中華民國第 52 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080410

保險箱駭客～行列、奇偶數的相關性

學校名稱：臺中市中區光復國民小學

作者：	指導老師：
小六 林子硯	林筆藝
小六 許喬羽	張東瑋
小六 黃浩翔	
小六 楊千萱	
小六 張智誠	

關鍵詞：行列、奇數、偶數

作品名稱：保險箱駭客~行列、奇偶數的相關性

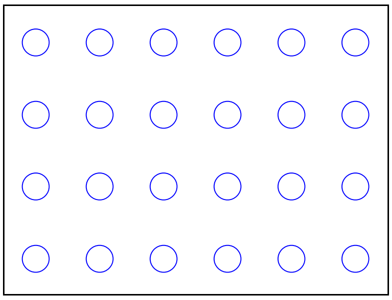
摘　　要：以「保險箱駭客」的問題出發，討論在偶偶棋盤、偶偶不相等棋盤、奇奇棋盤、奇奇不相等棋盤、奇偶棋盤中，符合行列奇數和行列偶數的各種可能。接著歸納出棋子總數的規則，找到其中幾個例外情況以及特殊的性質。利用棋子數的「增加 2」與「增加 4」，找出棋子的排列方法。並且，從中學習科學研究的方法，以及了解奇偶性質與行列的關聯。

壹、　研究動機

在六年級上學期的數學課中，第六單元為數量關係，其中我們學習到圖形中行與列的規則與變化。之後，我們又在一本「數學遊樂園之妙想天開」的數學遊戲書籍中，看到一個與行列相關的問題，下面敘述擷取自書中：

題目：保險箱駭客

說明：某幫派雇用了一個經驗老到的保險箱駭客，協助他們闖入室內銀行的大型保險庫。這個鎖的安全機制受控於電腦系統，而操作面則是在 4×6 的陣列上的一整組按鈕（如下圖）。



*這位駭客嘗試了好幾種組合，有時是單一按鍵，有時則多個按鍵，但一直沒有成功。這是因為，他不知道這個保險庫的開啟秘訣是要*找出總量為 16 個鍵，且鍵盤行和列上都能是奇數個數目*。在這個措施的保護下，你能夠解開這道鎖嗎？*

首先，我們找到許多組答案，舉一例如下表 1：

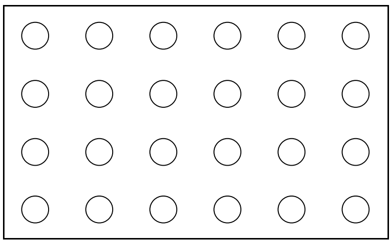
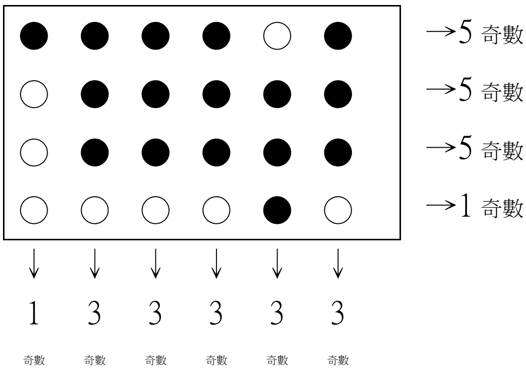
a.  說明： 1. 一個 4×6 的陣列上，有一組按鈕共 24 個。 2. 必須按下 16 個按鈕。	b.  說明： 1. 實心的圓點為按下的按鈕。 2. 行與列皆為奇數。 3. 總數是 16（5+5+5+1=16）。

表 1

當我們在討論這個問題的過程中，有人提出若是 15 個棋子，也能找到答案嗎？若是使用更大的棋盤，要如何找到答案呢？於是，我們決定深入探討在方格陣列上，行與列的按鈕與總數的奇偶關係。

貳、 研究目的

一、 探討在偶偶陣列、偶偶不相等陣列、奇奇陣列、奇奇不相等陣列、奇偶陣列上，行與列可以有奇數或偶數個按鈕的保險箱解碼方法。

二、 探討在偶偶陣列、偶偶不相等陣列、奇奇陣列、奇奇不相等陣列、奇偶陣列上，按鈕總數為奇數或偶數的保險箱解碼方法。

三、 探討在偶偶陣列、偶偶不相等陣列、奇奇陣列、奇奇不相等陣列、奇偶陣列上，按鈕可能總數最多或最少的保險箱解碼方法。

四、 探討不同陣列上，行列與總數的其他性質。

五、 探討不同陣列上，能符合保險箱解鎖的按鈕位置。

參、 研究設備及器材

紙張、筆、電腦、計算機、棋盤、棋子

肆、 研究過程或方法

一、 簡化題目為適合實際操作的棋盤情境

當我們開始進行討論時，我們發現可以先忽略保險庫與按鍵這個情境。我們再更進一步把問題簡化成：

在一個 4×6 的空棋盤上，想要放入 16 個棋子，使得在「行」和「列」上都維持「奇數」個數目。

利用這樣的情境，我們可以實際的操作棋子，或利用方格紙與作圖，並\找出解答與規律。

二、 名詞解釋

（一）奇數

對偶數而言，其數以二除之，不能得整數者。如 1，3，5，…等是，亦稱單數。凡奇數以 2 除之均得餘數為 1。（幼獅數學大辭典編輯小組，民 71。）

（二）偶數

2 之整數倍數，又稱雙數。及其數以 2 除之，能得整數者。非偶數則為奇數。（幼獅數學大辭典編輯小組，民 71。）

在這裡，我們對於「0」是不是偶數提出疑問。查了資料發現有各種不同的說法。老師說在小學課程內容中，三年級的課程中提到偶數是個位數為「0、2、4、6、8」的數字。（康軒版數學第五冊第三單元）。若由這個定義來想，那麼「0」便可以算是偶數。

（三）行列

直的稱行，橫的稱列。（教育部國語辭典簡編本網路版）

（四）偶偶棋盤、偶偶不相等棋盤、奇奇棋盤、奇奇不相等棋盤、奇偶棋盤

在本研究中，針對所要研究的不同類型棋盤作定義：

1. 偶偶棋盤：一個偶數行、偶數列的矩形棋盤，且行與列的數目相等。
2. 偶偶不相等棋盤：一個偶數行、偶數列的矩形棋盤，行與列的數目不相等。

3. 奇奇棋盤：一個奇數行、奇數列的方形棋盤，且行與列的數目相等。
4. 奇奇不相等棋盤：一個奇數行、奇數列的矩形棋盤，行與列的數目不相等。
5. 奇偶棋盤：一個奇數行、偶數列的矩形棋盤。

三、 格盤格數與行列奇偶的初步討論

（一）2×2 棋盤

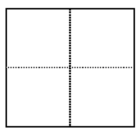
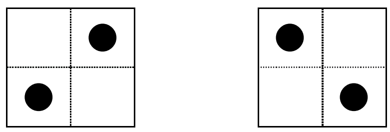
老師建議我們，在研究的最初，先把問題簡化成比較「小」的棋盤，或是比較「少」的棋子。於是我們先用一個 2x2 的棋盤來討論。（因為 1×1、1×2、2×1 的棋盤只能放入 1 或 2 個棋子，討論的範圍太小，連奇數與偶數都只能討論 1 和 2 兩個數字，沒有代表性。）

在一個 2×2 的棋盤中，可以放入 0~4 個棋子。而把在題目中所規定的行列奇偶性質，考慮進去，我們必須討論的種類如下。其中有許多不可能的狀況，我們把說明列於表格中。

2×2 的棋盤			
編號	棋子數	行與列的奇偶性質	說明
第 0-1 類	0	行與列都是奇數棋子	0 個棋子，行列都是偶數，不符
第 0-2 類	0	行與列都是偶數棋子	有解答
第 1-1 類	1	行與列都是奇數棋子	只有一個棋子，無法排在兩行及兩列中
第 1-2 類	1	行與列都是偶數棋子	只有一個棋子，無法排在兩行及兩列中
第 2-1 類	2	行與列都是奇數棋子	有解答
第 2-2 類	2	行與列都是偶數棋子	2 個棋子，只能排在某一行中，另一行會為 0。但此時每一列就只有一個棋子。
第 3-1 類	3	行與列都是奇數棋子	行與列都是奇數棋子,因為只有每一行只有兩格,所以只能是一行一個棋子,總共兩行兩個棋子，與「3 個棋子」不合。
第 3-2 類	3	行與列都是偶數棋子	3 個棋子，排進兩盒或兩列。無法排成行與列都是偶數棋子。
第 4-1 類	4	行與列都是奇數棋子	棋盤格只有 4 格，只能全部排滿，不合。
第 4-2 類	4	行與列都是偶數棋子	有解答

表 2

因此，刪去不可能出現的狀況之後，只剩下三種配對。我們把這三種情況以及解答的圖形列再下表：

編號	棋子數	行與列的奇偶性質	圖解
第 0-2 類	0	行與列都是偶數棋子	
第 2-1 類	2	行與列都是奇數棋子	

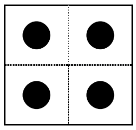
第 4-2 類	4	行與列都是偶數棋子	

表 3

（二）偶偶棋盤中，總數的奇偶數討論

在 2×2 棋盤格的討論與歸納中（如表 2），刪去的剛好都是奇數的情況。為什麼總數是奇數都會被刪除了？我們試著以下圖來說明：

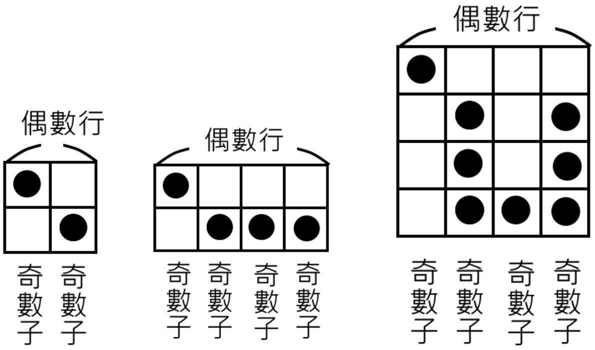


圖 1

由上圖 1 可以發現：【奇數棋子】或【偶數棋子】連加偶數次必定等於偶數。

所以在一個（偶數）×（偶數）的棋盤上（簡稱偶偶棋盤），不論行與列是奇數或是偶數，總數必定會是偶數。

在圖中，我們用「奇數子」來表示有奇數個棋子。因此，在偶偶棋盤，只需要討論總數是偶數的可能就可以了。

有了前面的結論，我們決定先進行偶偶棋盤格的討論。

（三）偶偶棋盤格（m×m）中行與列的奇偶關係

在一個偶偶棋盤中，我們在行列中進行奇數與偶數的探討，而我們在 2×2 的棋盤討論中，因為總共可有 4 個格子，加上總數必定是偶數，所以只能討論 0、2、4 個棋子的狀況(表 3)，因此我們決定討論再大一點的棋盤。在老師的建議下，我們做了 4×4、6×6 與 8×8 的棋盤，以找尋行與列的奇偶關係。

1.4×4 棋盤

在 4×4 棋盤格上，行列奇數中，如果要符合每行或每列皆有棋子，至少要有 4 個棋子。另外，因為總數必定是偶數，所有的可能有：4、6、8、10、12、14、16。

而行列偶數中，因為全空的棋盤（0 個棋子）也是一個解答。所以必須從 0 開始討論。所有的可能有：0、2、4、6、8、10、12、14、16。。

我們試著直接在棋盤上找答案，我們暫時不考慮各種答案的圖形變化，只要先找到一個答案即可。我們找出來的答案如下表 4：

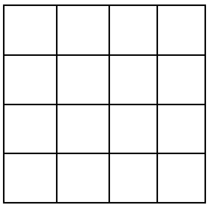
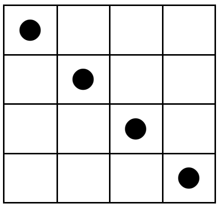
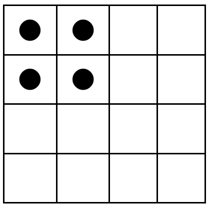
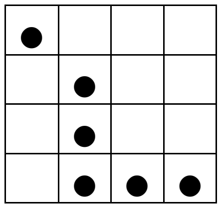
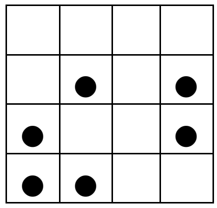
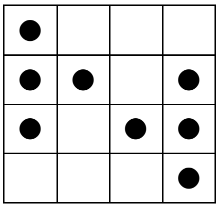
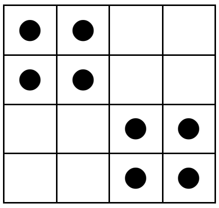
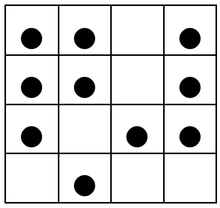
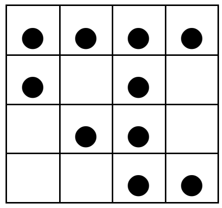
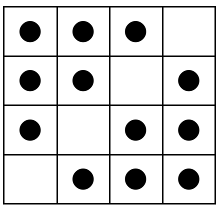
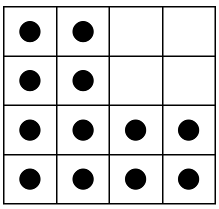
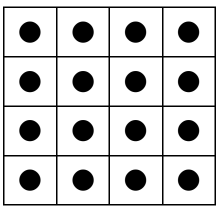
棋盤格：4×4					
棋子數	行與列：奇數	行與列： 偶數	棋子數	行與列：奇數	行與列： 偶數
0			2		找不到答案
4			6		
8			10		
12			14	找不到答案	找不到答案
16	找不到答案				

表 4

從上面的表 4 中，我們發現符合行列奇數的總棋數是 4、6、8、10、12；而符合行列偶數的是 0、4、6、8、10、12、16。

2.6x6 棋盤與 8x8 棋盤

在 6x6 棋盤格中且符合行列奇數，如果要符合每行或每列皆有棋子，至少要有 6 個棋子。再加上總數必定是偶數，排除棋盤格 36 格全滿之情況，所有的可能有：

6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36

符合行列偶數，所有的可能則為：

0、2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36

而在 8×8 的棋盤格上，符合行列奇數有可能的棋子數是：

8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36、38、40、42、44、46、48、50、52、54、56、58、60、62、64

而在 8x8 棋盤格中且符合行列偶數，所有的可能則為：

0、2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36、38、40、42、44、46、48、50、52、54、56、58、60、62、64

如同前面的表 4，我們在 6×6 與 8×8 的棋盤格中所找出來的答案如附件一、附件二，下表為整理過後的答案。

棋子數	棋盤格：4x4		棋盤格：6x6		棋盤格：8x8	
	行與列：奇數	行與列：偶數	行與列：奇數	行與列：偶數	行與列：奇數	行與列：偶數
0		○		○		○
2		×		×		×
4	○	○		○		○
6	○	○	○	○		○
8	○	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○	○
12	○	○	○	○	○	○
14	×	×	○	○	○	○
16	×	○	○	○	○	○
18			○	○	○	○
20			○	○	○	○
22			○	○	○	○
24			○	○	○	○
26			○	○	○	○
28			○	○	○	○
30			○	○	○	○

32			×	○	○	○
34			×	×	○	○
36			×	○	○	○
28					○	○
40					○	○
42					○	○
44					○	○
46					○	○
48					○	○
50					○	○
52					○	○
54					○	○
56					○	○
58					×	○
60					×	○
62					×	×
64					×	○
表格中符號說明: ○：有答案；×：有答案						

表 5

從上表中，我們可以歸納出幾個結果：

（1）最少棋數

各個棋盤中的最少棋子數如下：

棋盤	4×4	6×6	8×8
行列：奇數	4	6	8
行列：偶數	0	0	0

表 6

所以我們推論：在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為奇數的最少棋子數為 m。

在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為偶數的最少棋子數為 0。

（2）最多棋數

各個棋盤中的最多棋子數如下：

棋盤	4×4	6×6	8×8
行列：奇數	12	34	56
行列：偶數	16	36	64

表 7

所以我們推論：在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為奇數的最多棋子數為 $m^2 - m$。

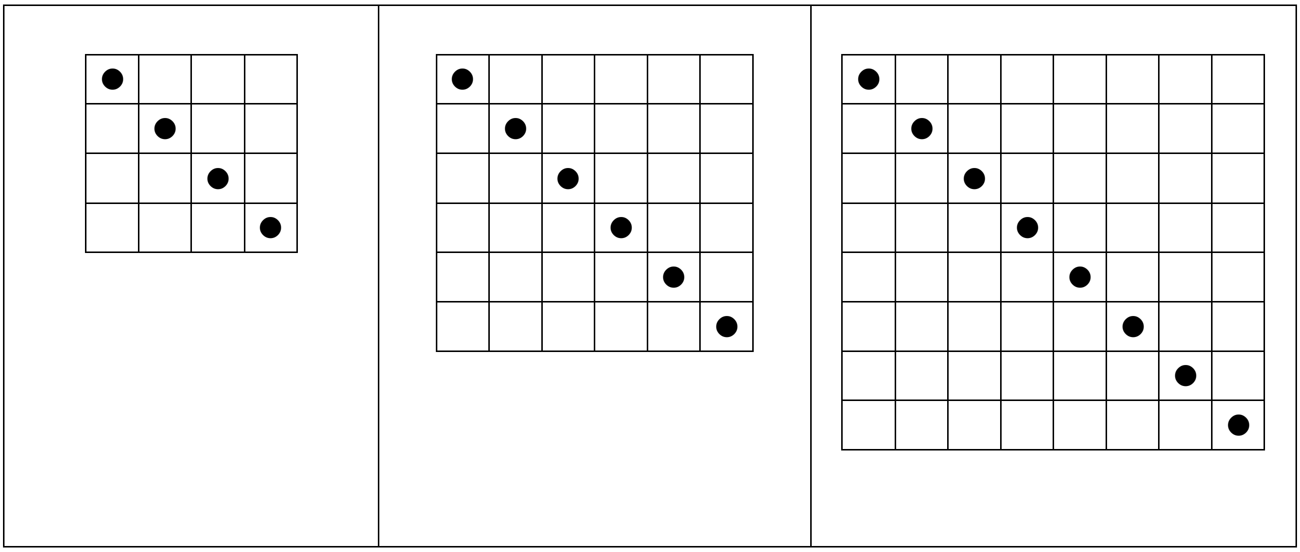
在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為偶數的最多棋子數為 m^2 。

（3）最多棋數與最少棋數的原因推論

當我們從實際的操作中歸納出最多棋數與最少棋數，我們也試著找出原因。

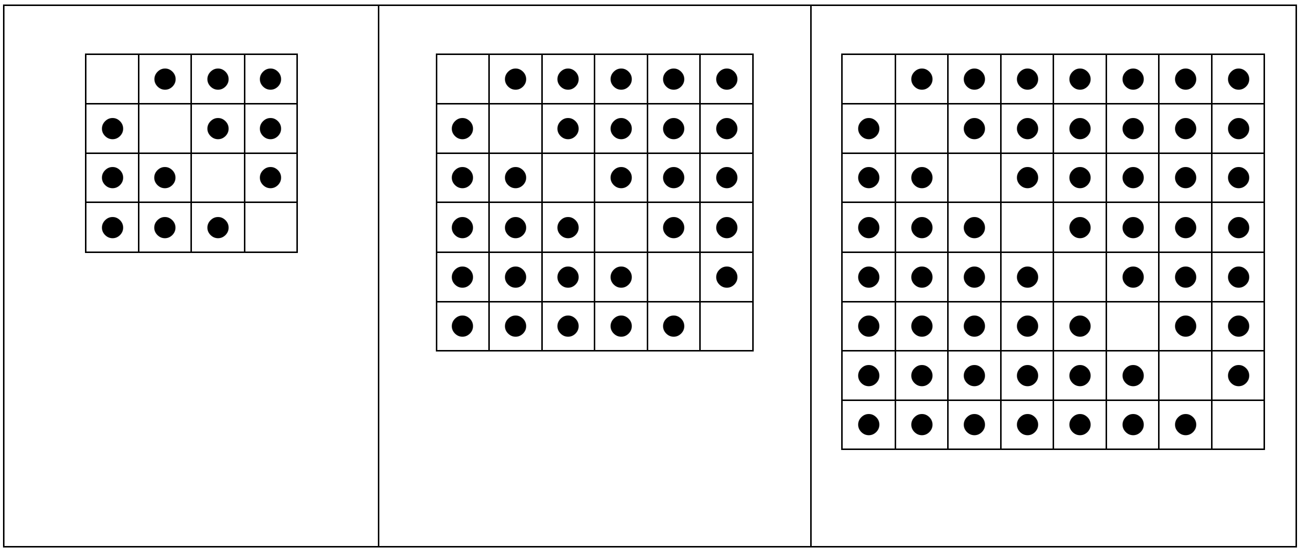
1.　在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為奇數的最少棋子數為 m：

這是因為每一行每一列至少要有 1 個棋子，才能符合行列奇數。因此最少棋數便是 m，解答之一為：



2.　在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為奇數的最多棋子數為 $m^2 - m$。

這是因為每一行每一列必定要有奇數個棋子，而 m 為偶數，所以每一行的最多棋數便是（m－1）。棋子總數就是 $m^2 - m$。解答之一為：



3.　在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為偶數的最少棋子數為 0。

在我們所找到的資料中顯示，0 是偶數，因此最少的棋子數為 0。

4.　在一個 m×m 的偶偶棋盤中，行列為偶數的最多棋子數為 m^2。

在一個偶偶棋盤中，「全滿」的棋盤格必定符合行列偶數。所以行列為偶數的最多棋子數為 m^2。

（4）棋子數：每次增加 2 個棋子，但行列偶數時出現例外

從表中可以發現，行列奇數和行列偶數每增加 2 個棋子都會有答案。我們這些結論整理成下面的表格。

偶偶棋盤（m×m）			
棋盤	最少棋子	最多棋子	棋子數
行列：奇數	m	$m^2 - m$	（m）、 $m+2$、$m+4$……（$m^2 - m$）
行列：偶數	0	m^2	（0）、4、6、8……$m^2 - 4$、（m^2）
			說明:每次為增加 2，但 2 和($m^2 - 2$)例外

表 8

四、 行列奇數中，神秘的「增加 2」

1. 一次增加 2 個棋子

在上面的研究中，我們已經知道行列奇數時的總棋子數為（m）、 $m+2$、$m+4$……（$m^2 - m$）。我們想知道每次增加的「2」個棋子要放在哪裡？以 4×4 棋盤，棋子總數 4→6 來討論：

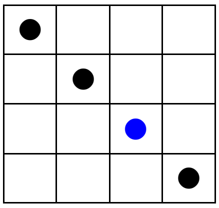
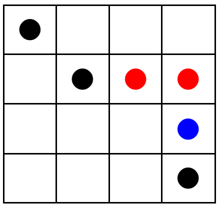
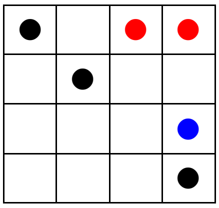
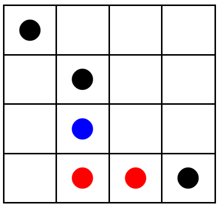
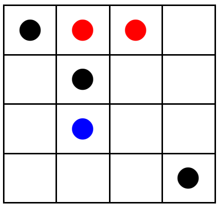
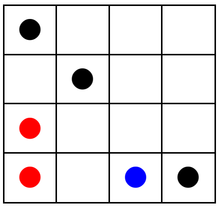
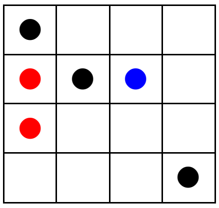
＊任選一個行列奇數的答案。	＊找出多 2 個棋子的解答並標示出位置。（紅色棋為增加棋，藍色棋為移動棋）	
		
		
		

表 9

在任意行或列中加入 1 個棋子，必定使該行或列成為偶數。所以為了符合行列奇數，<u>兩個增加的棋子（紅色棋）必須在同一行或同一列</u>。此時，<u>在另一方向(行或列)必須移動一個</u>

棋子（藍色棋），這樣就能成為解答。

在這裡，我們從棋子在棋盤的操作中，深刻的了解：奇數加偶數必定是奇數。

2. 一次增加 4 個棋子

在上面的討論中，我們發現增加 2 個棋子時，為了符合行列奇數，必須移動原本的一個棋子（藍色棋子）。有同學發現，如果是一次增加 4 個棋子，就不必更動原本棋子的位置。此時，可以將棋子安排在共同的兩行兩列中。如下表 10。

這是因為（奇數＋偶數）仍然是奇數，所以以兩行兩列同時增加 2 個棋子的狀況並不會改變行列的奇偶性質。

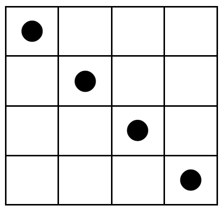
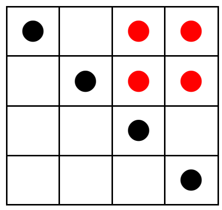
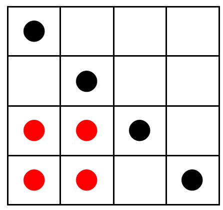
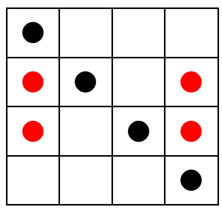
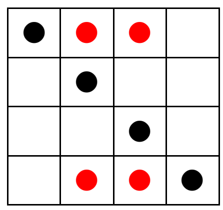
＊任選一個行列奇數的答案。	＊找出多 4 個棋子的解答並標示出位置。	
		
		

表 10

五、 行列偶數中，神秘的「增加 2」

而行列偶數時的總棋子數為（0）、 4、8……（m^2 ）。我們想知道每次增加的「2」個棋子要放在哪裡？是不是如同行列奇數一樣要移動棋子？「增加 4」時是不是也就不必改變位置？

1.總數是 0 為第一個答案，總數是 2 及總數為（m^2 －2）的狀況找不到答案

首先，我們可以知道總棋子數是 0 時符合行列偶數。總棋子數是 2 時只能有一行或一列是偶數。如下圖 2：

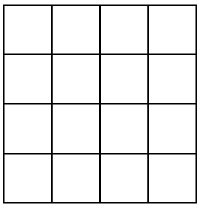
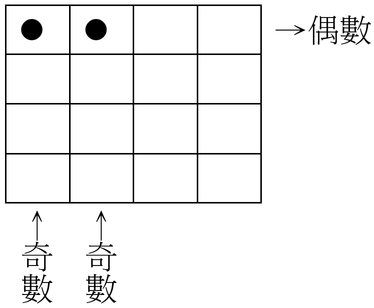
 ＊總棋數是 0	 ＊總棋數是 2，不符合行列皆為偶數

圖 2

至於總數為（m^2 －2）的狀況，也是沒有答案。這一點我們在後來的相反性質中找到解釋。（P13）

2.一次增加 2 個棋子

從總棋數 4 開始，能找到答案。而每次是增加 2 個棋子，我們以 4×4 棋盤，棋子總數 4→6 來討論，發現增加的棋子因為要符合行列偶數，所以必須要在同一行或同一列。此時必須移動原來的 2 個棋子以符合另一行或列的偶數性質：

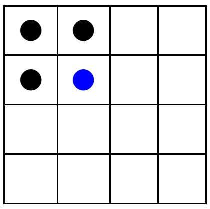
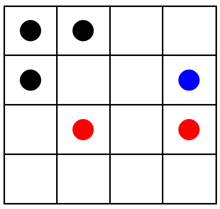
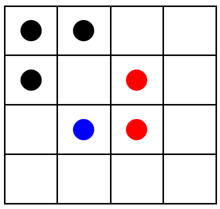
＊任選一個行列偶數的答案。	＊找出多 2 個棋子的解答並標示出位置。（紅色棋為增加棋，藍色為移動棋）	
	解答一 	解答二 

表 11

3.一次增加 4 個棋子

若是「增加 4」也如同行列奇數一樣不必更動位置？我們一樣以 4×4 棋盤，棋子總數 4→8 來討論：

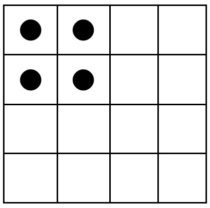
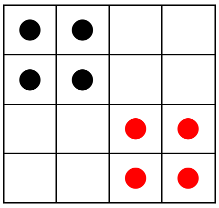
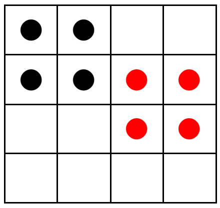
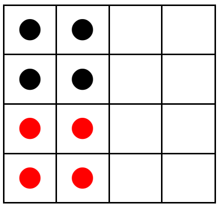
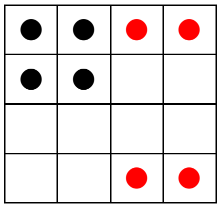
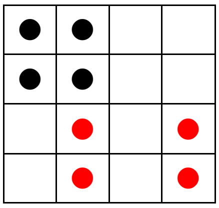
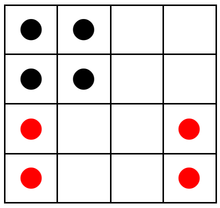
＊任選一個行列偶數的答案。	＊找出多 4 個棋子的解答並標示出位置。（紅色棋為增加棋）	
		
		
		

表 12

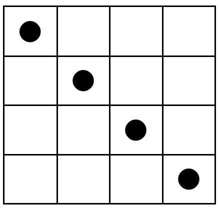
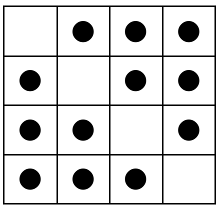
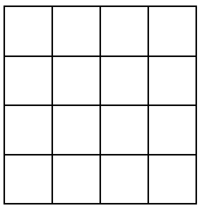
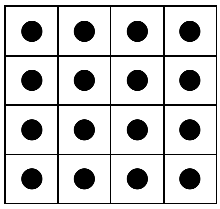
同時我們還發現，這裡的增加 4 必須要在共同的兩行兩列中，否則將會影響行列的奇偶。這是因為（偶數＋偶數）仍然是偶數，所以以兩行兩列同時增加 2 個棋子的狀況才不會改變行列的奇偶性質。

在這裡，運用「偶數+偶數＝偶數」的性質，我們進行了這一連串的操作。

六、 棋盤格的相反性質、行列互換性質、轉向性質

（一）棋盤格的相反性質

在前面的初步討論中，有同學發現，我們所歸納的最少與最多棋子，在圖形上可以互為相反圖形。我們用下圖中的幾個例子來說明。

 	 
棋子總數為 4、12，互為相反。	棋子總數為 0、16，互為相反。

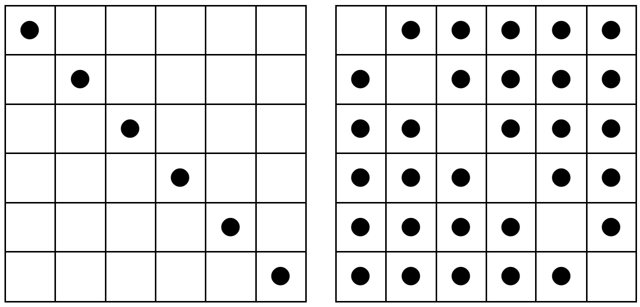
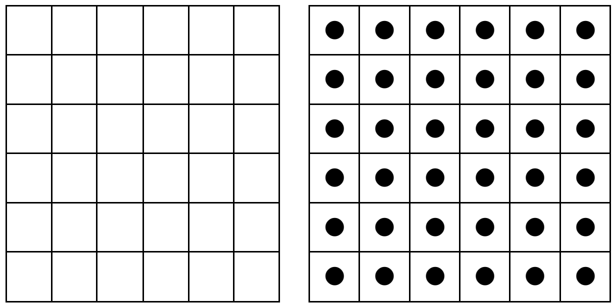
	
棋子總數為 6、30，互為相反。	棋子總數為 0、36，互為相反。

表 13

其它的圖形也有這種相反性質嗎?我們試著找答案。下表 10 為其中幾個例子。

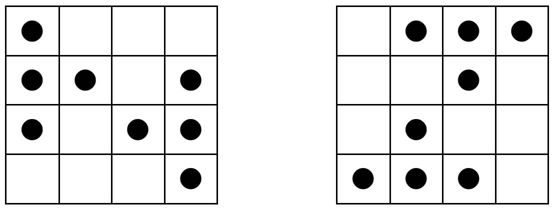
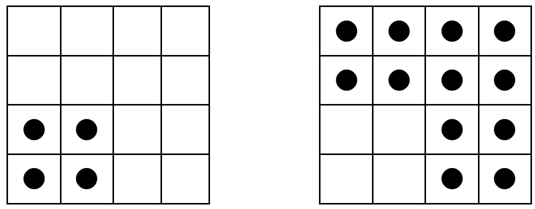
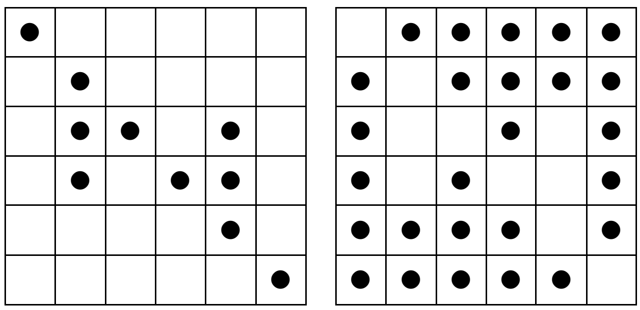
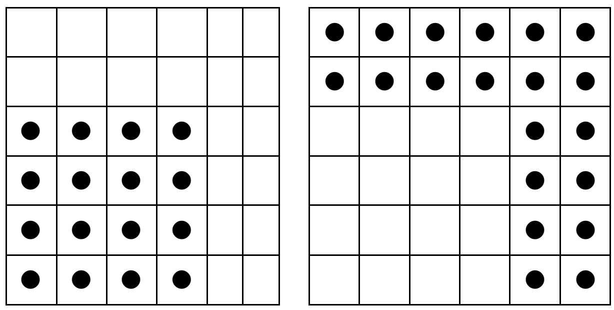
	
棋子總數為 8、8，互為相反。	棋子總數為 4、12，互為相反。
	
棋子總數為 10、30，互為相反。	棋子總數為 16、20，互為相反。

表 14

我們發現這些圖形都可以找到相反圖形。經過討論後發現，這是因為：

（偶數）	－	（奇數）	＝	（奇數）	，且	（偶數）	－	（偶數）	＝	（偶數）
↑		↑		↑		↑		↑		↑
行列		棋子		空格		行列		棋子		空格

所以空格恰好符合棋子數的奇偶規定，產生了相反性質。

這也解釋了在行列偶數中，總數為 2 和總數為（m^2 －2）的狀況，都是沒有答案。(說明:總數為 2 沒有答案在 P11 已解釋。）

依照著這個性質，我們在做討論時就可以只討論總格數的一半（m^2 /2），剩下的部分用相反性質即可推論。

（二）棋盤格的行列互換性質

我們在研究中發現，兩行或兩列互換後，仍然符合奇偶性質。如下表 11：

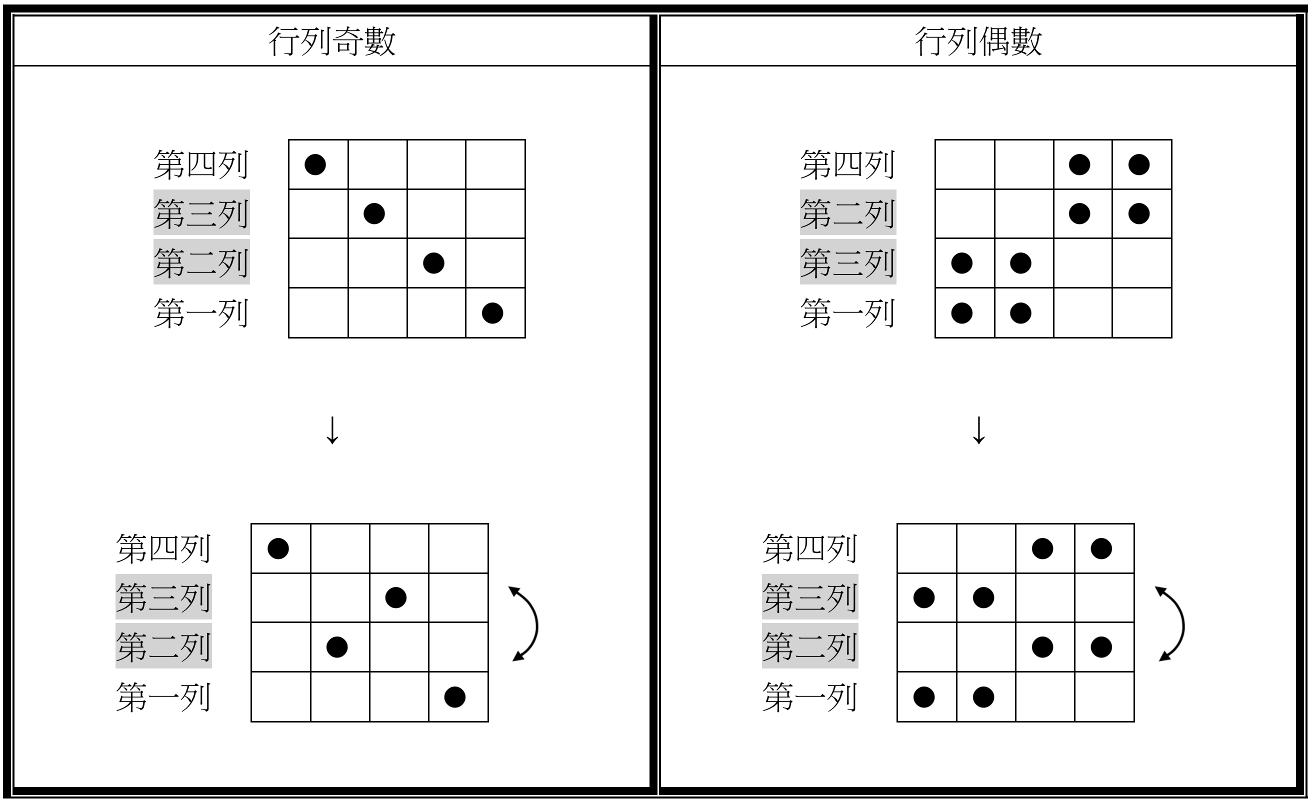


表 15

（三）棋盤格的轉向性質

另外，我們還試著把棋盤轉向。發現在偶偶棋盤格中，若把其中某一個答案轉向，仍然是符合題目規定的另一個答案。

綜合上面所有對偶偶棋盤的討論，我們把所有偶偶棋盤的性質與結果整理如下表 16。

偶偶棋盤（m×m）		
	行列奇數	行列偶數
棋子數奇或偶	偶數	偶數
最少棋子數	m	0
最多棋子數	m^2 － m	m^2
棋子數	（m）、 m＋2、m＋4……（m^2 － m）	（0）、 4、6……（m^2 ）
規律	增加 2	增加 2
例外	無	2、m^2 －2
相反性質	有	有
行列互換性質	有	有
轉向性質	有	有

表 16

七、 偶偶不相等棋盤（m×n）

上面我們所討論是（m×m）的偶偶棋盤格，但是在原題目中確是一個行數與列數不同的偶偶棋盤（4×6）。所以我們利用上面的研究方法以及結果來進行下面的研究。

首先，我們從最小的偶偶（m×n）不相等棋盤：2×4 進行。另外也進行 4×6、6×8 的棋盤討論。歸納後的結果如下表。

為了討論上的方便，我們先設定偶偶不相等棋盤（m×n）中，m＜n。

棋子數	棋盤格：2×4		棋盤格：4×6		棋盤格：6×8	
	行與列：奇數	行與列：偶數	行與列：奇數	行與列：偶數	行與列：奇數	行與列：偶數
0	×	○	×	○	×	○
2	×	×	×	×	×	×
4	○	○	×	○	×	○
6	×	×	○	○	×	○
8	×	○	○	○	○	○
10			○	○	○	○
12			○	○	○	○
14			○	○	○	○
16			○	○	○	○
18			○	○	○	○
20			×	○	○	○
22			×	×	○	○
24			×	○	○	○
26					○	○
28					○	○
30					○	○
32					○	○
34					○	○
36					○	○
28					○	○
40					○	○
42					×	○
44					×	○
46					×	×
48					×	○

表 17

從上表中，我們很驚喜的發現，偶偶不相等棋盤（m×n）與偶偶棋盤（m×m）有非常類似的性質。整理如下表 17

偶偶不相等棋盤（m×n）		
	行列奇數	行列偶數
棋子數奇或偶	偶數	偶數
最少棋子數	n	0
最多棋子數	m×n－ n	m×n
棋子數	（n）、 n＋2、n＋4……（m×n－n）	（0）、4、6……（m×n）
規律	增加 2	增加 2
例外	無	2、（m×n）－2
相反性質	有	有
行列互換性質	有	有
轉向性質	有	有

表 18

而因為偶數－偶數＝偶數，偶數－奇數＝奇數，所以他們也都具有相反性質。

特別要注意的是，在行列奇數的最少棋數和最多棋數中，受限於不相等棋盤中的較長邊，因此最少棋子一定與較長邊格數相同。例如：在 4×6 棋盤中的最少棋數是 6，在 6×8 棋盤中的最少棋數是 6。最多棋數則因相反性質也會變成 m×n－ n。

八、 奇奇棋盤（m×m）

接著我們進行奇奇棋盤的討論。

（一）3×3

先從最小的 3×3 開始。分為行列奇數與行列偶數來探討總棋子數的問題。

奇奇棋盤（3×3）		
棋子數	行列奇數	行列偶數
0	×	○
1	×	×
2	×	×
3	○	×
4	×	○
5	○	×
6	×	○
7	×	×
8	×	×
9	○	×

表 19

在行列奇數這一部分，可以找到答案的棋子總數是 3、5、9，都是奇數。這是因為：「奇數棋子」連加奇數次(有奇數列)，必定等於奇數。

但是在行列偶數時，因為「偶數棋子」連加奇數次(有奇數列)，等於偶數。所以我們首先發現，在奇奇棋盤中，行列奇數的總棋子數會是奇數，行列偶數的總棋子數會是偶數。

接著再用大一點的棋盤來討論。

（二）5×5、7×7

奇奇棋盤，行列奇數			奇奇棋盤，行列偶數		
棋子數	（5×5）	（7×7）	棋子數	（5×5）	（7×7）
1	×	×	0	○	○
3	×	×	2	×	×
5	○	×	4	○	○
7	○	○	6	○	○
9	○	○	8	○	○
11	○	○	10	○	○
13	○	○	12	○	○
15	○	○	14	○	○
17	○	○	16	○	○
19	○	○	18	○	○
21	○	○	20	○	○
23	×	○	22	×	○
25	○	○	24	×	○
27		○	26		○
29		○	28		○
31		○	30		○
33		○	32		○
35		○	34		○
37		○	36		○
39		○	38		○
41		○	40		○
43		○	42		○
45		○	44		×
47		×	46		×
49		○	48		×

表 20

1. 沒有相反性質

在操作的過程中，我們首先發現奇奇棋盤中沒有相反性質。而這是因為：

（奇數）	－	（奇數）	＝	（偶數）	，且	（奇數）	－	（偶數）	＝	（奇數）
↑		↑		↑		↑		↑		↑
行列		棋子		空格		行列		棋子		空格

2. 行列奇數的最少棋數為 m，行列偶數的最少棋數為 0

各個棋盤中的最少棋子數如下：

棋盤	3×3	5×5	7×7
行列：奇數	3	5	7
行列：偶數	0	0	0

表 21

在行列奇數中，我們發現最少棋數因為必須符合行與列至少為 1，所以總數仍舊是 m。而行列偶數的最少棋數仍舊為 0。

所以我們推論：在一個 m×m 的奇奇棋盤中，行列為奇數的最少棋子數為 m。

在一個 m×m 的奇奇棋盤中，行列為偶數的最少棋子數為 0。

3. 行列奇數的最多棋數為 m^2 ，行列偶數的最多棋數為 $(m)^2 - m$

各個棋盤中的最多棋子數如下：

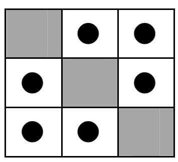
棋盤	3×3	5×5	7×7
行列：奇數	9	25	49
行列：偶數	6	20	42

表 22

在奇奇棋盤中，棋盤全滿的狀況符合行列奇數，所以行列奇數的最多棋子數會是一個「全滿」的棋盤格，棋子總數是 m^2 。

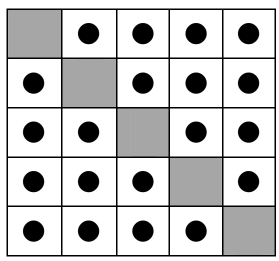
然而在行列偶數中，棋子最多是 $(m)^2 - m$。因為每行每列都是奇數，要符合偶數至少要有一個空格。

在奇奇棋盤上，每行每列至少要有一個空格，有可能嗎？答案是肯定的，因為在奇奇棋盤上符合行列奇數的第一個答案就是這樣子的！例如:



＊每行每列至少一個空格，就可以符合行列偶數。

→3×3－3＝6



＊每行每列至少一個空格，就可以符合行列偶數。

→5×5－5＝20

圖 3

所以我們推論：在一個 m×m 的奇奇棋盤中，行列為奇數的最多棋子數為 m^2 。

在一個 m×m 的奇奇棋盤中，行列為偶數的最多棋子數為 $(m)^2 - m$。

4. 增加 2 的例外

在奇奇棋盤中，我們發現行列奇數的棋子總數仍然具有「增加 2」的性質。只不過最後會

有幾個數沒辦法找到答案。我們把它特別特出來討論：

棋盤	3×3	5×5	7×7
棋盤總格數	9	25	49
例外的棋子數	7	23	47

表 23

我們發現，例外的棋子數剛好都是總數－2。為了確定這個性質，我們又討論了 9×9、11×11、13×13 的棋盤。結果也是只有（總數－2）個棋子沒辦法找到行列皆為奇數的排列。

棋盤	3×3	5×5	7×7	9×9	11×11	13×13
棋盤總格數	9	25	49	81	121	169
例外的棋子數	7	23	47	79	119	167

表 23

我們如果用「2 個空格平均分到行列中，使全滿的棋盤格符合行列奇數」這樣的想法，就會發現，2 個空格只能分配成三種情況:

第二種　第三種

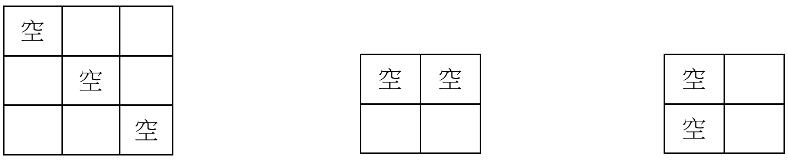


圖 4

而這三種狀況都會使某一行或列出現奇數，出現奇數空格時棋子數就會變成偶數（因為奇數列－奇數空格＝偶數棋子），所以無法成為答案。

所以，在奇奇棋盤中，行列奇數的增加 2 性質必須刪去 m^2-2。

另外，在奇奇棋盤中，行列偶數的增加 2 性質必須刪去 2。但是因為在奇奇棋盤中沒有反向性質，而且我們也沒有找到其他的例外。這點與偶偶棋盤不盡相同。

5.棋盤中的空格-奇偶互換

我們還發現一件有趣的事，那就是在奇奇棋盤中，符合行列奇數時的「空格」，剛好就會是行列偶數。如下圖 5：

行列偶數　行列奇數

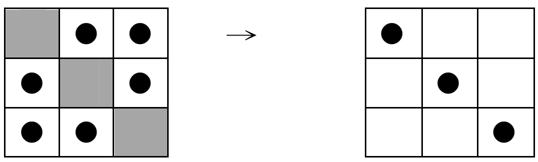


圖 5

而這也可以用奇偶性質來解釋：奇數－偶數＝奇數；奇數－奇數＝偶數。

下表 24 即為我們所知道的奇奇棋盤的所有性質：

奇奇棋盤棋盤（m×m）		
	行列奇數	行列偶數
棋子數奇或偶	奇數	偶數
最少棋子數	m	0
最多棋子數	m^2	（m）^{2} －m。
棋子數	（m）、 m＋2、m＋4……m^2	（0）、4、6……（m）^{2} －m。
例外	（m^2 -2）	2
規律	增加 2	增加 4
相反性質	無	無
行列互換性質	有	有
轉向性質	有	有
行列奇數與行列偶數互換	有	

表 24

九、 奇奇不相等棋盤（m×n）

在前面的奇奇棋盤中，我們已經知道：

1.行列奇數：「奇數棋子」連加奇數次(有奇數列)，必定等於奇數。

2.行列偶數：「偶數棋子」連加奇數次(有奇數列)，等於偶數。

所以在奇奇不相等棋盤中，我們就延續前面的方法來探討。

而在奇奇不相等棋盤中，我們先用 3×5、5×7、7×9 來討論，以 m×n 來表示，且 m＜n。結果如下表 25。

奇奇不相等棋盤，行列奇數				奇奇不相等棋盤，行列偶數			
棋子數	（3×5）	（5×7）	（7×9）	棋子數	（3×5）	（5×7）	（7×9）
1	×	×	×	0	○	○	○
3	×	×	×	2	×	×	×
5	○	×	×	4	○	○	○
7	○	○	×	6	○	○	○
9	○	○	○	8	○	○	○
11	○	○	○	10	○	○	○
13	×	○	○	12	×	○	○
15	○	○	○	14	×	○	○
17		○	○	16		○	○
19		○	○	18		○	○
21		○	○	20		○	○
23		○	○	22		○	○

25		○	○	24		○	○
27		○	○	26		○	○
29		○	○	28		○	○
31		○	○	30		×	○
33		×	○	32		×	○
35		○	○	34		×	○
37			○	36			○
39			○	38			○
41			○	40			○
43			○	42			○
45			○	44			○
47			○	46			○
49			○	48			○
51			○	50			○
53			○	52			○
55			○	54			○
57			○	56			×
59			○	58			×
61			×	60			×
63			○	62			×

表 25

如果偶偶棋盤與偶偶不相等棋盤有類似的性質，奇奇棋盤與奇奇不相等棋盤也有類似性質，整理如下表 26。

奇奇不相等棋盤（m×n）		
	行列奇數	行列偶數
棋子數奇或偶	奇數	偶數
最少棋子數	n	0
最多棋子數	m×n	m×n－n
棋子數	（n）、 n＋2、n＋4……（m×n）	（0）、4、6…m×n－n
例外	（m×n -2）	2
規律	增加 2	增加 4
相反性質	無	無
行列互換性質	有	有
轉向性質	有	有
行列奇數與行列偶數互換	有	

表 26

行列奇數的最少棋子數為較大的 n。（如圖 6）

特別要注意的是，在行列奇數的最少棋數和最多棋數中，受限於不相等棋盤中的較長邊，

因此最少棋子一定與較長邊格數相同。例如：在 3×5 棋盤中的最少棋數是 5，在 5×7 棋盤中的最少棋數是 7。

在行列奇數中，仍然有例外的情況：(總數 m×n）－2；而在最多棋子數中，因為棋盤為 m×n，所以行列奇數以及行列偶數分別為 m×n、m×n－n（每一行或列至少一個空格，所以至少要減去較大的 n)。(如圖 6）

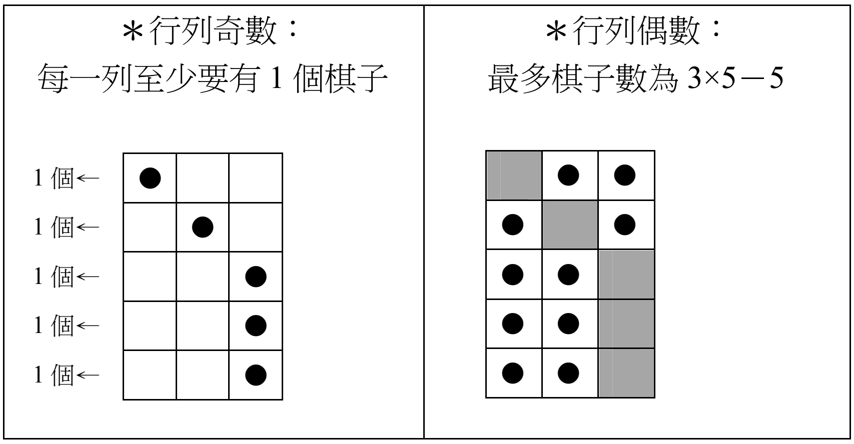


圖 6

十、 奇偶棋盤（m×n）

最後，我們進行棋盤的行列數為一奇數一偶數（我們稱為奇偶棋盤）的討論。我們先設定 m 為奇數行、n 為偶數列。以 1×2、3×2、5×2、1×4、3×4、5×4、1×6、3×6、5×6 這 9 個棋盤來討論。

棋盤	1×2		3×2		5×2	
行列	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數
可能的總棋數	沒有答案	0	沒有答案	0、4	沒有答案	0、4、6、8
棋盤	1×4		3×4		5×4	
行列	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數
可能的總棋數	沒有答案	0	沒有答案	0、4、6、8	沒有答案	0、4、6、8、10、12、14、16
棋盤	1×6		3×6		5×6	
行列	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數
可能的總棋數	沒有答案	0	沒有答案	0、4、6、8、10、12	沒有答案	0、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24

表 27

我們發現行列奇數完全找不到答案！這是因為【奇數棋子】連加奇數次（行），必定等於奇數。但是【奇數棋子】連加偶數次（列），必定等於偶數。所以互相矛盾，沒有答案。

而在行列偶數中找的到許多答案，從最少的 0 開始，也符合增加 2 的原則，不過總棋數最多時受限於行與列的奇偶性質，說明如下：

1. 從 0 開始。
2. 與上面討論相同：2 例外，從 4 開始每次增加 2。
3. m 為奇數，所以 m×n 的棋盤中，最多棋子數時必須在每一列中保留一空格，總共空格數是 n，所以最多棋數 m×n－n。如下圖 7

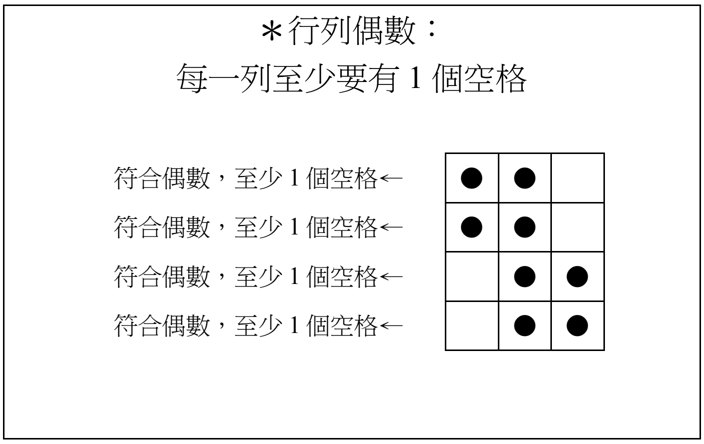


圖 7

我們將奇偶棋盤的性質整理如下：

奇偶棋盤棋盤（m×n）		
	行列奇數	行列偶數
棋子數奇或偶	沒有答案	偶數
最少棋子數		0
最多棋子數		m×n－n
棋子數		（0）、4、6…m×n－n
例外		2
規律		增加 2
相反性質		無
行列互換性質		有
轉向性質		有

表 28

以灰底特別標示的是，行列偶數在奇偶棋盤中沒有相反性質，這是因為奇數行中為偶數棋子和奇數空格；若相反過來會變成奇數棋子和偶數空格。

十一、　以「增加 2」與「增加 4」來推演至各種可能

在前面的討論中，我們已經知道在棋盤中可以用「增加 2」與「增加 4」來增加棋子總數。

我們也知道，若是棋子數增加 2，在棋盤上原有的棋子必須更動位置，才能符合行列奇數或偶數。

但如果是棋子數增加 4，那麼原來的棋子位置都不必更動。利用增加 4 的性質，其實我們可以將棋盤繼續擴大。

（一）棋子數的增加 4

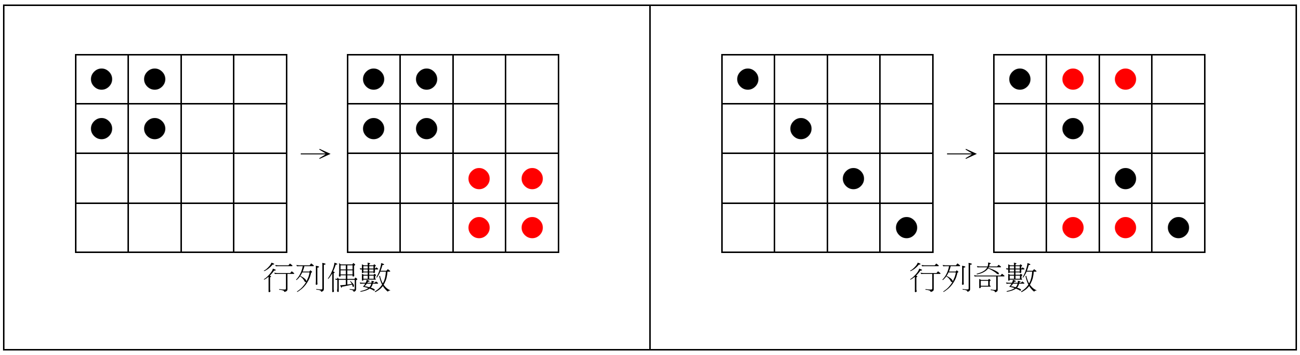


圖 7

（二）棋盤的增加 4

利用奇數＋偶數＝奇數；偶數＋偶數＝偶數，也就是【加偶】後奇偶不變這樣的規則，我們用在增加棋盤的大小上，也是可行的。但是這樣的性質會出現在偶偶棋盤上。

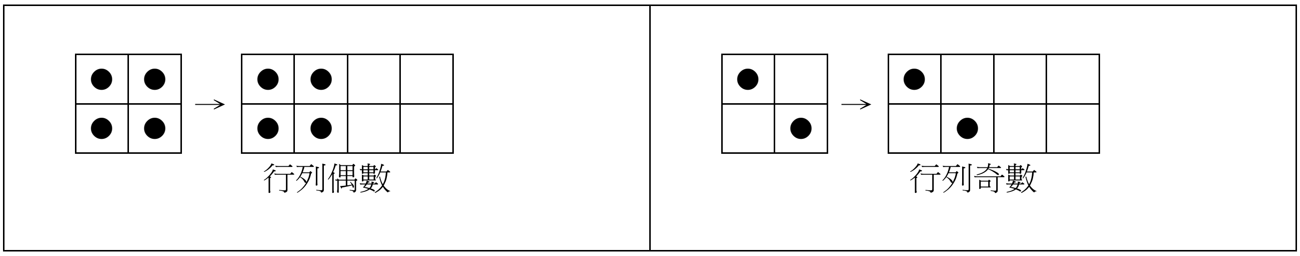


圖 8

（三）棋盤與棋子數同時增加 4

如同上面所述，因為兩行兩列的【增加 4】不會改變同行同列中的奇偶性質。所以將棋盤和棋子數同時增加 4，也是可行的。

十二、解答「保險箱駭客」的問題

（一）總數 16、行列奇數是否能找到解答

在這個數學問題的原始題目中，要解決的是在 4×6 的陣列中找到行列奇數且總數為 16 的可能。4×6 為本研究中的偶偶不相等棋盤，符合行列奇數的棋子總數會是(n)、 n＋2、n＋4……（$m \times n-n$）。其中 4 為 m，6 為 n。

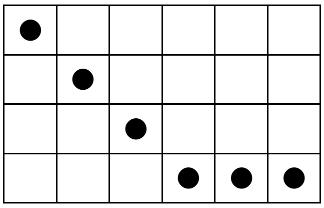
所以在 4×6 的陣列中，最少為 6，最多為 $4 \times 6-6=18$，有增加 2 性質無例外，所以原題目的 16 個棋子是符合行列奇數的解答！

（二）16 個棋子如何排列

運用我們找到的「增加 4」原則，我們可以找到許多不同的排列方法。首先是最小而符合行列奇數的解答（6 個棋子）。

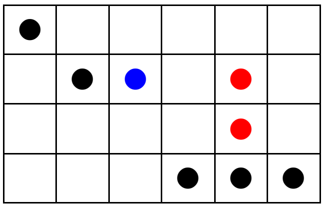
接著，因為 16-6＝10，運用 1 次的【增加 2】、2 次的【增加 4】，就可以輕鬆得找到棋子排列的解答！如下圖 11。

最少棋子數:6



總棋數：6

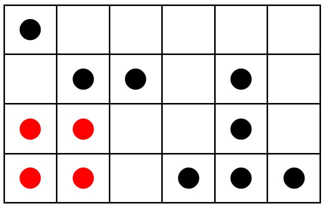
增加 2



說明:除增加 2 為同一行外，需移動某棋至另一列。如藍棋。

總棋數：8

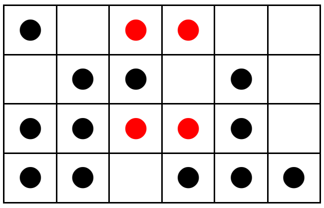
增加 4



說明:2 行 2 列的「增加 4」性質，不必移動其他棋子。

總棋數：12

增加 4



說明:再一次的「增加 4」

總棋數：16

伍、 研究結果

我們在這一大段的研究過程中，探討了許多奇偶棋盤以及奇偶棋的總數與關係。以下就是我們所得到的研究結果：

一、 奇偶陣列(棋盤)與行列奇數或偶數的關係：

棋盤	行列奇數	行列偶數
偶偶棋盤	有答案，棋子總數：偶數	有答案，棋子總數：偶數
偶偶不相等棋盤	有答案，棋子總數：偶數	有答案，棋子總數：偶數
奇奇棋盤	有答案，棋子總數：奇數	有答案，棋子總數：偶數
奇奇不相等棋盤	有答案，棋子總數：奇數	有答案，棋子總數：偶數
奇偶棋盤	沒有答案	有答案，棋子總數：偶數

表 29

二、　奇偶陣列(棋盤)與總數的關係：

棋盤	行列奇數	行列偶數
偶偶棋盤	棋子總數：偶數	棋子總數：偶數
偶偶不相等棋盤	棋子總數：偶數	棋子總數：偶數
奇奇棋盤	棋子總數：奇數	棋子總數：偶數
奇奇不相等棋盤	棋子總數：奇數	棋子總數：偶數
奇偶棋盤	沒有答案	棋子總數：偶數

三、　最少棋子數、最多棋子數與總數：

我們歸納出來的最少棋子數、最多棋子數與總數，分成行列奇數以及行列偶數來說明，如下表 30：

棋盤	行列奇數	行列偶數	備註
偶偶（mxm）	（m）、 m＋2、m＋4……（m^2 － m）	（0）、 4、6……（m^2 ）	
偶偶不相等（mxn）	（n）、 n＋2、n＋4……（mxn－n）	（0）、4、6……（mxn）	m＜n
奇奇（mxm）	（m）、 m＋2、m＋4……m^2	（0）、4、6……（m）^{2} －m	
奇奇不相等（mxn）	（n）、 n＋2、n＋4…（mxn）	（0）、4、6……mxn－n	m＜n
奇偶（mxn）	沒有答案	（0）、4、6……mxn－n	m：奇數行 n：偶數列

表 30

四、　例外與解釋、其他性質：

我們發現的其他性質如下表 31

棋盤	偶偶		偶偶不相等		奇奇		奇奇不相等		奇偶	
	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數	行列奇數	行列偶數
相反性質	有	有	有	有	無	無	無	無		無
行列互換性質	有	有	有	有	有	有	有	有		有
轉向性質	有	有	有	有	有	有	有	有		有
行列奇數與行列偶數互換					有		有			

表 31

另外，在我們的研究中發現，上表 30 中的棋子總數有幾個例外情況，如下圖 32：

棋盤	行列奇數	行列偶數	備註
偶偶（mxm）	無	2、m^2 －2	
偶偶不相等（mxn）	無	2、（mxn）－2	
奇奇（mxm）	（m^2 -2）	2	
奇奇不相等（mxn）	（mxn -2）	2	
奇偶（mxn）	沒有答案	2	

表 32

例外的狀況在行列偶數時，都有「2」。這是因為 2 無發分配成行列皆為偶數。而且在偶偶棋盤、偶偶不相等棋盤中，因為棋盤具有相反性質，所以【總數－2】也會是例外情況。

而在奇奇棋盤、奇奇不相等棋盤中，【總數－2】個棋子就是 2 個空格，而 2 個空格分配到行列中，棋子數會有兩行或兩列變成行列偶數，成為例外。

五、　按鈕位置：增加棋子數（增加 2 或增加 4）以改變棋盤中的棋子數，以及找尋解答的按鈕位置

在本研究中我們還試著用增加棋子的方式改變棋子總數，因為奇數或偶數加上偶數依然是原本的奇數或偶數，所以在某兩行兩列中【增加 4】個棋子，不會改變原來的奇偶性質。所以可以用直接增加棋子的方式改變棋子總數與找到解答位置。

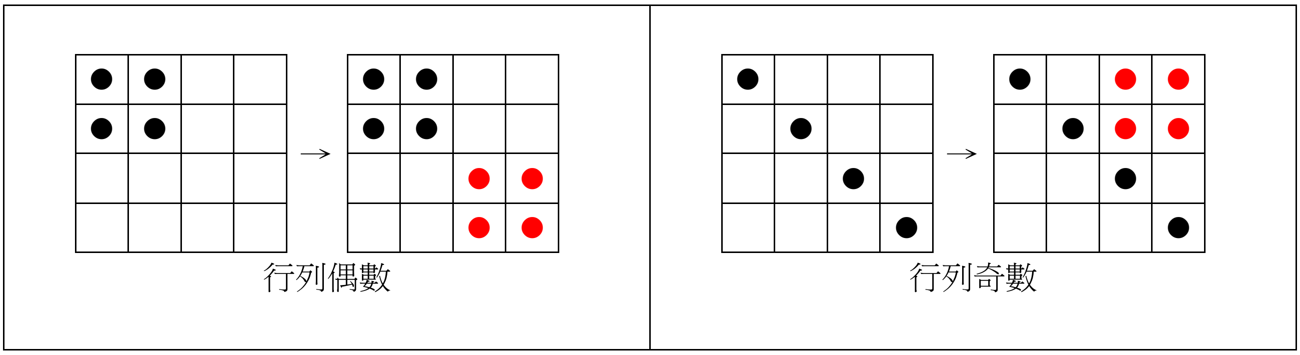


圖 9

如果是以【增加 2】個棋子的方式，因為只能有一列或一行為【增加偶數】，所以必須調整原本的棋子排列。

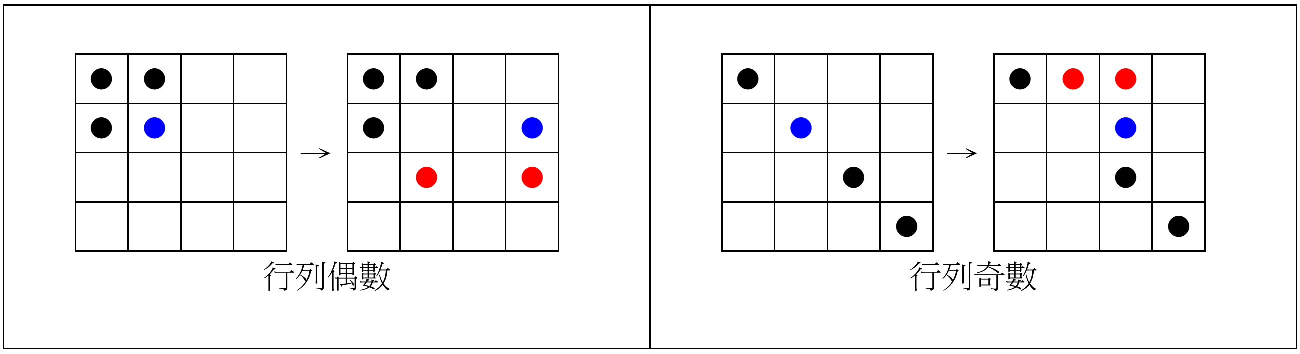


圖 10

六、　解答原始問題：

在原始題目中找尋棋子排列的解答，也可以運用我們找到的「增加 4」原則。首先先找到最小而符合行列奇數的解答(6 個棋子)，再運用 1 次的【增加 2】、2 次的【增加 4】，(6+2+4+4=16)就可以輕鬆得找到棋子排列的解答！例如圖 11：

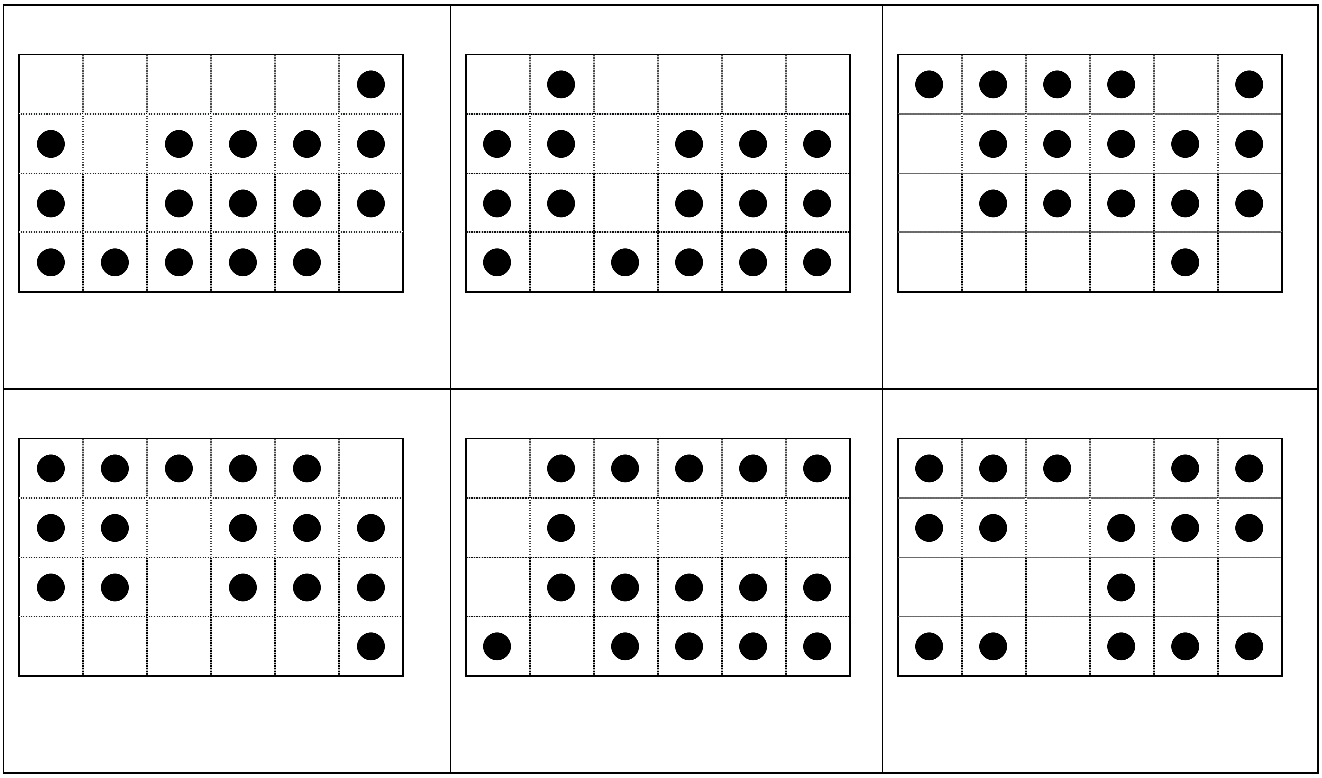


圖 11

陸、 討論

研究一個看似簡單，內容卻多變有趣的行列奇偶性質的問題，我們除了歸納出許多結果之外，還從中學習到許多研究與討論的方法。下面就是我們整理出來的討論問題。

一、在原來的題目中，是要在一個 6×4 的陣列上的 24 個按鍵，找出 16 個按鍵，使之在鍵盤行和列上都維持奇數個數目。為了討論上的方便，我們把題目改變了情境：在一個 6×4 的空棋盤上，想要放入 16 個棋子，使之在行和列上都維持奇數個數目。用這樣的情境我們就可以使用棋盤和棋子來進行研究。

二、0 算不算偶數？這個問題在研究的初期，在我們研究的伙伴之間熱烈的討論著。有人說能被 2 整除的數才能算是偶數，但是 0 不能成為被除數，所以不能算是偶數。也有人查到課本上說到，尾數是 0、2、4、6、8 的數就是偶數，所以 0 一定會偶數。這個問題後來查了書以後得到解答。也變成我們在設定研究中的條件時，非常重要的一件事。

三、空棋盤和全滿棋盤要列入奇偶數的討論嗎？在【0 為偶數】這樣的前提下，空棋盤可以視為行列偶數。而全滿的棋盤格中，棋數奇偶會與行列奇偶相同。在我們的研究中就以這樣的設定進行討論。

四、找答案→歸納→推論原則：在研究各種性質的棋盤與棋子數時，我們都事先從實際的操作中找答案，緊接著試著規律以及解釋原因，最後再推論至更多的可能。這樣的研究方法幫助我們完成了這一次的數學研究，未來應該也可以應用在其他題目的研究中。

五、在這個數學問題的原始題目中，要解決的是在 4×6 的陣列中找到行列奇數且總數為 16 的可能。從我們在偶偶不相等棋盤中的結論中得知，原題目的 16 個棋子是符合行

列奇數的解答！

柒、　結論

我們從一個保險箱駭客的問題開始，研究了在不同棋盤上，符合行列奇數或行列偶數的棋子排列方法。除了最少與最多棋子數的討論，還有所有棋子總數的歸納。我們還發現在不同性質的棋盤上，不一定有行列奇數的解答。也發現且歸納出用一些簡單的方法可以找到棋子的排列方法。

在研究的過程中，我們也討論了許多奇偶性質，對於奇偶數的加減後的結果有了更深刻的體認。對於棋盤格也做了一些性質的探討。我們還學會了研究與解決問題的方法。而原始問題不僅得到解答，還能符合我們所歸納出來的結果。

捌、　參考資料

Brian Bolt（民 91）。**數學遊樂園之妙想天開**。（宋宜真譯）。臺北市：牛頓出版股份有限公司。

王興家等（民 99）。**數學六上**。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

幼獅數學大辭典編輯小組（民 71）。**幼獅數學大辭典**。臺北市：幼獅文化事業公司。

教育部國語辭典簡編本網路版。民 100 年 10 月 14 日，取自：
http://dict.concised.moe.edu.tw/cgi-bin/jdict/GetContent.cgi?DocNum=19766&GraphicWord=&QueryString=行列。

玖、　附件

表 33　附件一：棋盤格：6×6（節錄）

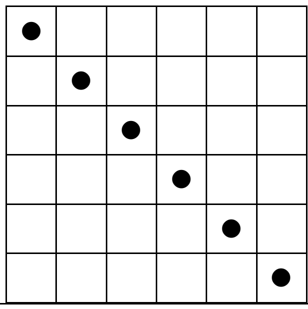
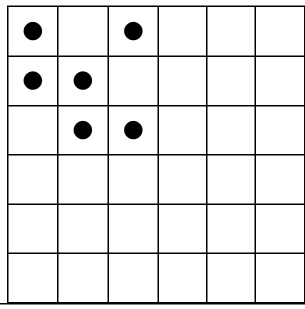
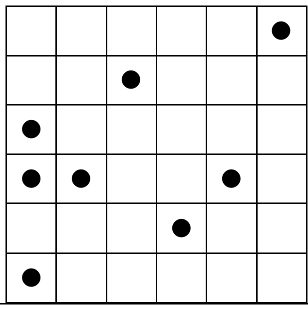
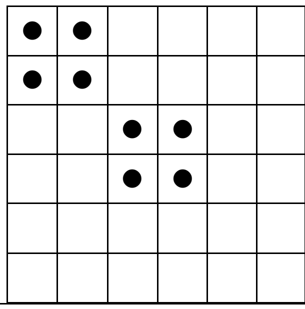
棋盤格：6×6		
棋子數	行列棋子為奇數	行列棋子為偶數
6		
8		

表 34　附件二-1：棋盤格：8×8，行列棋子為奇數（節錄）

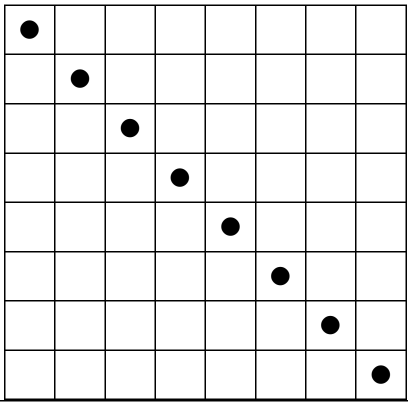
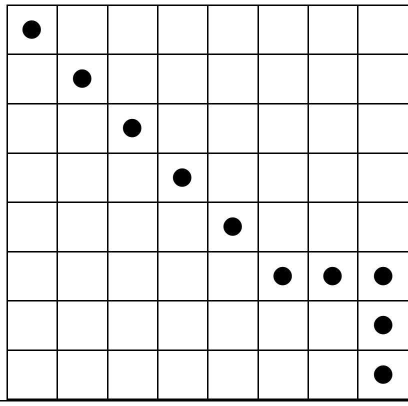
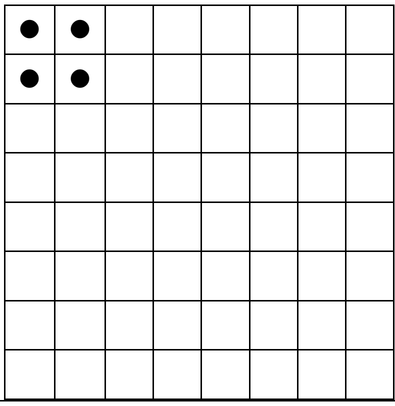
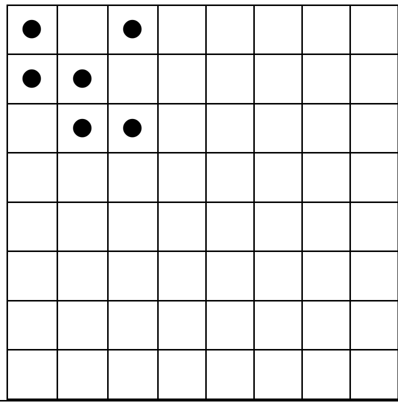
棋盤格：8×8，行列棋子為奇數			
棋子數：0	沒有答案	棋子數：2	沒有答案
棋子數：4	沒有答案	棋子數：6	沒有答案
棋子數：8		棋子數：10	

表 35　　附件二-2：棋盤格：8×8，行列棋子為偶數（節錄）

棋盤格：8×8，行列棋子為奇數			
棋子數：0	空棋盤為一答案	棋子數：2	沒有答案
棋子數：4		棋子數：6	

【評語】080410

有趣的研究主題，研究者從不同的陣列來思考保險箱的解碼方法，研究過程中先簡化問題以具體化思考，再循序漸進地推導研究結果，是一篇具應用性也值得參考的佳作。