中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080408

奇妙的規則性軌跡

「由土法煉鋼模式→電腦計算學習歷程探究」

學校名稱：臺中市西區忠孝國民小學

作者：	指導老師：
小六　黃靖芸	陳貞蓉
小六　徐麗雅	陳明雅
小六　張名尚	
小六　吳恆波	
小六　沈晁立	
小六　林軒誠	

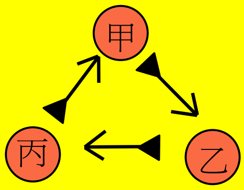
關鍵詞：組合數學、和局、循環賽

奇妙的規則性軌跡

由土法煉鋼模式 ➡ 電腦計算學習歷程探究

摘要

校內班際躲避球賽決賽採用單循環賽，結果發生難解的「和局▲」甲班勝乙班，乙班勝丙班，而丙班勝甲班，形成同獲 1 勝 1 負的特殊情況。



因此特稱爲異類排列組合。

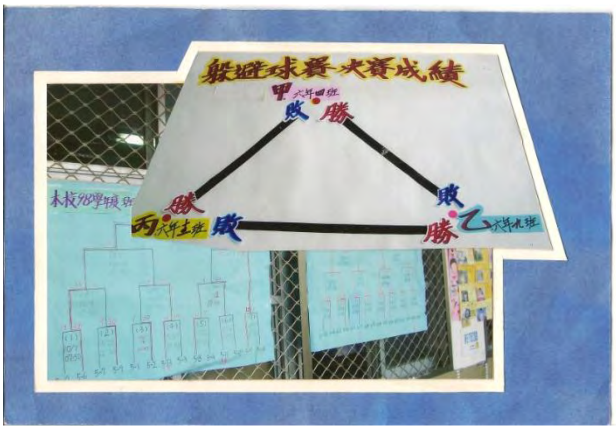
首先自創名詞、符號、作圖法……等著手，並依下列研究計畫進行。

1、縮小樣本 簡化問題 ➡ 2、用符號連線嘗試做有系統的符號連線圖 依勝負規則性簡列成符號簡列表 ➡ 3、經整理後 逐一列舉

4、依排列圖深入探究尋求他的規則性，並找出「和局▲」 ➡ 5、依序漸進 導出公式 ➡ 6、自製簡易計算器師生共同完成電腦程式設計

整個研究過程，採用組合數學方法處理，並能從有系統有規則的紀錄表，自創簡易計算器更在老師教導下共同完成電腦程式的設計。

總而言之，本研究符合將數學應用於日常生活中，解決日常生活問題的原則。



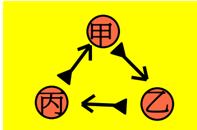
校內躲避球賽情形

操作簡易計算器情形

電腦操作情形

壹、研究動機

一、校內班際躲避球賽，經初賽（淘汰賽）後選出 3 隊（甲、乙、丙）。
決賽採用較公平的單循環賽、比賽結果發生**甲**隊勝**乙**隊、**乙**隊勝**丙**隊而**丙**隊勝**甲**隊、難分軒輊的「**和局▲**」情況（各 1 勝 1 負）
我們稱它為難解的「**和局▲**」。



二、經過大家討論、請教老師後，認為它的確是學習**組合數學**的最好題材決定深入研究。

貳、研究目的:

一、探討躲避球循環賽出現「**和局▲**」的特殊情況個數之範圍。
二、透視「**一一列舉**」法。(**土法煉鋼法**)
三、由嘗試中，找出一有系統之組合法，使此法可以讓「**和局▲**」之個數最多。
四、探究單循環賽結果，有系統之作圖法，並深入探討尋求它的規則性，依序漸進導出公式。

叁、應用器材或器具:　**一**、文具　**二**、珍珠板　**三**、計算機

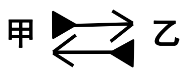
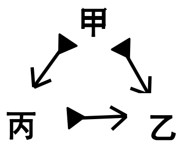
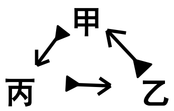
肆、研究過程或方法:

【研究一】自創符號、代號、創意新詞。

$\boxed{\text{方法}}$ 1.自創符號、代號、創意新詞。
$\boxed{\text{結果}}$ 2.將許多資訊濃縮在字詞、符號中；讓人一看就懂。

自創符號、代號、創意新詞對照表

符號(代號)	名稱	內容	備註
N	隊數(點數)	參與單循環賽隊伍數	
————	連線	表示相對比賽情況(相對)	
甲————**乙**	甲乙連線	甲、乙兩隊相對比賽	無關勝負
甲	甲和 3 隊連線(單循環賽)	指共有 **4** 隊、甲對其他 **3** 隊相對比賽	無關比賽結果
甲 **丙** **乙**	甲、乙、丙 **3** 隊連線(單循環賽)	三條連線表示兩兩相對比賽共有 3 次情況	無關勝負
Y	連線總數	**Y** $Y=\frac{(N-1)\times N}{2}$	連線數是本研究關鍵因素
甲 ←——	射入(負)	以甲隊來看表示甲負	
甲 ▶——	射出(勝)	以甲隊來看表示甲勝	
甲 ▶——> **乙**	出入線(符號連線)	指甲乙比賽結果甲勝乙負	已分勝負

	兩隊(2 種符號連線)	甲勝乙或乙勝甲符號連線方向每條有 2 種	一次循環賽結果只能出現其一
	甲乙丙三隊單循環賽結果情況符號連線	甲勝乙和丙獲 2 勝第一名 乙負丙和甲獲 2 負第三名 丙負甲勝乙獲 1 勝 1 負 第二名	成績結果 甲＞丙＞乙
	**「和局▲」**	甲勝丙、丙勝乙、乙勝甲、甲乙丙各獲 1 勝 1 負(勝負相同)	無法分出勝負
P	比賽結果情況總數	全部隊伍、兩兩相對比賽結果可能發生情況總數	
X	**「和局▲」**數	循環賽出現**「和局▲」**的數目	
H	前後 **Y** 數差距		
F	前後 **P** 倍數	**F=P** ÷ 前 **P**	
K	前後 **F** 的倍數(x2)	前後 **F** 成倍數增加	

【研究二】、**蒐集有關排列組合資料並請教專家。**

探究一 **單循環賽比賽排列結果可能產生情況之探討。**

方法 :搜集排列組合數學書籍及電腦網路資訊。

結果 :(一)收集資料所得結論:

◎把 **1**、**2**、**3**、三個數字進行「全排列」情況

(1)1-2-3	(3)2-1-3	(5)3-1-2
(2)1-3-2	(4)2-3-1	(6)3-2-1

共有**六**種排法

公式：運用「**乘法原理**」 N × (N-1) × (N-2) ＝ 3x2x1＝ 6

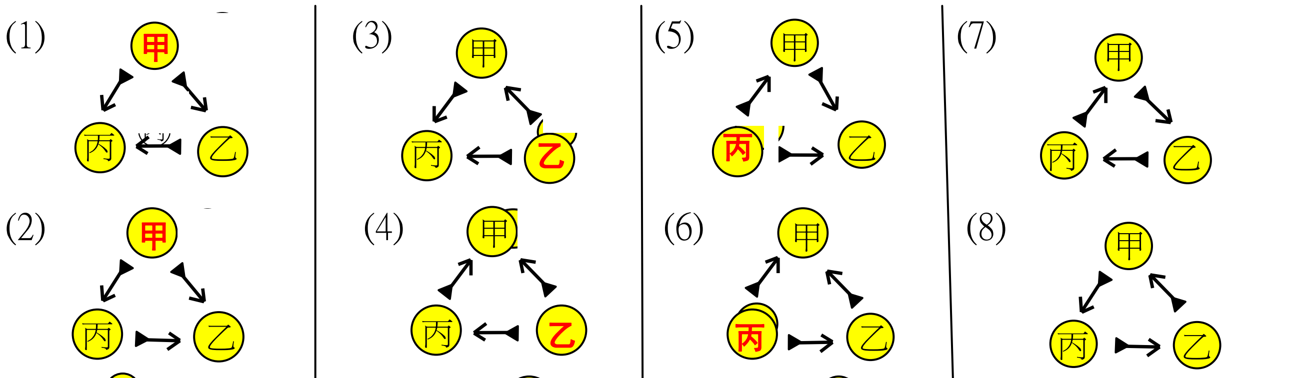
適用於躲避球單循環賽結果情況所有排法表

名次	一、	二、	三、	一、	二、	三、	一、	二、	三、
勝負	甲	乙	丙	乙	甲	丙	丙	甲	乙
情形	甲	丙	乙	乙	丙	甲	丙	乙	甲
備註	以甲為最強			以乙為最強			以丙為最強		

(二、)運用土法煉鋼模式(「**一一列舉**」法)。

方法：運用「**一一列舉**」法進行單循環球賽結果情況，一一組合成圖。

結果　所有組合符號連線圖如下



(1)(2)以甲最強 獲 **2** 勝　(3)(4) 以乙最強 獲 **2** 勝　(5)(6) 以丙最強 獲 **2** 勝　(7)(8) 同爲 1 勝 1 負成「**和局▲**」(特殊情況)

運用「**一一列舉**」法計算共有以上 **8** 種組法

運用**連線數**計算:

$$\mathbf{Y}=\frac{(3-1)\times 3}{2}=3 \quad \mathbf{3}$$

$$\mathbf{P}=2^{3}=2\times2\times2=\mathbf{8}$$

分析：若 **N=3**、發現規則性:

1. 每循環賽每隊都有(2 勝)+(2 負)+(1 勝 1 負)3 種情況，各 2 次。
2. 除運用乘法原理計算出 6 種圖外還多出 2 個同爲 1 勝 1 負的特殊情況「**和局▲**」。

二、導出公式:

運用**乘法原理**計算公式: **P = N x (N-1) x (N-2)**

運用**連線數**計算公式: $Y=\frac{(N-1)*N}{2}$　$P=2^{y}$

導出公式詳細過程請看 P6.7 **探究二、三**

探究二 循環賽結果出現六種和八種不同答案的難題(相差 2 種)探討。

方法 : 1.問題的認識。(6 種≠8 種)

2.將兩種解法，分別一一作圖列出再深入探討。

結果 : 1.研究二:(一)、(二)所得運算答案如下: (若 **N=3**)

(若 **N=3**)

書籍網路資料公式解答:

公式

P =N×(N-1)×(N-2)

=**6**

全排列共有**六**種

「一一列舉」法自創公式解答:

公式: $Y = \frac{(N-1)\times N}{2}$ = =**3**

導出公式詳細過程再探究二、三

P=2 的 Y 次方= 2^3=**8**

全排列共有**八**種

發現兩個答案不同的難題----- 相差 **2** 種

說明：**1.** 發現問題出在循**環**賽的**環**和比賽結果。

環---若圖形是**環**狀，N=3 的三點不共線再在加上兩兩相對比賽結果符號連線圖定成▲狀。

比賽結果—單循環比賽結果會出現「**和局▲**」**特殊情況**。

2. 由「**一一列舉**」法 8 個圖中(7)、(8)兩圖詳細請看上面圖便是「**和局▲**」6+2=8 問題終於解決了。

分析 :**一、** 運用「**乘法原理**」和運用「**一一列舉**」法(連線數)計算結果，發現答案不同，原因是單循環賽結果會產生特殊情況「**和局▲**」，因此我們把循環賽結果產生的「**和局▲**」情況大膽的歸類爲異類排列組合

二、 異類排列組合更具有挑戰性，因此決定把它做爲我們研究的主軸。

【研究三】 **透視連線、符號連線和比賽結果情況數的關係。**

探究三 **單循環賽連線數、符號連線和比賽結果情況數的關係探究。**

方法 : 1.將 N 隊數用 N 點數代替，而各點不共線、若兩兩連線則形成如 N 邊形。

2. 簡化問題 —分別列舉**偶數**(N=2、N=4)，**奇數**(N=3、N=5)爲例再利用實際嘗試進行探討。

3. 嘗試有系統作圖並加說明 ⟶ 依序漸進導出公式

結果　一、電腦方程式

《步驟六》令數列 K= 2, 2, 2, ..., 2，可以利用關係式 F(n+1) = F(n)* K(n)計算出數列 F。

N	Y	H	P	F	K
2	1	2	2	4	2
3	3	3	8	8	2
4	6	4	64	16	2
5	10	5	1024	32	2
6	15	6		64	2
7	21	7		128	2
8	28	8		256	2
9	36	9		512	2
10	45	10		1,024	2

步驟六說明:

一、根據數列 K=2、2、2....2

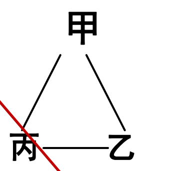
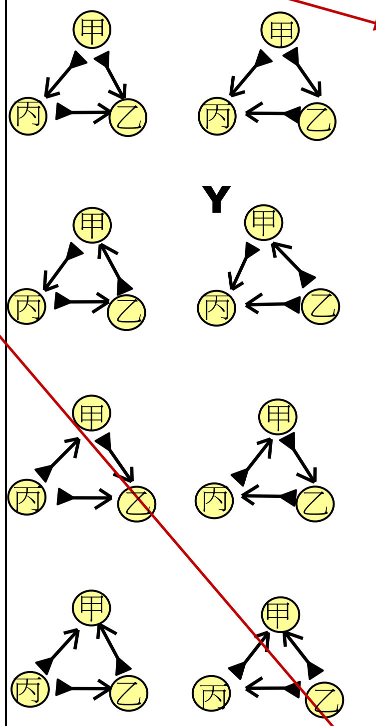
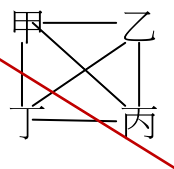
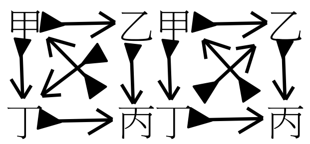
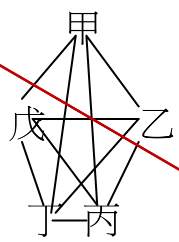
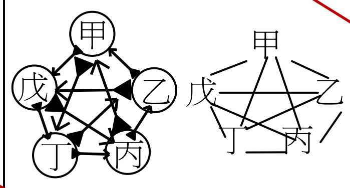
二、可以利用 F(N+1)=F(K) x K(N)關係式計算出數列 F。4、8、16.....

實例:

	F(N)		K(N)		F(N+1)
N=3....則	4	x	2	=	8
N=4....則	8	x	2	=	16
N=5....則	16	x	2	=	32

步驟一、二、三、四、五、七省略(詳細請看附件)

二、有系統作表找出**規則性**圖

N 數	連線圖	符號連線圖總數圖	連線數	可能產生情況圖總數計算公式
2	甲——乙 以甲來看 甲=N-1=**1**	甲▶→乙 甲←◀乙	**1**	$Y=\frac{(N-1)\times N}{2}=1$ $P=2^{y}=2^{1}$ $\boxed{2}$
3	 以**甲**來看 甲=N-1 =3-1 =**2**		**3** **1** **3**	(每隊連線數) (隊數) $Y=\frac{(N-1)\times 3}{2}=3$ (每條連線重複數) $=\frac{2\times 3}{2}=3$ $P=2^{3}=8$ $Y=\frac{(N-1)\times N}{2}=3$ $P=2^{y}=2^{3}=$ $\boxed{8}$
4	 以甲來看 甲=N-1=4-1=**3**	 共有 64 個圖 (詳細請看 P.10 探究三)	**6**	$Y=\frac{(4-1)\times 4}{2}=6$ $P=2^{6}=64$ $Y=\frac{(N-1)\times N}{2}=6$ $P=2^{y}=2^{6}=$ $\boxed{64}$
5	 以甲來看 甲=N-1=5-1=**4**	 共有(詳細請看 P.17 附件)	**10**	$Y=\frac{4\times 5}{2}=10$ $Y=\frac{(N-1)\times N}{2}=10$ $P=2^{y}=2^{10}=$ $\boxed{1024}$

分析 一、發現**規則性**：N 隊的連線數是由(N-1)的連線數加(N-1)隊數。

二、導出公式： N+Y=(N+1)的 Y。

註：當 N=5 時，將有 2^{10}=1024(種)情況若一一作圖則太複雜，因此「**一一列舉法**」，已不實用，我們決定先對 N=3 和 N=4 的情況加以分析，討論，再類推。

探究四 單循環賽，**N、Y、H、P、F、K** 之關係探討。

方法 1.依據**探究二** 連線數和 N 數間關係紀錄深入探討。

單循環賽 N、Y、H、P、F、K 關係探討紀錄表

連線別 / 隊數 N	Y(連線數)		P(可能產生情況總數)	P 前後倍數	F 前後倍數
	Y	H 前後 Y 差數	P	F	K
2	1	2	$2^{1}=2$	4	
3	3	3	$2^{3}=8$	8	2
4	6	4	$2^{6}=64$	16	2
5	10	5	$2^{10}=1024$	32	2
6	15	6	$2^{15}=32768$	64	2
7	21	7	$2^{21}=2097152$	128	2
8	28	8	$2^{28}=268435456$	256	2
9	36	9	$2^{36}=68719476736$	512	2
10	45	10	$2^{45}=35184372088832$	1024	2

單循環賽 N.Y.H.P.F.K 關係計算過程

公式 / 隊數N	$Y=\frac{(N-1)\times N}{2}$	$P=2^{Y}$	$P=2^{\frac{(N-1)\times N}{2}}$	F / P / 前 P×F=後 P	K
2	$\frac{(2-1)\times 2}{2}=1$	2^{1}	$2^{\frac{(2-1)\times 2}{2}}=2$	F=P÷前 P P=前 P×F	
3	$\frac{(3-1)\times 3}{2}=3$	2^{3}	$2^{\frac{(3-1)\times 3}{2}}=8$	2x4	2
4	$\frac{(4-1)\times 4}{2}=6$	2^{6}	$2^{\frac{(4-1)\times 4}{2}}=64$	8x8	2
5	$\frac{(5-1)\times 5}{2}=10$	2^{10}	$2^{\frac{(5-1)\times 5}{2}}=1024$	64x16	2
6	$\frac{(6-1)\times 6}{2}=15$	2^{15}	$2^{\frac{(6-1)\times 6}{2}}=32768$	1024x32	2
7	$\frac{(7-1)\times 7}{2}=21$	2^{21}	$2^{\frac{(7-1)\times 7}{2}}=2097152$	32768x64	2
8	$\frac{(8-1)\times 8}{2}=28$	2^{28}	$2^{\frac{(8-1)\times 8}{2}}=26843545$	2097152x128	2
9	$\frac{(9-1)\times 9}{2}=36$	2^{36}	$2^{\frac{(9-1)\times 9}{2}}=6871949673$	268435456x256	2
10	$\frac{(10-1)\times 10}{2}=45$	2^{45}	$2^{\frac{(10-1)\times 10}{2}}=35184372088832$	68719476736x512	2

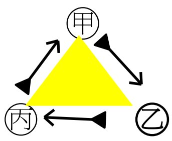
由上面**計算過程表**可以發現它的規則性(邏輯)

【研究四】 透視循環賽產生的「**和局▲**」。

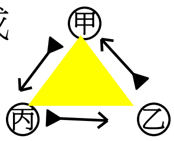
探究五 **循環賽結果出現「和局▲」情況的探討。**

方法 :由「**一一列舉**」法、找出形成「**和局▲**」的特性、再深入探討、並導出計算方式。

結果 **N=3**。產生「**和局▲**」情況。



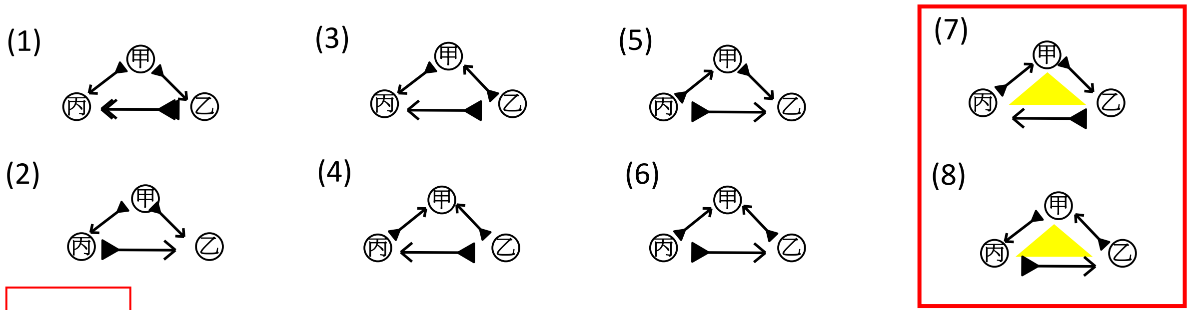
或



(1)、甲、乙、丙三隊兩兩相對比賽結果均為 1 勝 1 負(一出一入)無別情況，稱它為「**和局▲**」。

(2)、一次循環賽，兩兩相對比賽結果情況，可能出現 0 或 1 個「**和局▲**」(不可能出現 2 個「**和局▲**」)

N=3 、兩兩相對比賽可能出現的情況共有下列八種:



N=4 、兩兩相對比賽結果可能出現的情況共有下列 **64** 種

有系統性有**規則性**的組合方法如下: (請看 P.10)

步驟一、以甲為主，依據(N-1)**3** 條連線有 **8** 個情況圖結論，組合成 **8** 個圖(1-8)；同理再以**丙**為主組合成橫列(一)黑色的個圖。

步驟二、將豎列和橫列依序交叉組合成 **8×8=64** 個符號連線圖。

步驟三、把 **64** 個符號連線圖改列為符號簡列表，並檢查是否有重複圖形；同時找出「**和局▲**」。

※1.我們稱以上組合法為**九九乘法表法**。

2.我們曾用**土法煉鋼法 8、4、2** 組合法，結果發現符號連線圖雖然變化較大，但重複圖形太多，又無法解決而放棄。(詳細請看附件)

註:

當 N=5 時，將有2^{10}=1024(種)情況、若一一作圖則太複雜、因此「一一列舉」法，已不實用，我們決定先對 N=3 和 N=4 的情況加以分析，討論再類推。

分析：1. 乙 甲 丙 丁 代表全勝或全負，◢代表和局▲。

2.只要有 2 隊是三勝(全勝)或三負(全負)就不會產生「和局▲」。

3. 只有 1 隊是三勝(全勝)或三負(全負)就會產生一個「和局▲」。

4. N＝4，循環賽結果只要是各隊為兩勝一負或一勝兩負，就會產生兩個「和局▲」。

探究六 **單循環賽隊內勝負差距與產生「和局▲」情況關係分析。**

方法 根據 **探究四** 圖，深入探討、分析。

結果 ：

單循環賽產生「和局▲」情況分析表。

和局▲	奇偶數別	出現比賽結果情況分析	勝負差距總和
0 個 (無法產生和局▲)	奇數 N=**3**	有一隊全勝，一隊全負，一隊(1 勝 1 負)， 全勝+全負+ (1 勝 1 負)= (3 勝 3 負)	**4 ＞ N**
	偶數 N=**4**	有一隊全勝，一隊全負，其餘一隊(2 勝 1 負)，一隊(1 勝 2 負) 全勝+全負+ (2 勝 1 負)+ (1 勝 2 負)= (6 勝 6 負)	**8 = 2 N**
1 個	奇數 N=**3**	每隊均 1 勝 1 負、 (1 勝 1 負)＊3＝3 勝 3 負	**0**
	偶數 N=**4**	有一隊全勝或全負 ，其餘三隊爲(2 勝 1 負)或(1 勝 2 負) 全勝+ (1 勝 2 負)＊3 全負 + (2 勝 1 負)＊3 共 6 勝 6 負	**6 < 2 N**
2 個	奇數 N=**3**	無法產生 2 個「和局▲」	
	偶數 N=**4**	有二隊(2 勝 1 負)和另有二隊(1 勝 2 負) (2 勝 1 負)＊2+(1 勝 2 負)＊2=(6 勝 6 負) 沒有全勝或全負	**4 < 2 N**
備註	1. 單循環賽中以勝負差距最大的一隊爲代表。 例: (以甲隊爲主) 甲 → ↓ ＝**2** ： **0** 勝 負　　㊙ → ↑ ↘ ＝**2** ： **1** 勝 負 2. N=**3** 循環賽結果勝負總數=(3 勝 3 負)。 N=**4** 循環賽結果勝負總數=(6 勝 6 負)。		

分析 1.每隊勝負比、差距大小和產生「和局▲」關係重大。

2.差距總數小於 2N 時就會產生「和局▲」，差距總數與「和局▲」數成反比。

3.差距 0 時(勝負數相同)定會產生「和局▲」數最多。

自製教具

探究七 循環賽「和局▲」出現情況最多的計算公式探討。

方法 :由「**一一列舉**」法，找出「**和局▲**」，並由圖形深入探討它的特性，再依序漸進，導出求最多「**和局▲**」的數之公式。

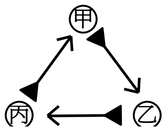
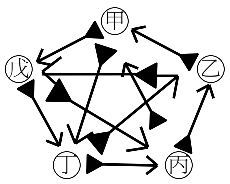
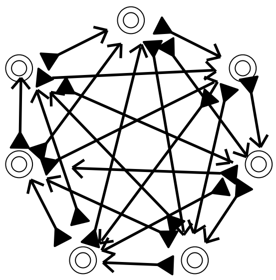
結果 ◉**奇數**、以 **N=3** 做為奇數的基準。

一、相關資料:

(一) 書籍網路資料:**乘法原理**—當 N 為奇數，每一點(隊)最多有 $\frac{(N-1)}{2} \times \frac{(N-1)}{2}$ 個選擇。

(二) **土法煉鋼法**所得:射入(負)符號數=射出(勝)符號數= $\frac{(N-1)}{2}$ 時，可使「**和局▲**」最多。(詳細請看附件)

二、 **N=奇數** 循環賽「**和局▲**」 出現情況最多數計算表

N 數	圖形		當 N 為奇數對每點(隊)最多個選擇數	**和局▲**最多的數
3		圖數太多省略，(詳細請看附件)	$\frac{(3-1)}{2} \times \frac{(3-1)}{2} = 1$	**1**
5			$\frac{(5-1)}{2} \times \frac{(5-1)}{2} = 4$	**1+4=5**
7			$\frac{(7-1)}{2} \times \frac{(7-1)}{2} = 9$	**5+9=14**
			(N=7、9、11 詳細請看附件)	

分析 ：一、 **發現規則性:**

前奇數「**和局▲**」最多的數 **+** 每點(隊)最多個選擇數 **=** N 隊「**和局▲**」最多的數

二、導出計算公式:

N 隊「**和局▲**」最多的數 **=** (N-2)的「**和局▲**」最多的數 **+** $\frac{(N-1)}{2} \times \frac{(N-1)}{2}$

◉ **偶數**、以 **N=4** 做爲 **偶數** 的基準。

一、相關資料

(一) 書籍網路資料:**乘法原理** 一當 N 爲偶數，即 N-1 爲奇數，對於每一點(隊)最多有 $\frac{N}{2}*(\frac{N}{2}-1)$ 個選擇。

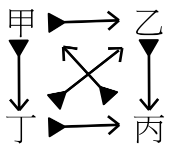
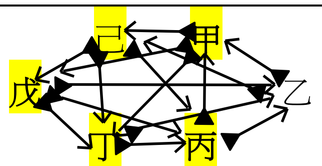
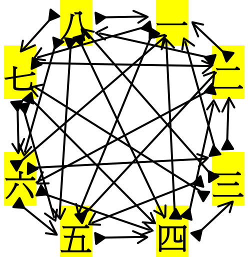
(二)**土法煉鋼法**所得—

1.射入(負)符號爲$\frac{N}{2}$(2 負)，射出(勝)符號爲$\frac{N}{2}-1$ (2 勝)，可使「**和局▲**」最多。

2. 射入(負)符號爲$\frac{N}{2}-1$(2 負)，射出(勝)符號爲$\frac{N}{2}$ (2 勝)，可使「**和局▲**」最多。

(詳細請看附件)

二、N=偶數 循環賽「**和局▲**」出現情況最多數計算表

N 數	圖形	當 N 爲奇數對每點(隊)最多個選擇數	**和局▲**最多的數
4		$\frac{4}{2}$ x ($\frac{4}{2}$ -1) = 2	2
6		$\frac{6}{2}$ x ($\frac{6}{2}$ -1) = 6	2+6=8
8		$\frac{8}{2}$ x ($\frac{8}{2}$ -1) = 12	8+12=20
		(N=6、8、10、12	詳細請看附件)

分析

一、 發現**規則性**:

前偶數「**和局▲**」最多的數 **+** 每點(隊)最多個選擇數 **=** N 隊「**和局▲**」最多的數

二、導出計算公式:

N 隊「**和局▲**」最多的數 **=** (N-2)的「**和局▲**」最多的數 **+** $\frac{N}{2}$ X($\frac{N}{2}$-1)

研究五　<u>符號簡列表與符號連線圖的關係探討。</u>

探究八　**N=4**　**單循環賽結果**　**N/4**　**的符號連線圖和符號簡列表關係探討。**

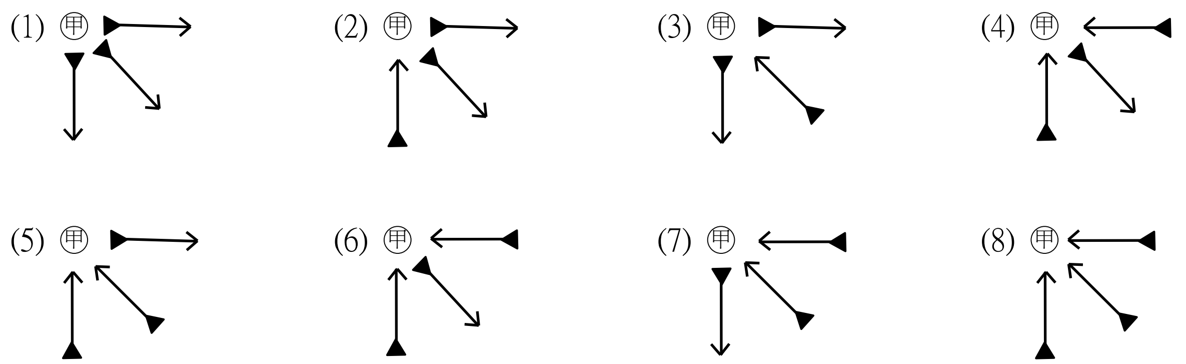
方法

1、以甲 **N/4** 爲主，組合爲例子:

2、甲有 3 條符號連線，就有 8 個情況圖列成符號簡列表。

結果

以甲爲主，畫出符號連線圖(共 8 圖)。



將符號連線圖轉換成符號簡列表

圖別	以甲爲主 符號簡略表			內容 勝	內容 負	備註
(1)	▶	▶	▶	3	0	▶ → 組合原則 代表勝　代表負　(1)有系統性　(2)有規則性
(2)	→	▶	▶	2	1	
(3)	▶	→	▶	2	1	
(4)	▶	▶	→	2	1	
(5)	→	→	▶	1	2	
(6)	→	▶	→	1	2	
(7)	▶	→	→	1	2	
(8)	→	→	→	0	3	

分析　(一)、組合結果，符號和勝負得分，分佈呈現有系統性有**規則性**。

(二)、**符號簡列表**，較易顯示出它的組合情況

前言:

以上難解的「和局▲」剖析已告一段落，特別是發現 **探究三** ，**<u>單循環賽 N、Y、H、P、F、K 關係紀錄表</u>**中多項成**規則性**的數字排列，引發我們想動手設計製作<u>簡易計算器</u>，進而藉由它來做學習電腦的途徑。

研究六 **簡易計算器的製作與學習電腦關係研究。**

探究九 **難解的「和局▲」與學習電腦關係研究。**

方法

(1)分析 **探究三** **單循環賽 N、Y、H、P、F、K 之關係紀錄表**

(2)首先依據此紀錄表設計製作簡單的計算尺，定名爲**簡易計算器**。

(3)請教電腦課張老師，並從網路及圖書館搜集有關計算機、電腦的資料。

(4)請電腦老師特別指導我們**電腦程式的設計課**。

結果

一、簡易計算器

步驟(一)

操作過程

利用「一一列舉法」導出的計算公式: $Y=\dfrac{(N-1)xN}{2}$

$P=2^{y}$ 運算出 **N=2、3、4、5** 個數值，並填入表格。

呈現內容

N=2、3、4、5(奇偶各 2 個)的 **N、Y、H、P、F、K** 之關係紀錄。

步驟(二)

操作過程

插入遮板(一)再依序抽去 **N、H、K** 遮板。

呈現內容

N、H、K 關係規則性完整的呈現出來。

步驟(三)

操作過程

插入遮板(二)，觀察比較找出 **N、Y、H** 關係的規律性。

呈現內容

發現:**N、Y、H** 關係的規則性

Y+N=(N+1)的 Y

(Y+N=下 1 個的 Y)

步驟(四)

操作過程

插入遮板(三)觀察比較找出 **F、K** 關係的規律性。

呈現內容

發現 **F、K** 關係的規則性如下:

FxK=(N+1)的 F

(FxK=下一個 F

步驟(五)

操作過程

插入遮板(四)觀察比較找出 **P、F** 關係的規律性。

呈現內容

發現 **P、F** 關係的規則性如下:

2xPx 上個 F=(N+1)的 P

PxF=(N+1)的 P

步驟(六)

插入遮板(五)

應用:任意選擇 **N=10** 以內的 **N** 數，求其 **Y** 和 **P** 的值。

操作過程

將遮板抽至所求 **N** 數格停止。

呈現內容

所求 **N** 數的 **N、Y、H、P、F、K** 關係紀錄可以完全呈現。

1. 分析結果發現:

(1)**N+Y=(N+1)的 Y**，而 **N+H=Y**

(3)**F=P÷(N-1)的 P**

(4)**P=**2^{Y}=**前 P×F**

(5)**N、H(Y** 的差距)，都成依序加 1 的排列。

(6)成依序加倍**(×2)**的排列。

分析:

一、操作**簡易計算器**結果很快的得到所想要的答案。

二、想利用 **N、Y、H、P、F、K** 互相關聯的**規則性**做**學習電腦程式的設計**。

二、電腦程式設計 (詳細請看附件)

《步驟四》

Y 和 H 的關係可以用式子 Y(n) = Y(n-1)+H(n-1)表示，運用此式子可以直接用加法，逐項計算出數列 Y。

4

N	Y	H	P	F	K
2	1	2			
3	3	3			
4	6	4			
5	10	5			
6	15	6			
7	21	7			
8	28	8			
9	36	9			
10	45	10			

步驟四 說明:

一、運用 Y(N) = Y (N-1) + H (N-1) 式子計算出數列 Y

實例:

	Y(N-1)		H(N-1)		Y(N)
N=3....	1	+	2	=	**3**
N=4....	3	+	3	=	**6**
N=5....	6	+	4	=	**10**

運用 YH 邏輯

二、由以上實例發現可以直接用**加法**逐項計算出數列 Y

Y(2)=**1** ， Y(3)=**3**， Y(4)=**6**， Y(5)=**10**

2+1=3 → 3+3=6 → 4+6=10 → 5+10=15

三、運用 Y (N) +N=Y (N+1) 式子計算出數列 Y 值

實例:

	Y(N)		N		Y(N+1)
N=2…. 則	1	+	2	=	3
N=3…. 則	3	+	3	=	6
N=4…. 則	6	+	4	=	10
N=5…. 則	10	+	5	=	15

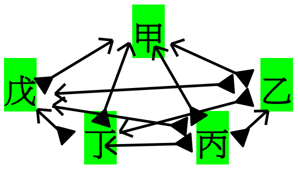
運用 YN 邏輯

步驟 **一、二、三、五、六、七** 省略 (詳細請看附件)

伍、討論

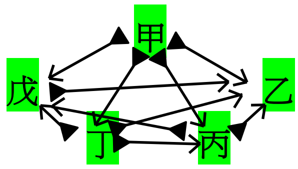
我們爲了證明 N 超過 4 個，若用「**一一列舉**」法就不實用，也不可能，實際組合成下列 6 個 N=5 的符號連線圖並找出「**和局▲**」例子。

圖一



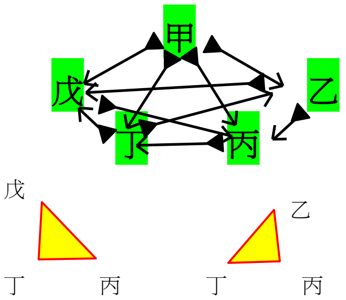
無法產生「**和局▲**」

圖二



無法產生「**和局▲**」

圖三



隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	0	4	4	0
乙	3	1	2	
丙	4	0	4	
丁	2	2	0	
戊	1	3	2	
計	10	10	12	
備註	出一代表射出，表示勝 入一代表射入，表示負			

圖一

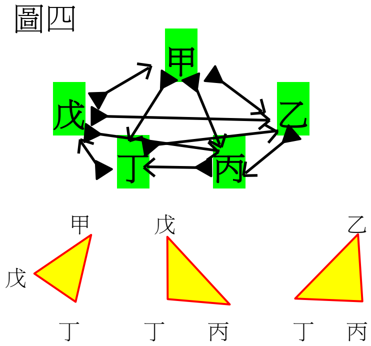
隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	4	0	4	0
乙	0	4	4	
丙	2	2	0	
丁	3	1	2	
戊	1	3	2	
計	10	10	12	
備註	出一代表射出，表示勝 入一代表射入，表示負			

圖二

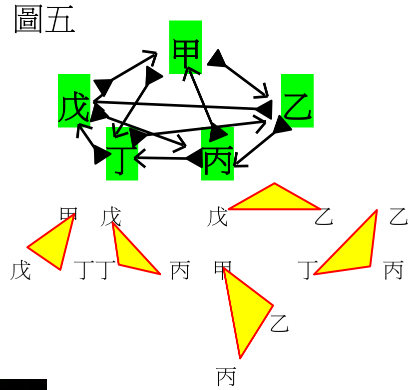
隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	4	0	4	2
乙	2	2	0	
丙	1	3	2	
丁	2	2	0	
戊	1	3	2	
計	10	10	8	
備註	出一代表射出，表示勝 入一代表射入，表示負			

圖三

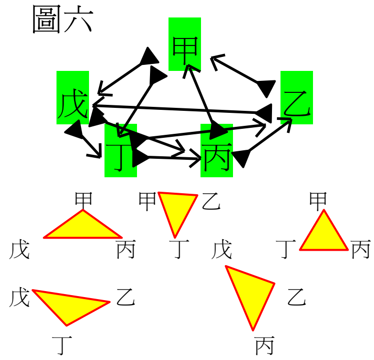
圖四

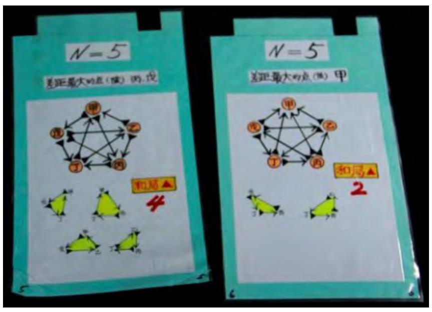


圖五



圖六





自製教具

圖四

隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	3	1	2	3
乙	1	3	2	
丙	1	3	2	
丁	2	2	0	
戊	3	1	2	
計	10	10	8	
備註	出—代表射出，表示勝 入—代表射入，表示負			

圖五

隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	2	2	0	5
乙	2	2	0	
丙	2	2	0	
丁	2	2	0	
戊	2	2	0	
計	10	10	0	
備註	出—代表射出，表示勝 入—代表射入，表示負			

圖六

隊別	出入線分配		出入線差距	和局數
	出(勝)	入(負)		
甲	2	2	0	5
乙	2	2	0	
丙	2	2	0	
丁	2	2	0	
戊	2	2	0	
計	10	10	0	
備註	出—代表射出，表示勝 入—代表射入，表示負			

分析

一、各隊(點)出入線數差距總數不大於 **2 N** 則會產生「**和局▲**」

二、各隊(點)出入線數差距愈大，愈不會產生「**和局▲**」，差距愈小，愈會產生「**和局▲**」。

三、各隊(點)出入線　射入數=射出數(平衡)，產生「**和局 ▲**」數最多。

● **註**: **N=6.7.8....**產生「**和局▲**」情況，可以利用研究 **探究十** **簡易計算器**及我們師生合作設計的 <u>**電腦程式**</u> 探求答案。

陸、研究結論

一、有關連線、符號連線方面：

(一)、單循環賽 N 隊中任何一隊都有(N-1)條連線。

(二)、單循環賽 N 隊，兩兩連線時，有 $\frac{(N-1)xN}{2}$ 條連線。

(三)、符號連線方向，每條連線有 2 種排序（甲 $\rightleftarrows$ 乙）。

(四)、單循環賽 **N**、**Y**、**P**、**H**、**F**、**K** 之關係探討結果:

⊙發現**規則性**:

1. 有關 **N** 和 **Y** 的關係: **N + Y = (N + 1) 的 Y。**
2. 有關 **N** 和 **Y** 的關係: **P = 2 的 Y 次 方。**
3. 前後 **N** 的 **Y 差距成規則性逐一加大** (+2、+3、+4…)
4. **H**:依序加 **1**、(+1)∴∴
5. **F**:依序加**倍數**(×2)

⊙導出**公式**:

若 N=3，$Y=\frac{(N-1)xN}{2}$　　若 N=4，$Y=\frac{(N-1)xN}{2}$

$P=2^{y}$　　$P=2^{y}$　　$\therefore P=2^{Y}$

二、有關「和局▲」方面:

(一)、若要構成「和局▲」**符號連線圖**，它的情況每點(隊)需要「**一入一出**」也就是(**一勝一負**)來搭配。

(二)、一次單循環賽若 **N=3** ，出現「和局▲」情況可能有 **0** 或 **1** 個、若 **N=4** ，出現「和局▲」情況可能有 **0** 或 **1** 個或 **2** 個。

(三)、發 **N=4** 產生二個「和局▲」的情況:

$\left\{\begin{array}{l}\text{有 2 隊是射入(負)數為 2，射出(勝)是 1} \\ \text{另 2 隊是射入(負)數為 1，射出(勝)是 2}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\text{有 2 隊是射入(負)數為 1，射出(勝)是 2} \\ \text{另 2 隊是射入(負)數為 2，射出(勝)是 1}\end{array}\right.$

(四)、單循環賽產生「和局▲」情況和隊數關係:

1.每隊勝負比、差距大小和產生「和局▲」關係重大。

2.差距 0 時(勝負數相同)定會產生「和局▲」。

3. 差距和產生「和局▲」的數量成**反比**。

(五)、單循環賽每隊

射入符號數=射出符號數= $\frac{(N-1)}{2}$ 可以產生「和局▲」最多。

(六)、循環賽「和局▲」出現情況最多導出的計算公式:

N 為奇數　**(N-2)的「和局▲」數** $+ \frac{(N-1)}{2} \times \frac{(N-1)}{2} =$ 「**和局▲**數」最多數。

N 為偶數　**(N-2)的「和局▲」數** $+ \frac{N}{2} \times (\frac{N}{2} - 1) =$ 「**和局▲**數」最多數。

三、有關符號簡列表方面:

(一) **循環賽符號簡列表與符號連線圖關係。**

(1) 符號簡列表符號分布情形呈現**有系統性**、**有規則性**。

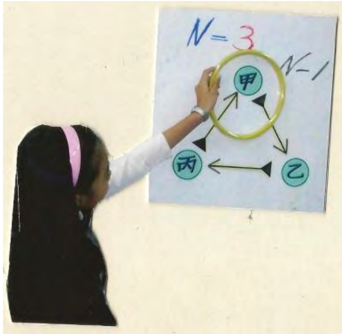
(2) 將同類符號簡列表歸納在一起，可以很明顯的看出它的錯誤及重複圖形，以便改進。

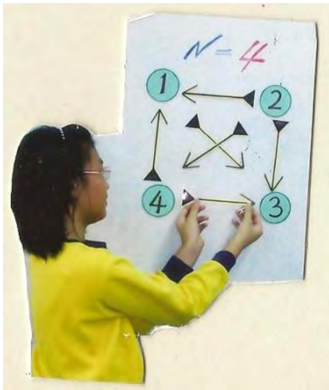
四、有關反省與展望:

(一) 從這次研究感到「**排列**」和「**組合**」並非絕對對立，有時同一個問題可以從不同角度理解為「**排列**」和「**組合**」的問題，同時轉換角度往往可以令本來難解的問題，變得容易。我們認為本研究其實應理解為一個「**組合**」問題。

(二) 我們利用「**一一列舉**」法，將全部比賽結果符號連線圖全部列出，再深入探討，尋求它的**規則性**，並發現「**和局▲**」最多數和最少數連線圖，並**依序漸進導出公式**。

由於我們國小生學識有限，無法達到完美境界，希望有更多的同學能加入研究行列。

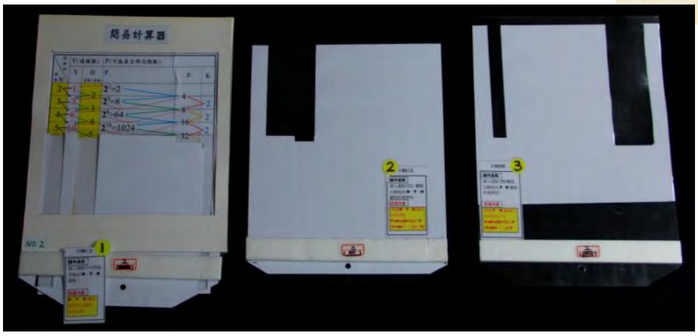


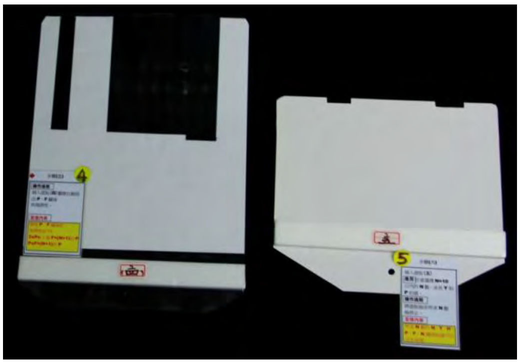


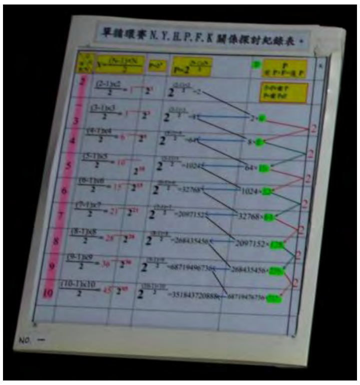
操作自製教具情形

我們所設計的

簡易計算器







【評語】080408

1. 題目動機具有一定的應用性，吸引人一窺究竟。
2. 討論的過程完整。
3. 學生能從數字規則性去探討電腦計算式的演算歷程，惟稍微岔開原始欲探究之主題。