中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080407

「點」出面積，內有玄機

學校名稱：桃園縣復興鄉長興國民小學

作者：	指導老師：
小五 簡子維	沈敏貞
小五 張靖恩	吳建龍

關鍵詞：邊點數、內點數、面積

「點」出面積 內有玄機

壹、摘要：

上數學課時，我們常用方格紙點算圖形面積或畫對稱圖形。當碰上三角形或不規則圖形時，我們常算錯格子數，這樣的挫折讓我們興起尋求其他方法，來計算圖形面積的念頭。我們請教老師，老師說：「方格紙上除了有空格之外，還有另一個重要元素就是線段的交點，這些『點』是我們解題的關鍵。只要仔細看就能察覺圖形上的點數有的在周長上，有的在圖形內部，這些不同位置上的點究竟有何關聯？它們會影響面積的大小嗎？是很值得研究的。」於是在老師指導下，我們開始一連串的作圖、點算、求數據、作圖表、比較差異、反覆思考和尋找規律的探究活動。終於，我們發現可以計算出任何不規則圖形面積的公式，並畫出不少對稱圖形，這樣的成果真令人興奮！

貳、研究動機：

上五年級數學課時，我們利用用方格紙來點算圖形面積或畫出對稱圖形。當碰上三角形或不規則圖形時，我們經常為了要切割這些不完整的格子而算錯面積，這讓我們十分納悶的問老師：「除了用這種低年級的點算方法之外，難道沒有其他簡明快速的計算方式嗎？」老師說：「應該是有的，你們可以動動腦做研究，找出算式。」好奇的我們當然樂於嘗試，展開研究了。

参、研究目的：

一、在方格紙上可做出哪些多邊形？
二、找出利用格子點數來計算多邊形面積的公式。
三、當多邊形面積擴大時，擴大圖面積的點數如何變化？
四、長方形的長與寬改變時，面積點數如何改變？
五、利用格子點作對稱等分圖，等分圖面積與格子點數如何變化？

肆、研究器材：

三角板、直尺、圓規、量角器、方格紙

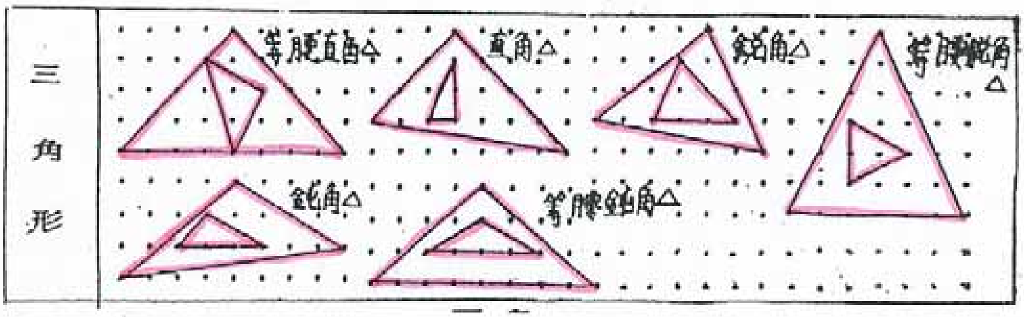
伍、研究過程及方法：

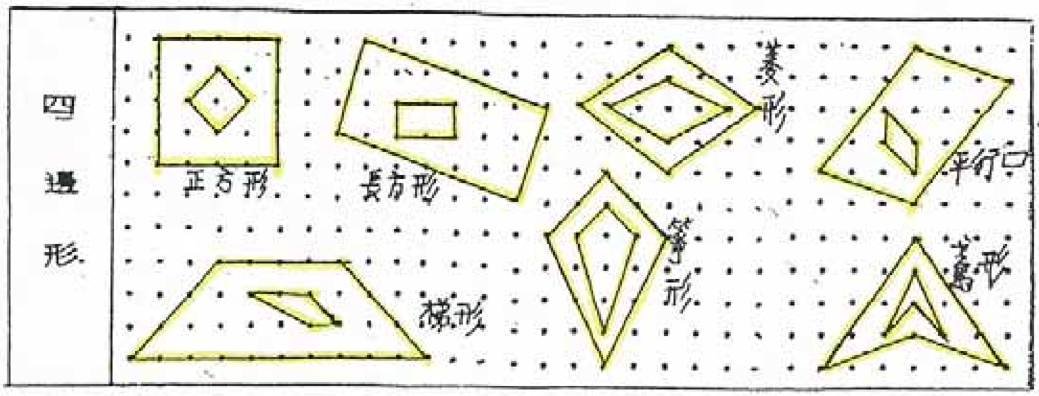
【研究問題一】：在方格紙上可做出哪些多邊形？

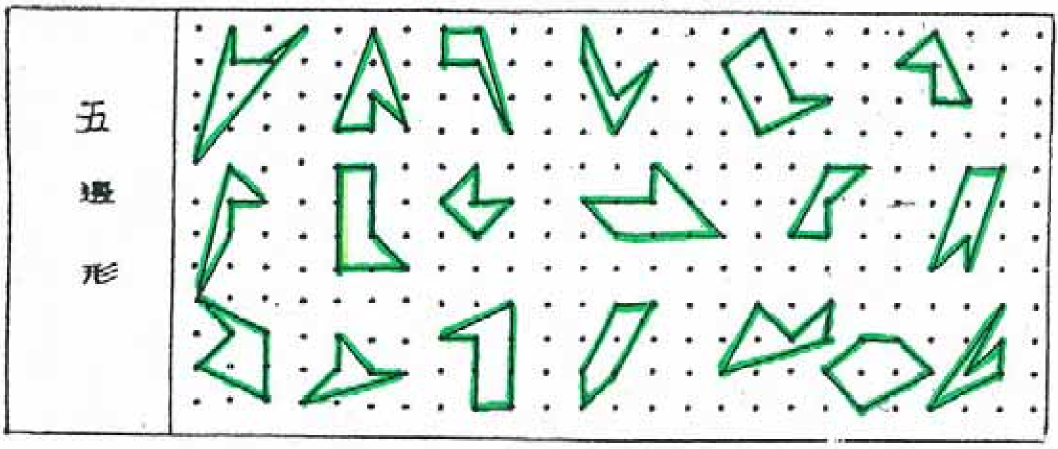
（一）操作說明：

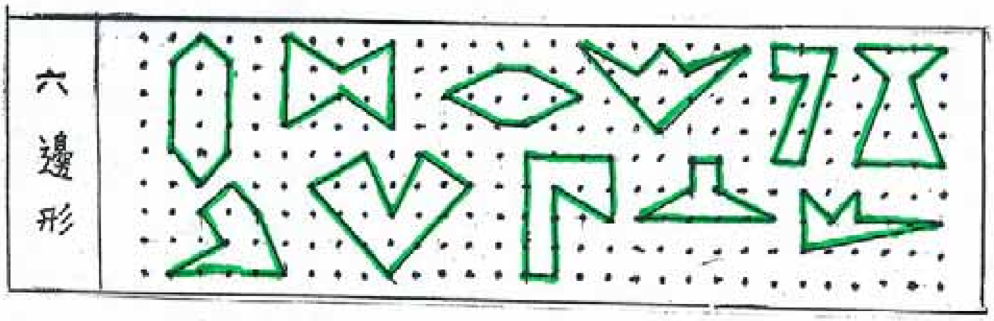
1. 作圖時，利用方格紙上的點數連接成線段，線段的連接點只限於格子點，對於兩線段相交所形成的交點不能作為連接點。
2. 一般多邊形每種只做兩個例圖，其他類型則選取幾種作圖。

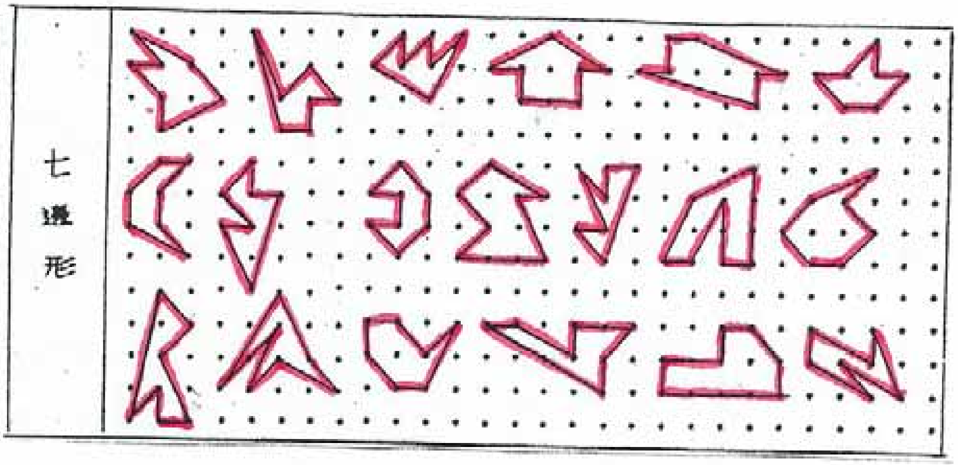
<二>操作：

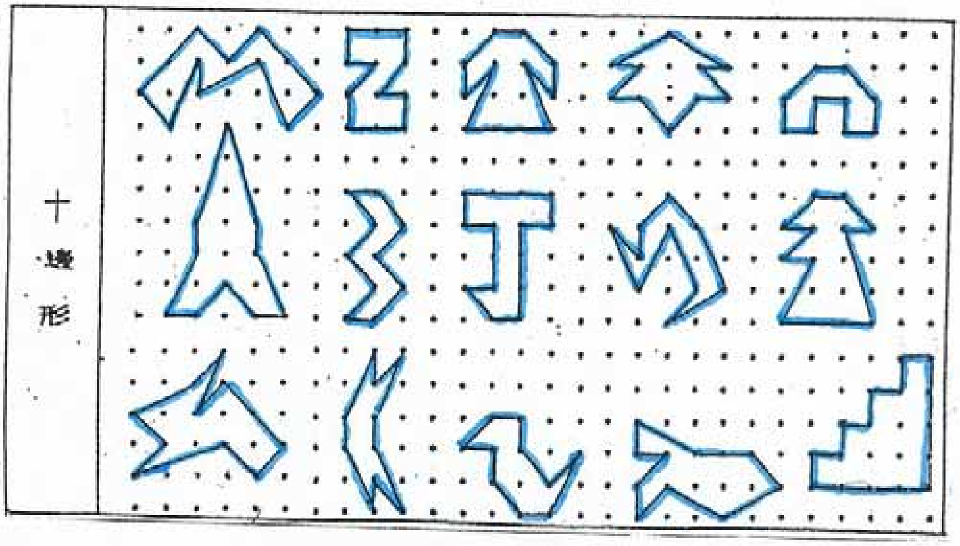












3

（三）討論及結果：

1. 在方格紙上作圖：

（1） 可作出的圖形有：各種四邊形、除正Δ以外的各種三角形和不規則多邊形。

（2） 無法作出的圖形有：正Δ、除正方形以外的正多邊形。

2. 利用方格紙上的點數來連接作圖，可作出大小不同，形狀不同的多邊形及象形圖形，極富趣味性和創造性。

3. 利用方格紙上的點數所畫出的多邊形，其面積的大小並不是以邊數的多寡來決定，而是以圖形內所含內點數的多少來判定。換言之，即使是一個十邊形的圖形，當其圖形內的點數是 0 點時，則其圖形面積有可能比一個內點數為 10 點的三角形還要小。這個發現，對我們下面要研究的問題，是很重要的一個參照變因。

【研究問題二】：找出利用格子點數來計算多邊形面積的公式

（一）操作說明：

1. 利用【研究問題一】所作出的多邊形圖例作為計算面積的圖形。
2. 方格紙每邊的長為 1 cm，對角線的長為$\sqrt{2}$ cm。
3. 利用方格紙上的點數所畫出的多邊形，其圖形邊長的點數、圖形內的點數及圖形面積分別以下列符號來表示：

邊點數： 甲	內點數： 乙	面積（cm^2）： A

4. 探討甲、乙與 A 三者之間的變化關係：

（1） 當乙不變時，甲與 A 的關係：甲以最基本的 3 個邊點數（因 3 點可構成一個三角形）依序增加至 6 點時，紀錄面積的變化情形。

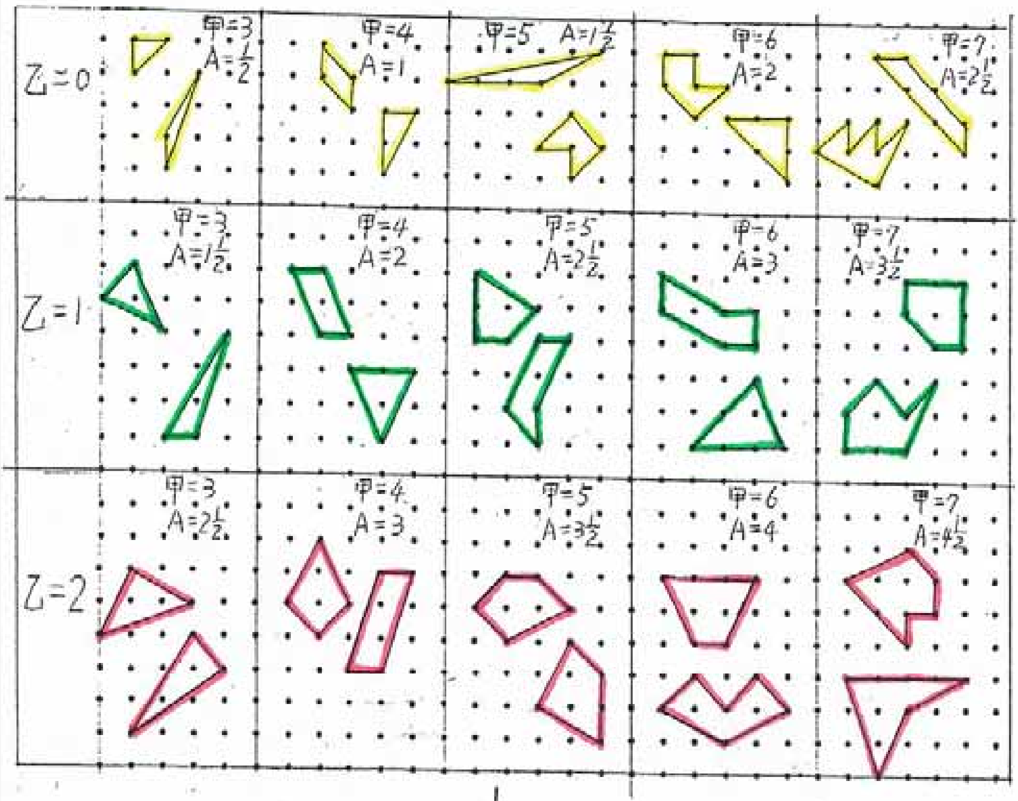
（2） 當甲不變時，乙與 A 的關係：乙以由 0 個內點數依序增加至 2 點時，紀錄面積的變化情形。

（3） 當 A 不變時，甲與乙的關係：A 以½ cm^2依序增加至 6 cm^2時，紀錄甲與乙的變化情形。

5. 將甲、乙與 A 三者之間的變化關係製作成統計表，再進行分析比較，加以歸納，嘗試導引出計算公式。

(二)操作：

(1)當乙不變時，甲與A的關係：



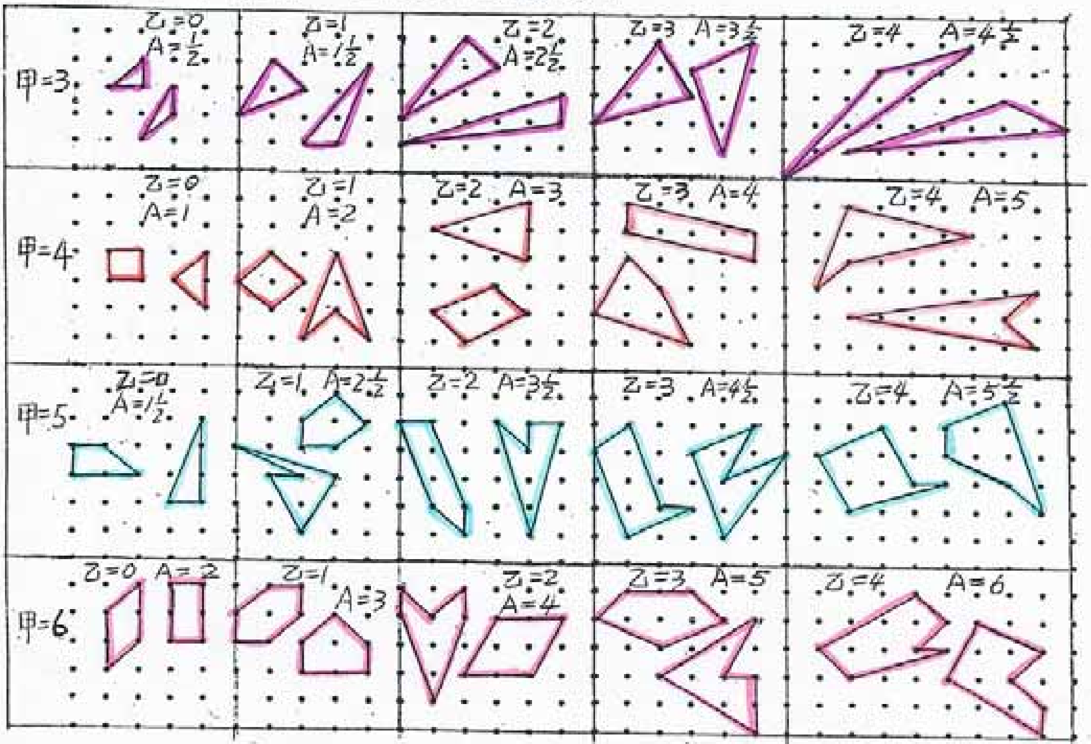
表一

內點數 乙＝0		內點數 乙＝1		內點數 乙＝2	
邊點數 甲	面積 A	邊點數 甲	面積 A	邊點數 甲	面積 A
3	½	3	1½	3	2½
4	1	4	2	4	3
5	1½	5	2½	5	3½
6	2	6	3	6	4
7	2½	7	3½	7	4½
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·
甲	$\frac{1}{2}$×甲−1	甲	½×甲+乙−1	甲	½×甲+乙−1

表二

乙個內點時	
內點數 乙	面積 A
0	½×甲−1
1	½×甲+乙−1
2	½×甲+乙−1
3	·
4	·
·	·
·	·
·	·
乙	½×甲+乙−1

(2) 當甲不變時，乙與A的關係：



表三

邊點數 甲＝3		邊點數 甲＝4		邊點數 甲＝5		邊點數 甲＝6	
內點數 乙	面積 A	內點數 乙	面積 A	內點數 乙	面積 A	內點數 乙	面積 A
0	½	0	1	0	1½	0	2
1	1½	1	2	1	2½	1	3
2	2½	2	3	2	3½	2	4
3	3½	3	4	3	4½	3	5
4	4½	4	5	4	5½	4	6
5	5½	5	6	5	6½	5	7
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.		.		.		.	
乙	乙+½	乙	乙+1	乙	乙+1½	乙	乙+2

→

表四

甲個邊點時	
邊點數 甲	面積 A
3	乙+½
4	乙+1
5	乙+1½
6	乙+2
.	
.	
.	
.	
甲	½×甲+乙−1

6

（3）當 A 不變時，甲與乙的關係：

表五

A＝½		A＝1		A＝1½		A＝2		A＝2½		A＝3		A＝3½		A＝4		A＝4½		A＝5		A＝5½		A＝6	
甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9	0	10	0	11	0	12	0	13	0	14	0
				3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1	10	1	11	1	12	1
								3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2	9	2	10	2
												3	3	4	3	5	3	6	3	7	3	8	3
																3	4	4	4	5	4	6	4
																				3	5	4	5

（三）討論及結果：

1. 從表五得知，多邊形的邊點數至少需要 3 點，才能形成一個最小的多邊形，其面積為½ cm²。由此可導出在格子點上的面積公式如下：

   $$A = \text{邊點數} \div 2 + \text{內點數} - 1$$

   $$\boxed{= \text{甲}/2 + \text{乙} - 1}$$（見表二及表四）

   其演算過程如下： $A = \frac{1}{2} + (\text{甲} - 3) \times \frac{1}{2} + \text{乙}$

   $$= \frac{1}{2} + \text{甲}/2 - 1\frac{1}{2} + \text{乙}$$

   $$\boxed{= \text{甲}/2 + \text{乙} - 1}$$

2. 當內點數乙不變時，則面積 A 隨著邊點數甲的增加而變大，而且每多一個邊點數，面積就增加½ cm²。（見表一）
3. 當邊點數甲不變時，則面積 A 隨著內點數乙的增加而變大，而且每多一個內點數，面積就增加 1 cm²。（見表三）
4. 當面積 A 不變時，則邊點數甲隨著內點數乙的增加而減少。反之，當面積 A 不變時，則邊點數甲隨著內點數乙的減少而增加，而且每增加 2 個邊點數，內點數就少一個。換言之，每增加一個內點數，邊點數就少 2 個。（見表五）
5. 由此公式可計算出在格子點上所做出的各種多邊形圖形的面積，甚為便捷，我們覺得能發現這個公式真是太棒了！

【研究問題三】：當多邊形面積擴大時，擴大圖面積的點數如何變化？

（一）操作說明：

1. 圖形擴大的方式分兩類型：

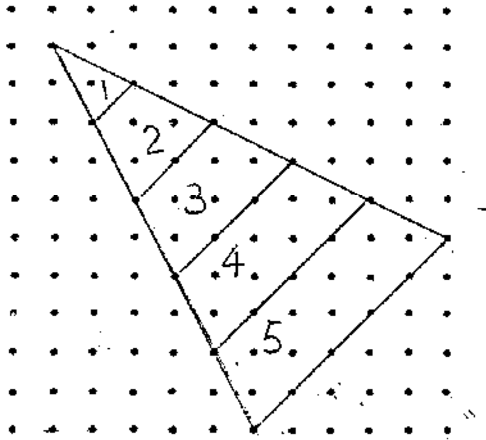
（1）邊點數和邊長同時擴大：以八個類型的多邊形作分析

（2）邊點數和邊長同時擴大：以正方形和長方形作分析

2. 將擴大圖面積及點數的變化情形做成統計表

(二)操作(1)：

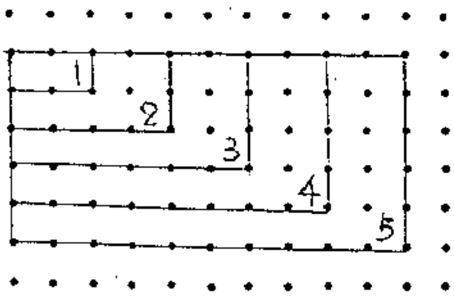
1. 邊點數和邊長都擴大：



圖一

表一

圖次 \ 項目	n=1	2	3	4	5
邊點數$甲_n$	3 3	6 3	9 3	12 3	15
內點數$乙_n$	1 3	4 6	10 9	19 12	31
面積 A_n	$1\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{2}$	6 $7\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$ $10\frac{1}{2}$	24 $13\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2 \times A_1 = n^2 \times A_1$				

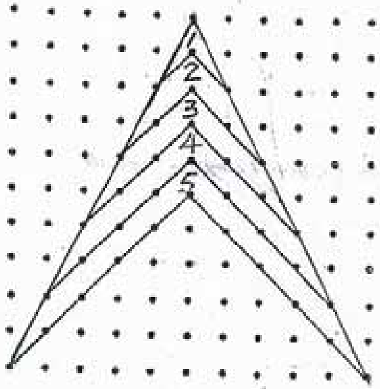


圖三

表三

圖次 \ 項目	n=1	2	3	4	5
邊點數$甲_n$	6 6	12 6	18 6	24 6	30
內點數$乙_n$	0 3	3 7	10 11	21 15	36
面積 A_n	2 6	8 10	18 14	32 18	50
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2 \times A_1 = n^2 \times A_1$				

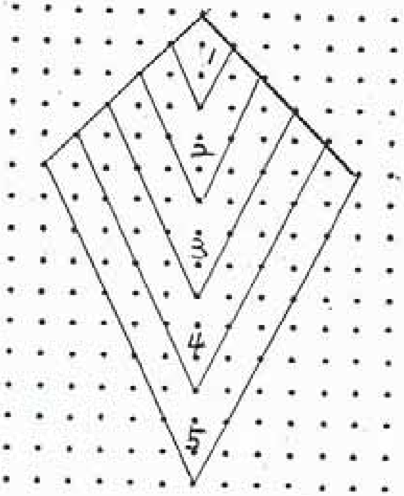
8



圖五

表五

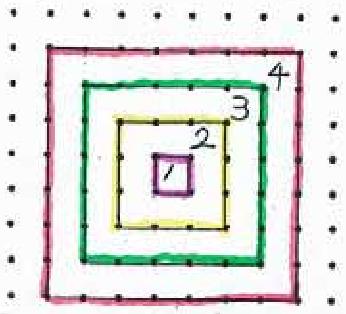
項目 \ 圖次	n=1	2	3	4	5
邊點數$甲_n$	4	8	12	16	20
內點數$乙_n$	0	1	4	9	16
面積 A_n	1	4	9	16	25
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=n^2\times A_1$				



圖六

表六

項目 \ 圖次	n=1	2	3	4	5
邊點數$甲_n$	4	8	12	16	20
內點數$乙_n$	2	9	22	41	66
面積 A_n	3	12	27	48	75
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=n^2\times A_1$				

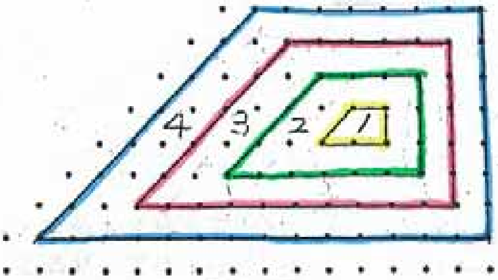


圖七

表七

項目 \ 圖次	n=1	2	3	4
邊點數$甲_n$	4	12	20	28
內點數$乙_n$	0	4	16	36
面積 A_n	1	9	25	49
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=(2n-1)^2\times A_1$			

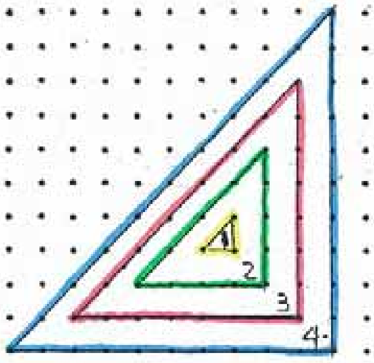
9



圖八

表八

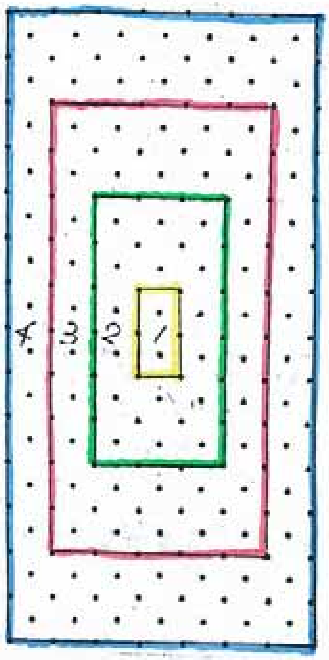
項目＼圖次	n=1	2	3	4
邊點數 $甲_n$	5 10	15 10	25 10	35
內點數 $乙_n$	0 7	7 19	26 31	57
面積 A_n	$1\frac{1}{2}$ 12	$13\frac{1}{2}$ 24	$37\frac{1}{2}$ 36	$73\frac{1}{2}$
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=(2n-1)^2\times A_1$			



圖二

表二

項目＼圖次	n=1	2	3	4
邊點數 $甲_n$	3 9	12 9	21 9	30
內點數 $乙_n$	0 3	3 12	15 21	36
面積 A_n	$\frac{1}{2}$ $7\frac{1}{2}$	8 $16\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$ $25\frac{1}{2}$	50
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=n^2\times A_1$			



圖四

表四

項目＼圖次	n=1	2	3	4
邊點數 $甲_n$	6 12	18 12	30 12	42
內點數 $乙_n$	2 26	28 58	86 90	176
面積 A_n	4 32	36 64	100 96	196
得公式	$A_n=(\frac{甲_n}{甲_1})^2\times A_1=n^2\times A_1$			

（三）討論及結果：

1. 當多邊形邊點數甲與邊長同時擴大時，其邊點數甲，內點數乙與面積 A 都成規律性的變化。尤其內點數乙與面積 A 的變化，都是以同值的倍數逐漸遞增。
2. 當各擴大圖之間的邊點數甲成倍數關係時，圖次 n 和邊點數甲有倍數關係存在，因此可從圖次 n 導出更簡捷的計算公式。其擴大圖的面積公式：

（1）三角形、長方形、箏形、鳶形： $A_n=(甲_n/甲_1)^2 \times A_1=n^2 \times A_1$（見表一至表六）

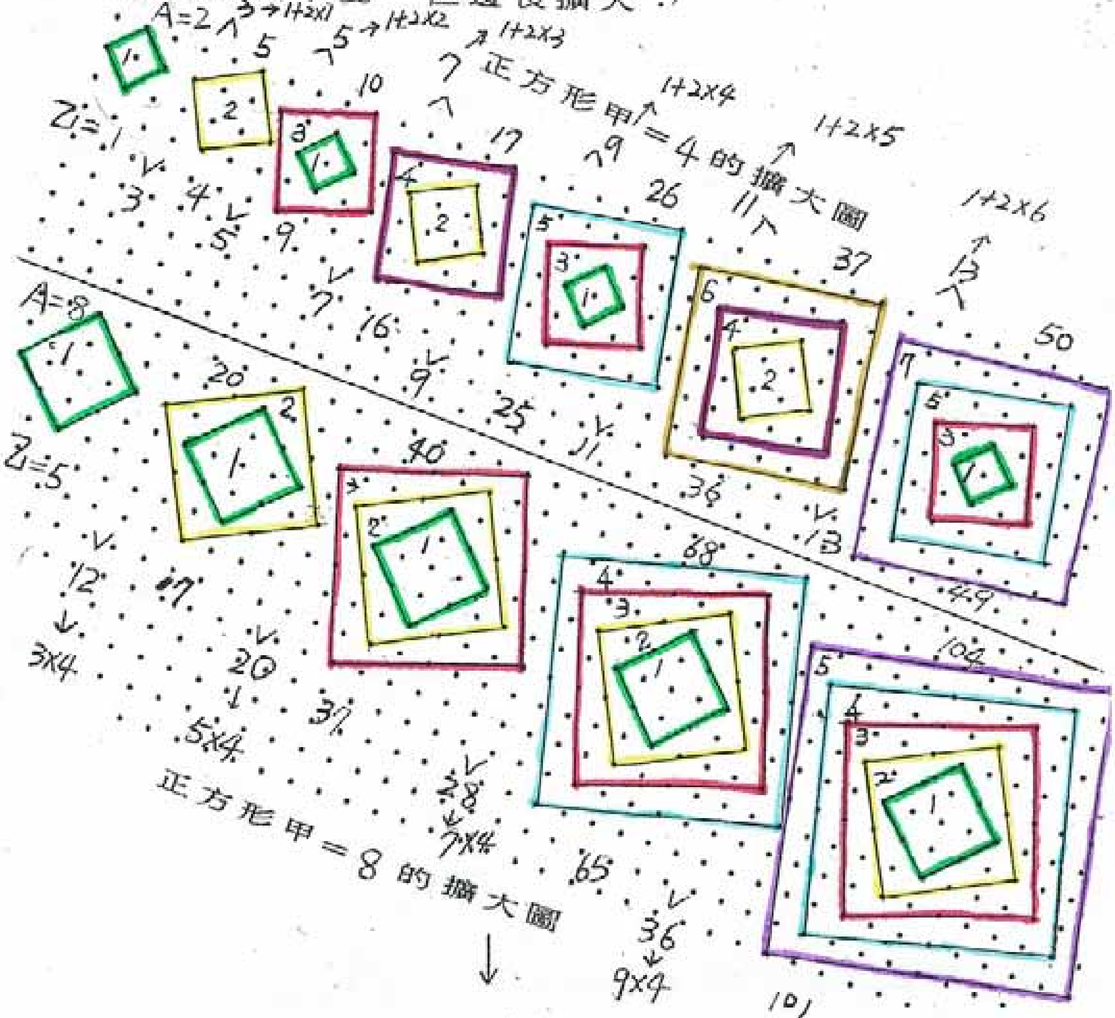
（2）正方形、梯形、長方形：$A_n=(甲_n/甲_1)^2 \times A_1=(2n-1)^2 \times A_1$ （見表四、表七、表八）

（3）直角三角形：$A_n=(甲_n/甲_1)^2 \times A_1=(3n-2)^2 \times A_1$ （見表二）

這些公式和公式 A＝ 甲/2＋乙－1 具有異曲同工之妙。

(二)操作<2>:

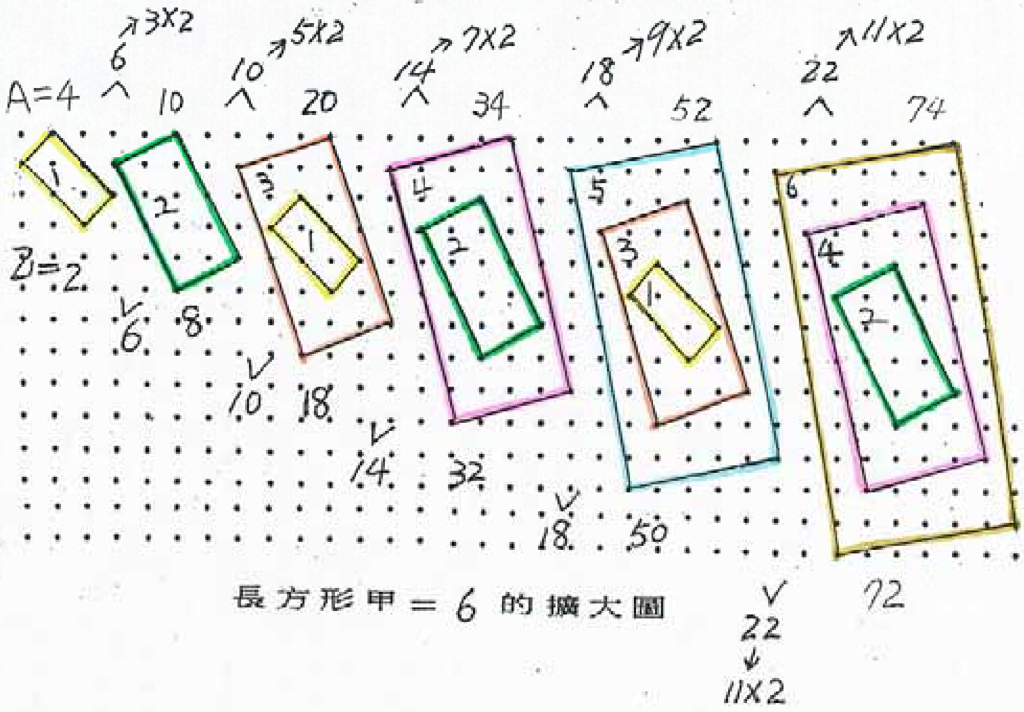
2. 邊點數不變，但邊長擴大：



11

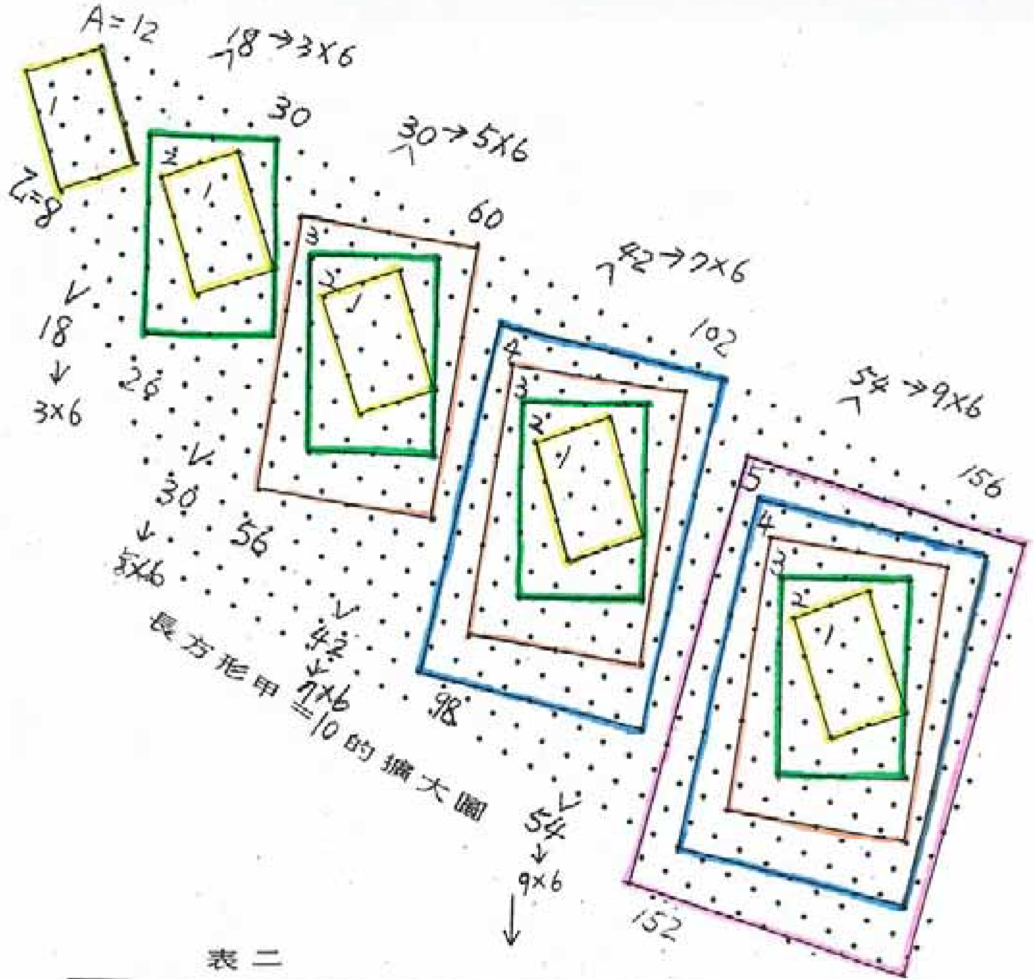
表一 ↓

圖別 / 圖次 / 項目	正方形甲＝4							正方形甲＝8				
	n							n				
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
邊點數甲n	4	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8
內點數乙n	1 ✓3	4 ✓5	9 ✓7	16 ✓9	25 ✓11	36 ✓13	49	5 ✓12	17 ✓20	37 ✓28	65 ✓36	101
面積An	2 ✓3	5 ✓5	10 ✓7	17 ✓9	26 ✓11	37 ✓13	50	8 ✓12	20 ✓20	40 ✓28	68 ✓36	104
An與乙n之差	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3
得算式	$A_n=(n^2-1)\times 1+A_1$							$A_n=(n^2-1)\times 4+A_1$				
公式	$A_n=(n^2-1)\times k+A_1$ $\quad k:(甲_n/4)^2$											



長方形甲＝6 的擴大圖

12



表二

圖別 / 圖次 / 項目	長方形甲=6						長方形甲=10				
	n						n				
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
邊點數甲n	6	6	6	6	6	6	10	10	10	10	10
內點數乙n	2 $_{6}$	8 $_{10}$	18 $_{14}$	32 $_{18}$	50 $_{22}$	72	8 $_{18}$	26 $_{30}$	56 $_{42}$	98 $_{54}$	152
面積An	4 $_{6}$	10 $_{10}$	20 $_{14}$	34 $_{18}$	52 $_{22}$	74	12 $_{18}$	30 $_{30}$	60 $_{42}$	102 $_{54}$	156
An與乙n之差	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4
得算式	$A_n=(n^2-1)\times 2+A_1$						$A_n=(n^2-1)\times 6+A_1$				
公式	$A_n=(n^2-1)\times K+A_1$　k:面積與內點數差值的累積										

擴大圖的面積、邊點數及內點數變化比較表

正方形的邊點數 甲	正方形面積與內點數的差值 A － 乙	長方形面積的邊點數 甲	長方形面積與內點數的差值 A － 乙
4	1	6	2
8	3	10	4
12	5	14	6
16	7	18	8
20	9	22	10
：	：	：	：
：	：	：	：
：	：	：	：

（三）討論及結果：

1. 當正方形和長方形的邊點數不變，但邊長擴大時，則其內點數乙和面積 A 也形成規律性的變化，都以同等值的倍數逐漸遞增。同時有下列情況產生：

（1）各擴大圖之間內點數乙的差與和各擴大圖之間面積 A 的差相等。因為當內點數增加一個，面積就增加 1 cm^2。

（2）不同邊點數的正方形其面積 A 與內點數乙的差都是奇數，而長方形的差則都是偶數，而且此兩類圖形的差數變化是依著各圖邊點數甲的大小，依序交錯排列。（見比較表）

（3）正方形面積隨著它的一條對角線的內點數的遞增而變大，即公式：

An ＝ 乙 n ＋ （基圖的一條對角線的內點數）（見表一）

（4）長方形面積隨著它的兩條對稱軸的內點數的遞增而變大，即公式：

An ＝ 乙 n ＋ （基圖的兩條對稱軸內點數的和）（見表二）

4. 利用方格紙上的點數所畫出的多邊形，其面積的大小並不是以邊數的多寡來決定，而是以圖形內所含內點數的多少來判定。換言之，即使是一個十邊形的圖形，當其圖形內的點數是 0 點時，則其圖形面積有可能比一個內點數為 10 點的三角形還要小。這個發現，對我們接著要研究的問題，是很重要的一個參照變因。

【研究問題四】：長方形的長與寬改變時，面積點數如何改變？

（一）操作說明：

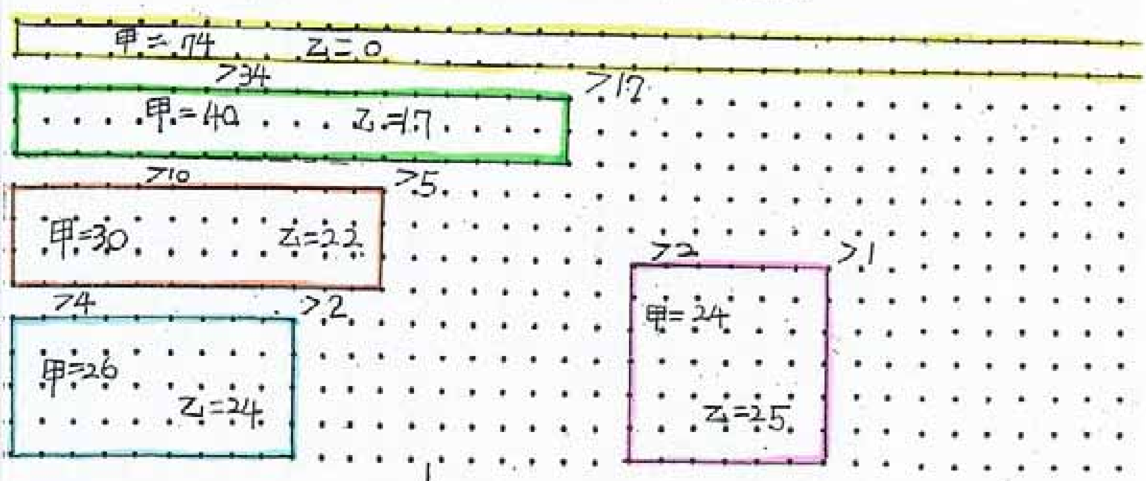
1. 當格子點紙上的長方形「正立不傾斜」時，其周長等於邊點數甲。
2. 探討內點數乙，面積 A 及周長（等於邊點數甲）三者間的關係：

（1）當 A 不變時，周長（甲）與乙的關係；

（2）當周長（甲）不變時，A 與乙的關係：

(二) 操作(1)：

1. 當 A 不變時，周長（甲）與乙的關係：



表一

項目 / 圖次		面積 A_n	周長＝邊點數 $甲_n$	內點數 $乙_n$
n	1	1×36＝36	(1＋36)×2＝74 →34	0 →17
	2	2×18＝36	(2＋18)×2＝40 →10	17＝0＋(74－40)÷2 →5
	3	3×12＝36	(3＋12)×2＝30 →4	22＝17＋(40－30)÷2 →2
	4	4×9＝36	(4＋9)×2＝26 →2	24＝22＋(30－26)÷2 →1
	5	6×6＝36	(6＋6)×2＝24	25＝24＋(26－24)÷2
得公式：		① $乙_n - 乙_{n-1} = (甲_{n-1} - 甲_n) \div 2$ ② $乙_n = 乙_{n-1} + (甲_{n-1} - 甲_n) \div 2$		

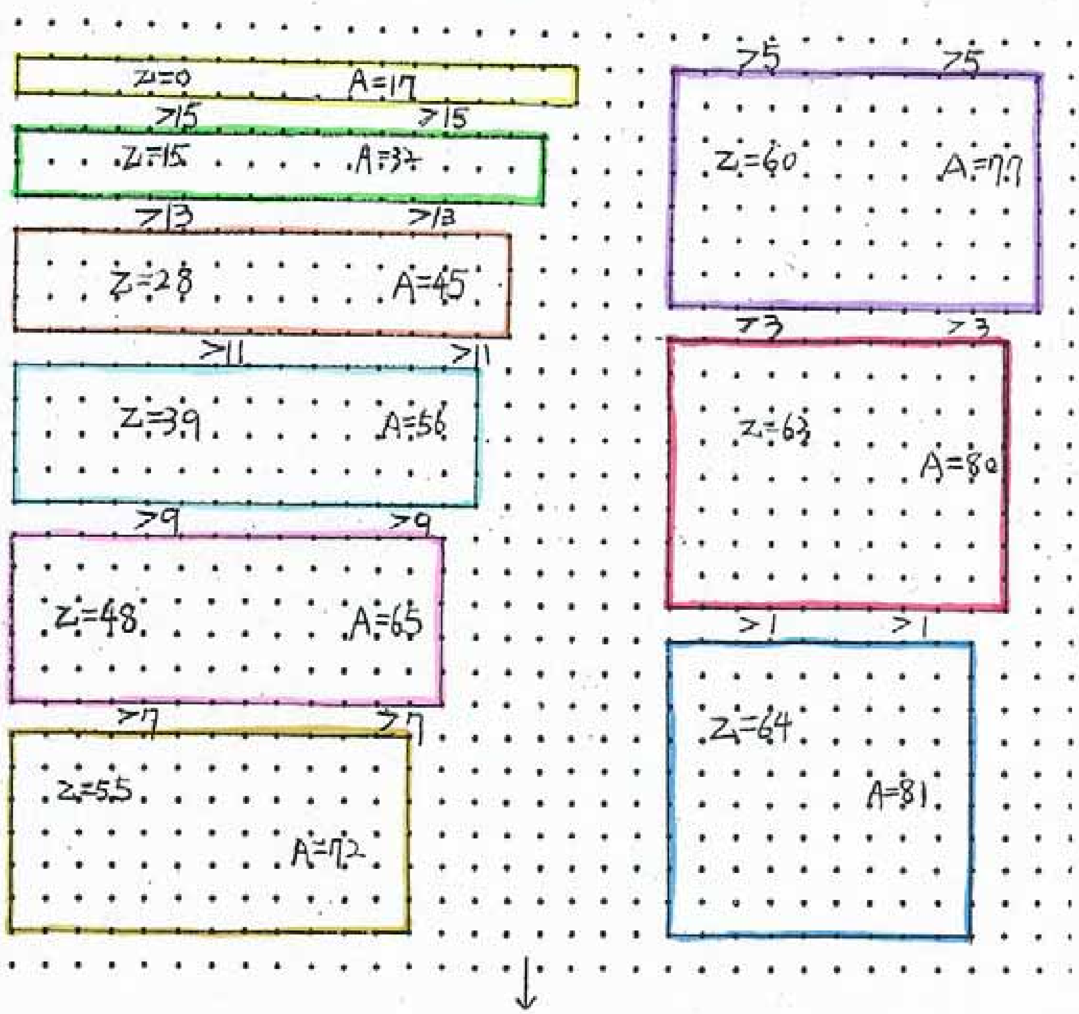
（三）討論及結果：

1. 當長方形面積不變，其周長越長時，則其內點數就越少，而且兩圖內點數的差是兩圖周長之差的 1/2。即下列公式：

$\boxed{乙_n - 乙_{n-1} = (甲_{n-1} - 甲_n) \div 2}$ （見表一）

2. 由此公式可證明：當面積不變時，每增加一個內點數，就減少 2 個邊點數。
3. 當長方形面積不變而周長爲最小，內點數爲最多時，即成爲正方形。

2. 當周長（甲）不變時，A 與乙的關係：



16

表二

項目 / 圖次		邊點數甲 n	面積 An	內點數乙 n
n	1	（1＋17）× 2＝ 36	1 × 17 ＝ 17	0
	2	（1＋17）× 2＝ 36	2 × 16 ＝ 32	15 ＝ 0 ＋（32－17）
	3	（1＋17）× 2＝ 36	3 × 15 ＝ 45	28 ＝ 15 ＋（45－32）
	4	（1＋17）× 2＝ 36	4 × 14 ＝ 56	39 ＝ 28 ＋（56－45）
	5	（1＋17）× 2＝ 36	5 × 13 ＝ 65	48 ＝ 39 ＋（65－56）
	6	（1＋17）× 2＝ 36	6 × 12 ＝ 72	55 ＝ 48 ＋（72－65）
	7	（1＋17）× 2＝ 36	7 × 11 ＝ 77	60 ＝ 55 ＋（77－72）
	8	（1＋17）× 2＝ 36	8 × 10 ＝ 80	63 ＝ 60 ＋（80－77）
	9	（1＋17）× 2＝ 36	9 × 9 ＝ 81	64 ＝ 63 ＋（81－80）
得公式：（1）乙$_n$ － 乙$_{n-1}$ ＝ $A_n - A_{n-1}$ （2）乙$_n$ ＝ 乙$_{n-1}$ ＋（ $A_n - A_{n-1}$）				

（三）討論及結果：

1. 當長方形的周長不變時，內點數乙隨著面積 A 的增加而變大。當面積增加 1 cm² 時，內點數就增加一個，而且兩個圖形內點數的差等於兩個圖形面積的差。

   即公式：$\boxed{乙_n - 乙_{n-1} = A_n - A_{n-1}}$（見表二）

2. 當長方形的周長不變而且其長漸減，寬漸增時，則其面積漸大，內點數也漸增加，直到長與寬的數值相等時，即成為正方形，此時期面積與內點數都是最大值。

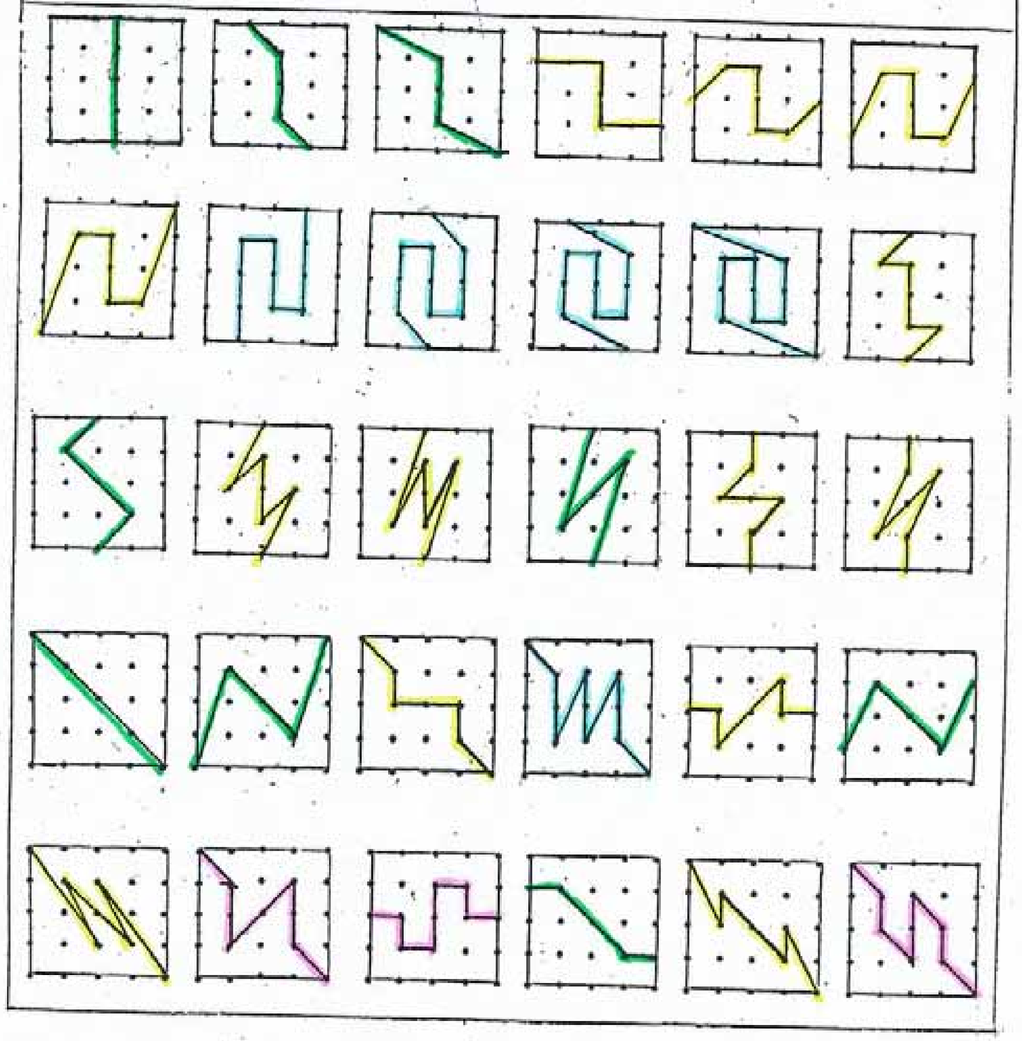
【研究問題五】：利用格子點作對稱等分圖，等分圖面積與格子點數如何變化？

（一）操作說明：

1. 在邊長為 5 個方格點的正方形上作等分對稱圖的切割。繪製對稱圖形時，切割圖的邊點數必須為奇數。
2. 等分線段的連接點只限於格子點，線段以規律方式移動連接點來做出對稱圖形。
3. 等分的個數由 2 等分依序增加，其面積值限定為整數或 0.5 cm²。

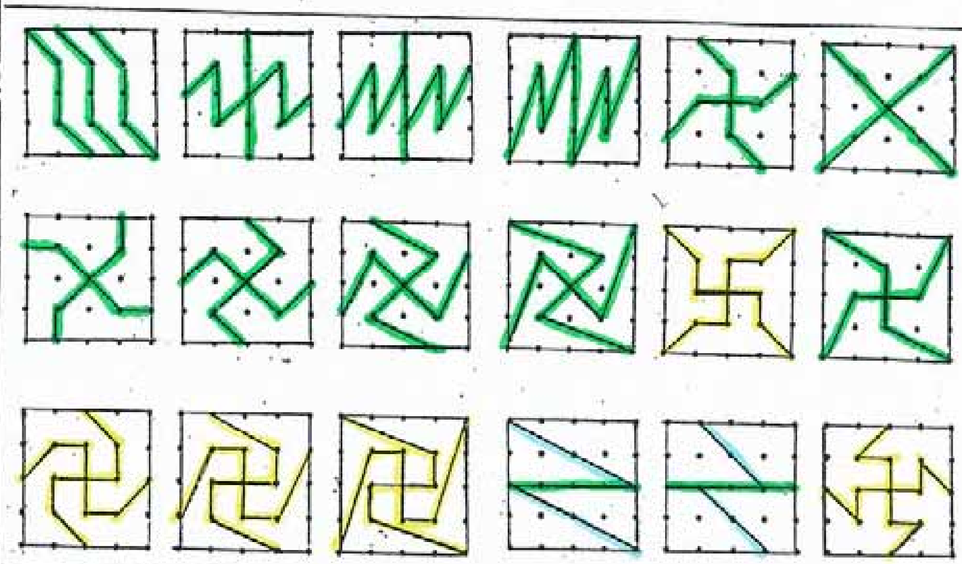
(二)操作<1>:

2等分對稱圖形　$16cm^2 \div 2 = 8cm^2$



甲：綠色等分線段　格子點數 5 個
乙：黃色等分線段　格子點數 7 個
丙：藍色等分線段　格子點數 11 個
丁：粉色等分線段　格子點數 9 個

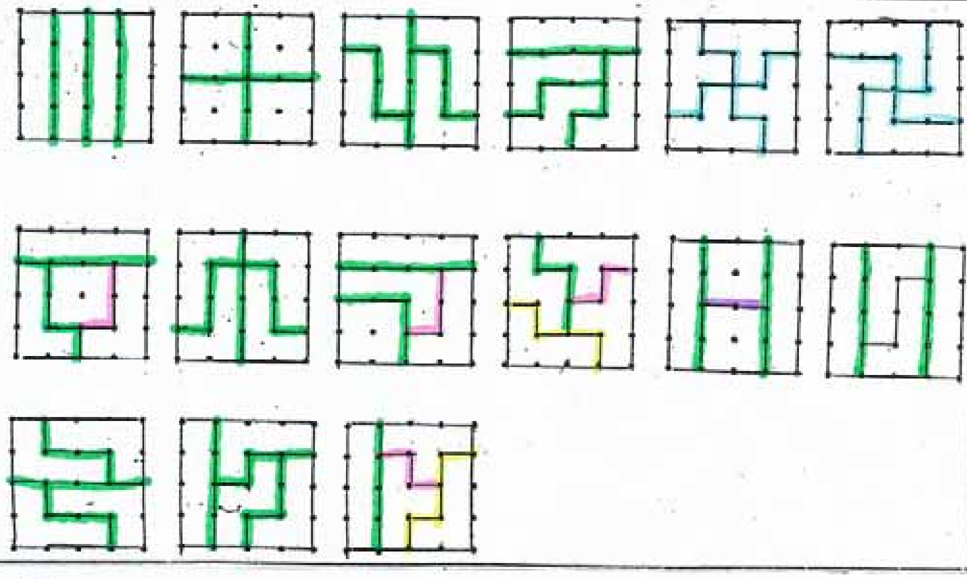
4等分對稱圖形　$16\,cm^2 \div 4 = 4\,cm^2$



甲、乙：綠色等分線段 格子點數5個　　丙：黃色等分線段 格子點數7個

丁　：藍色等分線段 格子點數3個

四元方格連等分圖形　$16\,cm^2 \div 4 = 4\,cm^2$



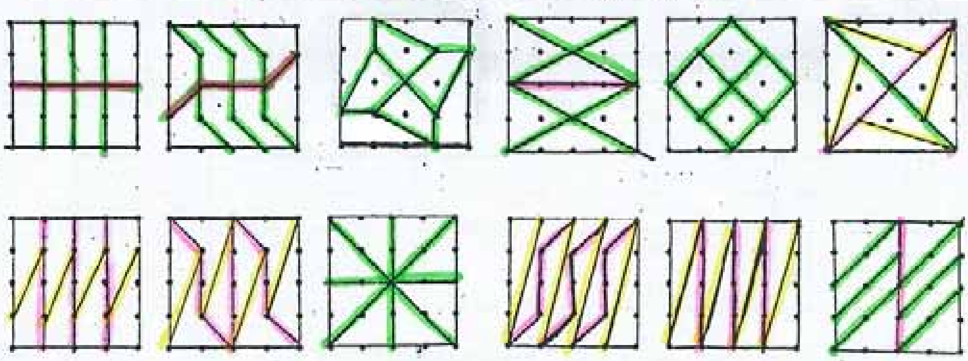
甲、乙：綠色等分線段 格子點數5個　　丙：黃色等分線段 格子點數6個

丁、戊：藍色等分線段 格子點數7個　　己：粉色等分線段 格子點數4個

庚　：紫色等分線段 格子點數3個

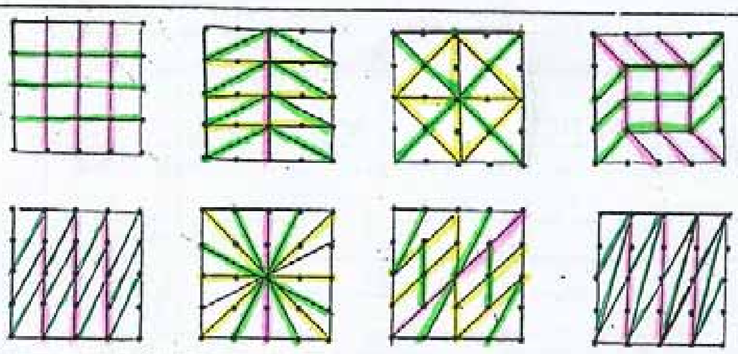
19

8等分對稱圖形　$16 cm^2 \div 8 = 2 cm^2$



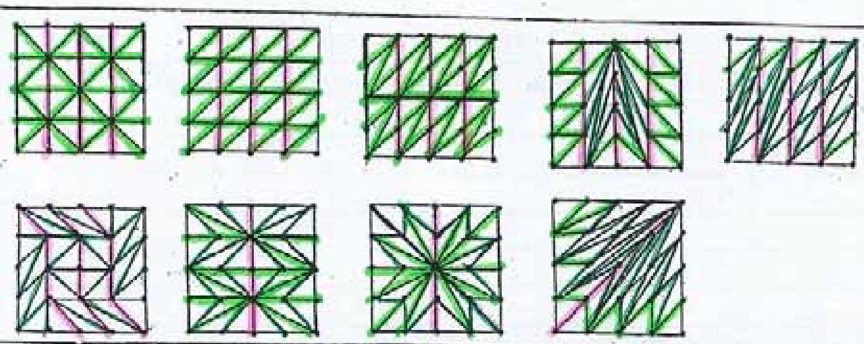
甲、乙、丙：綠色等分線段 格子點數3個
丁、戊：藍色等分線段 格子點數2個

16等分對稱圖形　$16 cm^2 \div 16 = 1 cm^2$



甲：綠色等分線段 格子點數2個　　乙：黃色等分線段 格子點數3個

32等分對稱圖形　$16 cm^2 \div 32 = 0.5 cm^2$



甲：綠色等分線段 格子點數2個

（二）：

1. 各類對稱等分圖形其格子點數的變化分析作成統計表：
2. 依等分線段的格子點數來分類，予以歸類為甲、乙、丙……等類別。

表一： 2 等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 類別	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	5	12	3
乙	7	14	2
丙	9	16	1
丁	11	18	0

表二－1：4 等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 圖 次	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	5	10	0
乙	5	8	2
丙	7	10	0
丁	3	8	1

表二－2： 四元方格連等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 圖 次	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	5	10	0
乙	5	8	1
丙	6	10	0
丁	7	10	0
戊	7	8	1
己	4	10	0
庚	3	8	1

表三： 8 等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 圖 次	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	3	6	0
乙	3	4	1
丙	2	4	1
丁	2	6	0

表四： 16 等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 圖 次	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	2	4	0
乙	3	4	0

表五： 32 等分對稱圖形，其格子點數變化分析統計表

項 目 / 圖 次	等分線段的格子點數	等分圖周長的格子點數	等分圖的內點數
甲	2	3	0

（三）討論及結果：

1. 由等分等分對稱圖形統計表得知：

（1）面積相同的等分圖形，當其周長的點數變多時，則內點數就相對的減少。反之，當其周長的點數變少時，則內點數就相對的變多。

（2）等分圖形周長上 2 個點數的值等於等分圖 1 個內點數的值。換言之，當周長的點數多 2 個時，則內點數就少一個。

（3）面積相同的等分圖形，從其等分線段的格子點數，也可看出當等分線段上的格子點數相差 2 個時，則內點數也必相差 1 個。

（4）從表四 表五得知，當等分圖形周長點數為 3 個或 4 個時，則絕對不會有內點數的存在，尤其是表五 32 個等分圖的面積為 0.5 cm^2，是由 3 個點形成最基本的多邊形。

2. 利用格子點可輕易的做出多樣性且規律性的對稱等分圖形，這些圖形包含有線對稱及點對稱的圖形，唯獨四元方格連有 5 個是非對稱圖形。

陸、結論與心得：

一、利用格子點數的多寡及所在位置（在圖形邊上或圖形內外）探討幾何問題，不但具變化性同時兼具規律性，而且可導出一些簡易精確的計算公式，如：

1. A ＝ 甲/2＋乙－1 （見問題二之表）

2. $A_n = (甲_n/甲_1)^2 \times A_1$ （見問題三- 1 表）

3. A_n ＝ 乙 n ＋ （基圖的一條角線的內點數）（見問題三- 2 表）

4. A_n ＝ 乙 n ＋ （基圖的兩條對稱軸內點數的和） （見問題三- 2 之表）

5. $乙_n - 乙_{n-1} = A_n - A_{n-1}$（見問題四- 2 之表）

6. $乙_n - 乙_{n-1} = (甲_{n-1} - 甲_n) \div 2$ （見問題四- 1 之表）

二、由公式 A 得知：

1. 當內點數乙不變時，面積 A 隨邊點數甲的增加而變大。而且每增加一個邊點數時，則面積則增加 ½ cm^2。
2. 當邊點數甲不變時，面積 A 隨內點數乙的增加而變大。而且每增加一個內點數時，則面積增加 1 cm^2。
3. 當面積 A 不變時，則邊點數甲增加時，內點數乙便減少。反之則增加。而且每增加一個內點數，便減少 2 個邊點數。（見問題二之表五）

三、當各擴大圖之間的邊點數甲成倍數關係時，則可求得擴大圖的面積公式：

$$A_n = (甲_n/甲_1)^2 \times A_1$$ （見問題三- 1 表）

四、多邊形擴大時，其各擴大圖之間的內點數和面積的變化相同，即都以同值的倍數逐漸遞增。

五、正方形面積隨它的一條對角線的內點數的增加而變大，見下列公式：

A_n ＝ $乙_n$ ＋（基圖的一條角線的內點數）（見問題三- 2 表）
（當正方形邊點數固定時，此公式才成立）

六、長方形面積隨它的兩條對稱軸內點數和的增加而變大，見下列公式：

A_n ＝ $乙_n$ ＋（基圖的兩條對稱軸內點數的和）（見問題三- 2 之表）
（當長方形邊點數固定時，此公式才成立）

七、當長方形面積不變，其周長愈長時，則其內點數就愈少，而且兩圖內點數的差是兩圖周長之差的 ½，見如下之公式：

$$乙_n - 乙_{n-1} = (甲_{n-1} - 甲_n) \div 2$$ （見問題四- 1 之表）

八、當長方形面積不變而周長為最小，內點數為最多時，是為正方形。

九、當長方形周長不變時，內點數隨面數積的增加而變大。當面積增加 1 cm^2時，內點數就增加一個。而且兩圖內點數乙的差等於兩圖面積 A 的差，見如下之公式：

$$乙_n - 乙_{n-1} = A_n - A_{n-1}$$ （見問題四- 2 之表）

十、當長方形周長不變，其面積和內點數都為最大值時，是為正方形。

十一、在方格點上無法做出正三角形與除正方形以外的正多邊形，此乃因為格子點是以方格形式排列。我們想，是否以其他形式排列點數，便能做出這些圖形呢？這是值得我們日後繼續研究的問題。

十二、由等分對稱圖形統計表得知：

1. 面積相同的等分圖形，當其周長的點數變多時，則內點數就相對的減少。反之，當其周長的點數變少時，則內點數就相對的變多。

2. 等分圖形周長上 2 個點數的值等於等分圖 1 個內點數的值。換言之，當周長的點數多 2 個時，則內點數就少一個。
3. 面積相同的等分圖形，從其等分線段的格子點數，也可看出當等分線段上的格子點數相差 2 個時，則內點數也必相差 2 個。
4. 從表四 表五得知，當等分圖形周長點數為 3 個或 4 個時，則絕對不會有內點數的存在，尤其是表五 32 個等分圖的面積為 0.5 cm²，是由 3 個點形成最基本的多邊形。

十三、利用格子點可輕易的做出多樣性且規律性的對稱等分圖形，這些圖形包含有線對及點對稱的圖形，唯獨四元方格連有 5 個為非對稱圖形。

十四、數學課裡所學到有關圖形辨識、圖形繪製、面積計算、圖形大小比較，面積與周長關係、圖形等分、拼圖、對稱圖形及圖形的擴大等幾何問題，如能以我們這次所研究的結果，利用格子點紙輔助學習，則必能收事半功倍之效。而且學生學習的興致也高昂，因為它簡易、有創意又能靈活思考喔！

柒、參考資料：

（一）趣味數學實驗　　萬國興編著　　前程出版社
（二）數學課本四、五、六年級　　　　南一出版社

【評語】080407

本作品能利用格子點數細部分析，繪圖，探究多邊形擴大圖面積點數之變化適合學生程度，尤其在多邊形的繪圖上更看出作者的用心，惟分析及深入度有待加強。