

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080411

揪出「小三」

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者： 小五 朱泓睿 小五 李俞賢 小五 李映璇 小五 林品儒 小五 黃馨怡 小五 李湘琪	指導老師： 洪進益 王婉妮
---	-----------------------------

關鍵詞：撲克牌、數字規律、牌組

揪出「小三」

摘要

「為什麼每次剩下的都是撲克牌三呢？」本研究是因為看到爺爺玩的一個撲克牌遊戲，遊戲最後竟然都會剩下「3」。因此我們決定以此為題目，來探討其中的奧祕。首先，我們先按照遊戲原本的方式去進行遊戲，為了更容易去破解其中數字的祕密，我們進行簡化問題，改良遊戲的方式，再分析成功牌組的組合和機率。接著，我們利用數學方程式證明，也利用這樣的方式，成功破解出其他尾數玩法的祕密！透過研究的結果，我們知道尾數八的遊戲會揪出「6」，尾數七揪出「9」，尾數六揪出「2」，尾數五揪出「5」，尾數四揪出「8」，尾數三揪出「1」，尾數二揪出「4」，尾數一揪出「7」。故以後遊戲也可以利用別的尾數來進行遊戲。

壹、研究動機

「為什麼每次剩下的都是撲克牌三呢？」本研究是因為有一次看到爺爺玩的一個撲克牌遊戲，遊戲最後竟然都會剩下 3 這個數字，真是太神奇了！所以我們決定以此為題目，來探討其中的奧祕，看是否能找出其中數字的規律性。

另外遊戲的方式是三張牌，當出現 9、19 和 29，就可以把牌組收起來，剛好在數學課，我們學過了未知數的列式和解題，因此想透過這個方式，來驗證其他尾數的部份，再經由實際模擬證明，看看是否也會有同樣的情況發生。

貳、研究目的

- 一、研究「揪出小三」這個有趣的撲克牌遊戲，最後是否只會剩下數字「三」。
- 二、能從此數學遊戲中，歸納出規律性。
- 三、利用遊戲成功後的牌組，了解數字的排列組合和機率。
- 四、透過本研究的結果，進而探討其他尾數，是否也會有同樣的情況。

參、研究設備及器材

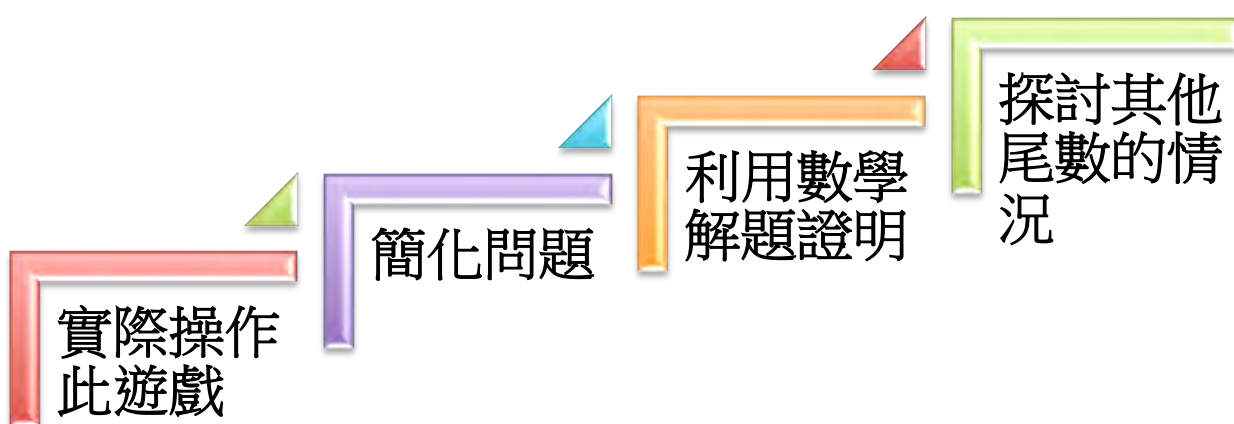
	
撲克牌	文書處理電腦
	
實驗紀錄本	文書處理電腦

肆、研究過程或方法

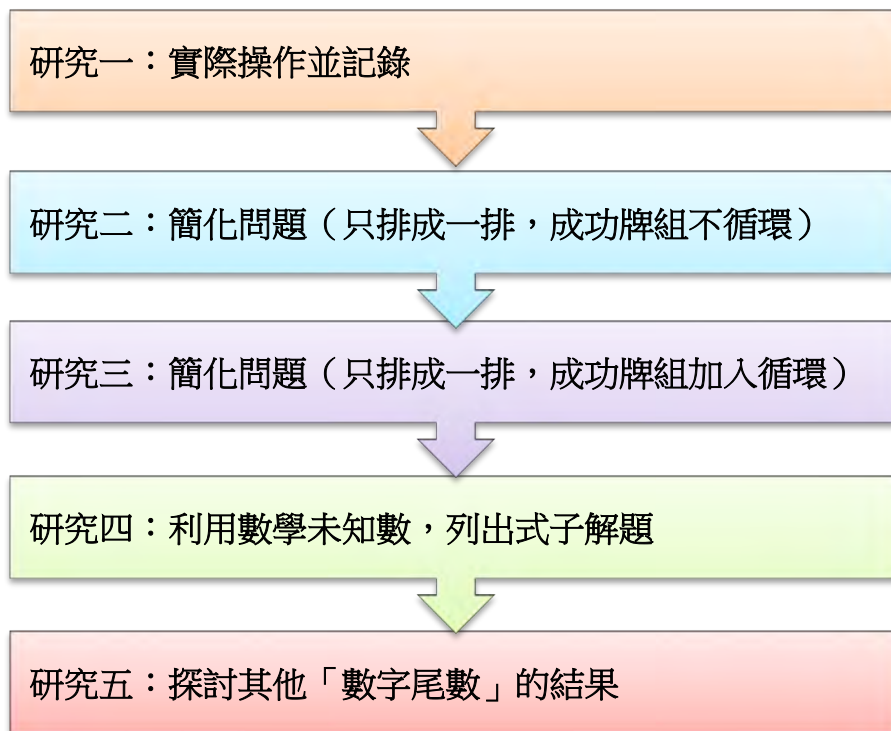
一、認識「揪出小三」撲克牌遊戲：

- (一) 拿出一副撲克牌，將 J、Q、K 拿出來，只留下一到十的數字，共四十張牌。
- (二) 洗牌後，將撲克牌由左至右排列，排成四排。
- (三) 依續排到第四排後，又排回第一排，以此類推。
- (四) 當同一排出現連續三張牌，加起來是 9、19、29 的時候，為成功牌組，就可以將三張牌收起來，放回原本的牌堆中。
- (五) 連續三張牌，除了下面連續三張之外，可以是最上面的一張和下面的二張的組合，也可以是最上面二張和下面一張的組合，都視為連續三張。
- (六) 持續這樣的過程循環，當同一排所有的牌都被收起來了，遊戲就剩下三排，一直玩到剩下一排，且所有成功的牌組都被收起。
- (七) 最後的結果一定會剩下一張牌，且為數字「三」。
- (八) 遊戲的另外一種情況為牌堆的牌都出完了，即遊戲失敗。

二、研究過程：



三、研究方法：



四、成功牌組的數字，可能組合分析：

9	19	29
(1,1,7)	(1,8,10)	(9,10,10)
(1,2,6)	(1,9,9)	
(1,3,5)	(2,7,10)	
(1,4,4)	(2,8,9)	
(2,2,5)	(3,6,10)	
(2,3,4)	(3,7,9)	
(3,3,3)	(3,8,8)	
	(4,5,10)	
	(4,6,9)	
	(4,7,8)	
	(5,5,9)	
	(5,6,8)	
	(5,7,7)	
	(6,6,7)	
7 種	14 種	1 種

伍、研究結果

一、研究一：根據「揪出小三」遊戲方式進行實驗

說明：首先，我們先根據「揪出小三」原本的方式，一開始排成四排，來進行遊戲。

盤數	成功或失敗	成功的牌組組數分析			遊戲時間（分）
		29	19	9	
1	X				32
2	X				22
3	X				26
4	O	0	10	3	34
5	X				25
6	X				30
7	O	0	10	3	18
8	O	0	10	3	23
9	X				22
10	X				17
11	X				20
12	X				36
13	O	0	10	3	26
14	X				25
15	O	0	10	3	23
16	X				17
17	X				25
18	O	1	8	4	18
19	X				23
20	X				29
21	O	0	10	3	30
22	O	0	10	3	13
23	X				16
24	X				19
25	O	1	8	4	22
26	X				23
27	X				27
28	X				17
29	O	1	8	4	20
30	O	0	10	3	29

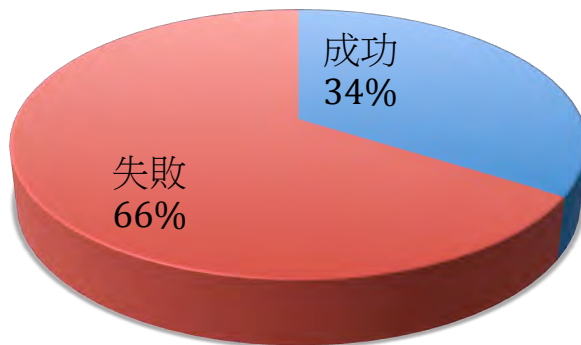
31	X				32
32	X				22
33	O	0	10	3	31
34	X				15
35	O	0	10	3	20
36	X				14
37	O	1	8	4	24
38	O	0	10	3	25
39	X				19
40	X				20
41	O	1	8	4	30
42	X				26
43	O	0	10	3	32
44	X				36
45	O	1	8	4	27
46	X				21
47	X				24
48	O	0	10	3	14
49	X				23
50	O	1	8	4	25
51	X				19
52	O	0	10	3	20
53	X				32
54	X				25
55	X				40
56	X				33
57	X				25
58	O	0	10	3	31
59	X				26
60	X				22
61	O	0	10	3	28
62	O	0	10	3	24
63	X				25
64	O	0	10	3	18
65	X				14
66	X				19
67	X				22
68	X				23
69	O	0	10	3	28

70	X				19
71	X				27
72	X				26
73	O	0	10	3	16
74	X				22
75	X				30
76	X				23
77	X				19
78	X				16
79	X				20
80	O	0	10	3	23
81	X				25
82	O	0	10	3	28
83	O	0	10	3	18
84	X				19
85	X				19
86	O	1	8	4	22
87	X				32
88	X				25
89	X				36
90	O	1	8	4	33
91	X				44
92	X				26
93	X				27
94	X				32
95	O	0	10	3	19
96	X				17
97	X				22
98	O	0	10	3	32
99	X				20
100	X				18
成功	34 盤		平均遊戲時間		24.16 分鐘

◆ 研究一討論：

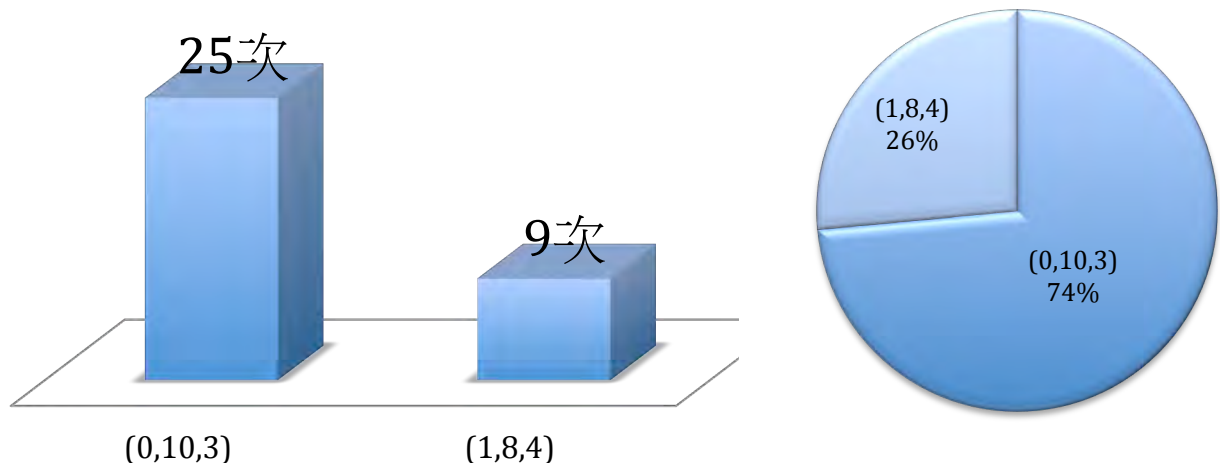
(一) 實際操作一百盤的結果，成功揪出「小三」，總共出現 34 盤，成功率 34%。

研究一 成功失敗比率圖



(二) 在成功的 34 盤中，數字 (29,19,9) 出現的次數，我們以 (x,y,z) 的方式表示，我們發現到 (0,10,3) 的情況共出現 25 次，而 (1,8,4) 的情況共出現了 9 次。表示 (0,10,3) 的情況，比較常出現。

研究一 成功牌組分析圖



(三) 經過實際一百盤的操作，不管成功或失敗，我們將每一盤的遊戲時間記錄下來，發現遊戲時間的平均值為 24.16 分鐘，表示光是完成一盤的時間，就是二十幾分鐘，是相當漫長的。有鑑於此，因此我們決定簡化問題，由遊戲設計成「只排成一排，成功牌組不循環」的方式，來進行我們研究二的實驗。

二、研究二：簡化問題（只排成一排，成功牌組不循環）

說明：研究二我們進行簡化問題，將原本遊戲的方式，改成只排成一排，若遊戲失敗，也記錄「剩下的數字」。

盤數	成功或失敗	成功的牌組組數分析			剩下數字
		29	19	9	
1	O	1	8	4	3
2	X	0	9	3	(1,2,9,10)=22
3	X	1	7	4	(1,4,7,10)=22
4	X	0	9	3	(2,2,8,10)=22
5	O	1	8	4	3
6	X	0	8	4	(5,8,9,10)=32
7	X	0	9	3	(2,5,6,9)=22
8	X	2	6	4	(2,2,4,4)=12
9	O	0	10	3	3
10	X	0	9	3	(1,5,6,10)=22
11	X	0	9	3	(1,5,7,9)=22
12	X	1	8	3	(1,2,2,7)=12
13	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
14	O	0	10	3	3
15	X	1	7	4	(2,4,8,8)=22
16	X	0	9	3	(1,5,7,9)=22
17	X	1	7	4	(4,4,6,8)=22
18	X	0	9	3	(1,5,6,10)=22
19	O	0	10	3	3
20	O	1	8	4	3
21	X	1	6	4	(3,3,4,5,8,9,9)=41
22	O	0	10	3	3
23	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
24	X	0	8	4	(5,8,9,10)=32
25	X	2	6	4	(2,2,4,4)=12
26	O	0	10	3	3
27	X	1	7	4	(1,5,8,8)=22
28	O	1	8	4	3
29	X	0	9	3	(2,5,6,9)=22
30	X	0	9	3	(1,5,7,9)=22

31	X	0	9	3	(2,4,7,9)=22
32	X	0	9	3	(1,6,6,9)=22
33	X	1	7	4	(4,4,6,8)=22
34	O	0	10	3	3
35	X	1	8	3	(1,2,2,7)=12
36	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
37	O	0	10	3	3
38	X	0	6	5	(7,8,9,9,9,10)=61
39	X	0	9	3	(1,6,6,9)=22
40	X	1	7	4	(4,5,6,7)=22
41	O	0	10	3	3
42	O	0	10	3	3
43	O	0	10	3	3
44	X	0	9	3	(5,5,5,7)=22
45	O	1	8	4	3
46	O	0	10	3	3
47	O	0	10	3	3
48	X	0	8	4	(7,7,8,10)=32
49	X	0	8	4	(5,8,9,10)=32
50	X	1	7	4	(1,5,8,8)=22
51	O	0	10	3	3
52	O	0	10	3	3
53	X	1	8	3	(1,1,1,9)=12
54	X	0	8	4	(5,8,9,10)=32
55	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
56	O	1	8	4	3
57	X	1	6	5	(6,8,8,10)=32
58	O	1	8	4	3
59	X	1	7	4	(4,5,5,8)=22
60	O	0	10	3	3
61	X	0	10	2	(1,1,4,6)=12
62	X	0	9	3	(1,2,9,10)=22
63	X	0	9	3	(2,4,8,8)=22
64	O	0	10	3	3
65	O	0	10	3	3

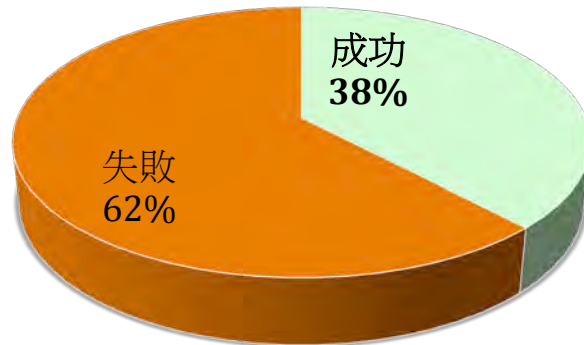
66	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
67	X	1	7	4	(5,5,6,6)=22
68	X	0	9	3	(2,5,6,9)=22
69	O	1	8	4	3
70	X	1	7	4	(1,2,9,10)=22
71	X	0	9	3	(2,4,8,8)=22
72	X	1	7	4	(4,4,6,8)=22
73	O	1	8	4	3
74	X	0	9	3	(1,4,8,9)=22
75	X	1	4	7	(5,5,6,6)=22
76	O	0	10	3	3
77	X	0	9	3	(1,5,6,10)=22
78	X	1	7	4	(1,6,7,9)=22
79	X	0	7	4	(1,3,7,10,10,10,10)=51
80	X	0	9	3	(4,5,6,7)=22
81	X	1	7	4	(2,4,8,8)=22
82	O	0	10	3	3
83	O	1	8	4	3
84	X	0	8	4	(5,8,9,10)=32
85	O	1	8	4	3
86	X	1	7	3	(5,5,6,6)=22
87	X	1	4	7	(4,4,6,8)=22
88	X	0	9	3	(2,5,7,8)=22
89	O	0	10	3	3
90	O	1	8	4	3
91	O	0	10	3	3
92	O	0	10	3	3
93	X	0	9	3	(1,2,9,10)=22
94	O	0	10	3	3
95	O	0	10	3	3
96	O	0	10	3	3
97	X	0	10	2	(1,2,9,10)=22
98	X	0	10	2	(1,1,2,8)=12
99	X	1	8	3	(1,1,4,6)=12
100	O	0	10	3	3

◆ 研究二討論：

(一) 實際操作一百盤的結果，成功揪出「小三」，總共出現 38 盤，成功率 38%。

□

研究二 成功失敗比率圖

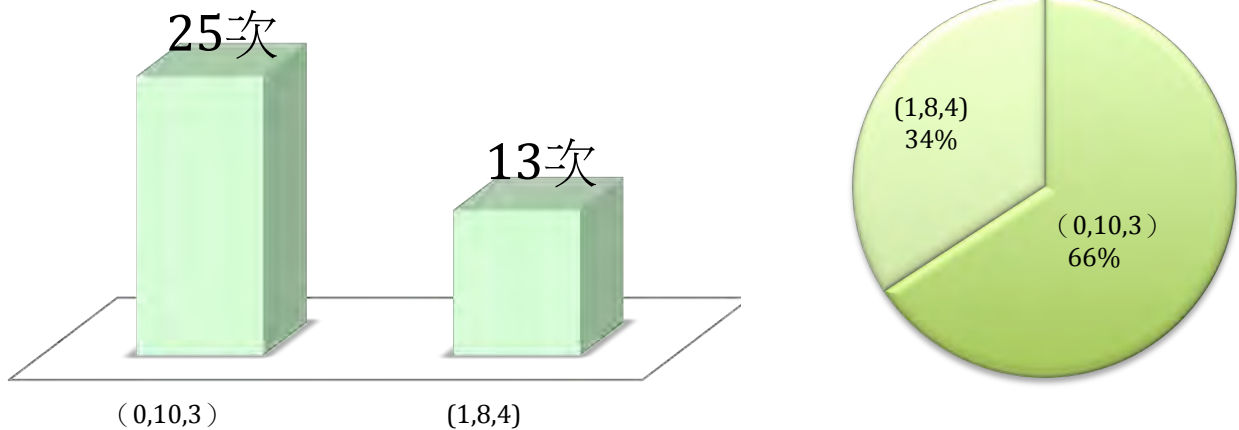


(二) 在成功的 38 盤中，數字 (29,19,9) 出現的次數，我們以 (x,y,z) 的方式表示，我們發現到 (0,10,3) 的情況共出現 25 次，而 (1,8,4) 的情況共出現了 13 次。表示 (0,10,3) 的情況，出現機率較高。

□

□

研究二 成功牌組分析圖



(三) 研究二的實驗，已經有效改善玩一盤遊戲所花的時間，且成功率也提高 4%。但還是無法每一盤都成功。有鑑於此，因此我們決定再修正實驗的方法，由遊戲設計成「只排成一排，成功牌組加入循環」的方式，來進行我們研究三的實驗。經過實驗幾盤的結果，我們發現這樣的方式，每一盤都可以建立成功的牌組，因此，我們將記錄的表格，改成如下表，目的在探討每一個成功牌組，所包含的數字組合。

三、研究三：簡化問題（只排成一排，成功牌組加入循環）

說明：我們將遊戲方式再修正成只排一組，成功牌組加入循環，這樣一來除了可100%成功外，我們更去記錄成功牌組中，所包含的數字組合。

	盤數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
9	(1,1,7)	1			1						1		1	1		1			1	1		
	(1,2,6)		1	1		1	2	1	2	2		1		1	2	1	2	1	1		2	
	(1,3,5)		1		1	1		1			1	1		2		1		1		1		
	(1,4,4)	1		1	1					1	1	1	1		1		1				1	
	(2,2,5)																					
	(2,3,4)	1	1	1	1	1	2	1	2		1	1	1	1		1		1	2	1		
	(3,3,3)																					
	小計	3	3	3	4	3	4	3	4	3	4	4	3	4	3	4	3	3	4	3	3	
19	(1,8,10)		1	1		1	1	1	1	1			1	1	1		1	1	1	1	1	
	(1,9,9)	1	1	1		1	1	1	1			1						1				
	(2,7,10)	2	1	2	1	1		1		1	1	1	2	1	1	1	1	1		2	1	
	(2,8,9)	1	1		1	1		1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	(3,6,10)	1	1	1		1		1					1					1	1			
	(3,7,9)	1			1		1		1	3	1		1		3	1	3			1	3	
	(3,8,8)			1								1										
	(4,5,10)	1	1		1	1	1	1	1	2	1	1			2	1	2	1		1	2	
	(4,6,9)		1	1		1		1					1	2		1		1	1	2		
	(4,7,8)		1			1	1	1	1					1		1		1	1			
	(5,5,9)			1									1							1		
	(5,6,8)	3	1	1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	2	
	(5,7,7)		1	1		1	1	1	1			1		1					1	1		
	(6,6,7)				1							1	1			1						
小計	10	10	10	8	10	8	10	8	10	8	8	10	8	10	8	10	10	8	10	10		
29	(9,10,10)				1		1		1		1	1		1		1			1			
	小計	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	

	盤數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
9	(1,1,7)	1				1		1	1	1	1			1					1			
	(1,2,6)	1	2	2	2	1	2				1		2		2	2	2	2		2	2	
	(1,3,5)	1				1	1	1	1		1	1	1	2	1				1		1	
	(1,4,4)		1													1	1			1		
	(2,2,5)	1				1		1		1		1										
	(2,3,4)			1	1			1	1	1		1	1		1				1	1		1
	(3,3,3)																					
	小計	4	3	3	3	4	3	4	3	3	3	3	3	4	3	4	3	3	3	3	3	3
19	(1,8,10)		1	1	1			1	1	1		3				1	1	1	1	1	1	
	(1,9,9)			1	1		1			1			1		1			1			1	
	(2,7,10)	1	1	1	1	1	1		1	1	1			2		1	1	1	1	1	1	
	(2,8,9)		1				1	1	2		2	1	1	2	1	1	1		2	1	1	
	(3,6,10)			1	1				1	1	1			1				1	1			
	(3,7,9)	1	3	1	1	1	1	1				1				3	3	1		3		
	(3,8,8)	1				1	1			1	1		1		1							1
	(4,5,10)	1	2	1	1	1	3	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2
	(4,6,9)	2				2		1	2	1	2	2		2						2		
	(4,7,8)	1		2	2	1	1	1		1			1	1	1				2			1
	(5,5,9)			1	1					1									1			
	(5,6,8)	1	2	1	1	1		1	1					1		2	2	1	1	1	2	
	(5,7,7)								1		1	1	1		1					1		1
	(6,6,7)						1	1		1		1	1		1							1
小計	8	10	10	10	8	10	8	10	10	10	10	10	8	10	8	10	10	10	10	10	10	8
29	(9,10,10)	1				1		1					1		1							1
	小計	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1

	盤數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
9	(1,1,7)		2	1						1	2				1				1			
	(1,2,6)	2		1	1	1	1	1	3				2	1	1	1	3	2	1		2	
	(1,3,5)	1					1	1				1	2	1		1		1		1	2	
	(1,4,4)		1		1	1				1	1	1		2							1	
	(2,2,5)		1		1	1			1		1	1			1	1				1	1	
	(2,3,4)			1				1														
	(3,3,3)																					
	小計	3	4	3	3	3	3	3	3	3	4	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	4
19	(1,8,10)	1		1	1	1	2	1		1		1			1	1		1	1	1		
	(1,9,9)				1	1		1	1			1				1	1				1	
	(2,7,10)	1		1	1	1	1		1	1		2		1	1		1	1			2	
	(2,8,9)	1	1	1			1	1		1	1		2	2		1		1	1		2	
	(3,6,10)	1	1		2	2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
	(3,7,9)	1		2	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1	1		
	(3,8,8)		1							1	1	1	1			1		1				1
	(4,5,10)	1	1	2			1	2	2	1	1		1		1	2	2	1	1			1
	(4,6,9)	1	1	1			2			1	1	1	1		2			1	1	1	1	1
	(4,7,8)	2	1		2	2		2	2		1	1	2		1	2	2	2	2	2	1	2
	(5,5,9)	1	1		1	1				1	1	1	1			1		1	1	1	1	
	(5,6,8)			2	1	1	1							2								
	(5,7,7)						1							1	1							1
	(6,6,7)		1						1		1	1	1			1						1
小計	10	8	10	10	10	10	10	10	10	8	10	8	8	10	10	10	10	10	10	10	8	
29	(9,10,10)		1								1		1	1								1
	小計	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

	盤數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
9	(1,1,7)										1	1		1	1		1		1		1	
	(1,2,6)	2	2	2	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1	1	1	2	
	(1,3,5)	1	2				1	1		3	1		1		1	1	1					
	(1,4,4)	1		1	1	1	1	1	1		1			1				1		1		
	(2,2,5)	1			1	1						1	1				1	1				1
	(2,3,4)								1			1		1		1				2	1	1
	(3,3,3)			1																		
	小計	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	4	3	4	4	4
19	(1,8,10)			1		1	1	1	2	1		2				1		1	1	1	1	
	(1,9,9)					1						2			1		1				1	
	(2,7,10)		1			1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2		1	1	1	1	
	(2,8,9)		1	2	1		2	1	1	2	2				1		1					
	(3,6,10)				1	1	1				2	1	2		1		1	2			1	
	(3,7,9)	1	1		1	1	1	2	2			1		1		1			1	2	1	
	(3,8,8)	1			1	1								1	1		1	1				
	(4,5,10)		1	1	1	1	1	1	1	1			1		1	1	1					1
	(4,6,9)		1		1			1		2	1	2		1	2	1	2	1	1			1
	(4,7,8)	2	2	1		1	1			1	1	1	3			1	1	1	1	1	1	1
	(5,5,9)	1		1		1	1		1		1	1		1	1			1	1	1		
	(5,6,8)		1		1			2	1		1	1	1	2		2				2	2	2
	(5,7,7)			1	1												1	1				
	(6,6,7)	1		1		1	1		1	1												
小計	6	8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10	8	10	10	8	10	8	8	10	
29	(9,10,10)	2	1	1	1									1			1		1	1		
	小計	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0

	盤數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
9	(1,1,7)	1			1					1	1			1	1	1				1	1
	(1,2,6)			1		1	1	2	2								1	1	1		
	(1,3,5)		1			1	1		1	2	1				1	1	2	1		1	1
	(1,4,4)		1		1			1					1	1	1				1	1	1
	(2,2,5)					1				1	1	1	1	1		1					
	(2,3,4)	2	1	2	1	1	1						2	1		1	1		1	1	1
	(3,3,3)																				
	小計	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	3	3	3	4
19	(1,8,10)	1	2	2	2	1	1		1		1	3	3	1			1	2	1		
	(1,9,9)	1		1			1	1				1				1			1		
	(2,7,10)	1	2	1	1		1	1	1	1	2				2	1	2	1			2
	(2,8,9)	1	1		1	1	1	1	1	1			1	1	1		1	1	2	1	1
	(3,6,10)	1		1	1		1	2	1	1	1	1	1	2		1		1	2	1	
	(3,7,9)		1		1	1			1				1	1	1		1				1
	(3,8,8)							1			1										
	(4,5,10)	1				1	1	1	1					1			1		1	1	
	(4,6,9)		1	1		1			1	2	3	2	1	1	1	1	2	2			1
	(4,7,8)	1		1	1	1	2	1	2	2	1					2	1	1			
	(5,5,9)	1	1	1	2		1	1	1		1		1						1		
	(5,6,8)	1	1	1		1				1		1		1	3	2	1		1	1	3
	(5,7,7)			1				1				2	1	1					1		1
	(6,6,7)	1	1		1	1	1						1						2	1	
小計	10	10	10	10	8	10	10	10	10	8	10	10	10	10	8	8	10	10	10	8	8
29	(9,10,10)					1				1					1	1				1	1
	小計	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

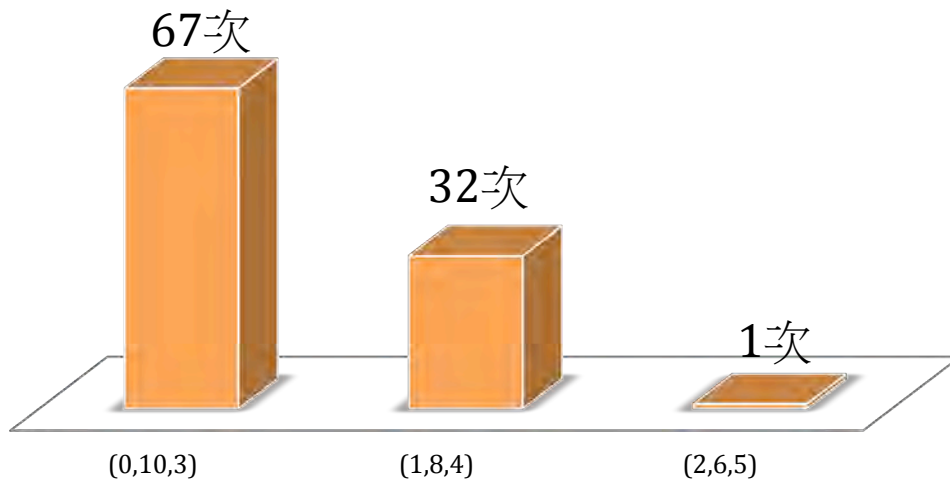
◆ **研究三討論：**

(一) 研究三將成功牌組加入循環後，我們發現到 100 盤都可以成功，成功率 100%。因此我們將記錄表設計成上面的方式，把每一組成功的牌組，其中的**數字組合**記錄下來。我們找到如上表這些不同的組合情況。

(二) 實際模擬 100 盤的結果，數字 (29,19,9) 出現的次數，我們以 (x,y,z) 的方式表示，我們發現 (0,10,3) 的情況共出現 67 次，而 (1,8,4) 的情況共出現了 32 次，比較特別的是，我們竟然還做出了一組 (2,6,5)，這是在研究一和研究二，都沒有出現過。

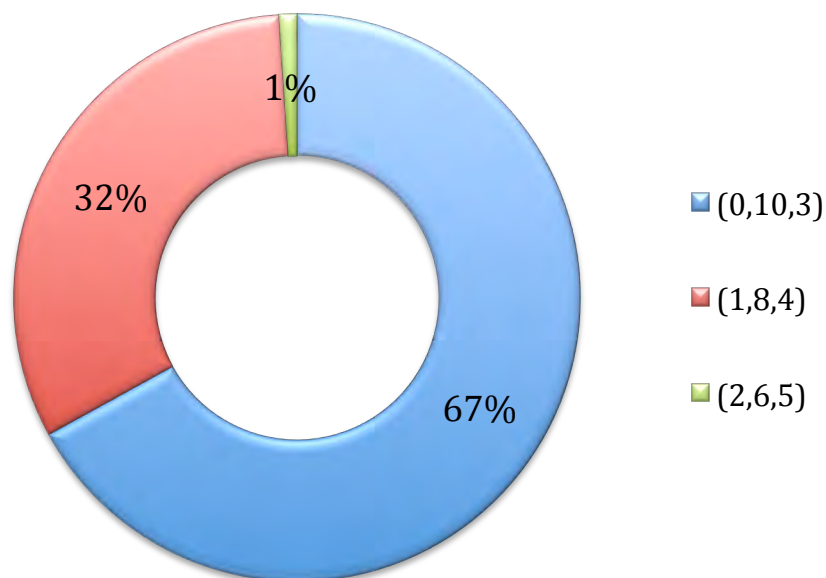
□

研究三 成功牌組分析圖



□

研究三 成功牌組比率圖



(三) 從研究三的分析中，我們找到一組 (2,6,5)。這是之前實驗，都不曾出現的組合。令我們不禁懷疑，是否還能夠有其他的組合呢？因此，我們決定利用所學的數學方程式計算，看是否能找出其中的答案！

四、研究四：利用數學未知數，列出式子解題

根據「揪出小三」這個撲克牌遊戲的方法，我們試著利用數學課，未知數的算式填充題的方式，列出方程式，解出我們實驗出的結果。

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 9、19 和 29 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-9x-19y-29z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-9(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-9(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-117-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 103-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=10$ ，剩下的點數為 3。
- (十) 因此也求出 $y+2z=10$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 9	情況一	情況二	情況三
29 的組數 z	2	1	0
19 的組數 y	6	8	10
9 的組數 x	5	4	3

◆ 實際模擬情況一，剩下「3」

成功牌組						
29	(9,10,10)	(9,10,10)				
19	(2,8,9)	(3,8,8)	(4,6,9)	(4,7,8)	(5,7,7)	(6,6,7)
9	(1,2,6)	(1,3,5)	(1,4,4)	(2,2,5)		

◆ 實際模擬情況二，剩下「3」

成功牌組						
29	(9,10,10)					
19	(2,8,9)	(3,6,10)	(3,6,7)	(4,7,8)	(4,7,8)	(4,7,8)
	(4,5,10)	(5,5,9)				
9	(1,2,6)	(1,2,6)	(1,2,6)	(1,3,5)		

◆ 實際模擬情況三，剩下「3」

成功牌組						
29	無					
19	(1,9,9)	(2,7,10)	(2,8,9)	(3,6,10)	(3,8,8)	(4,5,10)
	(4,5,10)	(4,6,9)	(5,6,8)	(5,7,7)		
9	(1,1,7)	(1,2,6)	(2,3,4)			

五、研究五：探討其他「數字尾數」的結果

根據研究四的數學方程式之解法，我們試著去證明，若將遊戲改成不同尾數，最後一張是否也是出現「3」呢？或是會揪出其他數字？亦或無解？

■ 尾數為八：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 8、18 和 28 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-8x-18y-28z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-8(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-8(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-104-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 116-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=11$ ，剩下的點數為 6。
- (十) 因此也求出 $y+2z=11$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 8	情況一	情況二	情況三	情況四
28 的組數 z	3	2	1	0
18 的組數 y	5	7	9	11
8 的組數 x	5	4	3	2

◆ 實際模擬情況一，剩下「6」

成功牌組						
28	(8,10,10)	(9,9,10)	(9,9,10)			
18	(2,8,8)	(4,7,7)	(5,5,8)	(5,6,7)	(5,6,7)	
8	(1,1,6)	(1,3,4)	(1,3,4)	(2,2,4)	(2,3,3)	

◆ 實際模擬情況二，剩下「6」

成功牌組						
28	(8,10,10)	(9,9,10)				
18	(2,8,8)	(2,6,10)	(3,6,9)	(3,6,9)	(4,7,7)	(4,7,7)
		(5,5,8)				
8	(1,2,5)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,4)		

◆ 實際模擬情況三，剩下「6」

成功牌組						
28	(8,10,10)					
18	(1,8,9)	(2,6,10)	(2,7,9)	(3,5,10)	(3,6,9)	(3,7,8)
	(4,5,9)	(4,7,7)	(5,5,8)			
8	(1,1,6)	(1,3,4)	(2,2,4)			

◆ 實際模擬情況四，剩下「6」

成功牌組						
28	無					
18	(1,7,10)	(2,6,10)	(2,7,9)	(2,7,9)	(3,5,10)	(3,6,6)
	(3,7,8)	(4,4,10)	(4,6,8)	(5,5,8)		
8	(1,2,5)	(1,3,4)				

■ 尾數為七：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 7、17 和 27 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-7x-17y-27z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-7(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-7(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-91-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 129-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=12$ ，剩下的點數為 9。
- (十) 因此也求出 $y+2z=12$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 7	情況一	情況二	情況三	情況四
27 的組數 z	3	2	1	0
17 的組數 y	6	8	10	12
7 的組數 x	4	3	2	1

◆ 實際模擬情況一，剩下「9」

成功牌組						
27	(7,10,10)	(7,10,10)	(9,9,9)			
17	(1,8,8)	(3,7,7)	(4,5,8)	(4,5,8)	(5,6,6)	(5,6,6)
7	(1,2,4)	(1,2,4)	(1,3,3)	(2,2,3)		

◆ 實際模擬情況二，剩下「9」

成功牌組						
27	(7,10,10)	(8,9,10)				
17	(1,7,9)	(1,8,8)	(3,4,10)	(3,5,9)	(4,5,8)	(4,6,7)
	(4,6,7)	(5,6,6)				
7	(1,1,5)	(2,2,3)	(2,2,3)			

◆ 實際模擬情況三，剩下「9」

成功牌組						
27	(7,10,10)					
17	(1,7,9)	(1,8,8)	(2,5,10)	(2,6,9)	(2,7,8)	(3,4,10)
	(3,6,8)	(4,4,9)	(5,5,7)	(5,6,6)		
7	(1,2,4)	(1,3,3)				

◆ 實際模擬情況四，剩下「9」

成功牌組						
27	無					
17	(1,6,10)	(1,8,8)	(2,5,10)	(2,6,9)	(2,6,9)	(2,7,8)
	(3,4,10)	(3,4,10)	(3,5,9)	(3,7,7)	(4,5,8)	(4,6,7)
7	(1,1,5)					

■ 尾數為六：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 6、16 和 26 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-6x-16y-26z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-6(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-6(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-78-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 142-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=14$ ，剩下的點數為 2。
- (十) 因此也求出 $y+2z=14$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 6	情況一	情況二	情況三	情況四
26 的組數 z	4	3	2	1
16 的組數 y	6	8	10	12
6 的組數 x	3	2	1	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「2」

成功牌組						
26	(6,10,10)	(6,10,10)	(8,9,9)	(8,9,9)		
16	(2,6,8)	(3,5,8)	(3,6,7)	(4,5,7)	(4,5,7)	(4,5,7)
6	(1,1,4)	(1,2,3)	(1,2,3)			

◆ 實際模擬情況二，剩下「2」

成功牌組						
26	(6,10,10)	(6,10,10)	(8,9,9)			
16	(1,6,9)	(1,7,8)	(2,6,8)	(3,4,9)	(3,5,8)	(4,5,7)
	(4,5,7)	(4,5,7)				
6	(1,2,3)	(1,2,3)				

◆ 實際模擬情況三，剩下「2」

成功牌組						
26	(8,8,10)	(8,8,10)				
16	(1,5,10)	(1,6,9)	(2,5,9)	(2,7,7)	(3,4,9)	(3,4,9)
	(3,6,7)	(5,5,6)				
6	(1,1,4)					

◆ 實際模擬情況四，剩下「2」

成功牌組						
26	(6,10,10)					
16	(1,5,10)	(1,6,9)	(1,7,8)	(1,7,8)	(2,5,9)	(2,6,8)
	(2,7,7)	(3,3,10)	(3,4,9)	(3,4,9)	(4,4,8)	(5,6,6)
6	無					

■ 尾數為五：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 5、15 和 25 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-5x-15y-25z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-5(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-5(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-65-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 155-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=15$ ，剩下的點數為 5。
- (十) 因此也求出 $y+2z=15$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 5	情況一	情況二	情況三	情況四
25 的組數 z	5	4	3	2
15 的組數 y	5	7	9	11
5 的組數 x	3	2	1	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「5」

成功牌組					
25	(5,10,10)	(6,9,10)	(7,8,10)	(7,9,9)	(8,8,9)
15	(3,5,7)	(3,6,6)	(4,3,8)	(4,4,7)	(4,5,6)
5	(1,1,3)	(1,2,2)	(1,2,2)		

◆ 實際模擬情況二，剩下「5」

成功牌組					
25	(5,10,10)	(6,9,10)	(7,8,10)	(7,9,9)	
15	(1,5,9)	(2,5,8)	(2,6,7)	(3,4,8)	(3,4,8) (3,6,6)
	(4,4,7)				
5	(1,1,3)	(1,2,2)			

◆ 實際模擬情況三，剩下「5」

成功牌組					
25	(5,10,10)	(7,9,9)	(6,9,10)		
15	(1,5,9)	(1,6,8)	(1,7,7)	(2,3,10)	(2,5,8) (3,4,8)
	(3,4,8)	(3,6,6)	(4,4,7)		
5	(1,2,2)				

◆ 實際模擬情況四，剩下「5」

成功牌組					
25	(6,9,10)	(7,8,10)			
15	(1,4,10)	(1,5,9)	(1,6,8)	(1,7,7)	(2,3,10) (2,4,9)
	(2,5,8)	(2,6,7)	(3,3,9)	(3,4,8)	(4,5,6)
5	無				

■ 尾數為四：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 4、14 和 24 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-4x-14y-24z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-4(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-4(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-52-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 168-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=16$ ，剩下的點數為 8。
- (十) 因此也求出 $y+2z=16$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 4	情況一	情況二	情況三
24 的組數 z	5	4	3
14 的組數 y	6	8	10
4 的組數 x	2	1	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「8」

成功牌組						
24	(4,10,10)	(4,10,10)	(6,9,9)	(6,9,9)	(8,8,8)	
14	(2,5,7)	(2,5,7)	(3,4,7)	(3,4,7)	(3,5,6)	(3,5,6)
4	(1,1,2)	(1,1,2)				

◆ 實際模擬情況二，剩下「8」

成功牌組						
24	(4,10,10)	(4,10,10)	(7,8,9)	(7,8,9)		
14	(1,4,9)	(1,5,8)	(2,3,9)	(2,5,7)	(3,4,7)	(3,5,6)
	(3,5,6)					
4	(1,1,2)					

◆ 實際模擬情況三，剩下「8」

成功牌組						
24	(4,10,10)	(7,8,9)	(7,8,9)			
14	(1,4,9)	(1,4,9)	(1,5,8)	(1,6,7)	(2,3,9)	(2,5,7)
	(2,5,7)	(2,6,6)	(3,3,8)	(3,5,6)		
4	無					

◆ 尾數為三：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 3、13 和 23 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-3x-13y-23z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-3(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-3(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-39-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 181-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=18$ ，剩下的點數為 1。
- (十) 因此也求出 $y+2z=18$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 3	情況一	情況二
23 的組數 z	6	5
13 的組數 y	6	8
3 的組數 x	1	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「1」

成功牌組

23	(3,10,10)	(3,10,10)	(6,8,9)	(6,8,9)	(7,7,9)	(7,7,9)
13	(2,3,8)	(2,3,8)	(2,5,6)	(2,5,6)	(4,4,5)	
3	(1,1,1)					

◆ 實際模擬情況二，剩下「1」

成功牌組

23	(3,10,10)	(5,9,9)	(6,7,10)	(7,8,8)	(7,7,9)	
13	(1,2,10)	(1,4,8)	(1,6,6)	(2,2,9)	(2,3,8)	(3,4,6)
	(3,5,5)	(4,4,5)				
3	無					

◆ 尾數為二：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 2、12 和 22 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-2x-12y-22z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-2(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-2(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-26-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 194-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=19$ ，剩下的點數為 4。
- (十) 因此也求出 $y+2z=19$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 2	情況一
22 的組數 z	6
12 的組數 y	7
2 的組數 x	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「1」

成功牌組						
22	(2,10,10)	(2,10,10)	(4,9,9)	(5,8,9)	(6,7,9)	(6,8,8)
12	(1,3,8)	(1,4,7)	(1,5,6)	(1,5,6)	(2,3,7)	(2,3,7)
	(3,4,5)					
2	無					

◆ 尾數為一：

- (一) 從一加到十為 55，故總點數為 220。
- (二) 設 1、11 和 21 的組數分別為 x 組、 y 組和 z 組 ($x+y+z=13$)
- (三) 故剩下的點數為 $220-x-11y-21z$ ($1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$)
- (四) 整理為 $220-(x+y+z)-10y-20z$
- (五) 整理為 $220-(x+y+z)-10(y+2z)$
- (六) 代入 $x+y+z=13$ ，且令 $y+2z=n$
- (七) 得到 $220-13-10n$
- (八) 根據 $1 \leq \text{剩下的點數} \leq 10$ ，得到 $1 \leq 207-10n \leq 10$
- (九) 解出 $n=20$ ，剩下的點數為 7。
- (十) 因此也求出 $y+2z=20$ ，利用這性質和 $x+y+z=13$ ，推出下列各種成功牌組的可能。

尾數為 1	情況一
21 的組數 z	7
11 的組數 y	6
1 的組數 x	0

◆ 實際模擬情況一，剩下「7」

成功牌組						
21	(1,10,10)	(3,8,10)	(3,9,9)	(4,7,10)	(4,8,9)	(5,7,9)
	(6,7,8)					
11	(1,2,8)	(1,4,6)	(1,5,5)	(2,3,6)	(2,3,6)	(2,4,5)
1	無					

陸、討論

- 一、**研究一**：根據實際模擬一百盤的結果，我們發現到利用遊戲原本的玩法，不論失敗或成功，光是下完一盤，平均就要花 24 分鐘，因此讓我們花了很多時間，且失敗率高達 66%。各種數字 29、19、9 牌組出現的次數，以 (0,10,3) 出現的機率最高，機率为 74%。
- 二、**研究二**：排成一排後，已減少遊戲的時間。成功的機率也從研究一的 34% 提高到 38%。但失敗率仍然很高，機率为 62%。各種數字 29、19、9 牌組出現的次數，還是 (0,10,3) 出現的機率最高，機率为 66%。
- 三、**研究三**：利用最後改良的遊戲方式，總算讓每一盤都一定可以成功剩下「3」。因此我們開始進行每一盤的牌組分析。結果我們發現到，除了研究一、二出現的 (0,10,3) 和 (1,8,4) 之外，還做出了一組之前未出現的 (2,6,5)。各牌組組合出現機率为如下：(0,10,3) 出現機率为 67%，(1,8,4) 出現機率为 32%，而 (2,6,5) 出現機率为 1%。
- 四、**研究四**：我們利用數學方程式，成功證明出「揪出小三」這個撲克牌遊戲，為什麼最後會剩下一張「3」。並利用方程式，推算出各種數字 29、19、9 牌組的組數，結果共有 (0,10,3)、(1,8,4) 和 (2,6,5) 三種，與研究三實際操作出來的情況相同。
- 五、**研究五**：利用數學方程式證明，若將遊戲方式改成其他尾數的情況，結果如下：(一) 以 28、18、8 為遊戲，揪出「6」；(二) 以 27、17、7 為遊戲，揪出「9」；(三) 以 26、16、6 為遊戲，揪出「2」；(四) 以 25、15、5 為遊戲，揪出「5」；(五) 以 24、14、4 為遊戲，揪出「8」；(六) 以 23、13、3 為遊戲，揪出「1」；(七) 以 22、12、2 為遊戲，揪出「4」；(八) 以 21、11、1 為遊戲，揪出「7」。

尾數	整理後的方程式	設 $y+2z=n$	聯立推出可能的解		揪出的數字
9	$1 \leq 103-10n \leq 10$	$n=10$	$y+2z=10$	$x+y+z=13$	3
8	$1 \leq 116-10n \leq 10$	$n=11$	$y+2z=11$	$x+y+z=13$	6
7	$1 \leq 129-10n \leq 10$	$n=12$	$y+2z=12$	$x+y+z=13$	9
6	$1 \leq 142-10n \leq 10$	$n=14$	$y+2z=14$	$x+y+z=13$	2
5	$1 \leq 155-10n \leq 10$	$n=15$	$y+2z=15$	$x+y+z=13$	5
4	$1 \leq 168-10n \leq 10$	$n=16$	$y+2z=16$	$x+y+z=13$	8
3	$1 \leq 181-10n \leq 10$	$n=18$	$y+2z=18$	$x+y+z=13$	1
2	$1 \leq 194-10n \leq 10$	$n=19$	$y+2z=19$	$x+y+z=13$	4
1	$1 \leq 207-10n \leq 10$	$n=20$	$y+2z=20$	$x+y+z=13$	7

柒、結論

- 一、**真的是揪出「小三」**：將一副撲克牌 1~10（四個花色）拿出，每三張一組，每組和為 9、19 和 29 的其中之一，共可以得到十三組，留下一張牌，必為數字三。
- 二、**遊戲不一定每次都成功**：「揪出小三」原本遊戲的方式，經過我們的實驗，遊戲不一定每次都會成功，成功完成遊戲的機率大概是 34%。
- 三、**(0,10,3) 最常出現**：「揪出小三」成功牌組的探討中，我們發現 (0,10,3) 出現的機率最高，三個研究出現的機率分別是 74%、66%和 67%，根據我們的討論，我們認為應該是跟 29 這個數字有關，因為 29 只能由撲克牌 10、10、9 所組成，而撲克牌 10 在一副撲克牌中，總共也才四張牌，故 (1,8,4) 出現的機率較少，同理，要出現兩個「29」牌組的 (2,6,5)，更是相當不容易。
- 四、**遊戲方式的創新**：我們利用數學方程式，以及實際模擬的方式，得到其他尾數遊戲方式的結果，故我們以後不一定要限制於 29、19、9 的遊戲方式，我們也可以改變成利用尾數 8 (28、18、8)、尾數 7 (27、17、7)、尾數 6 (26、16、6)、尾數 5 (25、15、5)、尾數 4 (24、14、4)、尾數 3 (23、13、3)、尾數 2 (22、12、2) 和尾數 1 (21、11、1) 來進行這個撲克牌遊戲。
- 五、**尾數大破解**：根據方程式證明，再實際進行成功牌組的模擬和討論，我們將不同尾數所揪出來的數字，以及成功牌組的分析，整理成下表。不同尾數所進行的遊戲，所揪出來的數字，依序剛好是 3、6、9、2、5、8、1、4、7。

尾數	揪出	(2□、1□、□) 成功牌組組數					
9	3				(0,10,3)	(1,8,4)	(2,6,5)
8	6			(0,11,2)	(1,9,3)	(2,7,4)	(3,5,5)
7	9		(0,12,1)	(1,10,2)	(2,8,3)	(3,6,4)	
6	2	(1,12,0)	(2,10,1)	(3,8,2)	(4,6,3)		
5	5	(2,11,0)	(3,9,1)	(4,7,2)	(5,5,3)		
4	8	(3,10,0)	(4,8,1)	(5,6,2)			
3	1	(5,8,0)	(6,6,1)				
2	4	(6,7,0)					
1	7	(7,6,0)					

捌、參考資料及其他

- 一、翰林文教事業（2012）。國民小學數學學習領域第十冊-第六單元未知數。台北：翰林文教事業股份有限公司。
- 二、翰林文教事業（2012）。國民小學數學學習領域第十二冊-第二單元怎樣解題。台北：翰林文教事業股份有限公司。

【評語】 080411

研究主題具吸引力與創意，研究過程的陳述清楚簡明，研究者結合排列組合與機率的相關概念，從數學遊戲中歸納出規律性，是一篇有趣可以拜讀的參展作品。