

# 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 數學科

080409

稅法變變變—因數、質數與倍數的探討

學校名稱：連江縣立中正國民中小學

作者： 小六 陳士洵 小六 費丞恩 小五 林 辰 小五 馮詩媛	指導老師： 程元鋒 林秋萍
---	---------------------

關鍵詞：因數、質數、倍數

## 摘要

納稅是人民應盡的義務，政府有了稅收才能為國家做更多的建設，增進我們的生活品質，也可以給我們很多社會福利，讓我們國家越來越進步，人民的生活越來越便利，越來越幸福。

「稅法變變變」是一個十分有趣的遊戲，在這物價飛漲的時代，每個人都想要「稅」少繳一點，「薪水」能夠多一點，藉由「稅法變變變」我們發現每一個數字間的因數與倍數有巧妙的關係，透過遊戲，試著找出其規律性，目前的研究做到 1-25 連續與非連續數字，其中結尾數字 20 以下與結尾數字 21 以上的拿法與實際所得皆有所差異，我們推測若繼續探究 25 以上的數字，應該可以發現某些數字性質的異同。

藉由抽稅的遊戲除了讓我們瞭解人民納稅的重要，也可以讓我們對因數、倍數、與質數有更透徹的瞭解。

## 壹、 研究動機

「漲...漲...漲...什麼都漲!只有薪水沒漲」這是最近報章雜誌最熱門的新聞話題，納稅是國民應盡的義務，但是許多人都想要「稅」少繳一點，「薪水」能夠多一點，記得五年級時，上到因數及倍數單元時，老師在課堂上教了一個關於質數與因數的抽稅問題，我們對這個主題產生濃厚的興趣，欲深入探討抽稅問題，以瞭解連續數位與非連續數字下抽稅問題的解題策略及應如何拿到最高所得。

## 貳、 研究目的

(一) 探討抽稅問題的最高所得

(二) 探討 1-25 連續數字下抽稅問題的解題情形(解題步驟、最高所得)

1. 結尾是偶數
2. 結尾是奇數
3. 結尾是質數
4. 最佳解題策略

(三) 探討 1-25 非連續數字下的解題情形

1. 只有偶數
2. 只有奇數
3. 最佳解題策略

## 參、 名詞解釋

(一) 「稅法變變變」遊戲玩法：

1. 先從指定的數字中挑選一個數，這是人民的收入。
2. 此時，政府會將你挑選的數較小的因數拿走，這是政府抽的稅。例如人民拿 8，政府會將 1、2 和 4 拿走。
3. 如此，直到數字被選光，或著不能再選時，遊戲結束，結算人民的收入。
4. 若你選的數字政府讓無法抽到稅時，則政府會認為你逃漏稅，會將收入

全部沒收。

## (二) 因數：

若兩整數 A 和 B，且 B 可以整除 A（即  $A \div B = C$  餘 0），則稱 B 為 A 的因數。例如 5 和 3 都可整除 15，所以 5 和 3 都是 15 的因數。

## (三) 質數：

若一正整數 A 除了 1 及其本身 A 之外，沒有其他因數，則稱 A 為質數。例如 13 的因數只有 1 和 13，所以 13 是質數。

## (四) 倍數

$A \times B = C$ ，C 就是 A 和 B 的倍數。例如  $2 \times 3$  等於 6，6 就是 2 和 3 的倍數。

# 肆、 研究設備及器材

數字紙牌、紀錄紙、筆和一顆靈活的頭腦

# 伍、 研究歷程與方法

## (一) 探討抽稅問題的最高所得

### 1. 連續數字下的最高所得

我們先以 1—10 的連續數字作為例子：

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步
人民	7	9	6	8	10
政府	1	3	2	4	5

經過多次的試驗，發現上方表格的過程是最佳解答，也發現最高所得是由最大的幾個數字構成的，每當我們拿一個數，政府最少也會拿一個數，所以我們可以拿到的就是全部數字總和量的一半： $10 \div 2 = 5$ ，所以最高所得就是最大的 5 個數的和 ( $6+7+8+9+10$ )，也就是 40。

我們再以 1—15 的連續數字作為例子試驗：

	第 1 步	第 2 步	第 3 步	第 4 步	第 5 步	第 6 步	第 7 步
人民	13	9	15	10	14	8	12
政府	1	3	5	2	7	4	6

我們以剛才推論的結果來算出最高所得， $15 \div 2 = 7.5$ ，因為我們拿一個數，政府最少也會拿一個數，所以我們最多會拿到 7 個數，但是有一些數會拿不到，像是 11，因為 11 是質數，而且在指定範圍中沒有它的倍數，所以確定不會用到他，這一部分的計算方式： $15 \div 2 = 7.5$  先算出結尾數的一半 (7.5)，11 大於 7.5，並將比 7.5 大的質數找出，比 7.5 大的質數有 2 個—『11』、『13』，但 13 是我們要拿的（因為第一步一定要拿最大的質數，其他質數我們無法拿到，這是質數的特殊性質，當最大的質數被抽走時，如果抽其他質數，會導致政府抽不到稅，使遊戲結束），所以只有一個數字『11』用不到， $15 - 1 = 14$ ，我們或是政府會真正用到的數有 14 個，因此最大的七個數就是最高所得 (11 除外)，也就是 15、14、13、12、10、9、8 的和—81。

因此，連續數字理論上的最高所得獲取的步驟為：

#### (1) 切半法：

指定範圍為  $1 \sim x$ ， $x \div 2 = n$ ，我們知道理論上的最高所得一定要拿指定範圍數字中大於  $n$  的數字

(2) 排除不必要的質數：

指定範圍數字內大於  $n$  的數字為我們應該要拿的大數，但其中的質數除了最大的質數外，其餘都不能拿，因為質數除了 1 和自己外就沒有其他的因數，故我們只能選擇拿取最大的質數，而放棄其餘的質數。故設比  $n$  大的質數有  $a$  個，而  $a-1$  個是我們不需要拿的數字個數。扣除不需要拿的質數，我們總共可以拿的個數為  $m$  個， $m = x - (a-1)$ 。

(3) 應該要拿的步數：

$k$  步設應該要拿的步數為  $k$ ， $k = m \div 2$  (以無條件捨去法取個位數)

(4) 連續數字中的最高所得( $y$ )

大於  $n$  的數字中，排除不需要的質數後，剩下的所有數字和即為最高所得。但實際試驗後，發現不一定可以拿到最高所得，因此我們稱依此方法計算出的結果為理論的最高所得。

## 二. 探討 1-25 連續數字下抽稅問題的解題情形(解題步驟、最高所得)

(一) 分析 1~20 以偶數作為結尾的連續數字

### 【研究 1-1】1~2 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 2。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=2 \div 2 = 1, a=1, m=2$	$k=2 \div 2 = 1$
$y=2+0=2$	

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	2	2
政府	1	1

### 【研究 1-2】1~4 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 7。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=4 \div 2 = 2, a=1, m=4$	$k=4 \div 2 = 2$
$y=4+3=7$	

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二		
人民	3	4		
政府	1	2		
<b>歸納與整理</b>				
人民	3.4		人民實際所得	7
政府	1.2		政府實際所得	3

### 【研究 1-3】1~6 的連續數字的抽稅問題

### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 15。

<b>解題過程</b> $n=6\div 2=3, a=1, m=6$ $y=6+4+3=15$	<b>抽稅次數</b> $k=6\div 2=3$
--	------------------------------

### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三		
人民	5	4	6		
政府	1	2	3		
<b>歸納與整理</b>					
人民	5.4.6		人民實際所得	15	
政府	1.2.3		政府實際所得	6	

### 【研究 1-4】1~8 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 21。

<b>解題過程</b> $n=8\div 2=4, a=2$ $m=8-1=7$ $y=8+7+6=21$	<b>抽稅次數</b> $k=7\div 2=3.5\div 3$
--	--------------------------------------

### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三		
人民	7	8	6		
政府	1	4.2	3		
<b>歸納與整理</b>					
人民	7.8.6		人民實際所得	21	
政府	1.4.2.3		政府實際所得	15	

### 【研究 1-5】1~10 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 40。

<b>解題過程</b> $n=10\div 2=5, a=1, m=10$ $y=10+9+8+7+6=40$	<b>抽稅次數</b> $k=10\div 2=5$
---	-------------------------------

### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	7	9	6	8	10
政府	1	3	2	4	5
<b>歸納與整理</b>					
人民	7.9.6.8.10			人民實際所得	40
政府	1.3.2.4.5			政府實際所得	15

### 【研究 1-6】1~12 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 50。

<b>解題過程</b> $n=12\div 2=6, a=2$ $m=12-1=11$ $y=12+11+10+9+8=50$	<b>抽稅次數</b> $k=11\div 2=5.5\approx 5$
--	--

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	11	9	8	10	12
政府	1	3	2.4	5	6
歸納與整理					
人民	11.9.8.10.12			人民實際所得	50
政府	1.3.2.4.5.6			政府實際所得	21

【研究 1-7】1~14 的連續數字的抽稅問題

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 66。

<b>解題過程</b> $n=14\div 2=7, a=2$ $m=14-1=13$ $y=14+13+12+10+9+8=66$	<b>抽稅次數</b> $k=13\div 2=6.5\approx 6$
---	--

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	13	9	14	8	10
政府	1	3	2.7	4	5
抽稅次數	六				
人民	12				
政府	6				
歸納與整理					
人民	13.9.14.8.10.12			人民實際所得	66
政府	1.3.2.7.4.5.6			政府實際所得	28

【研究 1-8】1~16 的連續數字的抽稅問題

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 89。

<b>解題過程</b> $n=16\div 2=8, a=2$ $m=16-1=15$ $y=16+15+14+13+12+10+9=89$	<b>抽稅次數</b> $k=15\div 2=7.5\approx 7$
---	--

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	13	9	15	10	14
政府	1	3	5	2	7
抽稅次數	六	七			
人民	16	12			
政府	4.8	6			
歸納與整理					
人民	13.9.15.10.14.16.12			人民實際所得	89
政府	1.3.5.2.7.4.8.6			政府實際所得	28

【研究 1-9】1~18 的連續數字的抽稅問題

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 111。

<b>解題過程</b> $n=18\div 2=9, a=3$ $m=18-2=16$ $y=18+17+16+15+14+12+10+9=111$	<b>抽稅次數</b> $k=16\div 2=8$
---	-------------------------------

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	17	9	15	10	14
政府	1	3	5	2	7
抽稅次數	六	七	八		
人民	18	12	16		
政府	6	4	8		
<b>歸納與整理</b>					
人民	17.9.15.10.14.18.12.16			人民實際所得	111
政府	1.3.5.2.7.6.4.8			政府實際所得	36

### 【研究 1-10】1~20 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 124。

<b>解題過程</b> $n=20\div 2=10, a=4$ $m=20-3=17$ $y=20+19+18+16+15+14+12+10=124$	<b>抽稅次數</b> $k=17\div 2=8.5 \approx 8$
---	---

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	19	15	10	14	20
政府	1	3.5	2	7	4
抽稅次數	六	七	八		
人民	12	16	18		
政府	6	8	9		
<b>歸納與整理</b>					
人民	19.15.10.14.20.12.16.18			人民實際所得	124
政府	1.3.5.2.7.4.6.8.9			政府實際所得	45

### 【研究 1-11】1~22 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 167。

<b>解題過程</b> $n=22\div 2=11, a=3$ $m=22-2=20$ $y=22+21+20+19+18+16+15+14+12+10=167$	<b>抽稅次數</b> $k=20\div 2=10$
---	--------------------------------

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	19	9	21	14	15
政府	1	3	7	2	5
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	22	18	12	16	20

政府	11	6	4	8	10
歸納與整理					
人民	19.9.21.14.15.22.18.12.16.20		人民實際所得	165	
政府	1.3.7.2.5.11.6.4.8.10		政府實際所得	57	

**【研究 1-12】1~24 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 185。

<p><b>解題過程</b>  <math>n=24 \div 2 = 12, a=4</math>  <math>m=24-3=21</math>  <math>y=24+23+22+21+20+18+16+15+14+12 = 185</math></p>	<p><b>抽稅次數</b>  <math>k=21 \div 2 = 10.5 \div 10</math></p>
--	---

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	23	9	21	14	15
政府	1	3	7	2	5
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	22	18	16	20	24
政府	11	6	4.8	10	12
歸納與整理					
人民	23.9.21.14.15.22.18.16.20.24		人民實際所得	182	
政府	1.3.7.2.5.11.6.4.8.10.12		政府實際所得	69	

(二)分析 1~25 以奇數作為結尾的連續數字

**【研究 2-1】1~3 的連續數字的抽稅問題**

依公式推論理想最高所得為 3。

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 3。

<p><b>解題過程</b>  <math>n=3 \div 2 = 1.5, a=1</math>  <math>m=3-1=2</math>  <math>y=3</math></p>	<p><b>抽稅次數</b>  <math>k=2 \div 2 = 1</math></p>
--	---

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	3	3
政府	1	1

**【研究 2-2】1~5 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 9。

<p><b>解題過程</b>  <math>n=5 \div 2 = 2.5, a=2</math>  <math>m=5-1=4</math>  <math>y=5+4=9</math></p>	<p><b>抽稅次數</b>  <math>k=4 \div 2 = 2</math></p>
--	---

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	實際所得
人民	5	4	9
政府	1	2	3



**【研究 2-3】1~7 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 17。

<b>解題過程</b> $n=7\div 2=3.5, a=2$ $m=7-1=6$ $y=7+6+4=17$	<b>抽稅次數</b> $k=6\div 2=3$
--	------------------------------

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	7	4	6	17
政府	1	2	3	6

**【研究 2-4】1~9 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 28。

<b>解題過程</b> $n=9\div 2=4.5, a=2$ $m=9-1=8$ $y=9+8+7+6=30$	<b>抽稅次數</b> $k=8\div 2=4$
--	------------------------------

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	實際所得
人民	7	9	6	8	30
政府	1	3	2	4	10

**【研究 2-5】1~11 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 44。

<b>解題過程</b> $n=11\div 2=5.5, a=2$ $m=11-1=10$ $y=11+10+9+8+6=44$	<b>抽稅次數</b> $k=10\div 2=5$
---	-------------------------------

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	11	9	6	8	10
政府	1	3	2	4	5
<b>歸納與整理</b>					
人民	11.9.6.8.10			人民實際所得	44
政府	1.3.2.4.5			政府實際所得	18

**【研究 2-6】1~13 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 52。

<b>解題過程</b> $n=13\div 2=6.5, a=3$ $m=13-2=11$ $y=13+12+10+9+8=52$	<b>抽稅次數</b> $k=11\div 2=5.5\div 2=5$
--	---

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	13	9	10	8	12
政府	1	3	2、5	4	6
歸納與整理					
人民	13.9.10.8.12		人民實際所得	52	
政府	1.3.2.5.4.6		政府實際所得	21	

### 【研究 2-7】1~15 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 81。

<b>解題過程</b> $n=15\div 2=7.5, a=2$ $m=15-1=14$ $y=15+14+13+12+10+9+8=81$	<b>抽稅次數</b> $k=14\div 2=7$
--	-------------------------------

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	13	9	15	10	14
政府	1	3	5	2	7
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	8	12	×	×	×
政府	4	6	×	×	×
歸納與整理					
人民	13.9.15.10.14.8.12		人民實際所得	81	
政府	1.3.5.2.7.4.6		政府實際所得	28	

### 【研究 2-8】1~17 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 93。

<b>解題過程</b> $n=17\div 2=8.5, a=3$ $m=17-2=15$ $y=17+16+15+14+12+10+9=93$	<b>抽稅次數</b> $k=15\div 2=7.5\div 2=7$
---	---

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	17	9	15	10	14
政府	1	3	5	2	7
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	16	12	×	×	×
政府	4.8	6	×	×	×
歸納與整理					
人民	17.9.15.10.14.16.12		人民實際所得	93	
政府	1.3.5.2.7.4.8.6		政府實際所得	36	

### 【研究 2-9】1~19 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 113。

<b>解題過程</b> $n=19\div 2=9.5, a=4$ $m=19-3=16$ $y=19+18+16+15+14+12+10+9=113$	<b>抽稅次數</b> $k=16\div 2=8$
---	-------------------------------

## 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	19	9	15	10	14
政府	1	3	5	2	7
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	18	12	16	×	×
政府	6	4	8	×	×
歸納與整理					
人民	19.9.15.10.14.18.12.16		人民實際所得	113	
政府	1.3.5.2.7.6.4.8		政府實際所得	36	

### 【研究 2-10】1~21 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 145。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=21 \div 2 = 10.5, a=4$	$k=18 \div 2 = 9$
$m=21-3=18$	
$y=21+20+19+18+16+15+14+12+10+9=145$	

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	19	9	15	21	14
政府	1	3	5	7	2
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	18	12	16	20	×
政府	6	4	8	10	×
歸納整理					
人民	19.9.15.21.14.18.12.16.20		人民實際所得	144	
政府	1.3.5.7.2.6.4.8.10		政府實際所得	46	

### 【研究 2-11】1~23 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 171。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=23 \div 2 = 11.5, a=4$	$k=20 \div 2 = 10$
$m=23-3=20$	
$y=23+22+21+20+18+16+15+14+12+10=171$	

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	23	9	15	21	14
政府	1	3	5	7	2
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	18	12	16	20	22
政府	6	4	8	10	11
歸納整理					
人民	23.9.15.21.14.18.12.16.20.22		人民實際所得	170	
政府	1.3.5.7.2.6.4.8.10.11		政府實際所得	57	

**【研究 2-12】1~25 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 210。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=25\div 2=13.5, a=4$	$k=22\div 2=11$
$m=25-3=22$	
$y=25+24+23+22+21+20+18+16+15+14+12=210$	

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	23	25	15	21	14
政府	1	5	3	7	2
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	22	20	16	18	24
政府	11	10.4	8	6.9	12
<b>歸納整理</b>					
人民	23.25.15.21.14.22.20.16.18.24			人民實際所得	198
政府	1.5.3.7.2.11.10.4.8.6.9.12			政府實際所得	78

(三)結尾為質數

1.理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 2。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=2\div 2=1, a=1$	$k=2\div 2=1$
$m=2$	
$y=2$	

2.遊戲過程

抽稅次數	一		
人民	2		
政府	1		
剩下的數	×		
<b>歸納整理</b>			
人民	2	人民實際所得	2
政府	1	政府實際所得	1

**【研究 3-1】1~3 的連續數字的抽稅問題**

1.理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 3。

1. 理想的最高所得

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=3\div 2=1.5, a=2$	$k=2\div 2=1$
$m=2$	
$y=3$	

2. 遊戲過程

抽稅次數	一
人民	3
政府	1

剩下的數	x		
歸納整理			
人民	3	人民實際所得	3
政府	1	政府實際所得	1

### 【研究 3-2】1~5 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 9。

<b>解題過程</b> $n=5 \div 2 = 2.5, a=2$ $m=5-1=4$ $y=5+4=9$	<b>抽稅次數</b> $k=4 \div 2 = 2$
--	---------------------------------

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	
人民	5	4	
政府	1	2	
剩下的數	2.4	x	
歸納整理			
人民	4.5	人民實際所得	9
政府	1.2	政府實際所得	3

### 【研究 3-3】1~7 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 17。

<b>解題過程</b> $n=7 \div 2 = 3.5, a=2$ $m=7-1=6$ $y=7+6+4=17$	<b>抽稅次數</b> $k=6 \div 2 = 3$
---	---------------------------------

#### 2. 遊戲過程

1~7 的連續數字:

抽稅次數	一	二	三
人民	7	4	6
政府	1	2	3
歸納整理			
人民	7.4.6	人民實際所得	17
政府	1.2.3	政府實際所得	6

### 【研究 3-4】1~11 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 44。

<b>解題過程</b> $n=11 \div 2 = 5.5, a=2$ $m=11-1=10$ $y=11+10+9+8+6=44$	<b>抽稅次數</b> $k=10 \div 2 = 5$
--	----------------------------------

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	11	9	6	10	8
政府	1	3	2	5	4
歸納整理					
人民	11.9.6.8.10			人民實際所得	44
政府	1.3.2.4.5			政府實際所得	18

★：4.5 步可互換

**【研究 3-5】1~13 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 52。

<b>解題過程</b> $n=13\div 2=6.5, a=3$ $m=13-2=11$ $y=13+12+10+9+8=52$	<b>抽稅次數</b> $k=11\div 2=5.5\div 5$
--	---------------------------------------

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	13	9	8	10	12
政府	1	3	2.4	5	6
歸納整理					
人民	13.9.10.8.12			人民實際所得	52
政府	1.3.2.5.4.6			政府實際所得	21

★：3.4 步可互換

**【研究 3-6】1~17 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 93。

<b>解題過程</b> $n=17\div 2=8.5, a=3$ $m=17-2=15$ $y=17+16+15+14+12+10+9=93$	<b>抽稅次數</b> $k=15\div 2=7.5\div 7$
---	---------------------------------------

2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五	六	七
人民	17	9	15	10	14	16	12
政府	1	3	5	2	7	8.4	6
歸納整理							
人民	17.9.15.10.14.16.12				人民實際所得	93	
政府	1.3.5.2.7.8.4.6				政府實際所得	36	

★：5.6.7 步可互換

**【研究 3-7】1~19 的連續數字的抽稅問題**

1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 113。

<b>解題過程</b> $n=19\div 2=9.5, a=4$ $m=19-3=16$ $y=19+18+16+15+14+12+10+9=113$	<b>抽稅次數</b> $k=16\div 2=8$
---	-------------------------------

3. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	
人民	19	9	15	10	
政府	1	3	5	2	
抽稅次數	五	六	七	八	
人民	14	18	12	16	
政府	7	6	4	8	
歸納整理					
人民	19.9.15.10.14.18.12.16			人民實際所得	113
政府	1.3.5.2.7.6.4.8			政府實際所得	36

### 【研究 3-8】1~23 的連續數字的抽稅問題

#### 1. 理想的最高所得

依公式推論理想最高所得為 171。

<b>解題過程</b>	<b>抽稅次數</b>
$n=23 \div 2 = 11.5, a=4$	$k=20 \div 2 = 10$
$m=23-3=20$	
$y=23+22+21+20+18+16+15+14+12+10=171$	

#### 2. 遊戲過程

抽稅次數	一	二	三	四	五
人民	23	9	15	21	14
政府	1	3	5	7	2
抽稅次數	六	七	八	九	十
人民	18	12	16	20	22
政府	6	4	8	10	11
<b>歸納整理</b>					
人民	23.9.15.21.14.18.12.16.20.22			人民實際所得	170
政府	1.3.5.7.2.6.4.8.10.11			政府實際所得	57

★：3.4 步可互換，8.9.10 步可互換

#### (四)最佳解題策略

##### 1. 1-25 奇偶數解題策略分析

1-25 奇偶數解題過程中，我們發現結尾數字 20 以下與結尾數字 21 以上的連續數字在解題情況上有所差異。

##### (1) 1~20 以奇偶數作為結尾的連續數字

在 1~20 以奇偶數作為結尾的連續數字，我們發現要拿到最高所得其拿法有一定的共通性。

a. 在第一步，要拿最大的質數。

連續數字	1~3	1~5	1~7	1~9	1~11	1~13	1~15	1~17	1~19	
第一步	3	5	7	7	11	13	13	17	19	
連續數字	1~2	1~4	1~6	1~8	1~10	1~12	1~14	1~16	1~18	1~20
第一步	2	3	5	7	7	11	13	13	17	19

b. 在第二步時，只要在可拿的範圍內(切半法以上的大數)有質數的平方數，就拿質數的平方數。

連續數字	1~3	1~5	1~7	1~9	1~11	1~13	1~15	1~17	1~19	
第二步	無	4	4	9	9	9	9	9	9	
連續數字	1~2	1~4	1~6	1~8	1~10	1~12	1~14	1~16	1~18	1~20
第二步	無	4	4	4	9	9	9	9	9	15

☆例外：1~20 的第二步無需更換成質數的平方數即可拿到最高所得

c. 之後依因數表來檢視，挑選只剩下兩個因數的數字(自己和其中一個數)的數，但需在範圍內(切半法以上的大數)。

##### (2) 結尾數字 21 以上的連續數字

在結尾數字 21 以上的連續數字，發現都無法拿到最高所得，因為應該要拿的範圍內數字有太多因數重疊，因此必須更換範圍內的數字，以拿到最接近最高所得，其方法皆有一定的共通性。

a. 在第一步，拿的是最大的質數。

連續數字	1~21	1~22	1~23	1~24	1~25
第一步	19	19	23	23	23

b.在拿第二步時，只要在可拿的範圍內(切半法以上的大數)有質數的平方數，就拿質數的平方數，範圍內若無時就需要放棄範圍內最小的數字以換取非範圍內最大的質數平方數。

連續數字	1~21	1~22	1~23	1~24	1~25
第二步	9	9	9	9	25

結尾數字是 21 以上的連續數字因人民所得預估範圍中沒有 9，因此將範圍中最小的數和 9 替換。

c.之後依因數表來檢視，挑選只剩下兩個因數的數字(自己和其中一個數)的數，但需在範圍內(切半法以上的大數)。

## 2. 1-25 結尾數字為質數解題策略分析

我們發現 1-25 結尾數字為質數的解題過程，第一步至第五步皆有一定的共通性，如下分析：

### (1)第一步

結尾的數字	2	3	5	7	11
第一步人民拿的數字	2	3	5	7	11
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	13	17	19	23	/
第一步人民拿的數字	13	17	19	23	
數的性質的分析	質數				

### (2)第二步

結尾的數字	2	3	5	7	11
第二步人民拿的數字	無		4	4	9
數的性質的分析	無		質數的平方數		
結尾的數字	13	17	19	23	/
第二步人民拿的數字	9	9	9	9	
數的性質的分析	質數的平方數				

### (3)第三步

結尾的數字	2	3	5	7	11
第三步人民拿的數字	無			6	6
數的性質的分析	無			質數的質數倍	
結尾的數字	13	17	19	23	/
第三步人民拿的數字	8	15	15	15	
數的性質的分析	★	質數的質數倍			

★：本題為例外

### (4)第四步

結尾的數字	2	3	5	7	11
第四步人民拿的數字	無				10
數的性質的分析	無				質數的質數倍
結尾的數字	13	17	19	23	/
第四步人民拿的數字	10	10	10	21	
數的性質的分析	質數的質數倍				

### (5)第五步

結尾的數字	2	3	5	7	11
第五步人民拿的數字	無				8
數的性質的分析	無				質數的質數倍
結尾的數字	13	17	19	23	/



第五步人民拿的數字	12	14	14	14	
數的性質的分析	質數的質數倍				

◎1-25 以質數結尾前五步歸納整理：

結尾數↓	第1步	第2步	第3步	第4步	第5步
2	2	無			
3	3	無			
5	5	4	無		
7	7	4	6	無	
11	11	9	6	10	8
13	13	9	8	10	12
17	17	9	15	10	14
19	19	9	15	10	14
23	23	9	15	21	14

由此表格可見，第一步都是拿結尾數，因為結尾數都是最大質數，這樣政府只能抽走1。另外，只要範圍中有這些數9.10.14.15，第2到第5步就分別是9.15.10.14，表格如下：

人民拿的數		9	15	10	14
	因數	第2步	第3步	第4步	第5步
9	1.3.9	×	×	×	×
15	1.3.5.15	5.15	×	×	×
10	1.2.5.10	2.5.10	2.10	×	×
14	1.2.7.14	2.7.14	2.7.14	7.14	×

☆：第一步拿質數，政府可抽的稅已少了1。

他們的因數之間互相有關係，9的稅有1.3，15的稅有1.3.5，10的稅有1.2.5，14的稅有1.2.7，第一步是質數，政府抽走1，9被拿走了，政府抽走3，15的稅就只剩5，人民就拿15，10的稅也只剩2(10為質數—5的質數倍)，10拿走後，2被政府走了，就可開始拿質數的2倍數，例：14.22.26等

3. 1-25 連續數字的所得歸納整理表格分析

◎1-25 理論與實際最高所得比較分析表

結尾的數字	1	2	3	4	5
理論的最高所得	0	2	3	7	9
實際的所得	0	2	3	7	9
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	6	7	8	9	10
理論的最高所得	15	17	21	28	40
實際的所得	15	17	21	28	40
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	11	12	13	14	15
理論的最高所得	44	50	52	66	81
實際的所得	44	50	52	66	81
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	16	17	18	19	20
理論的最高所得	89	93	111	113	124
實際的所得	89	93	111	113	124
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	21	22	23	24	25
理論的最高所得	145	167	171	185	210
實際的所得	144	166	170	182	198

是否符合最高所得	x	x	x	x	x
----------	---	---	---	---	---

◎1-25 不符合最高所得的實際與理論所的差距分析表

不符合最高所得的數	21	22	23	24	25
少拿的數	10	10	10	12	12
多拿的數	9	9	9	9	無
所得差距	1	1	1	3	12

由上表可知，9 是質數 3 的平方數，第二步通常都拿它，因此都將可拿的數中最小的數換掉換成 9，而 25 則是因為 24.20.18.16 的因數太多，且會起衝突，12 只好當 24 中政府抽的稅。

◎1-25 連續數字的人民第一步的選擇「數字」與數字性質分析

結尾的數字	1	2	3	4	5
第一步人民拿的數字	無	2	3	3	5
數的性質的分析	無	質數			
結尾的數字	6	7	8	9	10
第一步人民拿的數字	5	7	7	7	7
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	11	12	13	14	15
第一步人民拿的數字	11	11	13	13	13
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	16	17	18	19	20
第一步人民拿的數字	13	17	17	19	19
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	21	22	23	24	25
第一步人民拿的數字	19	19	23	23	23
數的性質的分析	質數				

◎1-25 連續數字的人民第二步的選擇「數字」與數字性質分析

結尾的數字	1	2	3	4	5
第一步人民拿的數字	無	無	無	4	4
數的性質的分析	無			質數的平方數	
結尾的數字	6	7	8	9	10
第一步人民拿的數字	4	4	8	9	9
數的性質的分析	質數的平方數		質數的平方數		
結尾的數字	11	12	13	14	15
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	9
數的性質的分析	質數的平方數				
結尾的數字	16	17	18	19	20
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	15
數的性質的分析	質數的平方數				範圍內的數字
結尾的數字	21	22	23	24	25
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	25
數的性質的分析	質數的平方數				

### 三.探討 1-25 非連續數字下的解題情形

我們發現，人民的拿法有一定的策略，故欲探究非連續數字下的抽稅問題的解法是否也有一定的策略。我們將分成偶數的非連續數字與奇數的非連續數字討論，將逐項列出『所有數字個數』、『理論的最高所得』以及『解題過程』。

### (一) 只有偶數

以下是偶數的非連續數字的抽稅問題：

#### 【研究 4-1】1 - 4 的偶數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:2.4

(2) 理論的最高所得：4

(3) 解題過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	4	4
政府	2	2

(4) 實際的所得分析

1 - 4 的偶數，因為所有數字僅有 2.4，故人民與政府可各拿一個數字，而理論上的最高所得為 4。

#### 【研究 4-2】1 - 6 的偶數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:2.4.6

(2) 理論的最高所得：6

(3) 解題過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	6	6
政府	2	2

(4) 實際的所得分析

1 - 6 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 6，與實際操作結果相符。

#### 【研究 4-3】1 - 8 的偶數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:2.4.6.8

(2) 理論的最高所得：14

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	實際所得
人民	6	8	14
政府	2	4	6

(4) 實際的所得分析

1 - 8 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 14，與實際操作結果相符。

#### 【研究 4-4】1 - 10 的偶數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:2.4.6.8.10

(2) 理論的最高所得：18

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	實際所得
人民	10	8	18
政府	2	4	6

(4) 實際的所得分析

1-10 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 18，與實際操作結果相符。

**【研究 4-5】1 - 12 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12

(2) 理論的最高所得：30

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	10	8	12	30
政府	2	4	6	12

(4) 實際的所得分析

1-12 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 30，與實際操作結果相符。。

**【研究 4-6】1 - 14 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14

(2) 理論的最高所得：34

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	14	8	12	34
政府	2	4	6	12

(4) 實際的所得分析

1-14 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 34，與實際操作結果相符。

**【研究 4-7】1 - 16 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14.16

(2) 理論的最高所得：46

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	14	16	12	46
政府	2	4	6	12

(4) 實際的所得分析

1-16 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 46，與實際操作結果相符。

**【研究 4-8】1 - 18 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14.16.18

(2) 理論的最高所得：60

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	實際所得
人民	14	18	12	16	60
政府	2	6	4	8	20

(4) 實際的所得分析

1-18 的偶數非，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 60，與實際操作結果相符。

**【研究 4-9】1 - 20 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14.16.18.20

(2) 理論的最高所得：80

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	五	實際所得
人民	14	18	12	16	20	80
政府	2	6	4	8	10	30

(4) 實際的所得分析

1-20 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 80，與實際操作結果相符。

**【研究 4-10】1 - 22 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22

(2) 理論的最高所得：88

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	五	實際所得
人民	22	18	12	16	20	88
政府	2	6	4	8	10	30

(4) 實際的所得分析

1-22 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 88，與實際操作結果相符。

**【研究 4-11】1 - 24 的偶數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24

(2) 理論的最高所得：112

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	五	實際所得
人民	22	18	12	24	20	96
政府	2	6	4	8	10	30

(4) 實際的所得分析

1-24 的偶數，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 112，實際操作人民可以獲得理論上的最高所得 96，與理論最高所得不符。

**(二) 只有奇數**

**【研究 5-1】1 - 3 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1.3

(2) 理論的最高所得：3

(3) 解題過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	3	3
政府	1	1

(4) 實際的所得分析

1-3 的奇非，因為所有數字僅有 1,3，故人民與政府可各拿一個數字，而理論上的最高所得為 3，而實際操作依上面的表格顯示，人民確實可以獲得最高所得 3。

**【研究 5-2】1-5 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1,3,5

(2) 理論的最高所得：5

(3) 解題過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	5	5
政府	1	1

(4) 實際的所得分析

1-5 偶數非，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 5，實際操作後，我們發現人民確實可以獲得最高所得 5。

**【研究 5-3】1-7 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1,3,5,7

(2) 理論的最高所得：12

(3) 解題過程

抽稅次數	一	實際所得
人民	7	7
政府	1	1

(4) 實際的所得分析

1-7 數非，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 12 實際操作後，因為 3,5,7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 3,5，我們發現人民無法最高所得 12。

**【研究 5-4】1-9 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1,3,5,7,9

(2) 理論的最高所得：16

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	實際所得
人民	7	9	16
政府	1	3	4

(4) 實際的所得分析

1-9 非，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 16 際操作後，因為 5,7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 5，我們發現人民無法最高所得 16。

**【研究 5-5】1-11 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1,3,5,7,9,11

(2) 理論的最高所得：27

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	實際所得
------	---	---	------

人民	11	9	20
政府	1	3	4

(4) 實際的所得分析

1-11，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 27 實際操做後，因為 11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 7，我們發現人民無法最高所得 27。

**【研究 5-6】1 - 13 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13

(2) 理論的最高所得：33

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	實際所得
人民	13	9	22
政府	1	3	4

(4) 實際的所得分析

1-13 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 33 實際操做後，因為 13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 11.7，我們發現人民無法最高所得 33。

**【研究 5-7】1 - 15 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15

(2) 理論的最高所得：48

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	13	9	15	37
政府	1	3	5	9

(4) 實際的所得分析

1-15 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 37 實際操做後，因為 13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 11.7，我們發現人民無法最高所得 37。

**【研究 5-8】1 - 17 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15.17

(2) 理論的最高所得：56

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	17	9	15	41
政府	1	3	5	9

(4) 實際的所得分析

1-17 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 41 實際操做後，因為 17.13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 13.11.7，我們發現人民無法最高所得 41。

**【研究 5-9】1 - 19 的奇數非連續數字的抽稅問題**

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15.17.19

(2) 理論的最高所得：64

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	實際所得
人民	19	9	15	43
政府	1	3	5	9

(4) 實際的所得分析

1-19 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 43 實際操做後，因為 19.17.13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 17.13.11.7，我們發現人民無法最高所得 43。

### 【研究 5-10】1 - 21 的奇數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21

(2) 理論的最高所得：85

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	實際所得
人民	19	9	15	21	64
政府	1	3	5	7	16

(4) 實際的所得分析

1-21 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 64 實際操做後，因為 19.17.13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 17.13.11.7，我們發現人民無法最高所得 64。

### 【研究 5-11】1 - 23 的奇數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23

(2) 理論的最高所得：108

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	實際所得
人民	23	9	15	21	68
政府	1	3	5	7	16

(4) 實際的所得分析

1-23 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 68 實際操做後，因為 23.19.17.13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄 19.17.13.11.7，我們發現人民無法最高所得 68。

### 【研究 5-12】1 - 25 的奇數非連續數字的抽稅問題

(1) 所有數字:1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25

(2) 理論的最高所得：120

(3) 解題過程

抽稅次數	一	二	三	四	實際所得
人民	23	25	15	21	84
政府	1	5	3	7	16

(4) 實際的所得分析

1-25 續數字的抽稅問題，依平分切半法的分析，可知理論上的最高所得為 84 實際操做後，因為 23.19.17.13.11.7 都只有 1 一個因數，所以只好捨棄



19.17.13.11.7，我們發現人民無法最高所得 84。

### (三)最佳解題策略

#### 1.只有偶數的最佳解題策略分析

經實際操作 1-24 以偶數結尾的非連續數，發現它們的第一步都有一個共通點，這些第一步所要拿的數字皆是：1~N (N 為偶數)，1~N/2 中最大質數的二倍。例如 1-12 的偶數非連續數，第一步要拿的數字是：N=12，因此我們要拿 1~12/2 中最大的質數的二倍，也就是 1~6 中最大的質數的二倍，而 1-6 數字中最大的質數為 5，5 的二倍為 10。

以下為 1-24 以偶數結尾的非連續數字抽稅問題中，解題過程所有的第一步：

結尾數字 (N)	N/2 中最大的質數	第一步 (N/2 最大質數的二倍)
4	2	4
6	3	6
8	3	6
10	5	10
12	5	10
14	7	14
16	7	14
18	7	14
20	7	14
22	11	22
24	11	22

我們推論之所以要拿 1~N (N 為偶數)，1~N/2 中最大質數的二倍，是因為質數的因數只有『1』和『自己本身』而已，因此質數的二倍後的數字其因數除了「1」外，將增添數字「2」，而除了質數的二倍只有一個因數「2」以外，其他數字都有很多因數，所以第一步應拿質數的倍數最為恰當。

#### 2.只有奇數的最佳解題策略分析

經實際操作 1-25 以奇數結尾的非連續數，發現第一步都有一個共通點，就是要拿最大的質數，而第二步也有一個共通點，就是拿質數的平方數。

	1-3	1-5	1-7	1-9	1-11	1-13	1-15	1-17	1-19	1-21	1-23	1-25
第一步 (最大的質數)	3	5	7	9	11	13	13	17	19	19	23	23
第二步 質數的平方數	×	×	×	9	9	9	9	9	9	9	9	25

◎ 1-25 偶數與奇數非連續數字的所得歸納整理表

結尾的數字	1	2	3	4	5
理論的最高所得	0	0	3	4	5
實際的所得	0	0	3	4	5
是否符合最高所得	○	○	○	○	○
結尾的數字	6	7	8	9	10
理論的最高所得	6	12	14	16	18
實際的所得	6	7	14	16	18
是否符合最高所得	○	×	○	○	○
結尾的數字	11	12	13	14	15
理論的最高所得	27	30	33	36	48
實際的所得	20	30	22	34	37
是否符合最高所得	×	○	×	×	×

結尾的數字	16	17	18	19	20
理論的最高所得	56	56	60	64	80
實際的所得	46	41	60	43	80
是否符合最高所得	×	×	○	×	○
結尾的數字	21	22	23	24	25
理論的最高所得	85	88	108	112	120
實際的所得	64	88	68	96	84
是否符合最高所得	×	○	×	×	×

## 陸、 研究結論

### 一.探討抽稅問題的最高所得

我們實際探討後發現抽稅問題的最高所得有一定的計算方式，其步驟如下：

- 1.設尾數是  $y$ ， $y \div 2 = n$
- 2.設比  $n$  大的質數是  $z$ ， $z$  有  $a$  個
- 3.設要拿的步數為  $k$ ， $y - a = k$
4. $k$  的總和 = 最高所得。

### 二.探討 1-25 連續數字下抽稅問題的解題情形(解題步驟、最高所得)

1-25 奇偶數解題過程中，我們發現結尾數字 20 以下與結尾數字 21 以上的連續數字在解題情況上有所差異：

#### (1) 1~20 以奇偶數作為結尾的連續數字

在 1~20 以奇偶數作為結尾的連續數字，我們發現要拿到最高所得其拿法有一定的共通性。

a.在第一步，拿的一定是**最大的質數**。

連續數字	1~3	1~5	1~7	1~9	1~11	1~13	1~15	1~17	1~19	
第一步	3	5	7	7	11	13	13	17	19	
連續數字	1~2	1~4	1~6	1~8	1~10	1~12	1~14	1~16	1~18	1~20
第一步	2	3	5	7	7	11	13	13	17	19

b.在拿第二步時，只要在可拿的範圍內(切半法以上的大數)有質數的平方數，就拿質數的平方數。

連續數字	1~3	1~5	1~7	1~9	1~11	1~13	1~15	1~17	1~19	
第二步	無	4	4	9	9	9	9	9	9	
連續數字	1~2	1~4	1~6	1~8	1~10	1~12	1~14	1~16	1~18	1~20
第二步	無	4	4	4	9	9	9	9	9	15

(1~20 因為可以拿得到最高所得，此題為例外)

c.之後依因數表來檢視，挑選只剩下兩個因數的數字(自己和其中一個數)的數，但需在範圍內(切半法以上的大數)。

#### (2) 結尾數字 21 以上的連續數字

a.在第一步，拿的一定是**最大的質數**。

連續數字	1~21	1~22	1~23	1~24	1~25
第一步	19	19	23	23	23

b.在拿第二步時，只要在可拿的範圍內(切半法以上的大數)有質數的平方數，就拿質數的平方數。

連續數字	1~21	1~22	1~23	1~24	1~25
第二步	9	9	9	9	25

結尾數字是 21 以上的連續數字因人民所得預估範圍中沒有 9，因此將範圍中最小的數和 9 替換。

c.之後依因數表來檢視，挑選只剩下兩個因數的數字(自己和其中一個數)的數，但需在範圍內(切半法以上的大數)。

### (三)結尾是質數

我們發現 1-25 結尾數字為質數的解題過程，第一步至第五步皆有一定的共通性，如下分析：

◎1-25 以質數結尾前五步歸納整理：

結尾數↓	第 1 步	第 2 步	第 3 步	第 4 步	第 5 步
2	2	無			
3	3	無			
5	5	4	無		
7	7	4	6	無	
11	11	9	6	10	8
13	13	9	8	10	12
17	17	9	15	10	14
19	19	9	15	10	14
23	23	9	15	21	14

由上表可知，第一步都是拿結尾數，因為結尾數都是質數，第一步要拿的數是最大的質數，這樣政府只能抽走 1。另外，只要範圍中有這些數 9.10.14.15，第 2 到第 5 步就分別是 9.15.10.14，表格如下：

人民拿的數		9	15	10	14
	因數	第 2 步	第 3 步	第 4 步	第 5 步
9	1.3.9	×	×	×	×
15	1.3.5.15	5.15	×	×	×
10	1.2.5.10	2.5.10	2.10	×	×
14	1.2.7.14	2.7.14	2.7.14	7.14	×

☆：第一步拿質數，政府可抽的稅已少了 1。

他們的因數之間互相有關係，9 的稅有 1.3，15 的稅有 1.3.5，10 的稅有 1.2.5，14 的稅有 1.2.7，第一步是質數，政府抽走 1，9 被拿走了，政府抽走 3，15 的稅就只剩 5，人民就拿 15，10 的稅也只剩 2(10 為質數—5 的質數倍)，10 拿走後，2 被政府走了，就可開始拿質數的 2 倍數，例：14.22.26 等。

### (四)最佳解題策略

我們發現結尾數字 20 以下與結尾數字 21 以上的最佳解題策略，有一定的共通性，如下：

- 在第一步，拿的一定是**最大的質數**。
- 在拿第二步時，只要在可拿的範圍內(切半法以上的大數)有質數的平方數，就拿質數的平方數(即可獲得理論上最高所得)，範圍內若無時就需要放棄範圍內最小的數字以換取非範圍內最大的質數平方數(無法獲得理論的最高所得，但可以最接近理論最高所得)。
- 之後依因數表來檢視，挑選只剩下兩個因數的數字(自己和其中一個數)的數，

但需在範圍內(切半法以上的大數)。

結尾數字 20 以下採用方法皆可獲得理論的最高所得，而結尾數字 21 以上採用此方法雖然無法獲得最高所得，但卻是最接近理論上的最高所得。

以下是我們分析 1-25 連續數字抽稅問題過程分析表格：

◎1-25 理論與實際最高所得比較分析表

結尾的數字	1	2	3	4	5
理論的最高所得	0	2	3	7	9
實際的所得	0	2	3	7	9
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	6	7	8	9	10
理論的最高所得	15	17	21	28	40
實際的所得	15	17	21	28	40
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	11	12	13	14	15
理論的最高所得	44	50	52	66	81
實際的所得	44	50	52	66	81
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	16	17	18	19	20
理論的最高所得	89	93	111	113	124
實際的所得	89	93	111	113	124
是否符合最高所得	0	0	0	0	0
結尾的數字	21	22	23	24	25
理論的最高所得	145	167	171	185	210
實際的所得	144	166	170	182	198
是否符合最高所得	×	×	×	×	×

◎1-25 不符合最高所得的實際與理論所的差距分析表

不符合最高所得的數	21	22	23	24	25
少拿的數	10	10	10	12	12
多拿的數	9	9	9	9	無
所得差距	1	1	1	3	12

由上表可知，因為 9 是質數 3 的平方數，第二步通常都拿它，因此都將可拿的數中最小的數換掉換成 9，而 25 則是因為 24.20.18.16 的因數太多，且會起衝突，12 只好當 24 中政府抽的稅。

◎1-25 連續數字的人民第一步的選擇「數字」與數字性質分析

結尾的數字	1	2	3	4	5
第一步人民拿的數字	無	2	3	3	5
數的性質的分析	無	質數			
結尾的數字	6	7	8	9	10
第一步人民拿的數字	5	7	7	7	7
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	11	12	13	14	15
第一步人民拿的數字	11	11	13	13	13
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	16	17	18	19	20
第一步人民拿的數字	13	17	17	19	19
數的性質的分析	質數				
結尾的數字	21	22	23	24	25
第一步人民拿的數字	19	19	23	23	23
數的性質的分析	質數				

由上表可知，人民第一步所拿的是範圍內最大的質數

### ◎1-25 連續數字的人民第二步的選擇「數字」與數字性質分析

結尾的數字	1	2	3	4	5
第一步人民拿的數字	無	無	無	4	4
數的性質的分析	無			質數的平方數	
結尾的數字	6	7	8	9	10
第一步人民拿的數字	4	4	8	9	9
數的性質的分析	質數的平方數		質數的平方數		
結尾的數字	11	12	13	14	15
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	9
數的性質的分析	質數的平方數				
結尾的數字	16	17	18	19	20
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	15
數的性質的分析	質數的平方數				範圍內的數字
結尾的數字	21	22	23	24	25
第一步人民拿的數字	9	9	9	9	25
數的性質的分析	質數的平方數				

### 三、探討 1-25 非連續數字下的解題情形

#### (一) 只有偶數

經實際操作 1-24 以偶數結尾的非連續數，發現它們的第一步都有一個共通點，這些第一步所要拿的數字皆是：1~N (N 為偶數)，1~N/2 中最大質數的二倍。我們推論之所以要拿 1~N (N 為偶數)，1~N/2 中最大質數的二倍，是因為質數的因數只有『1』和『自己本身』而已，因此質數的二倍後的數字其因數除了「1」(數字 1 不是偶數，因此不列入)外，將增添數字「2」，而除了質數的二倍只有一個因數「2」以外，其他數字都有很多因數，所以第一步應拿質數的倍數最為恰當。

以下為 1-24 以偶數結尾的非連續數字抽稅問題中，解題過程所有的第一步：

結尾數字 (N)	N/2 中最大的質數	第一步 (N/2 最大質數的二倍)
4	2	4
6	3	6
8	3	6
10	5	10
12	5	10
14	7	14
16	7	14
18	7	14
20	7	14
22	11	22
24	11	22

#### (二) 只有奇數

經實際操作 1-25 以奇數結尾的非連續數，發現所有的第一步都有一個共通點，就是要拿最大的質數，而第二步也有一個共通點，就是拿質數的平方數。

	1-3	1-5	1-7	1-9	1-11	1-13	1-15	1-17	1-19	1-21	1-23	1-25
第一步 (最大的質數)	3	5	7	7	11	13	13	17	19	19	23	23
第二步 質數的平方數	×	×	×	9	9	9	9	9	9	9	9	25

#### (三) 最佳解題策略分析

1-25 以奇偶數結尾的非連續數，最佳解題策略皆有所差異，如下：

- (1) 1-24 以偶數結尾的非連續數，發現它們的第一步都有一個共通點，就是拿質數的二倍。
- (2) 1-25 以奇數結尾的非連續數，發現第一步都有一個共通點，就是要拿最大的質數，而第二步也有一個共通點，就是拿質數的平方數。

以下為我們分析 1-25 奇偶數非連續數字理論所得與實際所得差異分析表：

◎ 1-25 偶數與奇數非連續數字的所得歸納整理表

結尾的數字	1	2	3	4	5
理論的最高所得	0	0	3	4	5
實際的所得	0	0	3	4	5
是否符合最高所得	○	○	○	○	○
結尾的數字	6	7	8	9	10
理論的最高所得	6	12	14	16	18
實際的所得	6	7	14	16	18
是否符合最高所得	○	×	○	○	○
結尾的數字	11	12	13	14	15
理論的最高所得	27	30	33	36	48
實際的所得	20	30	22	34	37
是否符合最高所得	×	○	×	×	×
結尾的數字	16	17	18	19	20
理論的最高所得	56	56	60	64	80
實際的所得	46	41	60	43	80
是否符合最高所得	×	×	○	×	○
結尾的數字	21	22	23	24	25
理論的最高所得	85	88	108	112	120
實際的所得	64	88	68	96	84
是否符合最高所得	×	○	×	×	×

## 柒、 未來展望

經過這次的研究，我們發現每一個數字間的因數與倍數有巧妙的關係，透過稅法變變變的遊戲，讓我們對因數、倍數、與質數有更透徹的瞭解。目前的研究做到 1-25 連續與非連續數字，其中結尾數字 20 以下與結尾數字 21 以上的拿法與實際所得皆有所差異，我們推測若繼續探究 25 以上的數字，應該可以發現某些數字性質的異同，未來的發展與改進之處如下：

### 1.分析 1-100 連續與非連續數字抽稅問題

- (1) 探討理論所得與實際所得的差異
- (2) 探討每一步拿法的共通性
- (3) 從因數、倍數與質數角度分析 1-100 的數字性質

### 2.尋找最佳的解題策略

- (1) 探討如何縮短理論與實際所得的差距
- (2) 探討不同的拿法策略

捌、 參考資料

讓我們來玩數學（2005），小天下出版，黃敏晃。

## 【評語】 080409

1. 能利用課堂的因數、質數來解決問題，解釋清楚並找到數學的規律性。
2. 討論深入度可以再加強。