r-r	(13)			t-r-r	(20)	
	r-r-r-t	(23)			t-r-r-r	(11)	
	r-r-r-t-r	(12)			t	(16)	
1【t】			1【t】				
第一組 (1)	t	(4)	第四組	第一組 (1)	t-r	(5)	第五組
	t-r	(7)			t-r-r	(14)	
	t-r-r	(21)			t-r-r-r	(9)	
	t-r-r-r	(18)			t	(12)	
1【t】			1【t】				
第一組 (19)	r-r-r-t-r-r-r	(4)	第四組	第一組 (19)	r-t-r	(5)	第五組
	r-r-r-t	(7)			r-t-r-r	(14)	
	r-r-r-t-r	(21)			r-t-r-r-r	(9)	
	r-r-r-t-r-r	(18)			r-t	(12)	
1【t】			1【t】				
第一組 (17)	r-r-t-r-r-r	(4)	第四組	第一組 (17)	r-r-t-r	(5)	第五組
	r-r-t	(7)			r-r-t-r-r	(14)	
	r-r-t-r	(21)			r-r-t-r-r-r	(9)	
	r-r-t-r-r	(18)			r-r-t	(12)	
1【t】			1【t】				
第一組 (10)	r-r-r-t-r-r-r	(4)	第四組	第一組 (10)	r-r-r-t-r	(5)	第五組
	r-r-r-t	(7)			r-r-r-t-r-r	(14)	
	r-r-r-t-r	(21)			r-r-r-t-r-r-r	(9)	
	r-r-r-t-r-r	(18)			r-r-r-t	(12)	
1【t】			1【t】				

表 12

我們赫然發現，第一組與二~五組的關係中，操作步驟都只有一個【t】。(同一個目標組合的操作步驟其實有很多種，但若不論【r】的次數，一定都會有一種是只有一個【t】)那麼，第一組和第六組（最遠組別）又有什麼關係呢？

起始組別	操作步驟	目標組別	
第一組 (1)	rtrtrr	(6)	第六組
	trrtrr	(8)	
	rtrrt	(15)	
	trrt	(24)	
	2【t】		
第一組 (19)	trrtrr	(6)	第六組
	rtrrt	(8)	
	trrt	(15)	
	trrtr	(24)	
	2【t】		
第一組 (17)	rtrrt	(6)	第六組
	trrt	(8)	
	trrtr	(15)	
	trrtrr	(24)	
	2【t】		
第一組 (10)	trrt	(6)	第六組
	trrtr	(8)	
	trrtrr	(15)	
	trrtrrr	(24)	
	2【t】		

表 13

在最遠關係中的第一組和第六組，必須有兩個操作【t】才能完成。

綜合上面兩個表，假設不管操作【r】的次數（因為操作【r】具有循環性質），以操作【t】來討論，那麼最遠關係的配對中，必是2個【t】才能達成的目標。

而以上得這個結果，我們發現在第二組與第四組、第三組與第五組中也有相同的結果。如下表。

起始組別	最遠組別 2 次操作 【t】	其他組別 1 次操作 【t】
第一組	第六組：2 【t】	第二組、第三組、第四組、第五組：1 【t】
第二組	第四組：2 【t】	第一組、第三組、第五組、第六組：1 【t】
第三組	第五組：2 【t】	第一組、第二組、第四組、第六組：1 【t】
第四組	第二組：2 【t】	第一組、第三組、第五組、第六組：1 【t】
第五組	第三組：2 【t】	第一組、第二組、第四組、第六組：1 【t】
第六組	第一組：2 【t】	第二組、第三組、第四組、第五組：1 【t】

表 14

(八) 奇偶性質

在我們的研究過程中，有同學還發現，除了用 **【r】** 循環操作的方式來分組以外，排列方式還可以分成兩大組：

假設從某起始組合開始進行操作 **【t】** 或操作 **【r】**，假設這個操作是奇，那麼它會變成下一個組合為偶。例如：(1) **【奇組】** → 「t 操作」→ (7) **【偶組】**

我們用這樣的方式把所有的組合分成「奇」組和「偶」組。任一組合作為起始都會符合這樣的分類。也就是說，4 個組件的操作中，組件蘊含有類似奇偶數的性質，在操作 **【t】** 或操作 **【r】** 之後，會跳到下一「奇」組或「偶」組。

我們找出來的奇組組件分別是：(1)、(4)、(5)、(9)、(12)、(13)、(15)、(16)、(17)、(20)、(21)、(24)。

偶組組件為：(2)、(3)、(6)、(7)、(8)、(10)、(11)、(14)、(18)、(19)、(22)、(23)。

而「奇」組和「偶」組的組件操作狀況如下表 15：

如果真的有這樣的自動化機器人，運用在實際的組件操作上，也許我們的結論對於機器人的效能會有所提升！

【第一次操作為 t】

操作 起始	一	二	三	四	五	六
(1)	(7)	(1)	(7)	(1)	(7)	(1)
						(21)
					(19)	(5)
						(17)
				(21)	(11)	(21)
						(16)
						(24)
					(18)	(4)
			(19)	(5)	(19)	(5)
						(17)
					(14)	(4)
						(9)
				(15)	(23)	(17)
						(12)
					(10)	(16)
						(1)
		(21)	(11)	(21)	(11)	(21)
						(16)
					(16)	(24)
						(4)
				(16)	(10)	(16)
						(1)
					(3)	(13)
						(20)
			(18)	(24)	(18)	(24)
						(4)
					(6)	(20)
						(8)
				(4)	(14)	(4)
						(9)
					(7)	(1)
						(21)

【第一次操作為 r】

操作 起始	一	二	三	四	五	六
(1)	(19)	(5)	(19)	(5)	(19)	(5)
						(17)
					(14)	(4)
						(9)
				(17)	(23)	(17)
						(12)
					(10)	(16)
						(1)
			(14)	(4)	(14)	(4)
						(9)
					(7)	(1)
						(21)
				(9)	(15)	(9)
						(24)
					(22)	(12)
						(5)
		(17)	(23)	(17)	(23)	(17)
						(12)
					(10)	(16)
						(1)
				(12)	(22)	(12)
						(5)
					(2)	(7)
						(13)
			(10)	(16)	(10)	(16)
						(1)
					(3)	(13)
						(20)
				(1)	(7)	(1)
						(21)
					(19)	(5)

表 15

說明：1、白底表格為 t 操作，灰底表格為 r 操作。2、奇次操作為紅字，偶次操作為黑字

三、 5 個組件

(一) 編號與分組

如同前面 3 個組件、4 個組件和 5 個組件的研究方法，我們先把 5 個組件的排列方式和【r】操作後的循環組合分組。5 個組件總共會有 120 種組合（ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ）。如下表 16

ABCDE	1	BACDE	25	CABDE	49	DABCE	73	EABCD	97
ABCED	2	BACED	26	CABED	50	DABEC	74	EABDC	98
ABDCE	3	BADCE	27	CADBE	51	DACBE	75	EACBD	99
ABDEC	4	BADEC	28	CADEB	52	DACEB	76	EACDB	100
ABECD	5	BAECD	29	CAEBD	53	DAEBC	77	EADBC	101
ABEDC	6	BAEDC	30	CAEDB	54	DAECB	78	EADCB	102
ACBDE	7	BCADE	31	CBADE	55	DBACE	79	EBACD	103
ACBED	8	BCAED	32	CBAED	56	DBAEC	80	EBADC	104
ACDBE	9	BCDAE	33	CBDAE	57	DBC AE	81	EBCAD	105
ACDEB	10	BCDEA	34	CBDEA	58	DBCEA	82	EBCDA	106
ACEBD	11	BCEAD	35	CBEAD	59	DBEAC	83	EBDAC	107
ACEDB	12	BCEDA	36	CBEDA	60	DBECA	84	EBDCA	108
ADBCE	13	BDACE	37	CDABE	61	DCABE	85	ECABD	109
ADBEC	14	BDAEC	38	CDAEB	62	DCAEB	86	ECADB	110
ADCBE	15	BDCAE	39	CDBAE	63	DCBAE	87	ECBAD	111
ADCEB	16	BDCEA	40	CDBEA	64	DCBEA	88	ECBDA	112
ADEBC	17	BDEAC	41	CDEAB	65	DCEAB	89	ECDAB	113
ADECB	18	BDECA	42	CDEBA	66	DCEBA	90	ECDBA	114
AEBCD	19	BEACD	43	CEABD	67	DEABC	91	EDABC	115
AEBDC	20	BEADC	44	CEADB	68	DEACB	92	EDACB	116
AECBD	21	BECAD	45	CEBAD	69	DEBAC	93	EDBAC	117
AECDB	22	BECDA	46	CEBDA	70	DEBCA	94	EDBCA	118
AEDBC	23	BEDAC	47	CEDAB	71	DECAB	95	EDCAB	119
AEDCB	24	BEDCA	48	CEDBA	72	DECBA	96	EDCBA	120

表 16

在 5 個組件的分組中，因為每 5 個為一組的循環組件，所以總共會有 24 組。（ $120 \div 5 = 24$ ）。

組別	組件編號	組別	組件編號
第一組	(1)(34)(41)(91)(97)	第十三組	(13)(35)(68)(82)(101)
第二組	(2)(36)(71)(73)(115)	第十四組	(14)(45)(51)(84)(110)
第三組	(3)(40)(67)(89)(98)	第十五組	(15)(44)(59)(88)(102)
第四組	(4)(42)(49)(95)(109)	第十六組	(16)(27)(69)(90)(104)
第五組	(5)(46)(61)(74)(113)	第十七組	(17)(31)(52)(94)(105)
第六組	(6)(48)(50)(85)(119)	第十八組	(18)(28)(55)(96)(111)
第七組	(7)(41)(58)(92)(99)	第十九組	(19)(33)(62)(77)(106)
第八組	(8)(47)(60)(75)(116)	第二十組	(20)(39)(53)(86)(108)
第九組	(9)(43)(64)(83)(100)	第二十一組	(21)(38)(57)(78)(112)
第十組	(10)(25)(66)(93)(103)	第二十二組	(22)(29)(63)(80)(114)
第十一組	(11)(37)(70)(76)(107)	第二十三組	(23)(32)(54)(81)(118)
第十二組	(12)(26)(72)(79)(117)	第二十四組	(24)(30)(56)(87)(120)

表 17

(二) 利用 excel 找出最多步驟組件

我們再次利用樹狀圖將 5 個組件的操作【t】與操作【r】的結果找出來（附件二）。在 5 個組件當中，找到所有組合所需要的最少步驟是 11 次的操作。

因為每一次操作在樹狀圖中，一個操作都有 2 種可能，兩次操作就有 4 種可能，三次操作會有 8 種可能，11 次操作為 $(2)^{11} = 2048$ ，是一個非常耗費時間處理與檢查的動作。

在這裡，我們在老師的幫忙下，運用 excel 中的函數【CONCATENATE】和【IF】，幫忙處理是否重複：

【CONCATENATE】：將數個文字串連成一個文字串。可用來把每一格的組件名成組合起來。例如：A1 格=A、B1 格=B、C1 格=C、D1 格=D，E1 格=ABCD

【IF】：指定的情況結果為 TRUE，則傳回一個值，若結果為 FALSE，則傳回另一個值。可以用來檢查是否重複。例如：E1 格=ABCD、E2 格=ABCD，則此兩格重複。

(三) 最遠組合的操作與配對

於是，我們找出在 5 個組件中最少步驟是 11 次的操作。而最遠組合的結果整理如附件三。在 5 個組件中，每一個起始組件會有 2 個最遠配對組件。而每個配對又分別有兩種操作方法。以下為節錄第一組到第五組的結果：

編號		2 種操作步驟： 2 個【t】9 個【r】、 4 個【t】7 個【r】、	3 種操作步驟： 3 個【t】11 個【r】、
		(阿拉伯數字為編號，國字為組別)	
第一組	1	4 (四)	28 (十八)
	97	100 (九)	22 (二十二)
	91	94 (十七)	118 (二十三)
	65	61 (五)	85 (六)
	34	35 (十三)	59 (十五)
第二組	2	6 (六)	30 (二十四)
	73	76 (十一)	16 (十六)
	115	118 (二十三)	94 (十七)
	71	67 (三)	109 (四)
	36	33 (十九)	57 (二十一)
第三組	3	2 (二)	26 (十二)
	98	102 (十五)	24 (二十四)
	67	70 (十一)	112 (二十一)
	89	85 (六)	61 (五)
	40	41 (七)	83 (九)
第四組	4	5 (五)	29 (二十二)
	49	52 (十七)	10 (十)
	109	112 (二十一)	70 (十一)
	95	91 (一)	115 (二)
	42	39 (二十)	81 (二十三)
第五組	5	1 (一)	25 (十)
	74	78 (二十一)	18 (十八)
	61	64 (九)	88 (十五)
	113	109 (四)	67 (三)
	46	47 (八)	107 (十一)

表 18

在這個表格中，我們發現並沒有像 4 個組件時的最遠配對。不過卻發現，在 1 (一) 的最遠配對有 4 (四)，而 4 (四) 的最遠配對有 5 (五)，而 5 (五) 的最遠配對有 1 (一)。這三個組件自成一個小循環。檢查了其他各組，也發現具有相同的性質。

另外，在最遠組件中的操作步驟分析如下：

起始組件	最遠目標組件 (11) 次操作	操作步驟	步驟操作分析	
(1) ABCDE	(4) ABDEC	方法一：rrrrtrrrrr	t : 2	r : 9
		方法二：rtrrrrrtrr	t : 4	r : 7
	(28) BADEC	方法一：rtrrrrrrrr	t : 3	r : 8
		方法二：rtrrrrrrrr	t : 3	r : 8
		方法三：rrrrtrrrtr	t : 3	r : 8

表 19

在 5 個組件中，2 種方法的目標組件分別是 2 次操作【t】或 4 次操作【t】。而 3 種方法的目標組件卻都是 3 次操作【t】。

這樣的規律在其他組合的 5 個組件中也都存在！也就是說，不管是在 3 個、4 個或 5 個組件中，最遠組件、操作步驟都有著一定的規律。而其中的不同可能是與 3、4、5 本身的奇偶性質或其他性質有關。

伍、 研究結果

經過了這一連串的研究，我們對於自動化智慧機器人~組件排列次序探討有了深入的了解。以下是我們的研究結果。

- 一、當組件數為 N 時，排列的組數便是： $N \times (N-1) \times (N-2) \cdots \times 1$ 。
- 二、在 3 個組件中，總共有 6 種排列方式，使用任一排列方式作為起始組件，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，最少移動次數為 2 次。
- 三、在 4 個組件中，總共有 24 種排列方式，使用任一排列方式作為起始組件，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，最少移動次數為 6 次。
- 四、在 5 個組件中，總共有 120 種排列方式，使用任一排列方式作為起始組件，運用【t】操作、【r】操作找出所有排列情況，最少移動次數為 11 次。
- 五、其他研究成果：
 - (一) 在研究中為了討論上的方便，我們採用編號來標記不同的排列方式。
 - (二) 在本研究中，因為只有兩種操作方式，可以以樹狀圖來分類，並刪去重複，當所有組件都出現，即找到所有答案。
 - (三) 不論組件數為 3 或 4 或 5，多次的 r 操作會產生循環、重複的排列狀況。而連續兩次 t 操作，會讓組件回復先前的排列狀況。
 - (四) 4 個組件中，共有 24 個不同排列，可以用 r 操作特性分成六組。
 - (五) 4 個組件中，一個組件會有一個配對的最遠組件。同時，其分組中，一個組別也會有配對的最遠組別。(第一組與第六組、第二組與第四組、第三組與第五組)
 - (六) 承上，兩個最遠組件的操作中，必須有 2 次操作【t】。同時，在最遠組合的操作步驟上，操作「t」和操作「r」有對稱的情況
 - (七) 4 個組件中，組件與組件之間的操作可以分成奇組與偶組。
 - (八) 在 5 個組件中，共有 120 個不同排列，可以用 r 操作特性分成 24 組。
 - (九) 在 5 個組件中，最遠組件的配對與分組並沒有兩兩成對，而是三三成小循環。

例如：第一組 1→第五組 5→第四組 4

(十) 在 5 個組件最遠組件的操作中，一種循環的操作方式為 2 次操作【t】或 4 次操作【t】。另一種循環則有三種方式都是 3 次操作【t】。

陸、 討論

在我們這一大段時間的研究歷程中，還有多值得紀錄與討論的事情：

一、簡化計算：原題目中的組件是 4 個組件的排列與操作探討。而我們先研究 3 個組件時的排列情形。這樣的方式有助於接下來 4 個、5 個組件的探討，是一個很有幫助的研究方法。

二、利用 EXCEL 試算表，簡化不同起始組件的研究模式：我們利用 excel 中的【\$】指定資料，讓我們在研究過程中，若要研究不同的起始組件，可以用改變輸入資料的方式得到結果。

三、在使用 EXCEL 試算表進行 t 操作與 r 操作，必須用手動複製的方法處理。此動作較費時費力，但暫時找不到其他更好的辦法。

四、t 操作與 r 操作的資料處理：在 4 個組件中，需要 6 個步驟才能找出所有組合。而在 5 個組件中是 11 個步驟。6 個步驟總共是 $(2)^6 = 64$ 個組合的討論。而 11 個步驟總共是 $(2)^{11} = 2048$ 個組合的討論。資料非常龐大！而在研究過程中，我們雖然試著想要利用 excel 或其他工具來幫忙，但還找不到更合適的工具。

未來如果能找到，再向更多組件（如 6 個、7 個、8 個）挑戰，也許能找到更多規律。

五、在一個真實的情境中，最遠組件的配對，對於必須注意時間、消耗能源等問題的生產活動來說，其實是一個必須注意的問題。

六、在一個簡單的數學遊戲中，其實包含著許多規律。而在我們的研究中，不簡找到最短次數，還有依照【r】循環的分組、排列類型的奇偶性質等。我們發現同個問題除了要深入的探討，更要試著從不同的角度去思考與歸納，那麼一個看似簡單的主題，也能找到令人驚奇的結果。

柒、 結論

在這次的研究中，我們從簡化原題目的 3 個組件作為起始，研究了 4 個、5 個組件的自動化智慧機器人~組件排列次序探討。我們利用編號、EXCEL 試算表等工具以及方法，找出 3 個組件的所有排列需要 2 個操作步驟、4 個組件的所有排列需要 6 個操作步驟、5 個組件的所有排列需要 11 個操作步驟。

另外，我們來發現【t】操作以及【r】操作會有不同的特性，其中多次的【r】操作會出現循環重複。利用此性質來做分組，發現組與組之間各種性質。

如果真的有這樣的自動化機器人，運用在實際的組件操作上，也許我們的結論對於機器人的效能會有所提升！

捌、 參考資料

Brian Bolt (民 91)。數學遊樂園之舉一反三。(宋宜真譯)。臺北市：牛頓出版股份有限公司。

王興家等（民 99）。數學六上。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

王興家等（民 100）。數學六下。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

教育部國語辭典簡編本網路版。民 101 年 01 月 22 日，取自：

<http://dict.concised.moe.edu.tw/cgi-bin/jdict/GetContent.cgi?DocNum=37410&GraphicWord=&QueryString=組件>

教育部國語辭典簡編本網路版。民 101 年 01 月 22 日，取自：

<http://dict.concised.moe.edu.tw/cgi-bin/jdict/GetContent.cgi?DocNum=2542&GraphicWord=&QueryString=排列>

玖、 附件

表 20 附件一

起始組合	最遠組合	分組資料	操作步驟	操作步驟分析	
第一組 (1) ABCD	(8) BADC	第六組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(13) CABD	第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrt	t : 3	r : 3
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(20) DACB	第三組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrt	t : 3	r : 3
	第一組 (19) DABC	(6) ADCB	第六組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(11) BDAC		第三組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(18) CDBA		第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第一組 (17) CDAB		(24) DCBA	第六組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(4) ACDB	第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(9) BCAD	第五組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
	第一組 (10)	(15) CBAD	第六組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4

BCDA	(22) DBCA	第五組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(2) ABDC	第二組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
第二組 (2)	(7)	第四組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(19)	第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(14)	第五組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
	第二組 (13)	(4)	第四組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(9)		第五組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(24)		第六組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
第二組 (23)		(18)	第四組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(6)	第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(11)	第三組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
	第二組 (12)	(21)	第四組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(16)		第三組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(1)		第一組	rrrtrr	t : 1	r : 5

			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第三組 (3)	(14)	第五組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(7)	第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(19)	第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
	第三組 (20)	(5)	第五組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(17)		第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(12)		第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第三組 (11)		(22)	第五組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(2)	第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(15)	第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
	第三組 (16)	(9)	第五組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(24)		第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(4)		第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第四組 (4)		(13)	第二組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(20)	第三組	rrtrrr	t : 1	r : 5

			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(8)	第六組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
第四組 (7)	(2)	第二組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(15)	第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(22)	第五組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
rrrtrt			t : 3	r : 3	
第四組 (21)	(12)	第二組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(5)	第五組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(17)	第一組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
rrrtrt			t : 3	r : 3	
第四組 (18)	(23)	第二組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(10)	第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(3)	第三組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
rrrtrt			t : 3	r : 3	
第五組 (5)	(20)	第三組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(8)	第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(13)	第二組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
rrrtrt			t : 3	r : 3	

第五組 (14)	(3)	第三組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 2	r : 4
	(23)	第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(10)	第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
	第五組 (9)	(16)	第三組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(1)		第一組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(21)		第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第五組 (22)		(11)	第三組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(18)	第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
	(6)	第六組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
	第六組 (6)	(19)	第一組	trtrrr	t : 2
rrtrrt				t : 2	r : 4
(14)		第五組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3
(7)		第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrtrrt	t : 3	r : 3
第六組 (8)		(1)	第一組	trtrrr	t : 2
	rrtrrt			t : 2	r : 4
	(21)	第四組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrtrrt	t : 2	r : 4
			trtrrt	t : 3	r : 3

	(16)	第三組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
第六組 (15)	(10)	第一組	trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 2	r : 4
	(3)	第三組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrr	t : 3	r : 3
	(23)	第二組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3
	第六組 (24)	(17)	第一組	trtrrr	t : 2
rrrtrt				t : 2	r : 4
(12)		第二組	rrtrrr	t : 1	r : 5
			rrrtrt	t : 2	r : 4
			trtrrr	t : 3	r : 3
(5)		第五組	rrrtrr	t : 1	r : 5
			trtrrr	t : 2	r : 4
			rrrtrt	t : 3	r : 3

表 21：附件二 5 個組件的樹狀圖(節錄)

起始	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次		
ABCDE (1)	BACDE (25)	ABCDE (1)	BACDE (25)	ABCDE (1)	BACDE (25)	ABCDE (1)		
						EBACD (103)		
						EABCD (97)		
					BEACD (43)	AEBCD (19)		
					DEBAC (93)	DEABC (91)		
					EBACD (103)	EDBAC (117)		
			EABCD (97)	AEBCD (19)	EABCD (97)	DBEAC (83)		
						DAEBC (77)	CDEBA (66)	
						DEABC (91)	AEBCD (19)	
			DEABC (91)	EDABC (115)	CDEAB (65)	DEABC (91)		
						CEDAB (71)		
						DCEAB (89)		
			EBACD	BEACD	EBACD	BEACD	BEACD	EBACD (103)

		(103)	(43)	(103)	(43)	DBEAC (83)
--	--	-------	------	-------	------	------------

表 22 附件三:五組件的最遠組合配對

起始組件	最遠組件一 (2種步驟)	最遠組件二 (3種步驟)	起始組件	最遠組件一 (2種步驟)	最遠組件二 (3種步驟)	起始組件	最遠組件一 (2種步驟)	最遠組件二 (3種步驟)
1	4	28	41	37	79	81	80	38
2	6	30	42	39	81	82	83	41
3	2	26	43	46	106	83	79	37
4	5	29	44	48	108	84	81	39
5	1	25	45	44	104	85	88	64
6	3	27	46	47	107	86	90	66
7	10	52	47	43	103	87	86	62
8	12	54	48	45	105	88	89	65
9	8	50	49	52	10	89	85	61
10	11	53	50	54	12	90	87	63
11	7	49	51	50	8	91	94	118
12	9	51	52	53	11	92	96	120
13	16	76	53	49	7	93	92	116
14	18	78	54	51	9	94	95	119
15	14	74	55	58	34	95	91	115
16	17	77	56	60	36	96	93	117
17	13	73	57	56	32	97	100	22
18	15	75	58	59	35	98	102	24
19	22	100	59	55	31	99	98	20
20	24	102	60	57	33	100	101	23
21	20	98	61	64	88	101	97	19
22	23	101	62	66	90	102	99	21
23	19	97	63	62	86	103	106	46
24	21	99	64	65	89	104	108	48
25	28	4	65	61	85	105	104	44
26	30	6	66	63	87	106	107	47
27	26	2	67	70	112	107	103	43
28	29	5	68	72	114	108	105	45
29	25	1	69	68	110	109	112	70
30	27	3	70	71	113	110	114	72
31	34	58	71	67	109	111	110	68
32	36	60	72	69	111	112	113	71
33	32	56	73	76	16	113	109	67
34	35	59	74	78	18	114	111	69
35	31	55	75	74	14	115	118	94
36	33	57	76	77	17	116	120	96
37	40	82	77	73	13	117	116	92
38	42	84	78	75	15	118	119	95
39	38	80	79	82	40	119	115	91
40	41	83	80	84	42	120	117	93

【評語】 080412

本研究以自動化智慧機器人為媒介，從計算組件不同排列次序的次數出發，透過運作與操作，歸納不同組件中各種排列的變化規則，不論是在書面資料的整理或是口頭報告都展現出團隊合作群策群力的風範。