中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080406

三柱鼎立—三柱搬盤遊戲最佳移動模式之探討

學校名稱：新北市私立康橋雙語國中小學

作者：	指導老師：
小六 林紘毅 小六 周子皓 小六 吳雲行	楊錦花

關鍵詞：河內塔、雙塔、三塔

得獎感言

美麗的一筆畫

「第一名，新北市私立康橋雙語學校……」是我們嗎？是我們，我們得了數學組第一名。我們竟然從一群喜歡數學和熟悉河內塔玩法的愛好者,到一群可以參加全國科展,並獲得第一名的高手了。

鑽研數學，探索數學的奧妙是我們最大的興趣。真正組隊參賽科展，卻是從二月開始，也開始從「喜歡和興趣」淬鍊為「磨練和成長」。為了求更好的表現，每天的午休時間、假日的休閒時間我們終日與數字為伍，卻樂此不疲。因為要找出規律算式，我們一次次的將紀錄分解成有用的、沒用的式子……，過程中雖然有老師不斷的打氣，並且不厭其煩的引導我們用新的數學工具去突破難關。在這長期研究的過程中，有夥伴因耐不住不知道結果的研究煎熬，而選擇放棄，最後剩下我們三個人一直努力撐著。

也許是歷經煎熬吧，每每出現小突破，都讓我們興奮不已，終於雙塔、三塔……一個個一般式讓我們找出來，而為了簡化我們的算式，我們學會了函數、等比級數和指數的運算，這些都讓我們的數學功力大增。

到了進入國展的那幾天，我們有些興奮，有些緊張，也會胡思亂想。尤其是第一天，一進入會場，就得一直安慰自己不要緊張，因為我們知道：只要一緊張，就會影響我們的表現，也相對的會影響我們的成績。所幸，我們的表現和平常的表現差不多，評審提出的問題也回答的還不錯，可能有點希望哩！「雖然高手如雲，應該會有個佳作或第三名吧！」心中暗暗盤算著。

到了頒獎典禮那一天，當聽到榮獲第三名的學校，沒有我們時，心裡暗暗的嘆了一口氣。第二名是誰都聽不清楚，突然聽到「第一名，新北市私立康橋雙語學校……」是我們，我們又叫又跳喜出望外的奔向前台領獎。

我們榮獲全國第一名科展，最要感謝的是老師諄諄教誨，另外也要感謝評審的肯定，要感謝隊友的合作與打氣，要感謝的人實在太多太多，只好跟所有幫助過我們的人說聲：謝謝你們！謝謝你們讓我們發現了數學之美，謝謝你們讓我們絢麗的童年，增添了美麗的一筆畫。

大家一起來搶鏡頭，耶！

同心協力，贏得勝利


比賽前的再衝刺

三柱鼎立—三柱搬盤遊戲最佳移動模式之探討

摘要

本次的研究主題是由河內塔遊戲延伸而成的，我們在不增加河內塔的柱數〈維持 3 柱〉，而增加原始擺盤子的塔數，由河內塔的單塔移動、雙塔的雙塔互換，到三塔的三塔輪換，探討不同塔數的最佳移動模式與最少移動次數間的規律，並推導出一般式。

我們的研究是將實際搬盤遊戲過程階段化與模式化，將移動次數表格化，由表格的次數找出規律的算式，再套用等比級數公式、乘法分配律與數的合成與分解，去求出搬盤遊戲的一般式。

壹、研究動機

有一次數理資優班的探索課，我們上的是河內塔，單塔我們很快就解決了，因爲真的是太簡單了，就連規律都很簡單。這時我們突然有個主意：如果把它變成兩個塔位置要對調，會不會更好玩？是不是也有一定的規律呢？我們就這樣開始了研究搬盤遊戲的旅程……

貳、研究目的

一、探討河內塔的盤數與最少移動次數的關係。

二、探討雙塔最佳移動模式的技巧與最少移動次數的規律。

三、探討三塔最佳移動模式的技巧與最少移動次數的規律。

參、研究設備及器材

一、A4 紙（在紙上畫出 3 條線段代表不同的柱子）。

二、圍棋黑、白子、圓形磁鐵（以圍棋的黑、白子或圓形磁鐵代替小圓盤，在棋子或磁鐵貼上 1、2、3、4、5、……標籤代表由小到大的圓盤）。

三、筆記本、電腦、相機（幫助資料整理及彙整）。

肆、遊戲說明

一、名詞解釋

（一）起始柱：遊戲開始時放盤子的柱子。

（二）目標柱：遊戲結束狀態，盤子的堆放柱。

（三）暫存柱：非起始柱與目標柱，遊戲過程中，讓位時暫時停放的柱子。

（四）盤號：爲了便於記錄與說明將盤子由小到大分別以數字和起始柱編號，a_1、a_2、a_3、……、a_{x-1}、a_x；b_1、b_2、b_3、……、b_{x-1}、b_x；c_1、c_2、c_3、……、c_{x-1}、c_x。

（五）底盤：遊戲進行一直放在最下面的最大號盤子。a_x、b_x、c_x 代表底盤。

（六）讓位：在搬盤的過程，小號盤需先移開，讓大號盤到達目標柱後才移動。

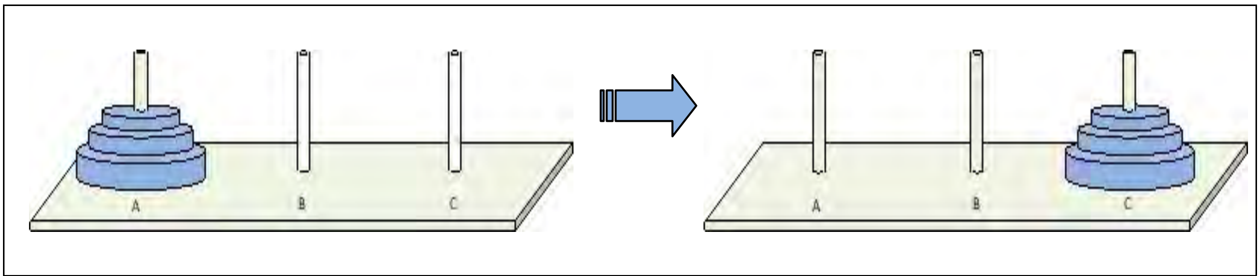
（七）歸位：大號盤到達目標柱後，原移開的小號盤才移動到目標柱的大號盤上方。

二、遊戲規則：

（一）河內塔

1. 有 3 根柱子（A、B、C），在一根柱子上（例 A 柱），由上到下疊著由小到大的圓盤。
2. 一次移動一個圓盤，拿起某一根柱子的最上面圓盤，放在別的柱子上，大圓盤不可放在小圓盤上面。
3. 把所有的圓盤，都移到與開始不同的同一根柱子上，由上而下，由小到大依序排列，就算完成。

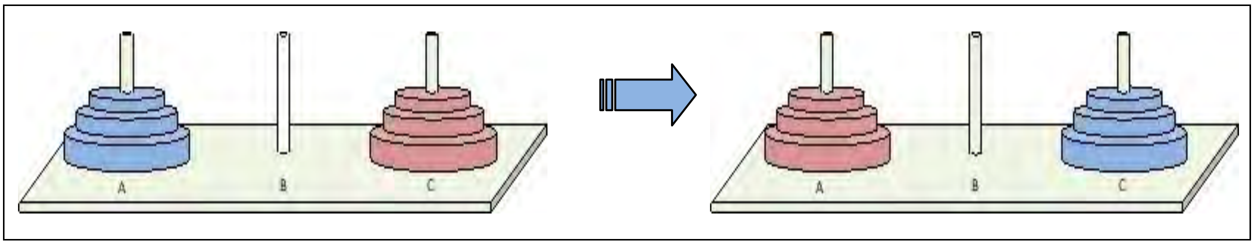
【圖 1】河內塔



（二）雙塔

1. 有 3 根柱子，在兩根柱子上（例 A 和 C 柱），由上到下疊著由小到大的圓盤。
2. 套用河內塔的移動規則，將 A、C 柱上的圓盤互做對換。
3. 移動時兩個相同號數的圓盤，不分大小可以疊放在一起。

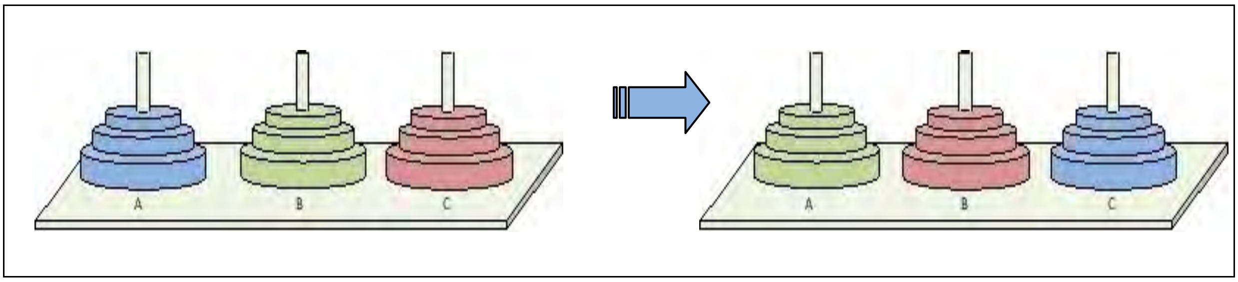
【圖 2】雙塔



（三）三塔

1. 有 3 根柱子，在三根柱子上，由上到下疊著由小到大的圓盤。
2. 套用雙塔的移動規則，將 A、B、C 柱上的圓盤輪換位置。

【圖 3】三塔



伍、文獻探討

一、歷屆相關得獎作品分析

參展組別	得獎名次		研究範疇
第 27 屆國小組	第三名	河內寶塔與九連環	以盤數的增加、柱數的增加、遊戲規則改變或最後完成的形狀的變化探討河內塔的問題。
第 43 屆高中組	第一名	將錯就錯 Knuth 河內塔	
第 51 屆國中組	團隊合作	n 柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找	
第 49 屆國中組	第一名	三柱輪換之移動策略—雞尾酒法	利用四根柱子討論 3 柱上皆有 n 個盤子的三柱輪換

二、我們的研究特色

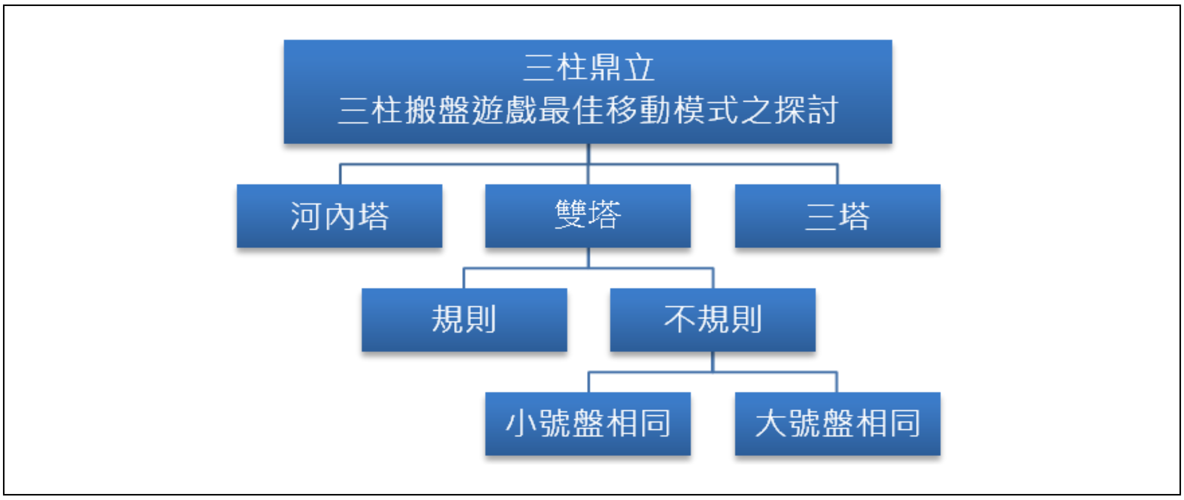
（一）我們的研究範疇主要鎖定不增加柱數（維持 3 柱），探討雙塔互換和三塔輪換的規律。

（二）雙塔互換的討論在歷屆國展作品中尚無人研究過，我們的作品應屬首例；而我們的「三塔輪換」與 49 屆國中組第一名的「三柱輪換之移動策略—雞尾酒法」最大的不同在於我們沒有「暫存柱」(第 4 柱)，我們的三塔輪換是道地的在三柱上完成三塔的輪換動作。

陸、研究過程

一、研究架構

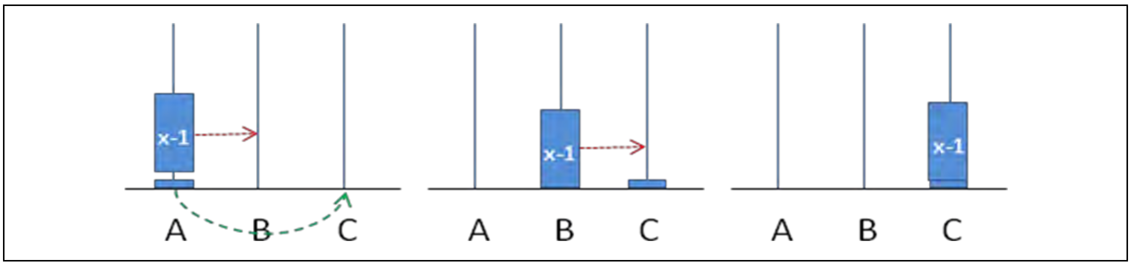
【圖 4】「三柱鼎立」研究架構圖



二、河內塔的圓盤數與最少移動次數的關係

（一）設河內塔的最少移動次數為 H（x）觀察其移動情形。

【圖 5】河內塔移動模式探討（盤數 x，起始柱 A，目標柱 C）



由移動模式可看到河內塔的遞迴關係 H（x）＝H（x-1）× 2＋1

H（1）＝1＝2^0

H（2）＝H（1）x2＋1＝2^0 × 2+1＝2^1+2^0

H（3）＝H（2）x2＋1＝（2^1+2^0）× 2+1＝$2^2+2^1+2^0$……等比級數

……

則 **H（x）**＝$2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots+2^1+2^0=\dfrac{2^0(2^x-1)}{2-1}$＝$\mathbf{2^x-1}$（x 代表總圓盤數）

【表 1】河內塔圓盤數與最少移動次數關係

總盤數	1	2	3	…….	x
最少移動次數 H(x)	1	3	7	……	2^x-1

（二）設 H_n（x）為各號盤移動次數，統計其移動次數

1. 由【圖 1】可知，底盤 H_n（x）只要移動一次，就可以抵達目標柱 C，H_n（x-1）需先移到暫存柱 B 讓位，等底盤歸位後，再移到目標柱，所以整個移動軌跡如下：

【表 2】各號盤移動軌跡（盤數＝x，起始柱 A，目標柱 C）

移動盤號	移動軌跡	移動次數
x 號盤	$\boxed{A}$→ C（目標柱）	1（2^0）
x-1 號盤	$\boxed{A}$→ B→C	2（2^1）
x-2 號盤	$\boxed{A}$→ C→B→ A→C	4（2^2）
x-3 號盤	$\boxed{A}$→ B→C→A→B→ C→A→ B→C	8（2^3）

2. 紅色〇爲大 1 號盤的目標柱，而黑字則是爲讓位（讓大 1 號盤）而移去的非目標柱。

3. 由各號圓盤移動次數可見 H_n（x-1）＝H_n（x）× 2

H_n（x）＝1＝2^0

H_n（x-1）＝H_n（x）× 2＝2^0 × 2＝2＝2^1

H_n（x-2）＝H_n（x-1）× 2＝2^1 × 2＝2^2

……

H_n（1）＝2^{x-1}

【表 3】河內塔圓各號盤移動次數與圓盤數的關係

盤號	x	x-1	x-3	…….	x
移動次數 H_n（x）	1	2	4	……	2^{x-1}

4. 河內塔的最少移動次數也等於各號盤的移動次數的和

H（x）＝H_n（x）＋H_n（x-1）＋H_n（x-2）＋……＋H_n（1）

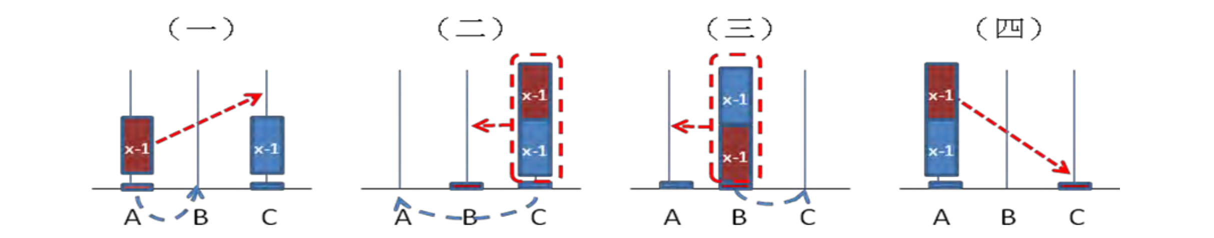
$$H(x)=2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{x-1}=\frac{2^0(2^x-1)}{2-1}=2^x-1$$

（三）無論利用河內塔的遞迴關係或各號盤移動的總和，我們都可以找到相同的一般式，可見利用這兩種方法去求得一般式是可行的，接下來的搬盤遊戲我們也會因各模式的狀況，而擇一求取一般式。

三、雙塔最佳移動模式與最少移動次數探討

（一）雙塔的最佳移動模式探討

【圖 6】雙塔最佳移動模式（4 階段 2 模式）



【表 4】：雙塔四階段移動次數統計，紅字表示底盤移動數

次數 階段 / 圓盤數	階段 1	階段 2	階段 3	階段 4	總次數
2	1(+1)	2(+1)	2(+1)	1	9（6+3）
3	5(+1)	6(+1)	6(+1)	5	25（22+3）
4	14(+1)	14(+1)	14(+1)	14	59（56+3）
5	34(+1)	30(+1)	30(+1)	34	131（128+3）
6	75(+1)	62(+1)	62(+1)	75	277（274+3）
7	159(+1)	126(+1)	126(+1)	159	572（569+3）

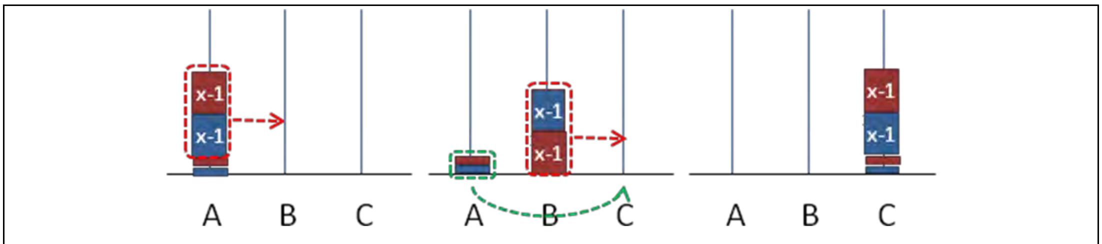
（二）雙塔模式與移動次數統計分析

1. 雙塔最佳移動模式為四階段 2 模式。階段 2 與階段 3 同模式；階段 4 是階段 1 的還原，可視為同模式。
2. 底盤移動次數（3 次）另計，則移動次數，階段 1＝階段 4；階段 2＝階段 3。
3. 雙塔移動總次數＝第 1 階段 × 2＋第 2 階段 × 2＋3

（三）雙塔第 2 階段與第 3 階段移動模式探討

1. 將集中一柱的兩種盤（2 x）盤，移往另一柱的移動模式其最少移動次數設為 A（x）。

【圖 7】雙塔第 2 階段與第 3 階段 A（x）移動模式分析



【表 5】：A（x）移動次數與河內塔移動次數紀錄

圓盤數(x)	1	2	3	4	5	6
A（x）	2	6	14	30	62	126
H（x）	1	3	7	15	31	63

2. 由 A（x）的移動模式與移動次數，發現與河內塔移動模式雷同，移動同號盤的兩個，

故不會因大小產生讓位，只算 2 次，所以 A（x）的最少移動次數是 H（x）的兩倍。

3. A（x）＝H（x）× 2＝（2^x－1）×2＝2^{x+1}－2

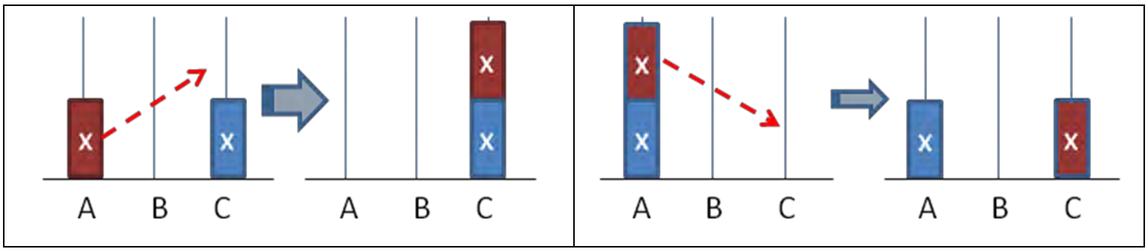
4. 第 2 階段與第 3 階段移動盤數為 x－1 盤，(見圖 6)

故移動次數 A（x－1）＝$2^{(x-1)+1}$－2＝2^x－2

（四）雙塔第 1 階段與第 4 階段移動模式探討

1. 將兩柱上相同的盤子(各 x 盤)集中成一柱，或將集中一柱的兩種盤(2x 盤)，分開成兩柱的移動模式其最少移動盤數設為 B（x）

【圖 8】雙塔 第 1 與第 4 階段移動模式



【表 6】：B（x）移動次數紀錄

圓盤數(k)	1	2	3	4	5	6
最少移動次數 B（x）	1	5	14	34	75	159

2. B（x）的移動模式包括同號盤的堆疊，遞迴狀況較複雜，次數統計也無法歸納出 B（x）移動次數的規律，於是我們進一步統計 B（x）各圓盤移動次數。

【表 7】：B（x）各圓盤移動次數紀錄

盤號／總盤數	1	2	3	4	5	6	7	合計
1	1							1
2	4	1						5
3	9	4	1					14
4	20	9	4	1				34
5	41	20	9	4	1			75
6	84	41	20	9	4	1		159
7	169	84	41	20	9	4	1	328

3. 設 B（x）第 1 號盤的移動次數為 B_1（x）

B_n（x）為盤數 x 各號盤移動的次數，B_n（x）代表底盤，由下而上依序為 B_n（x）、 B_n（x-1）、B_n（x-2）、…、B_n（2）、B_n（1）

4. 由移動次數紀錄發現

B_1（1）＝B_n（x）＝1＝2^0

B_1（2）$=B_n$（x-1）$=4=2^2$

B_1（3）$=B_n$（x-2）$=9=8+1=2^3+1$

B_1（4）$=B_n$（x-3）$=20=16+4=2^4+2^2$

B_1（5）$=B_n$（x-4）$=41=32+8+1=2^5+2^3+1$

B_1（6）$=B_n$（x-5）$=84=64+16+4=2^6+2^4+2^2$

B_1（7）$=B_n$（x-6）$=169=128+32+8+1=2^7+2^5+2^3+1$

……

5. 由 B_1（x）的次數變化規律，發現也與等比級數的相關。

（1）若 x 爲奇數則

$$B_1(x)=\boxed{2^x+2^{x-2}+2^{x-4}+2^{x-6}+\cdots\cdots+2^3}+1$$

B_1（x）爲等比級數的和＋１；首項$=2^3$　比值$=2^2$　項次$=\dfrac{x-1}{2}$

$$B_1(x)=\frac{2^3(2^{2\times\frac{x-1}{2}}-1)}{2^2-1}+1=\frac{2^3(2^{x-1}-1)}{3}+1=\frac{2^{x+2}-2^3+3}{3}=\frac{2^{x+2}-5}{3}$$

（2）若 x 爲偶數則

$$B_1(x)=\boxed{2^x+2^{x-2}+2^{x-4}+2^{x-6}+\cdots\cdots+2^2}$$

B_1（x）爲等比級數的和；首項$=2^2$　比值$=2^2$　項次$=\dfrac{x}{2}$

$$B_1(x)=\frac{2^2(2^{2\times\frac{x}{2}}-1)}{2^2-1}=\frac{2^2(2^x-1)}{3}=\frac{2^{x+2}-2^2}{3}=\frac{2^{x+2}-4}{3}$$

6.　B（x）$=B_n$（1）$+B_n$　（2）$+B_n$（3）$+\cdots\cdots+B_n$（x-1）$+B_n$（x）

$=B_1$（x）$+B_1$（x-1）$+B_1$（x-2）$+\cdots\cdots+B_1$（2）$+B_1$（1）

$$B_1(1)=\frac{2^{x+2}-5}{3}=\frac{2^3-5}{3}\ ;\ B_1(2)=\frac{2^{x+2}-4}{3}=\frac{2^4-4}{3}$$

（1）若 x 爲奇數；奇數項$=\dfrac{x+1}{2}$；偶數項$=\dfrac{x-1}{2}$

$$B(x)=\frac{2^{x+2}-5}{3}+\frac{2^{x+1}-4}{3}+\frac{2^x-5}{3}+\cdots\cdots+\frac{2^4-4}{3}+\frac{2^3-5}{3}$$

$$B(x)=\frac{\boxed{2^{x+2}+2^{x+1}+2^x+\ldots\ldots+2^3}-5\times\frac{x+1}{2}-4\times\frac{x-1}{2}}{3}$$

$$B(x)=\frac{2^3\times(2^x-1)}{3}-\frac{5x+5}{6}-\frac{4x-4}{6}=\frac{2^{x+3}-2^3}{3}-\frac{5x+5}{6}-\frac{4x-4}{6}$$

$$\mathbf{B(x)} = \frac{2^{x+4}-9x-17}{6}$$

（2）第 1 階段與第 4 階段移動盤數爲 x－1，（見圖 6）

故 B（x－1）$= \dfrac{2^{x-1+4}-9(x-1)-17}{6} = \dfrac{2^{x+3}-9x-8}{6}$　（x－1 爲奇數，故 x 爲偶數。）

（3）若 x 爲偶數；奇數項＝$\dfrac{x}{2}$；偶數項＝$\dfrac{x}{2}$

$$B(x) = \frac{2^{x+2}-4}{3} + \frac{2^{x+1}-5}{3} + \frac{2^{x}-4}{3} + \frac{2^{x-1}-5}{3} + \cdots\cdots + \frac{2^{4}-4}{3} + \frac{2^{3}-5}{3}$$

$$B(x) = \frac{\boxed{2^{x+2}+2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}+\ldots\ldots+2^{3}} - 5\times\frac{x}{2} - 4\times\frac{x}{2}}{3}$$

$$B(x) = \frac{2^{3}\times(2^{x}-1)}{3} - \frac{5x}{6} - \frac{4x}{6} = \frac{2^{x+4}-9x-16}{6}$$

（4）第 1 階段與第 4 階段移動盤數爲 x－1（見圖 6），

故 B（x－1）$= \dfrac{2^{x-1+4}-9(x-1)-16}{6} = \dfrac{2^{x+3}-9x-7}{6}$　（x－1 爲偶數，故 x 爲奇數。）

（五） 雙塔移動次數計算

1. 由【表 4】可得知雙塔移動總次數＝第 1 階段× 2＋第 2 階段× 2＋3

   設雙塔移動總次數爲 D（x），則 D（x）＝A（x－1）× 2＋B（x－1）× 2＋3

   A（x－1）× 2＝（2x－2）×2 ＝2x＋1－4

   B（x－1）× 2＝$\dfrac{2^{x+3}-9x-7}{6}\times 2 = \dfrac{2^{x+3}-9x-7}{3}$ ……x 爲奇數

   B（x－1）× 2＝$\dfrac{2^{x+3}-9x-8}{6}\times 2 = \dfrac{2^{x+3}-9x-8}{3}$ ……x 爲偶數

2. 若總盤數 x 爲奇數，則總移動次數

   $2^{x+3}=2^{x+1}\times 4$

   $$D(x) = 2^{x+1}-4+\frac{\boxed{2^{x+3}}-9x-7}{3}+3 = \frac{2^{x+1}\times 3-12+\boxed{2^{x+1}\times 4}-9x-7+9}{3}$$

   $$\mathbf{D(x)} = \frac{2^{x+1}\times 7-10}{3} - \mathbf{3x}$$

3. 若總盤數 x 爲偶數，則總移動次數

   $$D(x) = 2^{x+1}-4+\frac{2^{x+3}-9x-8}{3}+3 = \frac{2^{x+1}\times 3-12+2^{x+1}\times 4-9x-8+9}{3}$$

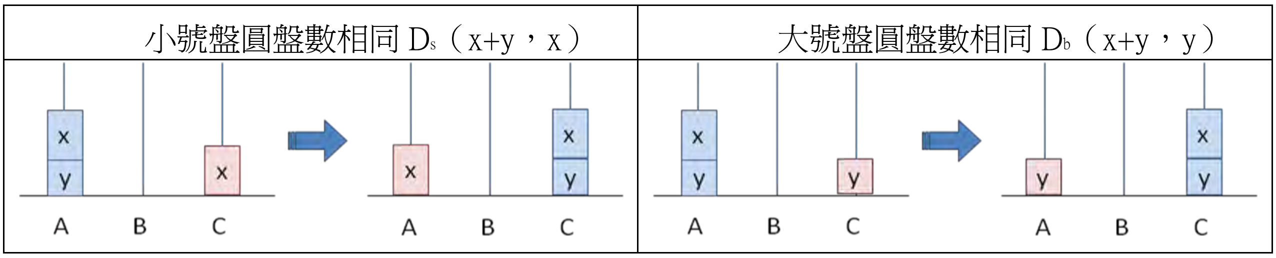
$$D(x) = \frac{2^{x+1} \times 7 - 11}{3} - 3x$$

四、不規則雙塔的最少移動次數探討

原先雙塔兩根柱上的圓盤必須相等，若兩柱上的圓盤數不相等，那麼一般式應做如何修正？

（一）將不規則雙塔分爲小號盤圓盤數相同，與大號盤圓盤數相同兩種模式探討。

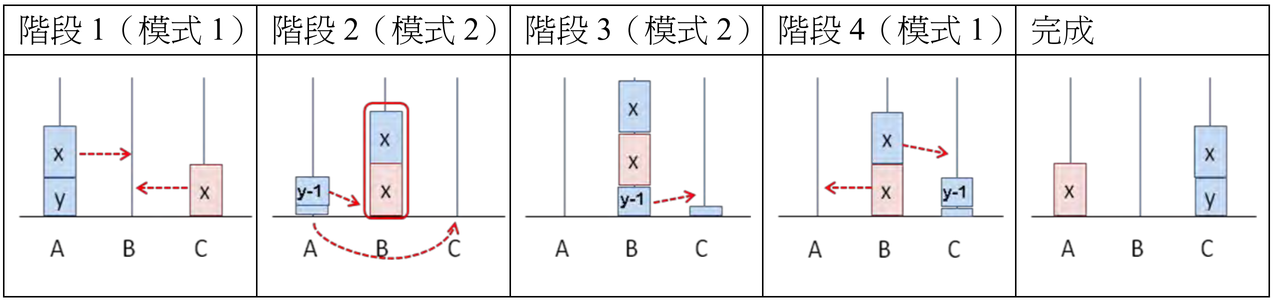
【圖 9】不規則雙塔模式（x 代表較小的圓盤， y 代表較大的圓盤。）



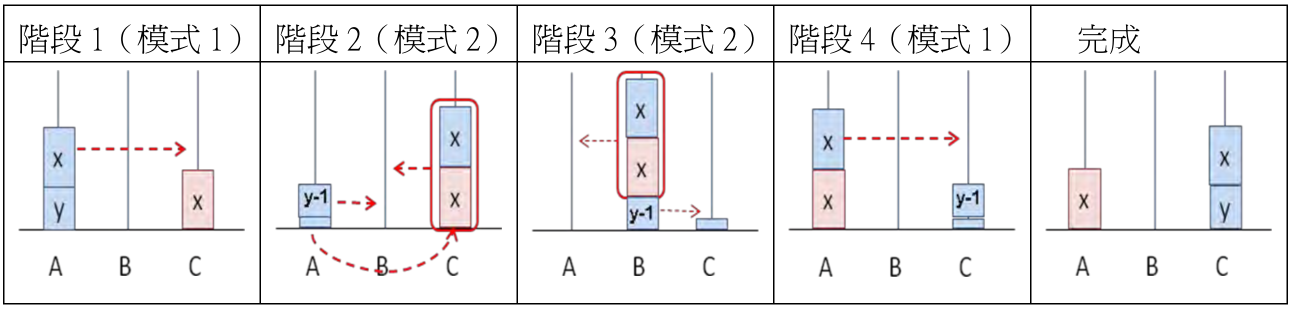
（二）分析小號盤圓盤數相同移動模式

1. 設不規則雙塔（小號盤圓盤數相同）最少移動次數爲 D_s（x+y，x）；
   A 柱盤數爲 x＋y，B 柱盤數爲 y。

【圖 10】y 爲奇數的不規則雙塔移動模式



【圖 11】y 爲偶數的不規則雙塔移動模式



2. 移動情形因 y 爲奇數或偶數而有所不同，都可分爲 4 階段 2 模式。
3. 底盤移動另計，則移動次數階段 4＝階段 1，階段 2＝階段 3。
4. 將 y 爲奇數，階段 1 與階段 4 的模式設爲 M（x）
5. y 爲偶數，階段 1 與階段 4 的模式爲 B (x) (與雙塔同)

6. 將階段 2 與階段 3 的模式設爲 C（y-1，2x）

（三）不規則雙塔 D_s（x+y，x）階段 2 與階段 3 的 C(y-1，2x)移動規律探討

【表 8】不規則雙塔第 2 階段與第 3 階段移動模式次數紀錄（將 2x 視爲 1 個單位）

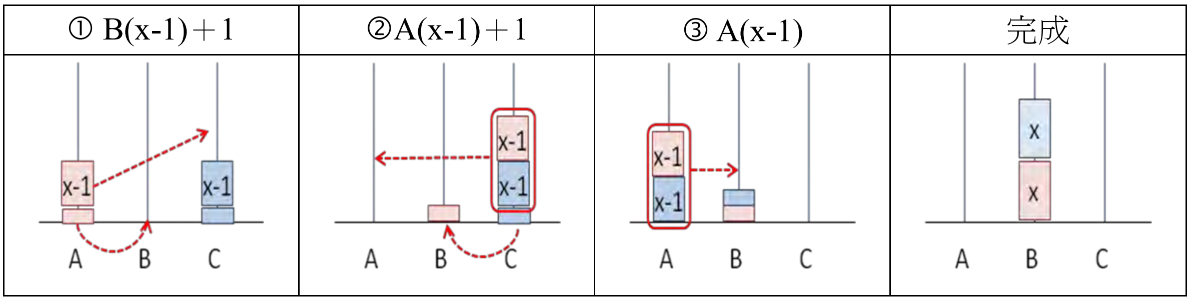
y 的盤數	1	2	3	4	5	6
y-1 移動次數= H（y-1）	0	1	3	7	15	31
2x 移動次數	0	1	3	7	15	31

1. 無論 y 爲奇數或偶數，y-1 盤和 2x 盤都移動 H（y-1）次。
2. C（y-1，2x）移動次數＝y-1 的移動次數＋2x 盤的移動次數。
3. 2x 移動一次的次數＝A（x）＝$2^{x+1}-2$；而 2x 盤移動 H（y-1）次，
   故 2x 移動的次數＝（$2^{x+1}-2$）×（$2^{y-1}-1$）
   C（y-1，2x）＝$\underline{(2^{y-1}-1)}$＋（$2^{x+1}-2$）×$\underline{(2^{y-1}-1)}$＝$\underline{(2^{y-1}-1)}$×（$2^{x+1}-1$）

（四）探討 y 爲奇數，不規則雙塔模式 1 的移動規律【如圖 10】

1. 分析 M(x)移動模式，發現 M(x)移動模式可套用雙塔的移動模式找出規律。

【圖 12】M(x)移動模式：將 A 柱與 C 柱上各 x 盤移至 B 柱上



2. M（x）＝$\underline{B(x-1)+1}$＋$\underline{A(x-1)+1}$＋$\underline{A(x-1)}$＝B（x-1）＋A（x-1）× 2＋2
3. 雙塔移動模式中已知
   A（x－1）× 2＝$2^{x+1}-4$
   B（x－1）＝$\dfrac{2^{x+3}-9x-7}{6}$……x 爲奇數；B（x－1）＝$\dfrac{2^{x+3}-9x-8}{6}$……x 爲偶數
4. 若 x 爲奇數，則
   $$M(x)=\frac{2^{x+3}-9x-7}{6}+2^{x+1}-4+2=\frac{2^{x+1}\times 2^2-9x-7}{6}+\frac{2^{x+1}\times 6}{6}-2$$
   $$=\frac{2^{x+1}\times 10-9x-19}{6}=\frac{2^{x+2}\times 5-9x-19}{6}$$
5. 若 x 爲偶數，則　$M(x)=\dfrac{2^{x+3}-9x-8}{6}+2^{x+1}-4+2=\dfrac{2^{x+2}\times 5-9x-20}{6}$

（五）不規則雙塔 D_s（x+y，x）移動盤數計算

1. y 爲奇數，則 D_s（x+y，x）＝M（x）× 2＋C（y-1，2x）× 2＋1

（1）C（y－1，2x）＝（2^{y-1}－1）×（2^{x+1}－1）

C（y－1，2x）×2＝（2^{y}－2）×（2^{x+1}－1）＝2^{x+y+1}－2^{x+2}－2^{y}＋2

（2）x 爲奇數，則 M（x）＝$\dfrac{2^{x+2}\times 5-9x-19}{6}$；M（x）× 2＝$\dfrac{2^{x+2}\times 5-9x-19}{3}$

（3）x 爲偶數，則 M（x）＝$\dfrac{2^{x+2}\times 5-9x-20}{6}$；M（x）× 2＝$\dfrac{2^{x+2}\times 5-9x-20}{3}$

2. x 爲奇數，y 爲奇數，則總移動盤數

$$D_s(x+y，x)=\frac{2^{x+2}\times 5-9x-19}{3}+2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y}+2+1$$

$$=\frac{2^{x+2}\times 5-2^{x+2}\times 3-19+9}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x=\frac{2^{x+2}\times 2-10}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$$

$$=\frac{2^{x+3}-10}{3}+\mathbf{2^{x+y+1}-2^{y}-3x}$$

3. x 爲偶數，y 爲奇數，則總移動盤數

$$D_s(x+y，x)=\frac{2^{x+2}\times 5-9x-20}{3}+2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y}+2+1=\frac{2^{x+3}-11}{3}+\mathbf{2^{x+y+1}-2^{y}-3x}$$

4. y 爲偶數，則 D_s（x+y，x）＝B（x）× 2＋C（y－1，2x）× 2＋1

（1）若 x 爲奇數，B（x）＝$\dfrac{2^{x+4}-9x-17}{6}$，B（x）× 2＝$\dfrac{2^{x+4}-9x-17}{3}$

（2）若 x 爲偶數，B（x）＝$\dfrac{2^{x+4}-9x-16}{6}$，則 B（x）× 2＝$\dfrac{2^{x+4}-9x-16}{3}$

5. 若 x 爲奇數，y 爲偶數，則總移動盤數

$$D_s(x+y，x)=\frac{2^{x+4}-9x-17}{3}+2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y}+2+1$$

$$=\frac{2^{x+2}\times 4-2^{x+2}\times 3-17+9}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x=\frac{2^{x+2}-8}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$$

6. 若 x 爲偶數，y 爲偶數，則總移動盤數

$$D_s(x+y，x)=\frac{2^{x+4}-9x-16}{3}+2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y}+2+1=\frac{2^{x+2}-7}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$$

五、不規則雙塔（大號盤圓盤數相同）最少移動次數探討

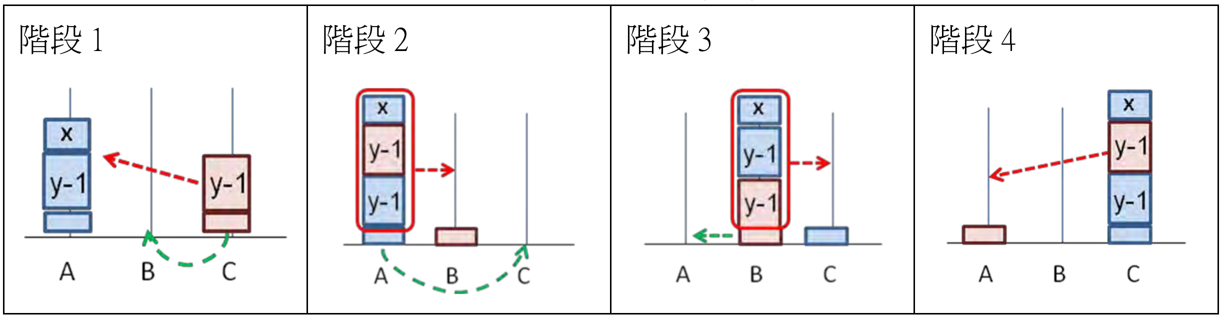
（一）分析大號盤圓盤數相同不規則雙塔移動模式

1. 設不規則雙塔（大號盤圓盤數相同）最少移動次數爲 D_b（x+y，y）；

A 柱盤數爲 x＋y，B 柱盤數爲 y。

2. 探討移動模式

【圖 13】大號盤圓盤數相同不規則雙塔 D_b（x+y，y）移動模式



階段 1：將 x 與 2 個 y-1 盤都集中到 A 柱；將 C 柱底盤移到 B 柱。

階段 2：將 x 盤與 2 個 y-1 盤都移到中間(B 柱)。A 柱的底盤移到 C 柱。

階段 3：將 x 盤與 2 個 y-1 盤都移到 A 柱。B 柱的底盤移到 C 柱。

階段 4：將 x 盤與 2 個 y-1 盤分別置換至 A 柱與 C 柱，完成互換。

（二）分析各階段的移動模式與次數

1. 將階段 1 與階段 4， x 移動的次數設爲 E_1（x，y-1）；
   階段 2 與階段 3，x 移動的次數設爲 E_2（x，y-1）

【表 9】不規則雙塔（大號盤圓盤數相同）移動次數分析

階段 1	階段 2	階段 3	階段 4
B(y-1)＋E_1（x，y-1）＋1	A(y-1)＋E_2（x，y-1）＋1	A(y-1)＋E_2（x，y-1）＋1	B(y-1)＋E_1（x，y-1）

2. $D(x+y, y) = \overbrace{\boxed{B(y-1)\times 2 + A(y-1)\times 2 + 3}}^{\text{雙塔移動次數}} + E_1(x, y-1)\times 2 + E_2(x, y-1)\times 2$

$= D(y) + E_1(x, y-1)\times 2 + E_2(x, y-1)\times 2$

3. 探討第 E_1（x，y-1）的規律

（1）將 E_1（x，y-1）x 的移動視爲 1 個單位，設 t_1（y）爲 E_1（x，y-1）的移動次數

【表 10】不規則雙塔第 1 階段與第 4 階段移動模式次數統計

y	2	3	4	5	6
t_1（y）	2	4	10	20	42

$t_1(2) = 2 = 2^1$

$t_1(3) = 4 = 2^2$

$t_1(4) = 10 = 2 + 8 = 2^1 + 2^3$

$t_1(5) = 20 = 4 + 16 = 2^2 + 2^4$

$t_1(6) = 42 = 2 + 8 + 32 = 2^1 + 2^3 + 2^5$

……

若 y 為奇數則 t_1（y）$=2^2+2^4+\ldots\ldots+2^{y-1}$；

$$t_1(y)=\frac{2^2(2^{2\times\frac{y-1}{2}}-1)}{2^2-1}=\frac{2^2(2^{y-1}-1)}{2^2-1}=\frac{2^{y+1}-4}{3}$$

若 y 為偶數，則 t_1（y）$=2^1+2^3+\ldots\ldots+2^{y-1}$；

$$t_1(y)=\frac{2^1(2^{2\times\frac{y}{2}}-1)}{2^2-1}=\frac{2\ (2^{y}-1)}{2^2-1}=\frac{2^{y+1}-2}{3}$$

（2）E_1（x，y-1）x 移動一次的次數為 $H(x)=2^x-1$；故 E_1（x，y-1）＝H（x）× t_1（y）

若 y 為奇數，則 E_1（x，y-1）＝（2^x-1）×$\frac{2^{y+1}-4}{3}=\frac{2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y+1}+4}{3}$

若 y 為偶數，則 E_1（x，y-1）＝（2^x-1）×$\frac{2^{y+1}-2}{3}=\frac{2^{x+y+1}-2^{x+1}-2^{y+1}+2}{3}$

4. 探討 E_2（x，y-1）的規律

E_2(x，y-1)移動視為一個單位，設 t_2（y）為第 2. 3 階段 E_2(x，y-1)移動的次數

【表 11】不規則雙塔第 2 階段與第 3 階段移動模式次數統計

y	1	2	3	4	5	6
$t_2(y)$	1	2	4	8	16	32

t_2（1）$=1=2^0$

t_2（2）$=2=2^1$

t_2（3）$=4=2^2$

……

t_2（y）$=2^{y-1}$

E_2（x，y-1）＝H（x）× t_2（y）＝（2^x-1）× $2^{y-1}=\mathbf{2^{x+y-1}-2^{y-1}}$

（三）不規則雙塔 D_b（x+y，y）最少移動次數計算

1. D_b（x+y，y）＝E_1（x，y-1））× 2＋E_2（x，y-1）× 2 ＋D(y)
2. E_2（x，y-1）× 2＝$\mathbf{2^{x+y}-2^{y}}$

3. 若 y 為奇數，則 D（y）＝$\frac{2^{y+1}\times 7\text{-}10}{3}$－3y ……(雙塔公式)

E_1（x，y-1）× 2＝$\frac{2^{x+y+1}-2^{x+2}-2^{y+1}+4}{3}$× 2＝$\frac{2^{x+y+2}-2^{x+3}-2^{y+2}+8}{3}$

$$D_b（x+y，y）=\frac{2^{x+y+2}-2^{x+3}-2^{y+2}+8}{3}+2^{x+y}-2^{y}+\frac{2^{y+1}\times 7-10}{3}-3y$$

$$=\frac{2^{x+y}\times 4+2^{x+y}\times 3-2^{x+3}-2^{y}\times 4-2^{y}\times 3+2^{y}\times 14+8-10}{3}-3y$$

$$=\frac{2^{x+y}\times 7-2^{x+3}+2^{y}\times 7-2}{3}-3y$$

4. 若 y 爲偶數，則 $D（y）=\frac{2^{y+1}\times 7-11}{3}-3y$ …….(雙塔公式)

$$E_1（x，y-1）\times 2=\frac{2^{x+y+1}-2^{x+1}-2^{y+1}+2}{3}\times 2=\frac{2^{x+y+2}-2^{x+2}-2^{y+2}+4}{3}$$

$$D_b（x+y，y）=\frac{2^{x+y+2}-2^{x+2}-2^{y+2}+4}{3}+2^{x+y}-2^{y}+\frac{2^{y+1}\times 7-11}{3}-3y$$

$$=\frac{2^{x+y}\times 7-2^{x+2}+2^{y}\times 7-7}{3}-3y$$

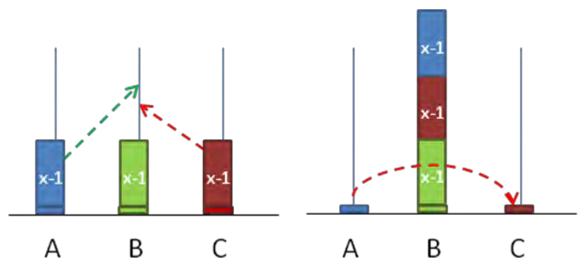
六、三塔的圓盤數與最小移動次數的關係

（一）三塔移動模式分析

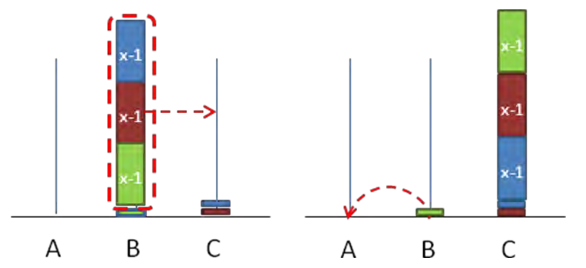
1. 三塔移動模式可分成 6 個階段 3 個模式

【圖 14】三塔 6 階段移動模式

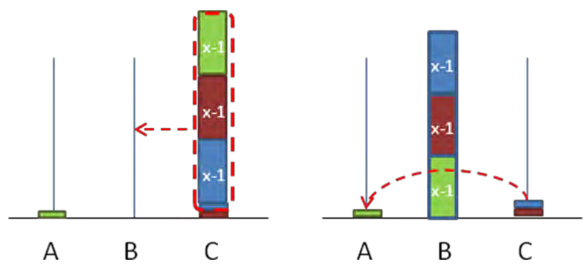
（1）將 A、C 柱上 x－1 盤移到 B 柱上，再將 A 柱上的底盤 a_x 移到 C 柱。



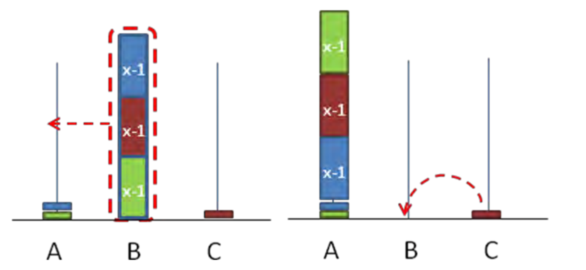
（2）將 B 柱上的 3（x－1）盤移到 C 柱，再將 B 柱上的底盤 b_x 移到 A 柱。

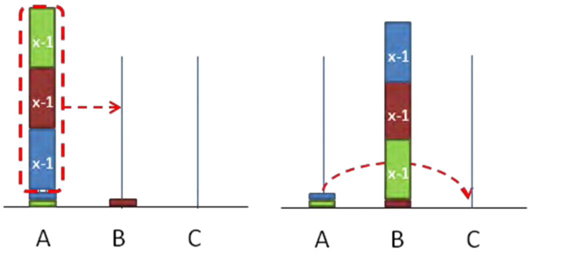
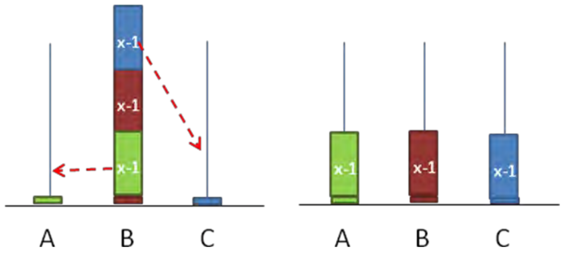


（3）將 C 柱上的 3（x－1）盤移到 B 柱，再將 C 柱上的底盤 a_x 移到 A 柱。



（4）將 B 柱上的 3（x－1）盤移到 A 柱，再將 C 柱上的底盤 c_x 移到 B 柱。



（5）將 A 柱上的 3（x－1）盤移到 B 柱，再將 A 柱上的底盤 a_x 移到 C 柱。	（6）將 B 柱上的 c（x－1）盤移到 C 柱，b（x－1）盤移到 A 柱，c（x－1）盤移到 B 柱。
	

2. 三塔六階段移動次數統計

【表 12】三塔不同盤數六階段移動次數（底盤移動以紅字表示）

盤數＼階段	1	2	3	4	5	6	總計
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0	5
2	2**(+1)**	3**(+1)**	3**(+1)**	3**(+1)**	3**(+1)**	4	23（18**+5**）
3	10**(+1)**	9**(+1)**	9**(+1)**	9**(+1)**	9**(+1)**	15	66（61**+5**）
4	30**(+1)**	21**(+1)**	21**(+1)**	21**(+1)**	21**(+1)**	42	161（156**+5**）
5	74**(+1)**	45**(+1)**	45**(+1)**	45**(+1)**	45**(+1)**	98	357（352**+5**）
6	166**(+1)**	93**(+1)**	93**(+1)**	93**(+1)**	93**(+1)**	214	757（752**+5**）
7	354**(+1)**	189**(+1)**	189**(+1)**	189**(+1)**	189**(+1)**	450	1565（1560**+5**）

3. 三塔移動模式與移動次數統計可發現三塔的移動模式可分爲三種：

（1）階段 1：將 A、C 柱上 x －1 盤移到 B 柱上，再移動底盤。

（2）階段 2~階段 5：移動 3（x－1）盤，再移動底盤。

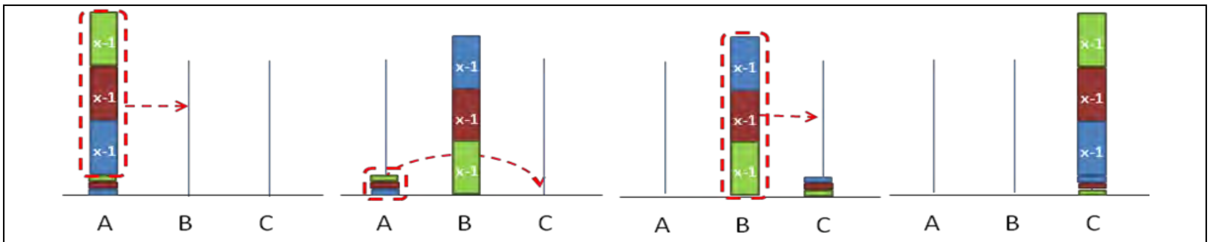
（3）階段 6：將集中在 B 柱的 3（x－1）盤，分別移往底盤處。

4. 三塔移動模式較雙塔複雜，集中 3（x－1）盤與分散 3（x－1）盤並不相等，也就是階段六比階段一複雜。

（三）三塔階段 2~5 移動規律探討

1. 設三塔第 2~5 階段移動模式爲 Q（x）。

【圖 15】Q（x）移動模式



【表 13】三塔第 2~5 階段 Q（x）模式與河內塔 H（x）移動次數比較

圓盤數(x)	1	2	3	4	5	6
Q（x）	3	9	21	45	93	189
H（x）	1	3	7	15	31	61

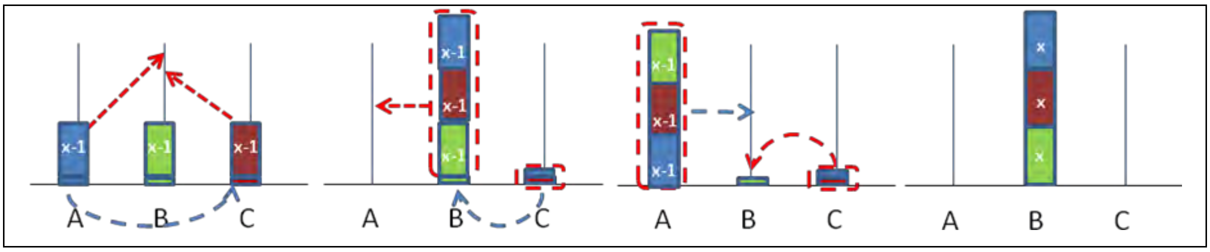
2. 由移動模式與移動次數可以看出 Q（x）＝H（x）× 3＝（2^x－1）×3＝2^x×3－3

3. 三塔第 2~5 階段實際移動盤數爲 x-1 盤，故 Q（x-1）＝2^{x-1}×3－3

（四）三塔階段 1 移動規律探討

1. 設階段 1 將 x 盤集中到一柱的移動模式的移動盤數爲 P（x）

【圖 16】P（x）移動模式



【表 14】P（x）移動次數統計（底盤移動另計）

圓盤數(x)	1	2	3	4	5	6
最少移動次數 P（x）	2	10	30	74	166	354

2. P（x）與 B（x）一樣包含同號盤堆疊，遞迴關係較複雜，我們無法由移動模式與次數統計歸納出 P（x）的移動次數的規律故細分 P（x）各圓盤移動次數統計

【表 15】：P（x）各圓盤移動次數統計；x 代表 3（x）盤一起移動次數；

盤號 盤數	1	2	3	4	5	6	合計
1	2						2
2	2＋△2	2					10
3	2＋△6	2＋△2	2				30
4	2＋△14	2＋△6	2＋△2	2			74
5	2＋△30	2＋△14	2＋△6	2＋△2	2		166

3. 設 P△（x）爲△x移動次數，探討 P△（x）移動次數規律

P△（2）＝2＝2^1

P△（3）＝6＝2^1+2^2

P△（4）＝14＝$2^1+2^2+2^3$

……

$$P_{\triangle}(x) = 2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{x-1} = \frac{2(2^{x-1}-1)}{2-1} = 2^x-2$$

4. 探討第一盤的移動次數 $P_1(x-1)$ 的規律

$$P_1(x) = 2+P_{\triangle}(x)\times 3 = 2+(2^x-2)\times 3 = 2+2^x\times 3-6 = 2^x\times 3-4$$

5.階段一 P（x）移動規律探討

$$P(x) = P_1(x)+P_1(x-1)+P_1(x-2)+\cdots\cdots+P_1(2)+P_1(1)$$

$$P(x) = \underline{2^x\times 3}-4+\underline{2^{x-1}\times 3}-4+\underline{2^{x-2}\times 3}-4+\cdots\cdots+\underline{2^2\times 3}-4+2$$

$$= (2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+\cdots\cdots+2^2)\times 3-(x-1)\times 4+2$$

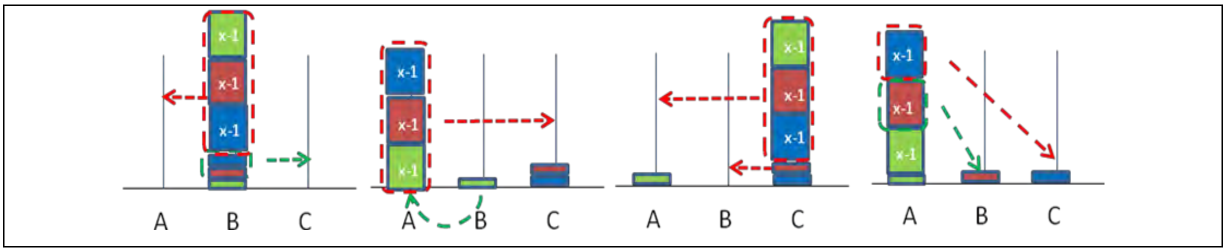
$$= 2^2(2^{x-1}-1)\times 3-4x+4+2 = 2^{x+1}\times 3-12-4x+6 = 2^{x+1}\times 3-4x-6$$

6. 三塔第 1 階段實際移動盤數爲 x-1 盤，故 $P(x-1) = 2^x\times 3-4x-2$

（五）三塔階段 6 移動規律探討

1.將階段 6 集中爲一柱的盤子歸位到 3 柱的最少移動次數設爲 R（x）。

【圖 17】R（x）移動模式



【表 16】：R（x）最少移動次數統計

圓盤數(x)	1	2	3	4	5	6
最少移動次數 R（x）	4	15	42	98	214	450

2. 無法由移動次數及模式歸納出 R（x）的移動次數的規律

3. 細分 R（x）各盤數移動次數統計

【表 17】：R（x）各圓盤移動次數統計（△x代表三盤一起移動次數）

盤號＼盤數	1	2	3	4	5	6	合計
1	4						4
2	△3+2	4					15
3	△8+2	△3+3	4				42
4	△18+2	△8+2	△3+3	4			98
5	△38+2	△18+2	△8+2	△3+3	4		214
6	△78+2	△38+2	△18+2	△8+2	△3+3	4	450

4. 探討 R△（x）移動次數規律

R△（x）＝R△（x－1）x2＋2

R△（2）＝3＝1＋2

R△（3）＝8＝3x2＋2＝（1＋2）x2＋2＝2＋$\underline{2^2+2}$

R△（4）＝18＝8x2＋2＝（2＋2^2＋2）x2＋2＝2^2＋$\underline{2^3+2^2+2}$

R△（5）＝38＝18x2＋2＝（$2^2+2^3+2^2+2$）x2＋2＝2^3＋$\underline{2^4+2^3+2^2+2}$

R△（6）＝78＝38x2＋2＝（$2^3+2^4+2^3+2^2+2$）x2＋2＝2^4＋$\underline{2^5+2^4+2^3+2^2+2}$

……

R△（x）＝$2^{x-2}+2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots\ldots+2^2+2=2^{x-2}+2(2^{x-1}-1)=2^{x-2}+2^x-2$

$=2^{x-2}+2^{x-2}\times2^2-2=2^{x-2}\times5-2$

5. 探討 R_1（x）移動次數規律

R_1（x）＝R△（x）x3＋2＝（$2^{x-2}\times5-2$）x3＋2＝$2^{x-2}\times15-6+2$

R_1（x）＝$2^{x-2}\times15-4$

6. 探討 R（x）移動次數規律

R（x）＝R_1（x）＋R_1（x－1）＋……＋R_1（2）＋R_1（1）$\underline{\mathbf{+1}}$…..R(2)少 1

R（x）＝$\underline{2^{x-2}\times15-4}+\underline{2^{x-3}\times15-4}+\underline{2^{x-4}\times15-4}+\ldots\ldots+\underline{2^0\times15-4}+4+1$

R（x）＝（$\underline{2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}+\cdots\cdots+2^0}$）× 15－（x－1）× 4＋5

＝（$\underline{2^{x-1}-1}$）× 15－4x＋4＋5＝$2^{x-1}\times15-15-4x+9=2^{x-1}\times15-4x-6$

7. 三塔第 6 階段實際移動盤數爲 x-1 盤，R（x-1）＝$2^{x-2}\times15-4x-2$

（六）三塔移動次數計算

W（x）＝P（x-1）＋Q（x-1）x4＋R（x-1）$\underline{+5}$（5 次底盤移動）

W（x）＝$2^x\times3-4x-2+(2^{x-1}\times3-3)\times4+2^{x-2}\times15-4x-2+5$

$=2^x\times3-4x-2+2^{x-1}\times12-12+2^{x-2}\times15-4x-2+5$

$=2^x\times3+2^{x-1}\times12+2^{x-2}\times15-4x-4x-2-12-2+5$（將 2 的次方數整合爲 2^{x-2}）

$=2^{x-2}\times2^2\times3+2^{x-2}\times12\times2+2^{x-2}\times15-8x-11=2^{x-2}\times12+2^{x-2}\times24+2^{x-2}\times15-8x-11$

$=2^{x-2}\times(12+24+15)-8x-11=2^{x-2}\times51-8x-11$

柒、研究結果

一、河內塔：

河內塔最少移動次數 H（x）＝2^x-1（x 代表總圓盤數）

二、雙塔：

雙塔的最佳移動模式爲四階段 2 模式（圖 6），最少移動次數 D（x）因盤數的奇、偶而

不同。

（一）若總盤數 x 爲奇數，則總移動次數 D（x）$=\dfrac{2^{x+1}\times 7-10}{3}-3x$

（二）若總盤數 x 爲偶數，則總移動次數 D（x）$=\dfrac{2^{x+1}\times 7-11}{3}-3x$

三、不規則圓盤數雙塔（小號盤盤數相同）

小號盤盤數相同的不規則雙塔最佳移動模式爲四階段 2 模式（圖 10），最少移動次數 D_s（x＋y，x）因盤數的奇、偶而產生了四種不同的一般式。

（一）若 x 爲奇數，y 爲奇數，則 D_s（x+y，x）$=\dfrac{2^{x+3}-10}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$

（二）若 x 爲偶數，y 爲奇數，則 D_s（x+y，x）$=\dfrac{2^{x+3}-11}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$

（三）若 x 爲奇數，y 爲偶數，則 D_s（x+y，x）$=\dfrac{2^{x+2}-8}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$

（四）若 x 爲偶數，y 爲偶數，則 D_s（x+y，x）$=\dfrac{2^{x+2}-7}{3}+2^{x+y+1}-2^{y}-3x$

四、不規則圓盤數雙塔（大號盤盤數相同）

大號盤盤數相同的不規則雙塔最佳移動模式爲四階段 2 模式（圖 11），最少移動次數 D_b（x+y，y）因盤數的奇、偶而產生了兩種不同的一般式。

（一）若 y 爲奇數，則 D_b（x+y，y）$=\dfrac{2^{x+y}\times 7-2^{x+3}+2^{y}\times 7-2}{3}-3y$

（二）若 y 爲偶數，則 D_b（x+y，y）$=\dfrac{2^{x+y}\times 7-2^{x+2}+2^{y}\times 7-7}{3}-3y$

五、三塔最佳移動模式

三塔的最佳移動模式爲六階段 3 模式（圖 14），最小移動次數 W(x)因盤數不同而有 3 種方式

（一）$W(1)=5$

（二）X=2 or 3，$W(x)=2^{x-2}\times 51-8x-12$

（三）若 $x\geqq 4$，則 $W(x)=2^{x-2}\times 51-8x-11$

捌、討論

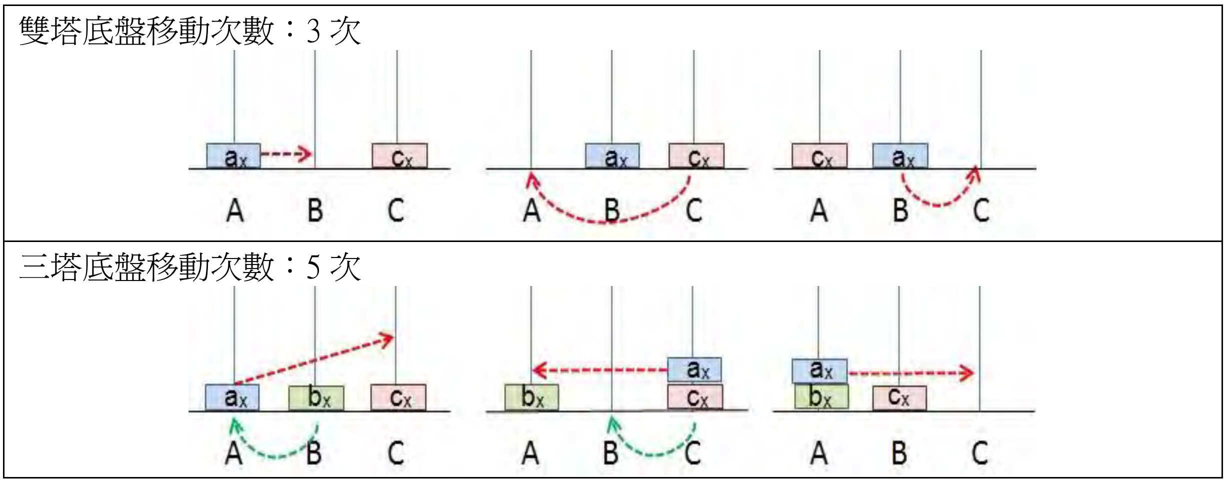
一、雙塔與三塔 VS 單塔

河內塔的目標柱一開始是空的，而雙塔和三塔的目標柱都被另一塔的盤子堆疊著，所以若要雙塔互換，就需掌握以下幾個技巧。

（一）底盤讓位：

河內塔的移動只會產生小號盤讓位問題，而雙塔和三塔，因爲目標柱被其他的塔佔住，所以就需擇一底盤讓位，才能讓所有的底盤順利就位。

【圖 18】雙塔與三塔底盤讓位移動

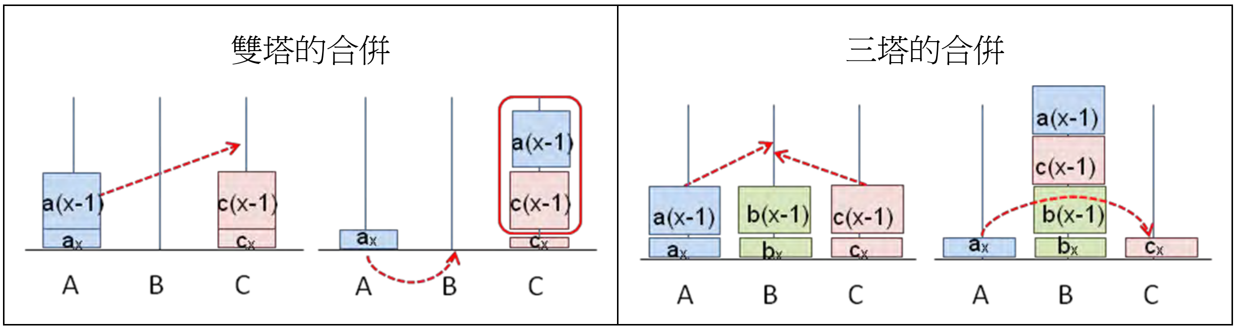


河內塔底盤只要移動 1 次，就能到目標柱，雙塔底盤需移動 3 次，三塔底盤需移動 5 次，才能分別抵達目標柱。

（二）合併爲一柱：

雙塔爲了讓底盤 a_x 到達 B 柱，比 a_x 小的 a(x-1)盤和 c(x-1)盤都需移往 C 柱。合併爲一柱的過程中，同號盤就可以疊放在一起，減少因讓位而增加遞迴的次數。

【圖 19】雙塔與三塔的合併



合併爲一柱的雙塔與三塔其實只要掌握小號盤先移開→大號盤就位(到目標柱)→小號盤再歸位(到大號盤上方)，雙塔與三塔的移動就如河內塔般的簡單。

二、雙塔分奇、偶的一般式

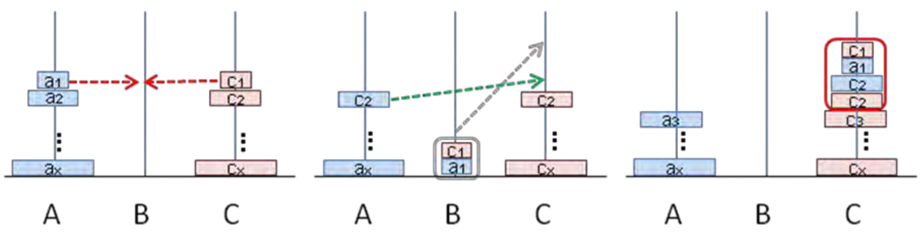
影響雙塔一般式分奇、偶的關鍵主要在於 B(x-1)同號盤堆疊模式也因奇數和偶數有不一樣的堆疊方式。

（一）總盤數 x 若爲奇數，則奇數號盤 1. 3. 5. ……、x-2 都要移動 2 個盤子到 B 柱（移動次數 2），而偶數號盤則將 A 柱的同號盤移往 C 柱，就能使同號盤堆疊在一起（移動次數 1）。

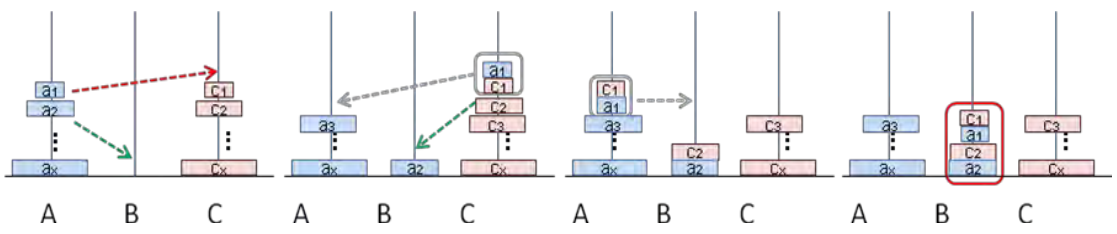
（二）若總盤數爲偶數，則奇數盤只要移動 1 次，偶數盤則要移動 2 次，才能完成同號盤堆疊模式。

【圖 20】雙塔 1 號盤與 2 號盤堆疊情形（→代表 1 號盤的堆疊；→代表 2 號盤的堆疊）

總盤數爲奇數：完成 1. 2 號盤堆疊共需 5 次



總盤數爲偶數：完成 1. 2 號盤堆疊共需 7 次



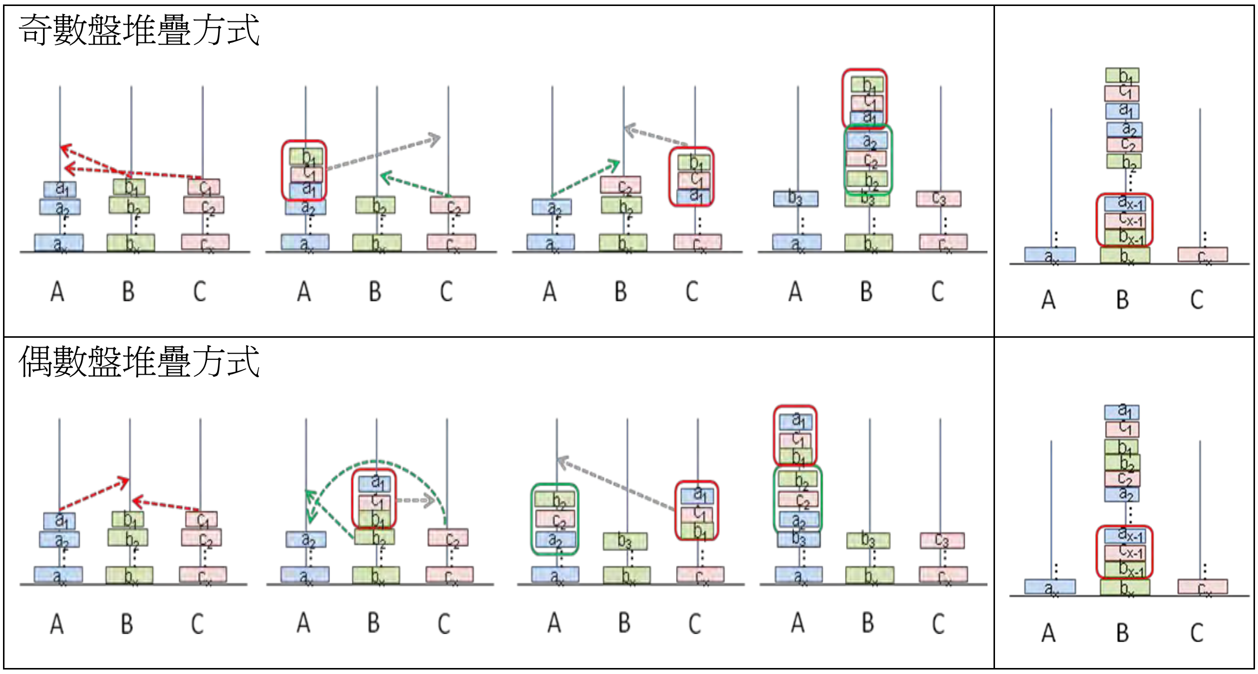
奇數盤和偶數盤堆疊次數不同，所以雙塔 D(x)的一般式的也因總盤數爲奇數和偶數有不同的一般式。

三、三塔的堆疊與歸位模式探討

（一）堆疊模式 P(x)探討

爲了讓階段六的各盤能作最有效的歸位移動，階段一 P(x)的同號盤堆疊順序就很重要。依據我們的底盤讓位模式，a_x 先讓位給 b_x 與 c_x 就位，同號堆疊的原則由下而上就需掌握 a→c→b 或 b→c→a（原因在接下來的歸位探討再加說明）。

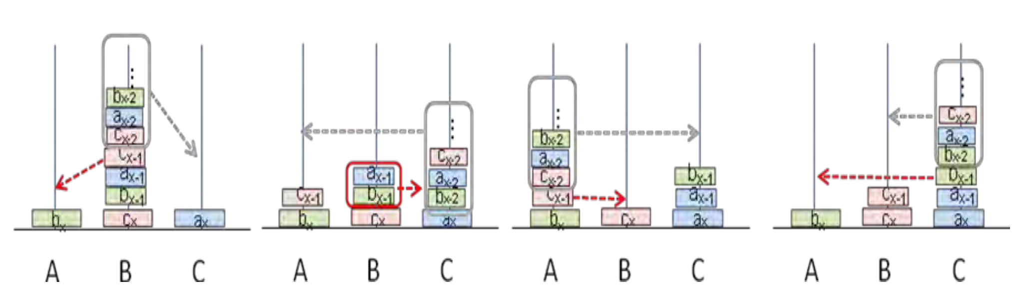
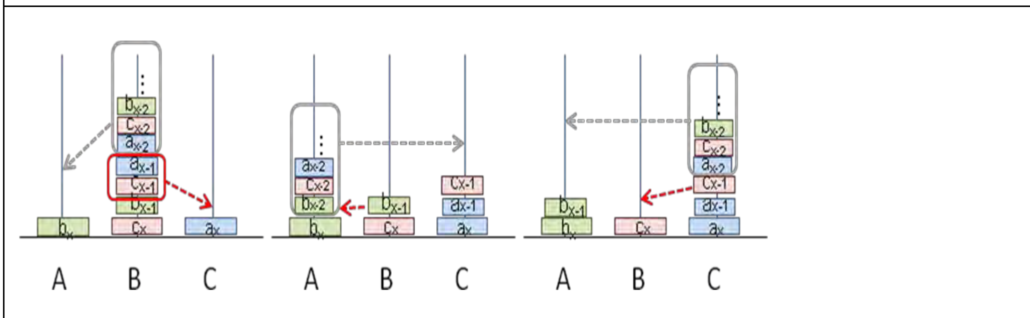
【圖 21】奇數盤與偶數盤堆疊方式



兩種堆疊方式都只要移動 2 次，就能使同號盤堆疊在一起，所以三塔一般式沒有奇、偶數之分。

（二）R(x)模式 x-1 盤歸位探討：

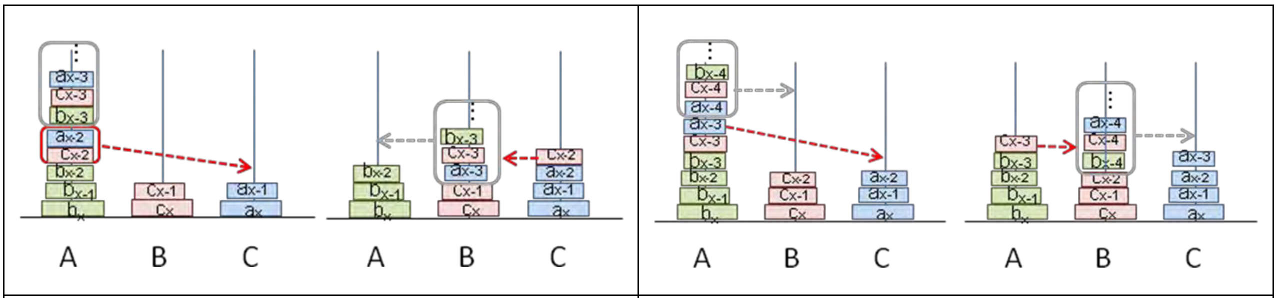
【圖 22】x-1 號盤不同堆疊順序與歸位次數比較

	盤 號 順 序 b→a →c 歸位次數為 5 次
	盤 號 順 序 b→c→a 歸位次數為 4 次

堆疊的順序會影響到歸位移動的次數，以我們的底盤移動方式就需配合 a→c→b 或 b→c→a 的堆疊方式，才能移出最少次數。

（三）R(x)模式其他不同盤號歸位探討：

【圖 23】x-2 號與其它盤歸位方式



x-2 號盤歸位次數為 3 次	x-3 號盤歸位次數為 2 次

1、由實際的搬盤活動，我們發現總盤數為 x 的狀況，歸位的次數如下：

【表 18】盤號與歸位所需最少移動次數紀錄

盤數	x	x-1	x-2	≦ x-3
移動次數	5	4	3	2

2. 總盤數為 3 盤的 x-2 盤（1 號盤），因為不需考慮其上的盤子，所以其歸位的次數亦為 2 次，因此也影響了三塔最少移動次數的一般式 $W(x)=2^{x-2}\times 51-8x-11$ 僅適用於盤數>3 的狀況。

3. 若總盤數為 2 或 3 則一般式需修正為 $W(x)=2^{x-2}\times 51-8x-12$

玖、結論

一、在這搬盤遊戲的日子裡，我們一共找出了五種三柱搬盤遊戲的最佳移動模式與推算最少移動次數的一般式。

二、在推算搬盤遊戲移動次數的一般式時，我們借助了等比級數公式、乘法分配律、數的分解與合成來簡化我們的一般式。

三、階段化和模式化幫助我們在進行相關的新遊戲時，有現成的模組元件可套用，而達到事半功倍的效果。

四、未來的應用與建議

（一）在雙塔的研究，我們曾深入探討不同盤數的雙塔互換，但因為時間的關係，我們沒繼續探討不同盤數三塔的輪換，可以提供後人繼續探討。

（二）我們建議未來有興趣研究不規則三塔輪換的人，可以應用我們找出的 3 個三塔基本模組--P（x）、Q（x）與 R（x），去找出更多不規則三塔的一般式。

拾、參考資料

一、國立台灣科學教育館歷屆作品：http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821

二、康軒文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第 9 冊第 2 單元整數四則計算。新北市：康軒。

三、康軒文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第 11 冊第 5 單元數量關係。新北市：康軒。

四、康軒文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第 12 冊第 5 單元列式與解題。新北市：康軒。

五、康軒文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第 12 冊第 8 單元簡化問題。新北市：康軒。

【評語】080406

1. 本作品將河內塔的推導，以雙塔、三塔來探究其最佳移動模式的技巧及規律，相當深入並有多元巧思，富數學性及趣味性。

2. 對於河內塔玩出新心得邏輯推演，具可看性。