

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080405

絲絲入扣

—從縫扣子策略論空間中的一筆畫路徑

學校名稱：彰化縣員林鎮員林國民小學

作者： 小四 蕭頌叡 小四 謝汶融 小四 黃仁甫 小四 闕珮菁	指導老師： 陳秀玫 曹紫璟
---	---------------------

關鍵詞：空間一筆畫路徑、扣子、樹狀圖分析

絲絲入扣－從縫扣子策略論空間中的一筆畫路徑

摘要

從縫扣子中發展出空間中的一筆畫路徑，我們稱之為：「縫鈕扣策略」。鈕扣有兩個面，縫線（路徑）必須在空間中沿不同平面上下交錯前進才能完成。在線段不交叉的情況下，使用樹狀圖分析，得知不同鈕扣「縫鈕扣策略」：三孔扣有 4 條、四孔扣有 4 條，五孔扣及六孔扣各有 6 條；四孔扣中，若是允許線段跨越對角線，在 28 種組合中，扣除矛盾組合後，正、反兩面為：「二」+「X」、「二」+「11」、「Z」+「Z」組合，各有 1 條，「Z」+「H」組合有 3 條，「口」+「口」與「X」+「X」組合，各有 4 條，「X」+「X」組合與「口」+「X」組合，各有 16 條，「口」+「口」組合有 43 條，「X」+「X」組合，以電腦計算得 660 條縫鈕扣策略。

壹、研究動機

班上同學下課時在操場上你追我逐，弄得一身狼狽回到教室，有時候還把制服弄得髒兮兮、破破爛爛的，扣子東掉一個西丟一個，總是麻煩愛心媽媽幫忙縫上扣子，否則衣不蔽體的，羞死人啦！當大夥兒被迫乖乖地坐在椅子上等著媽媽幫忙縫上扣子，對於那穿針引線的過程，總能讓人靜下心來！

「咦！」夥伴若有所悟的發表他的新發現，

「縫扣子是一條線到底耶！」

「廢話！當然是一線到底呀！難不成分好幾次縫？」

「不不！我的意思是縫扣子跟一筆畫路徑很相似耶！」

的確，縫扣子的過程在正反兩面交替縫紉，縫線在孔洞間穿梭，視為一筆畫路徑，不同的是，正反兩面由線段構成的路徑比平面複雜多了。扣子正、反兩面完成對稱圖形後，是否具有可行的一筆畫路徑呢？

貳、研究目的

- 一、透過空間中的「變形歐拉圈」，尋找不同孔扣最佳的「縫鈕扣策略」
- 二、使用樹狀圖分析縫鈕扣策略
- 三、使用電腦分析縫鈕扣策略

參、研究材料

紙、筆、電腦、線、扣子、珍珠板、圓規

肆、研究過程與方法

一、文獻探討：平面上的一筆畫路徑

給定一個圖形，要以一筆畫的方式將此圖描繪完成，此圖形中，每一條線勢必定都要經過，線不可重複，但是點可以重複(圖 4-1)。若是此圖形中不但滿足前面所述，且起點與終點相同，則此圖形稱為「歐拉圖」或是「歐拉圈」(徐力行, 2003)。(圖 4-2)

另外一種一筆畫問題，給定一個圖形中(圖 4-3)，能夠找到有一個路徑過所有的點，但是點不可以重複經過，而最後再回到原點，構成一個圈型，稱為「漢米頓圈」(圖 4-4)。

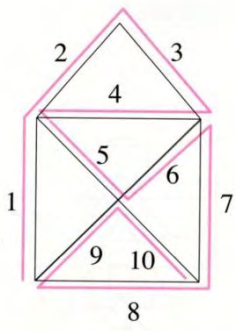


圖 4-1

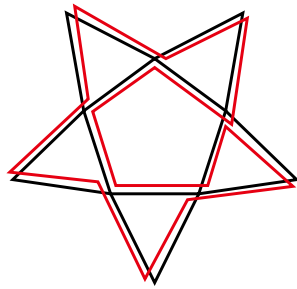


圖 4-2、歐拉圈

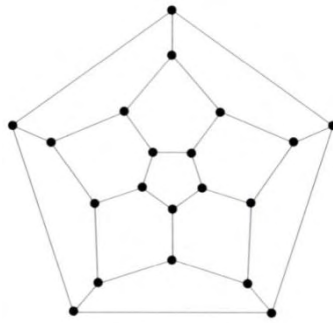


圖 4-3

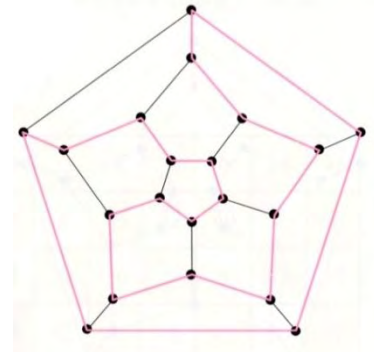


圖 4-4、漢米頓圈

若是在圖形中(圖 4-5)，不指定起點與終點須在同一點上，找到有一個路徑通過所有的點，但是點不可以重複經過，這可以視為漢米頓圈的變形，稱之為「漢米頓路徑」(圖 4-6)。

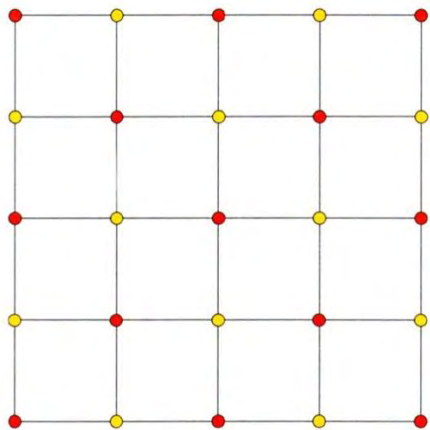


圖 4-5

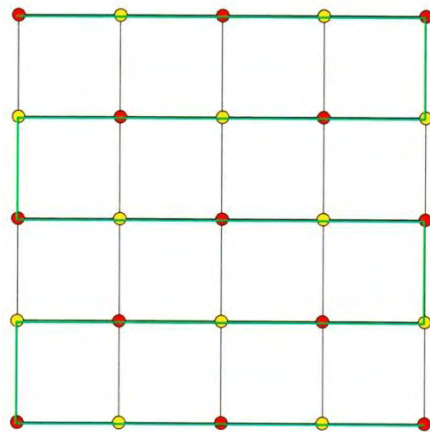


圖 4-6、漢米頓路徑，起點與終點不同

二、縫鈕扣的策略：一筆畫路徑的空間變形

縫線穿過孔洞將扣子固定在布料上，是為**連續縫線**。常見有孔洞可縫的扣子多為**二孔**以及**四孔**（圖 4-7）。這兩種孔扣在縫紉完成時，在外側呈現的縫線線段多為對稱圖形，視覺上較為美觀（圖 4-8）。若將孔扣的孔洞視為平面上的**點**，縫線視為所經過的**路徑**，則以一連續線段在點的上下兩面來回穿梭，最後回到起點，形成上下兩側具有特定的圖形，亦即空間上的一筆畫路徑。我們把這種空間中的一筆畫路徑稱為：「**縫鈕扣策略**」，比較「**縫鈕扣策略**」與平面上**一筆畫路徑**（歐拉圈），我們可以發現**兩種路徑存在著差異**：

- （一） 鈕扣存在著兩個面，因此路徑經過點後必須沿著不同平面繼續前進。以圖 4-9 中的四孔扣為例，平面上經過 A、B、C、D 的一筆畫路徑，只需連結 A→B→C→D 即可完成，但**縫鈕扣時，縫線（路徑）必須在空間中上下交錯前進才能完成**，意即 A→B 路徑走上面，而 B→C 時路徑必須穿到下層 B'，才能繼續走到 C'，否則無法固定扣子（George,2011）。
- （二） 平面一筆畫的歐拉圈中，路徑不可跨越、重複，但尋找鈕扣經空間中上下兩面的一筆畫路徑時，允許路徑跨越，而因路徑跨越的關係，會創造出新的交點，如圖 4-10 所示，在鈕扣的上下兩面因路徑的跨越出現了 P、Q 兩點，這與一筆畫的歐拉圈不同。



圖 4-7、各種形式的扣子，取自：
http://baby.online.sh.cn/content/2010-05/05/content_3468784.htm

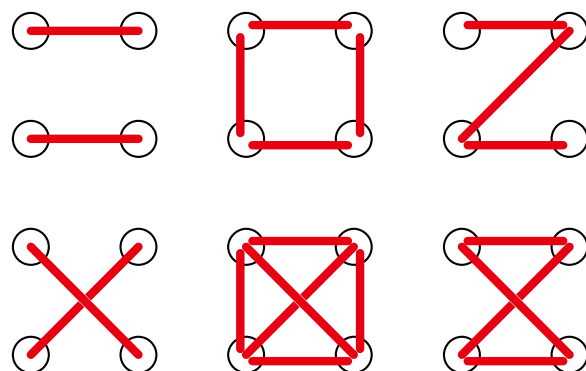


圖 4-8、四孔扣不同縫紉方式外側的結果呈現

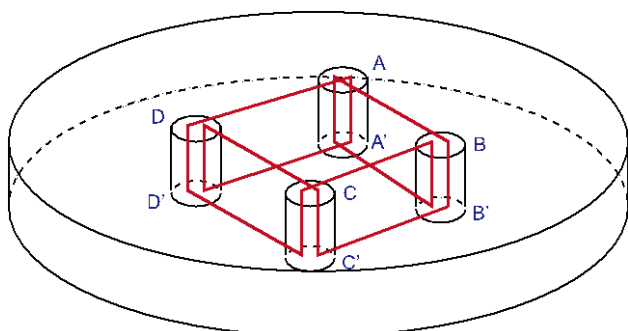


圖 4-9、四孔扣的一筆畫路徑

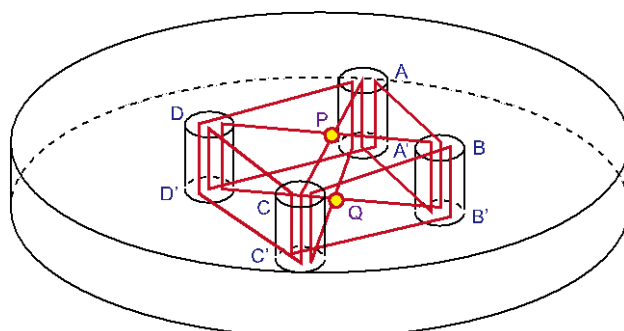


圖 4-10、縫扣子的路徑創造出新的交點

三、縫鈕扣策略的找尋方法：

縫鈕扣通常是一線到底，所經縫線必為一筆畫路徑；若縫扣要兼具美觀，必須找到空間中的路徑，可以造成縫扣正面上的對稱圖形。以三孔扣為例，**最短且對稱的縫扣路徑**為：A、B、C 三孔洞間，上下兩層兩兩孔洞各經過一次，意即：A、B、C 任兩點在扣子正反面以線段各連接一次。根據縫扣的孔洞數及線段呈現圖形的複雜程度，我們可以使用**樹狀圖分析**找出最短且對稱的縫扣路徑：

在三孔扣中，**最短且對稱的縫扣路徑**可由樹狀圖找到可能的答案。如從三孔扣中的 A 點（孔洞）出發，則縫線可選擇 B 或 C 點前進，從 B 出發可選擇 A 或 C.....，**過程中路徑經過任一點皆為兩次**。

本組在尋找路徑時，將圖形**旋轉與鏡射視為同一路徑**：**旋轉**是指由 A 出發所找到的路徑與從 B、C 出發找到的路徑類型相同；從 A 出發，回到 A 的路徑中，**選擇 A→B 找出的路徑，與從 A→C 完成的路徑為順序上的鏡射路徑**。另有 A→B 路徑開始走上方或是走下方的**空間上鏡射路徑**。

在樹狀圖分析所有路徑過程中，我們必須將**矛盾路徑**剔除，所謂的矛盾路徑指的是：在樹狀圖中不得出現 A→B→A→B 或是 B→C→B→C 以及 C→A→C→A 三種情況，因為這三種情況會造成某兩點間的上層或下層路徑經過兩回，與原要求兩點間上、下層各經過一次的最短一筆畫路徑矛盾。

從 A 出發最後再回到 A 點，共有七層樹狀圖，可找出四條路徑 ABACBCA、ABCACBA、ABCABCA、ABCBACA（圖 4-11）。

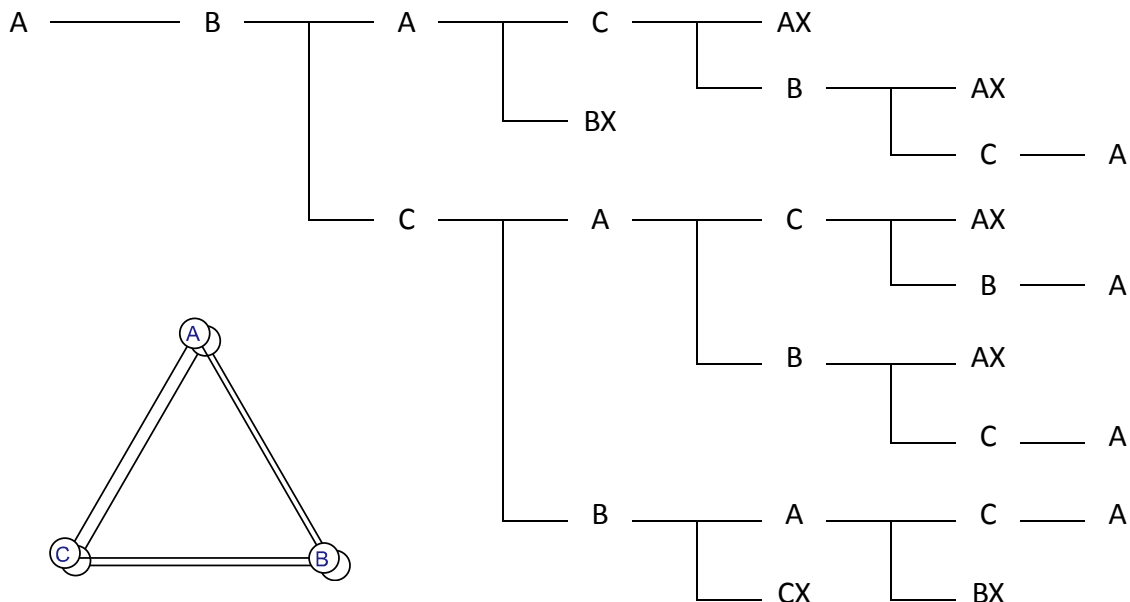


圖 4-11、三孔扣縫扣策略樹狀分析圖，樹狀圖中出現不可繼續的路徑時以 X 表示終結路徑

四、正、反面為對稱圖形的四孔扣縫鈕扣策略

四個點以線段相連結的對稱圖形中，有對角線存在，因此在縫扣策略中，在正面或背面產生的對稱圖形有以下幾種（表 4-1），單以平面圖形來看，表 4-1-a、d、e 無法一筆畫無完成，但是透過縫鈕扣策略，一筆畫路徑穿越正反兩面，有些圖形可在單面呈現。

表 4-1、四個點以線段相連結的對稱圖形，共 7 種

對稱	線對稱				點對稱		
圖形							
線段數	2	4	4	2	6	3	5
線段奇偶	偶	偶	偶	偶	偶	奇	奇

若平面 7 種圖形中任選兩種，作為縫扣策略中，最終正、反兩面所呈現的圖形，則共有 28 種組合（a-a、a-b、a-c、a-d、a-e、a-f、a-g、b-b、b-c、b-d、b-e、b-f、b-g、c-c、c-d、c-e、c-f、c-g、d-d、d-e、d-f、d-g、e-e、e-f、e-g、f-f、f-g、g-g），再加上圖形的旋轉與否，可以產生更多的組合；但是這些組合中顯然有些不可能找到縫鈕扣策略，如圖 4-1 中，「二」+「二」不可能出現縫鈕扣策略，但「二」+「II」則有一種縫鈕扣策略。

根據歐拉的七橋定理，若圖形中奇點（連接點線段為奇數）有兩個，則起點與終點一定不同，所以奇數線段圖形與偶數線段圖形的組合無法完成縫鈕扣策略。由於縫鈕扣策略要求起始與終點相同，而且縫線必須上、下穿梭於正、反兩平面，因此：

- (一)、完成路徑後，正、反圖形皆相同時，上下線段數目必定相同；
- (二)、若完成圖形正、反不同時，則正、反兩面圖形中，線段必須為偶數，且線段數相同，否則會造成兩個奇點，使得起點與終點不同。

因此，扣除正、反兩面線段數不同的組合，正、反兩面為對稱圖的縫扣策略，可能組合合計共 15 組，區分成兩類：正、反兩面圖形不同的組合情形如表 4-2 所示；正、反兩面圖形相同的組合情形如表 4-3 所示：

表 4-2、縫紉完成後，正、反兩面圖形不同的組合情形


組	組合情形	組	組合情形
1		2	

表 4-3、縫紉完成後，正、反兩面圖形相同的組合情形

組	組合情形	組	組合情形
1		8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	
6		13	
7			

上述組合情形，正、反兩面圖形相同的組合中：第 1、3 組點與點間無法連接；第 5、7、12 組，因合併後具有四個奇點，因此起點與終點不在同一點上，也不具有縫鈕扣策略。而第 13 組，因線段數過多，不適合以紙筆進行樹狀圖分析，改以電腦輔助計算。

五、無法以樹狀分析圖找尋的縫扣策略

縫紉完成後孔洞間的線段正、反兩面分別呈現「」圖樣的路徑。每個孔洞（點）必須被縫線路徑穿越三次，共有二段線段跨越兩點之間（圖 4-12）。自 A 點出發，而目的有三種可能，則自 A 出發，回到 A 為止，不計矛盾路徑（點可以經過 4 次以上），經歷 11 段路徑，則總共有 $3^{11}=17,7147$ 種可能，無法以紙筆畫出樹狀分析圖，因此在電腦試算軟體 Microsoft Excel[®]輸入 17,7147 種路徑為字串（圖 4-13），再剔除其中的矛盾路徑。

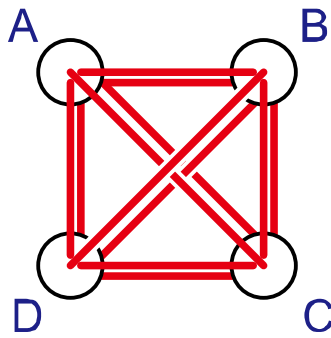


圖 4-12、四孔扣含有交叉對稱的最短一筆畫路徑

圖 4-13、自任一點出發，目的有三點，共經 12 段路徑；總共有 17,7147 種可能

從前面樹狀圖繪製的經驗，樹狀分枝中出現的矛盾路徑有四種型式：第一型 ABAB、第二型 ABA + AB or BA、第三型 AB or BA 合計出現三次、第四型 AB or BA 出現在同一面：

- (一)、第一型矛盾路徑：如路徑 **ABABCADBCDCD** 中雖然符合每點被穿越 3 次，但是路徑經過 **ABAB** 後，已經在同一側形成兩段路徑跨越 **AB** 兩點間（圖 4-14(A)）。
- (二)、第二型矛盾路徑：剔除 ABAB 類型的矛盾路徑後，若路徑出現 **ABA**，則路徑中不能再出現 **AB** 或是 **BA** 的組合。因為字串（路徑）中 **ABA** 已經把 A、B 兩點間的路徑走完兩次，如：**ABADBA**CD**CBDC** 中，符合每點被穿越 3 次，但 A、B 兩點間出現 3 條路徑（圖 4-14(B)）。
- (三)、第三型矛盾路徑：剔除前兩種路徑後，若字串中 **AB** 或是 **BA** 分散，但合計出現三次的路徑會使某一側的兩點間出現兩條路徑（圖 4-14(C)），如：**ABCDABCDABCD** 中，**AB** 合計出現 3 次，造成 A、B 兩點間路徑出現三次。
- (四)、第四型矛盾路徑：若字串中出現分散開的兩次 **AB** 或 **BA**，但是在路徑中的 **AB** 或 **BA** 出現在同一側的也屬於矛盾路徑（圖 4-14(D)），因為兩點間經過的兩段路徑必須分別位於鈕扣兩側。

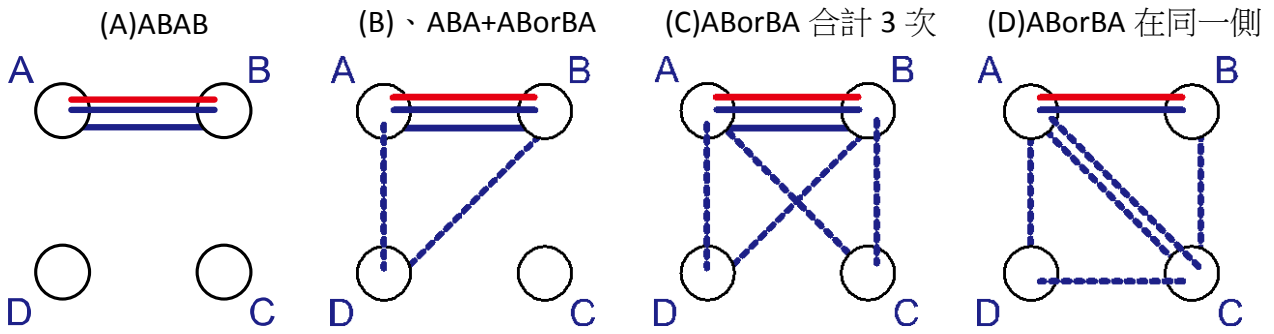


圖 4-14、17,7147 種路徑中剔除各點出現超過 3 次的路徑後，仍出現的矛盾路徑類型

先將 ABCD 四點間兩兩具有正反兩條路徑經過的可能列舉（圖 4-13），共 17,7147 種路徑，在軟體中以軟體所預設的**函數與資料篩選功能**，剔除矛盾路徑，篩選出正確路徑，思考邏輯如圖 4-15 所示，使用的函數與邏輯演算過程如下：

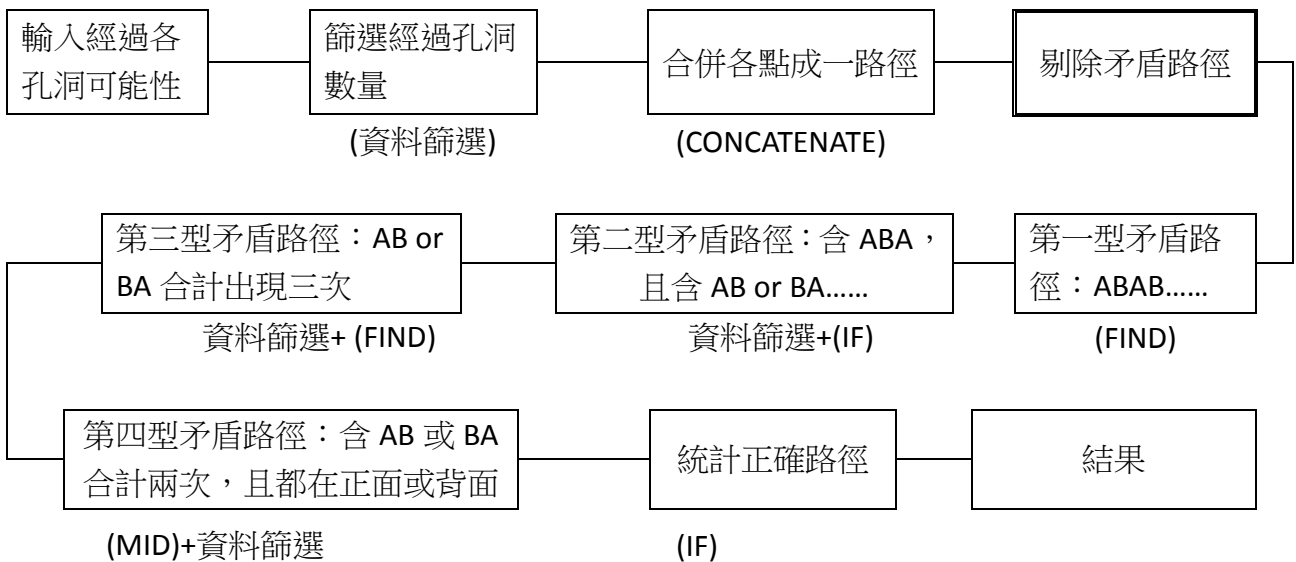


圖 4-14、思考邏輯流程圖

(一)、計算由 A 出發，任意經過四點間不限方向、次數的所有組合中，篩選經過 A、B、C、D 各 3 次路徑：(圖 4-16)

1. 計算由 A 出發，任意四點間不限方向的所有組合有 17,7147 種組合中，A、B、C、D 各出現幾次？使用計數函數：COUNTIF

語法：=COUNTIF(A2:L2,"A").....；A2：L2 為計算範圍

2. 資料篩選經過 3 次 A、3 次 B、3 次 C 且 3 次 D 的可能，篩選後為 1,0326 種。

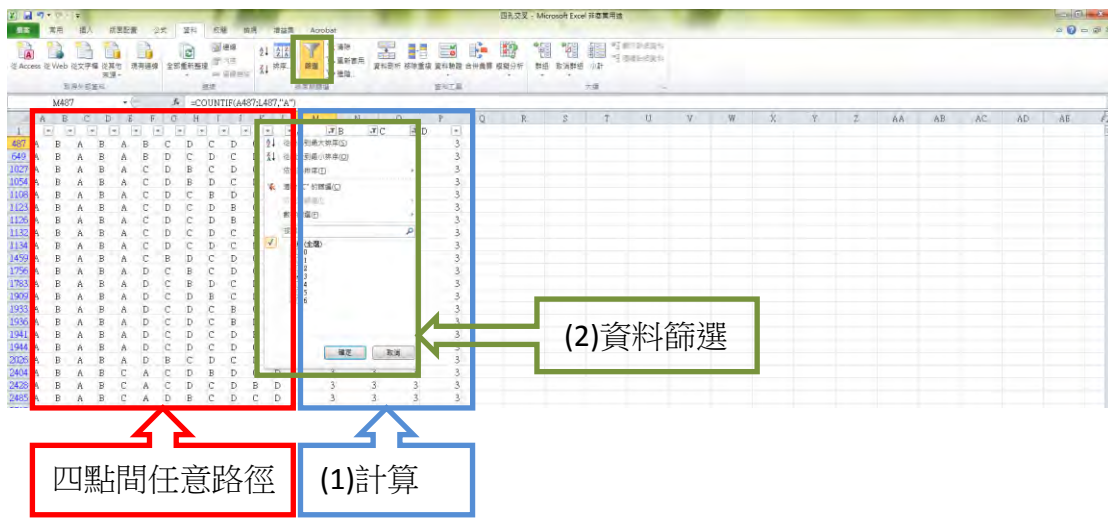


圖 4-16、任意四點不限方向的所有組合有 17,7147 種，篩選出經過 A、B、C、D 各三次的可能

(二)、在經過 A、B、C、D 各 3 次路徑中，剔除矛盾路徑 (圖 4-17)：

1. Microsoft Excel® 軟體中有一個文字字串尋找函數：FIND，將原本分欄的點合併成字串，合併後字串為連續一筆畫路徑 (圖 4-17.(1))。合併字串函數：CONCATENATE，此函數可將多個位置的字串連結成一字串。

語法：=CONCATENATE(A2,B2,C2,D2,E2,F2,G2,H2,I2,J2,K2,L2)

2. 1,0326 種路徑中出現 ABAB 的為矛盾路徑，因為會造成兩點間共有三條線段經過。可能存在的矛盾路徑為：ABAB、BABA、BCBC、CBCB、CDCD、DCDC、DADA、ADAD、ACAC、CACA、BDBD、DBDB 等矛盾路徑 (圖 4-17.(2))。
3. 利用文字字串尋找函數：FIND，尋找字串中是否具有上述的矛盾路徑 (圖 4-17.(3))，此函數可以將路徑字串中想要尋找的矛盾路徑字串出現的位置標示出來，沒有矛盾路徑字串則顯示為：「#VALUE!」。

語法：=FIND(S2,R2)

4. 使用邏輯函數：IF，計算矛盾路徑數量（#VALUE!），將前述文字字串尋找結果中，有矛盾路徑的顯示為：「1」，沒有的顯示為：「0」（圖 4-17.(4)），計數無矛盾的路徑共 6660 種。

語法：=IF(ISERROR(AE2),0,1)

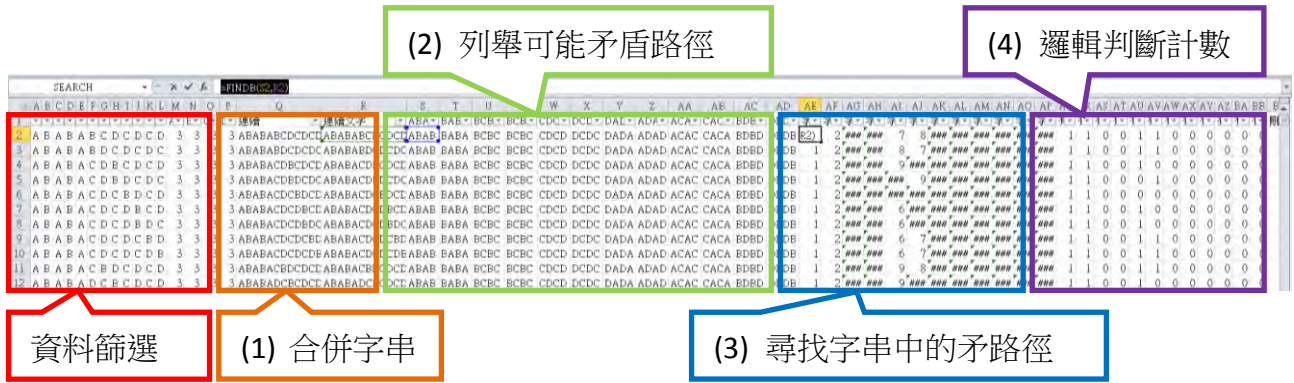


圖 4-17、篩選路徑中出現的第一類型矛盾路徑(ABAB、BABA.....)

5. 除了 ABAB 這種類型的，若是路徑中已經出現了 ABA 的路徑，則路徑中再出現 AB 或是 BA 的型式也屬於矛盾路徑，使用篩選功能及 FIND 函數剔除第二類型的矛盾路徑，意即在上述篩選的路徑中，再篩選出具 ABA 的路徑，且路徑中有 AB 或是 BA 的路徑，標上記號視為矛盾路徑（圖 4-18）。

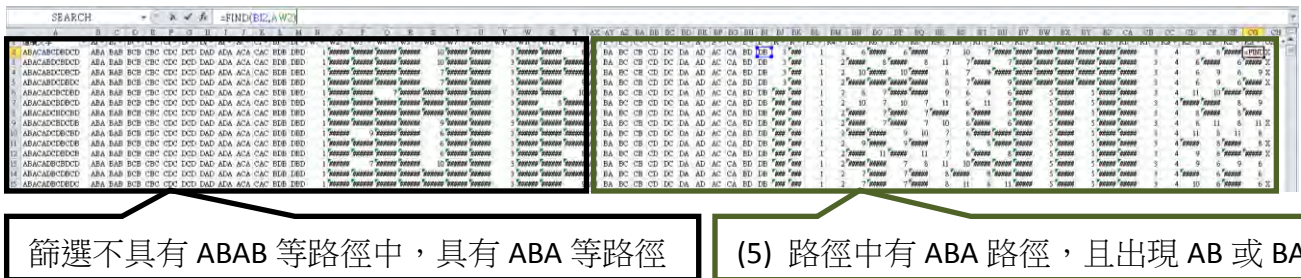


圖 4-18、篩選路徑中出現的第二類型矛盾路徑(有 ABA.....，且有 AB 或 BA.....)

6. AB 或是 BA 在路徑中合計出現過三次，意即 A、B 兩點間已經出現了三次的路徑，歸屬為第三類型的矛盾路徑，為了計數路徑中出現多少 AB 或 BA，先篩選字串中沒有 ABA 類型的路徑，再將其中含有 AB 的字串取代為 P，含有 BA 的取代為 Q，則字串字數每取代一次少 1 字，使用 LEN 函數計算字串字數，換算成 AB 或 BA 路徑出現次數，計算 AB 或 BA 合起出現 3 次的即為矛盾路徑，將之剔除（圖 4-19）。

語法：=LEN(A2) → =計算字串數目(位置)

(6)計算取代後字元數

	A	B	C	N	O	F	Q	P	Q	AB+BA-3	BC+CB-3	CD+DC-3	DA+AD-3	AC+CA-3	BD+DB-3	AB+BA-3	BC+CB-3	CD+DC-3	DA+AD-3	AC+CA-3	BD+DB-3	
2	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	ABACADCBDCBD	ACADCBDCBD	AQCADCBDCBD	11	1	11	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

將 AB 取代為 P，BA 取代為 Q

資料篩選：AB+BA 出現三次

圖 4-19、將字串中 AB 取代為 P，BA 取代為 Q，計算字串減少數，減少合計為 3 的為矛盾路徑，予以標記刪除。

7. AB 或是 BA 在路徑中合計出現過二次，而且都在扣子的同一面，這種路徑只會再一面形成「」圖樣，且某兩點間在此面出現兩條重疊路徑，另外一側則會出現不完整的「」圖樣，屬於第四類型的矛盾路徑，此種矛盾路徑只需將上述篩選完成的 2040 條路徑中，將字串自左往右兩兩一組拆開，再隔一字後兩兩一組拆開，如 ABACBDACBDCDA 路徑拆成：AB、AC、BD、AC、BD、CD 以及 BA、CB、DA、CB、DC、DA 兩組，第一組為正面路徑，第二組為背面路徑，分離字串函數為：MID；此一字串中正面路徑出現了兩次 AC，所以屬於矛盾路徑，使用資料篩選功能，篩選正面中有 AB 或 BA 合計為兩次的，予以標記刪除（圖 4-20）。

語法：=MID(A2,1,2) → =MID(位置，起始字元，回傳字元數)

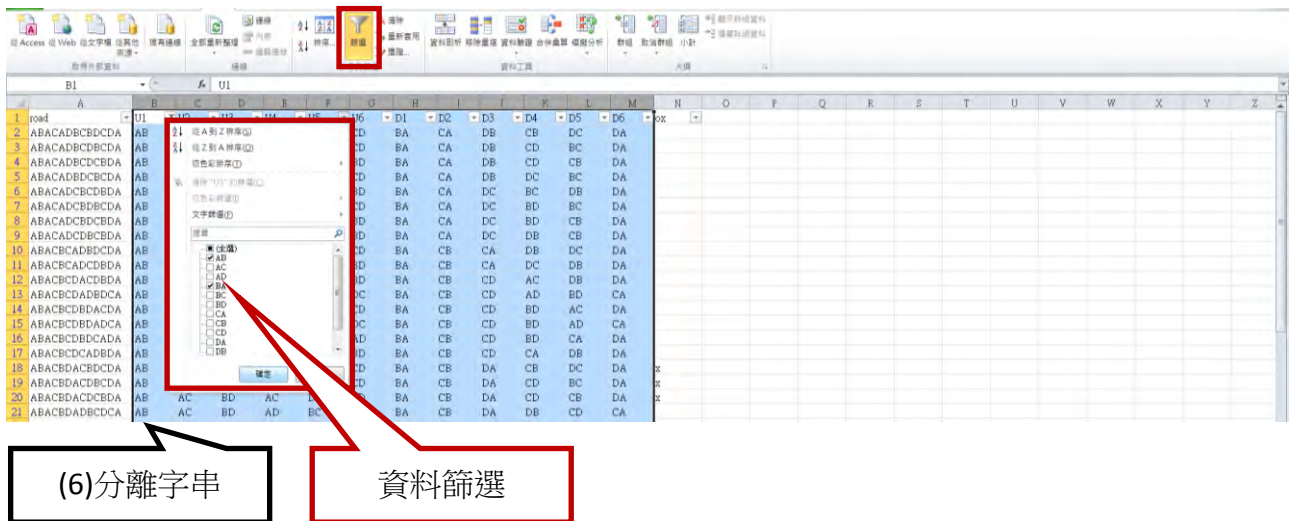


圖 4-20、剩餘路徑中，分離路徑字串再使用資料篩選，剔除同一面兩點間路徑為兩條者

8. 依照前述方法，最後篩選出 1320 條路徑，這些路徑中包含了鏡射路徑，如 ABCACDCBADBDA 與 ADBDABCDACBA 其實是順行與原路徑逆行的鏡射路徑，使用前述 FIND 函數將路徑剔除一半，剩餘的就是我們要的答案。

伍、結果

一、兩孔扣與三孔扣的縫鈕扣策略：

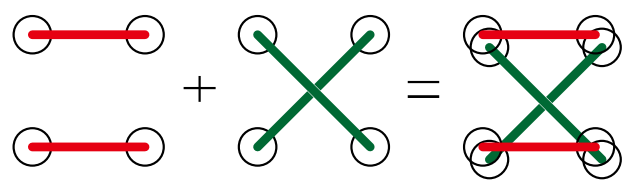
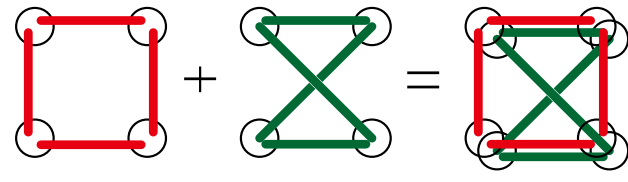
兩孔扣：兩孔扣的縫鈕扣策略，將旋轉與鏡射視為同一種，有 1 種走法。

三孔扣：三孔扣將旋轉鏡射視為同一種，透過樹狀分析圖（圖 4-11）共有 4 條路徑：
ABACBCA、ABCACBA、ABCABCA、ABCBACA。

二、四孔扣縫扣策略路徑數：

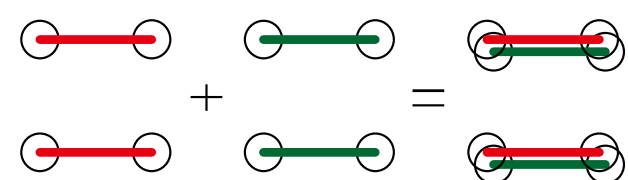
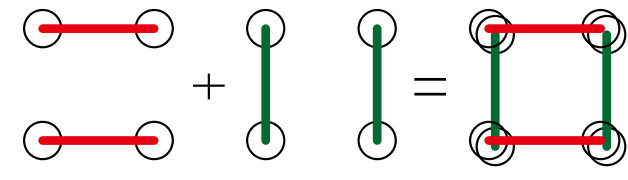
（一）正、反兩面圖形不同的縫鈕扣策略

表 5-1、正、反兩面圖形不同的縫鈕扣策略路徑數

組合情形	縫鈕扣策略路徑數
	1 條
	16 條 使用樹狀圖分析（附錄表 9-1）

（二）正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略

表 5-2、正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略路徑數（正、反兩面線段數：2+2）

組合情形（2+2）	縫鈕扣策略路徑數
	0 條
	1 條

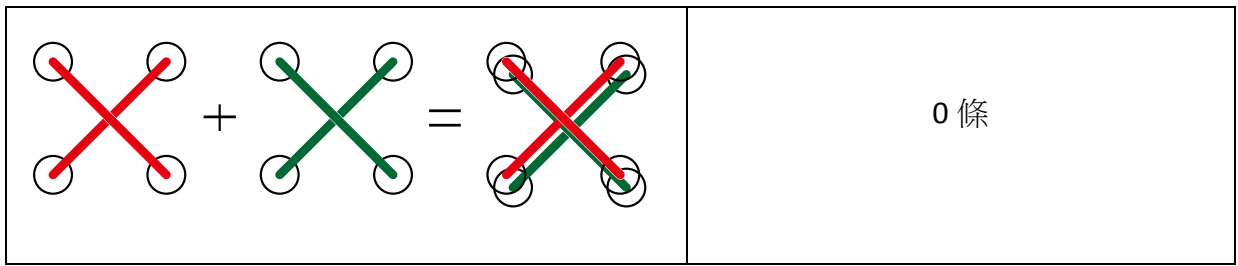


表 5-1 中「二」+「X」組合與表 5-2 中「二」+「II」組合，各有一條縫鈕扣策略，仔細觀察，可以發現這兩組是扭轉的結果，意即將 A、B 兩點進行空間中的扭轉，造成兩組結果相同（圖 5-1）。

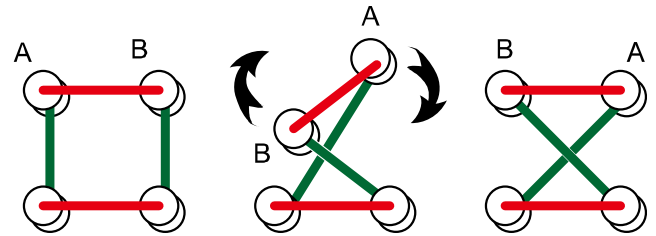


圖 5-1、空間扭轉 A、B 兩點

表 5-3、正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略路徑數（正、反兩面線段數：3+3）

組合情形 (3+3)	縫鈕扣策略路徑數
	1 條
	0 條 合併後具有四個奇點，因此起點與終點不在同一點上
	3 條 使用樹狀圖分析
	0 條 合併後具有四個奇點，不具一筆畫路徑

表 5-4、正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略路徑數（正、反兩面線段數：4+4）

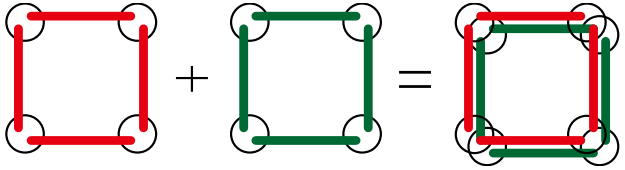
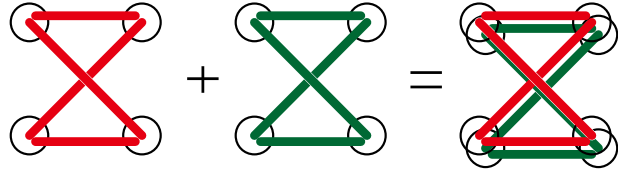
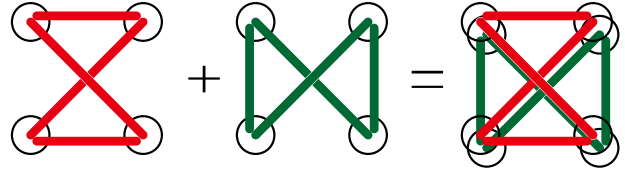
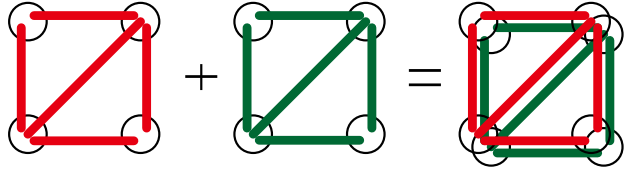
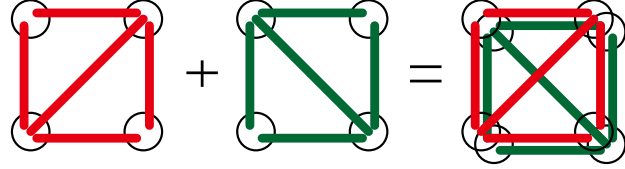
組合情形（4+4）	縫鈕扣策略路徑數
	<p>4 條 使用樹狀圖分析（圖 5-2）</p>
	<p>4 條 使用樹狀圖分析（圖 5-3），為「口」+「口」組合的扭轉結果</p>
	<p>16 條 使用樹狀圖分析，為表 5-1 中「口」+「∞」組合的扭轉結果（附錄表 9-2）</p>

表 5-5、正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略路徑數（正、反兩面線段數：5+5）

組合情形（5+5）	縫鈕扣策略路徑數
	<p>43 條 使用樹狀圖分析（附錄表 9-3）</p>
	<p>0 條 合併後具有四個奇點，不具一筆畫路徑</p>

從樹狀分析圖中可以得知在四孔扣中，正、反兩面都是「口」字時，將 A→B 與 A→D 開始的路徑為順序上的鏡射，再扣除旋轉與空間中的鏡射，最短穿越空間中的縫扣策略，且維持對稱的可能路徑有五種：ABADCBCDA、ABCBADCDA、**ABCDABCD**A、ABCDADCBA、ABCDCBADA 共 5 條（圖 5-2）。其中 **ABCDABCD**A 路徑完成縫紉後，在扣子的正面呈現「二」字，反面呈現「II」，扣除後其餘四條路徑正、反兩面皆呈現「口」字。

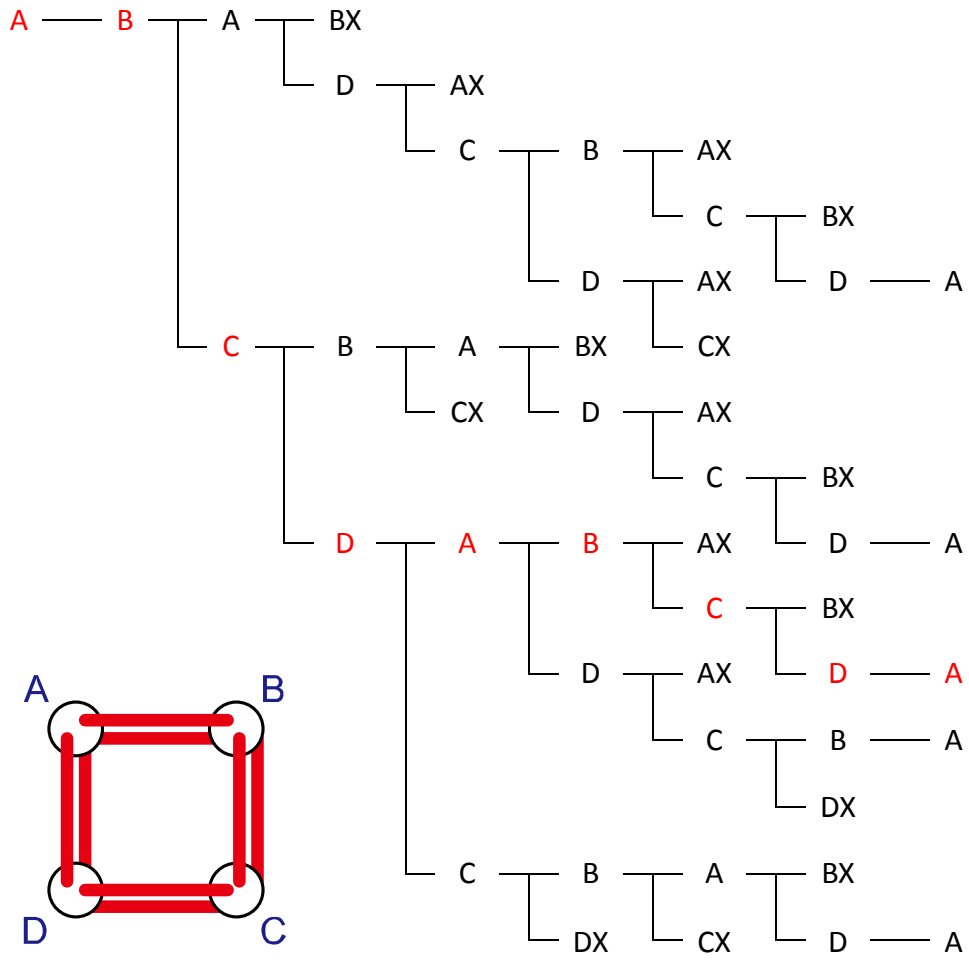


圖 5-2、四孔扣的縫扣策略樹狀分析圖

縫紉完成後，路徑對稱且有交叉，呈現：「 \boxtimes 」形式，樹狀分析圖與前者「 \square 」+「 \square 」不同，因對角線的存在， $A \rightarrow B$ 與 $A \rightarrow C$ 中的路徑樹狀圖較複雜。樹狀分析圖中，最短的縫扣策略有 10 種（圖 5-3）： $ABACDBDCA$ 、 $ABDBACDCA$ 、 $ABDCDBACA$ 、 $ABDCABDCA$ 、 $ABDCACDBA$ 、 $ACDBDCABA$ 、 $ACDCABDBA$ 、 $ACABDCDBA$ 、 $ACDBACDBA$ 、 $ACDBABDCA$ ，其中（ $ABACDBDCA$ 、 $ACDBDCABA$ ）、（ $ABDBACDCA$ 、 $ACDCABDBA$ ）、（ $ABDCDBACA$ 、 $ACABDCDBA$ ）、（ $ABDCACDBA$ 、 $ACDBABDCA$ ）四組為順序上的鏡射路徑，而且（ $ABDCABDCA$ 、 $ACDBACDBA$ ）此組路徑完成縫紉後，上面呈現「二」字，背面呈現「又」字，不符合原要求在正反兩面都出現：「 \boxtimes 」圖樣，因此不考慮旋轉與鏡射的路徑共有： $ABACDBDCA$ 、 $ABDBACDCA$ 、 $ABDCDBACA$ 、 $ABDCACDBA$ 共 4 條。

根據扭轉的猜想，驗證「 \square 」+「 \square 」組合與「 \boxtimes 」+「 \boxtimes 」組合，路徑中 A、B 不變，但 C、D 互換，則 $ABADCBDA \rightarrow ABACDBDCA$ ； $ABCBADDA \rightarrow ABDBACDCA$ ； $ABDCDBADA \rightarrow ABDCDBACA$ ； $ABDCACDBA \rightarrow ABCDADCBA$ ，扭轉可以得到相對應的「縫鈕扣策略」。

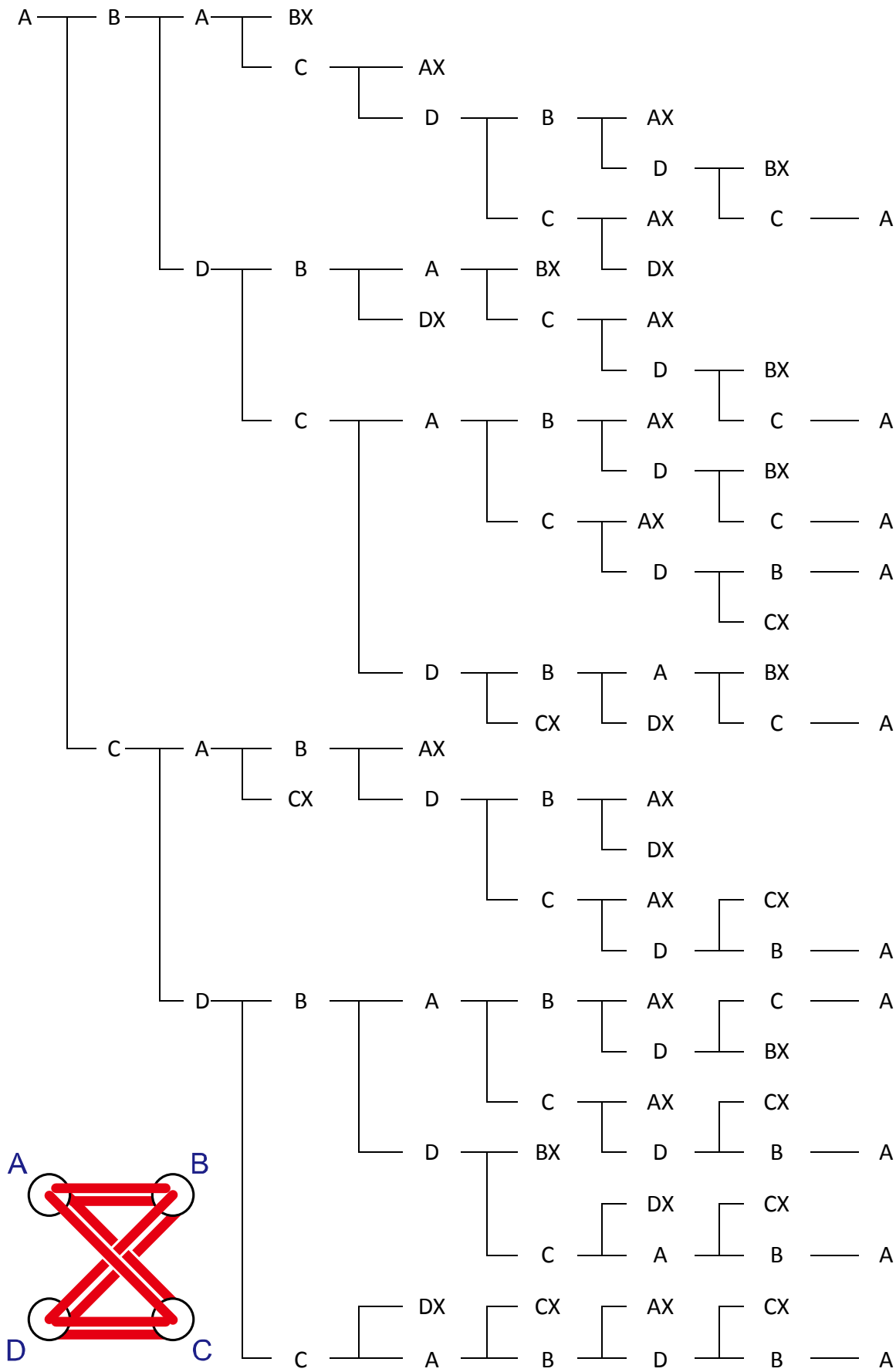
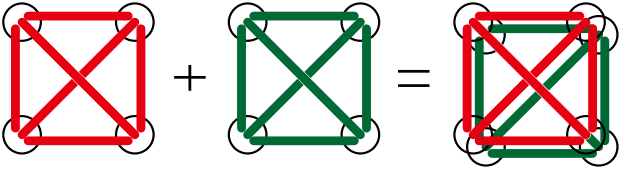


圖 5-3、四孔扣的縫扣策略樹狀分析圖

表 56、正、反兩面圖形相同的縫鈕扣策略路徑數（正、反 6+6）

組合情形 (6+6)	縫鈕扣策略路徑數
	<p style="text-align: center;">660 條</p> <p style="text-align: center;">使用電腦進行計算（附錄 9-4）</p>

三、五孔扣縫鈕扣策略

使用樹狀分析圖分析時，A、B、C、D、E 五孔間，上下兩層兩點間（不含交叉的對角線），各有一條路徑通過（圖 5-4），意即五孔間有 10 段路徑經過。不計路徑正確與否，五孔間共有 10 段路徑，自 A 出發，有兩個選擇：B 或 E；自 B 出發，有兩個選擇：A 或 C……，若是以樹狀分析圖分析，則樹狀分支多達 $2^{10}=1024$ 條，使用常見的電腦試算軟體 Microsoft Excel[®]，將自每點出發皆有兩個選擇的情況，在軟體中分欄表示，1024 分支的樹狀圖在軟體中輸入，變成了 11 欄，1024 列的表格（圖 5-4）。

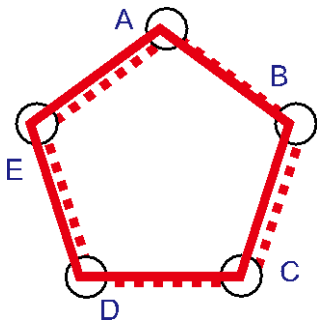
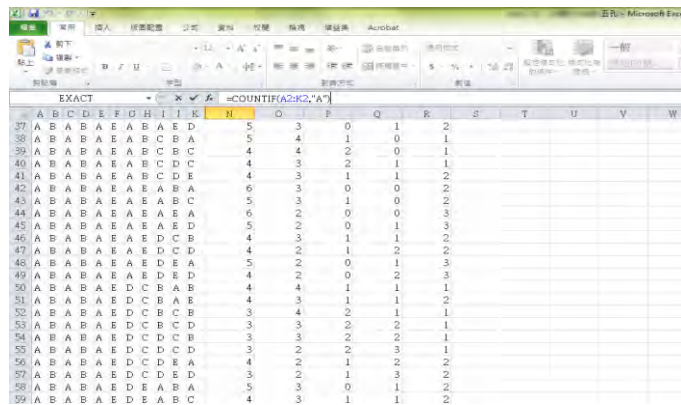
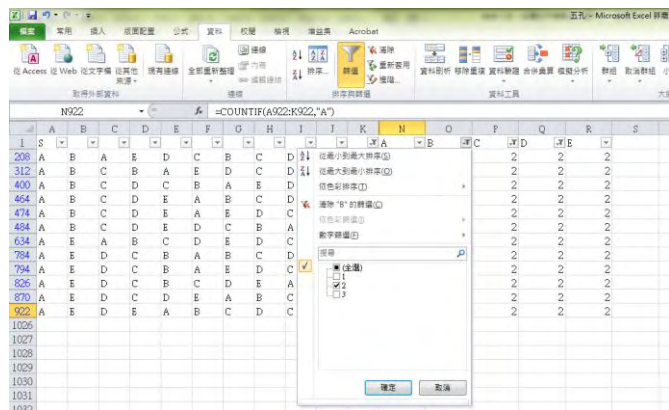



圖 5-4、五孔扣空間中的一筆畫

圖 5-5、在 Microsoft Excel[®] 將 1024 種可能列舉，並且計數經過的各點的路徑數

一筆畫完成圖 5-4，則每個孔洞（點）必須被路徑穿越二次，共有 10 段路徑在正反兩面之間形成，我們想到在電腦科中教過在在 Microsoft Excel[®] 軟體中，有一個用來尋找班上成績資料中，具有相同成績的函數（countif），使用這個函數計算字元中出現 A、B、C、D、E 的個數（圖 5-6），在經過資料篩選功能篩選經過 A 三次（頭與尾皆為 A）、B 兩次、C 兩次、D 兩次以及 E 兩次的路徑（圖 5-6），再將各點連成路徑字串。



篩選後得到路徑為共 12 條，但是其中 A 出發順時針走 B 過去的路徑（ABAEDCBCDEA、ABCBAEDCDEA、ABCDCBAEDEA、ABCDEABCDEA、ABCDEAEDCBA、ABCDEDCBAEA），與自 A 出發逆時針走 E 過去的路徑（AEABCDEDCEA、AEDCBABCDEA、AEDCBAEDCBA、AEDCBCDEABA、AEDCDEABCBA、AEDEABCDCBA）為鏡射路徑，所以不考慮旋轉（A 出發等同於 B 出發.....）與鏡射（A→E 等同於 A→B），五孔扣中不含交叉對角線，且正反兩面皆為五段線段的路徑共有 6 條。

四、六孔扣縫鈕扣策略

依照前述方法，可以找出六孔扣在空間中的一筆畫路徑共有 6 條：ABCDEF AFEDCBA、ABCDEFEDCBAFA、ABCDEDCBAFEFA、ABCDCBAFEFEFA、ABCBAFEDCDEFA、ABAFEDCBCDEFA

陸、討論

從三孔扣、四孔扣與五孔扣的一筆畫路徑中，若是路徑沒有交叉，我們發現空間中的一筆畫路徑具有一個規則，以三孔扣來說，先繞整圈 A-B-C-A 去找路徑，再依次由路徑的前一個點便走回頭路。如下一個即為 A-B-C-B，再下一個即為 A-B-A 等。

四孔扣先繞整圈 A-B-C-D-A 去找路徑，再依次由路徑的前一個點便走回頭路。如下一個即為 A-B-C-D-C，再下一個即為 A-B-C-B 等，


四孔扣以 A 出發：

1. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DA, 上 AD, 下 DC, 上 CB, 下 BA
2. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DC, 上 CB, 下 BA, 上 AD, 下 DA
3. 上 AB, 下 BC, 上 CB, 下 BA, 上 AD, 下 DC, 上 CD, 下 DA
4. 上 AB, 下 BA, 上 AD, 下 DC, 上 CB, 下 BC, 上 CD, 下 DA

五孔扣先繞整圈 A-B-C-D-E-A 去找路徑，再依次由路徑的前一個點便走回頭路。如下一個即為 A-B-C-D-E-D，再下一個即為 A-B-C-D-C 等

五孔扣以 A 出發：

1. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DE, 上 EA, 下 AB, 上 BC, 下 CD, 上 DE, 下 EA. (A-B-C-D-E-A)
2. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DE, 上 EA, 下 AE, 上 ED, 下 DC, 上 CB, 下 BA. (A-B-C-D-E-A)
3. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DE, 上 ED, 下 DC, 上 CB, 下 BA, 上 AE, 下 EA. (A-B-C-D-E-D)
4. 上 AB, 下 BC, 上 CD, 下 DC, 上 CB, 下 BA, 上 AE, 下 ED, 上 DE, 下 EA. (A-B-C-D-C)
5. 上 AB, 下 BC, 上 CB, 下 BA, 上 AE, 下 ED, 上 DC, 下 CD, 上 DE, 下 EA. (A-B-C-B)
6. 上 AB, 下 BA, 上 AE, 下 ED, 上 DC, 下 CB, 上 BC, 下 CD, 上 DE, 下 EA. (A-B-A)

研究過程中，製作了四孔扣的模板進行操作，其中若是將正、反兩面分別要呈現「」圖樣的路徑進行，且孔洞之間路徑在正反兩面各經過一次，也就是任兩點在兩側各有一段路徑經過，其數量與複雜程度難以估算，因為自 A 點出發，而目的有三種可能，則自 A 出發，

回到 A 為止，不計矛盾路徑（點可以經過 4 次以上），經歷 11 段路徑，則總共有 $3^{11}=17,7147$ 種可能，無法以紙筆畫出樹狀分析圖。

若是使用分析四孔扣路徑不交叉的空間中一筆畫，光是剔除 A、B、C、D 四點中穿越四次以上的路徑還不夠，路徑中可能出現有矛盾路徑，如路徑中出現 ABAB 兩點間連續字串，為矛盾路徑，因為會造成兩點間共有三條線段經過。除了 ABAB 這種類型的，若是路徑中已經出現了 ABA 的路徑，則路徑中再出現 AB 或是 BA 的型式也屬於矛盾路徑，AB 或是 BA 在路徑中合計出現過三次，意即 A、B 兩點間已經出現了三次的路徑，歸屬為第三類型的矛盾路徑，AB 或是 BA 在路徑中合計出現過二次，而且都在扣子的同一面，這種路徑只會在其中一面形成「 \boxtimes 」圖樣，且某兩點間在此面出現兩條重疊路徑，另外一側則會出現不完整的「 \boxtimes 」圖樣，屬於第四類型的矛盾路徑。雖然我們理解應該要剔除這些矛盾路徑，但是需要使用更複雜的計算函數，我們請電腦老師幫忙把我們的想法以電腦試算軟體 Microsoft Excel[®] 分析（見附錄），求得共 660 條路徑。

四孔扣正反兩面形成「 \boxtimes 」圖樣，其中兩條對角線（AC、BD）在正面與反面都是交叉的圖形（圖 6-1），但是如果對角線在同一側不交叉，例如 AC 在正面有兩條路徑（ \boxplus ），BD 則是在背面有兩條路徑（ \boxminus ）（圖 6-2），那麼此時四孔扣的路徑不就成了四面體邊上的一筆畫路徑了嗎（圖 6-3）？若正四面體的點與點間只有一條路徑經過，無法找到一筆畫路徑可以走完四面體的 6 條邊線，但是若允許任兩點間可以有兩條路徑經過，那應該會有許多的一筆畫路徑！

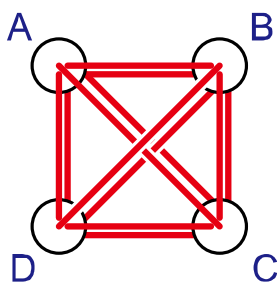


圖 6-1、正反兩面為「 \boxtimes 」圖樣的四孔扣一筆畫路徑

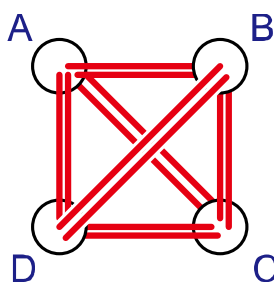


圖 6-2、正面為「 \boxplus 」，背面為「 \boxminus 」的四孔扣一筆畫路徑

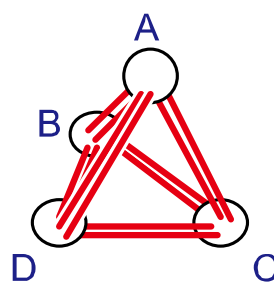


圖 6-3、若是路徑為圖 6-2 所示，變形為四面體。

四面體上的一筆畫路徑與平面上構成「 \boxtimes 」圖樣的一筆畫路徑，須借助電腦軟體分析，本組把解決多面體邊上一筆畫路徑的問題當作未來的研究方向。

柒、結論

縫線穿過孔洞將扣子固定在布料上，通常為**連續縫線**，亦即空間上的一筆畫路徑；我們稱之為：**「縫鈕扣策略」**，鈕扣存在著兩個面，因此路徑經過點後必須沿著不同平面繼續前進，意即**縫鈕扣時，縫線（路徑）必須在空間中上下交錯前進才能完成**。若是限定**起點與終點為同一點（歐拉圈）**，且**路徑為最短路徑**（點和點間同一側路徑只經過一次），二孔、三孔、四孔、五孔與六孔扣中，確實存在著最佳的**縫鈕扣策略**（最短連續縫線），且根據孔扣孔洞間是否具有對角線，產生不同的圖樣呈現，在空間中存在著**縫鈕扣策略**。

在線段不交叉的情況下，從樹狀分析圖中，我們得知**縫鈕扣策略**路徑數，三孔扣有 4 條、四孔扣有 4 條，五孔扣及六孔扣各有 6 條。

若是允許線段跨越交叉（對角線），則四孔扣中：**「二」+「X」**組合與**「二」+「II」、「Z」+「Z」**組合，各有 1 條縫鈕扣策略，**「口」+「口」**組合與**「⊗」+「⊗」**組合，各有 4 條縫鈕扣策略，**「⊗」+「⊗」**組合與**「口」+「⊗」**組合，各有 16 條縫鈕扣，**「Z」+「И」**組合，各有 3 條縫鈕扣，**「⊗」+「⊗」**組合，有 43 條縫鈕扣策略，**「⊗」+「⊗」**組合，以電腦計算得 **660** 條縫鈕扣策略。

捌、參考資料

- George G. Szpiro (2011)。魔術師的「結」。數字的神秘生命 (124-128 頁)。台北：臉譜。
- George G. Szpiro (2011)。怎樣綁鞋帶最省力。數字的神秘生命 (129-134 頁)。台北：臉譜
- 徐力行 (2003)。沒有數字的數學。台北：天下遠見出版

表 9-4(1)、正、反兩面分別呈現：「」圖樣空間中一筆畫路徑


ABACADBCBDCDA	ABACDADBCDBCA	ABADBCDCACBDA	ABCABCDADBDCA
ABACADBCDBCDA	ABACDADBDCBCA	ABADBCDCBDACA	ABCABCDBDACDA
ABACADBCDCBDA	ABACDADCBDDBCA	ABADBDACBCDCA	ABCABCDBDADCA
ABACADBDCBCDA	ABACDBCBDACDA	ABADBDACDCBCA	ABCABCDDBCADA
ABACADCBCDBDA	ABACDBCBDADCA	ABADBDCACBCDA	ABCABCDCADBDA
ABACADCBCDBCDA	ABACDBCBCDACA	ABADBDCADCBCA	ABCABDADBCDCA
ABACADCBCDCBDA	ABACDBCBDADBCA	ABADBDCBCACDA	ABCABDADCBDCA
ABACADCBCDBDA	ABACDBCBCDACA	ABADBDCBCADCA	ABCABDADCDBCA
ABACBCADBDCDA	ABACDBDACBCDA	ABADBDCBCDACA	ABCABDBCADCDA
ABACBCADCDBDA	ABACDBDADCBCA	ABADBDCDACBCA	ABCABDBCADACDA
ABACBCDADBDCDA	ABACDCADBCBDA	ABADCACBCDBDA	ABCABDBCDCADA
ABACBCDADBDCA	ABACDCADBCBDA	ABADCACBDBCDA	ABCABDBCDCADA
ABACBCDBDACDA	ABACDCBCADBDA	ABADCACBDCBDA	ABCABDCBDACDA
ABACBCDBDADCA	ABACDCBDADBCA	ABADCACDBCBDCA	ABCABDCBDADCA
ABACBCDBDCADA	ABACDCBDBCADA	ABADCADBCBDCA	ABCABDCBDCADA
ABACBCDCADBDA	ABADACBCDBDCA	ABADCADBCBDBCA	ABCABDCDADBCA
ABACBDADBCDCA	ABADACBDBCDCDA	ABADCADBDCBCA	ABCABDCDBCADA
ABACBDADCBDCA	ABADACBDCBDCA	ABADCADCBDDBCA	ABCACBADBDCDA
ABACBDADCDBCA	ABADACBDCDBCA	ABADCBCACDBDA	ABCACBADDCBDA
ABACBDBCADCDA	ABADACBDCBDCA	ABADCBCADBDCDA	ABCACBDABDCDA
ABACBDBCADACDA	ABADACBDCBDBCA	ABADCBCDBDACA	ABCACBDADCDBA
ABACBDBCADADCA	ABADACBDBCBCA	ABADCBCBDCACDA	ABCACBDBADCDA
ABACBDBCDCADA	ABADACDCBDBCA	ABADCBCBDCADCA	ABCACBDCDABDA
ABACBDBCBDACDA	ABADBCACBDCDA	ABADCBCBDCDACA	ABCACBDCDADBA
ABACBDBCBDADCA	ABADBCACDBCDA	ABADCBCDCACBDA	ABCACBDCDBADA
ABACBDBCBCADA	ABADBCACDCBDA	ABADCBCDCBDACA	ABCACDADBDCDBA
ABACBDCDADBCA	ABADBCBDACDCA	ABADCDCACBDBCA	ABCACDADBDCBA
ABACBDCDBCADA	ABADBCBDCACDA	ABADCBCACBDA	ABCACDADCDBA
ABACDACBCDBDA	ABADBCBDCADCA	ABADCBCBDACA	ABCACBDCDABDA
ABACDACBDBCDA	ABADBCBDCDACA	ABADCBCBDACBCA	ABCACBDCDADBA
ABACDACBDCBDA	ABADBCBDCACDA	ABCABCADBDCDA	ABCACBDCDBADA
ABACDACBDCBDA	ABADBCBDCADCA	ABCABCADCDBDA	ABCACBDBADCBA
ABACDADBCBDCA	ABADBCBDCDACA	ABCABCADCDBDA	ABCACBDBDCBADA

表 9-4(2)、正、反兩面分別呈現：「☒」圖樣空間中一筆畫路徑

ABCACDCBADBDA	ABCBACDBDCADA	ABCBDCADACDBA	ABCDBCDBACADA
ABCACDCBDABDA	ABCBACDCADBDA	ABCBDCADCABDA	ABCDBCDBADACA
ABCACDCBDADBA	ABCBADACDBDCA	ABCBDCADCADBA	ABCDBDACDABCA
ABCACDCBDBADA	ABCBADBDACDCA	ABCBDCDABDACA	ABCDBDADCABCA
ABCADABCDBDCA	ABCBADBDCACDA	ABCBDCDACABDA	ABCDBDADCABACA
ABCADABDBCDCDA	ABCBADBDCADCA	ABCBDCDACADBA	ABCDBDCABCADA
ABCADABDCBDCA	ABCBADBDCDACA	ABCBDCDADBACA	ABCDBDCACBADA
ABCADABDCDBCA	ABCBADCACDBDA	ABCBDCDBACADA	ABCDBDCADABCA
ABCADACBDCDBA	ABCBADCADBDCA	ABCBDCDBADACA	ABCDBDCBACADA
ABCADACBDCDBA	ABCBADCDBDACA	ABCDACADBCDBA	ABCDBDCBADACA
ABCADACBDCDBA	ABCBDABDACDCA	ABCDACADBDCBA	ABCDCABCADBDA
ABCADACDCBDBA	ABCBDABDCACDA	ABCDACADCBDDBA	ABCDCABDADBACA
ABCADBADBCDCDA	ABCBDABDCADCA	ABCDACDABDBCA	ABCDCABDBCADA
ABCADBADCBDCA	ABCBDABDCDACA	ABCDACDACBDBA	ABCDCACBADBDA
ABCADBADCDBCA	ABCBDACABDCDA	ABCDACDBADBCA	ABCDCACBDABDA
ABCADBDBDCDCDA	ABCBDACADCDBA	ABCDACDBDABCA	ABCDCACBDADDBA
ABCADBDBDCDCBA	ABCBDACDACDBA	ABCDADBCACDBA	ABCDCACBDBADA
ABCADBDBDCDCBA	ABCBDACDCABDA	ABCDADBCDBACA	ABCDCADABDBACA
ABCADBDBDCDABCA	ABCBDACDCADBA	ABCDADBDCABCA	ABCDCADACBDBA
ABCADBDBDCDACBA	ABCBDADBACDCA	ABCDADBDCBACA	ABCDCADBADBACA
ABCADCADBCDBA	ABCBDADCACDBA	ABCDADCABDBCA	ABCDCADBDBABCA
ABCADCADBCDBA	ABCBDADCDBACA	ABCDADCACBDBA	ABCDCBACADBDA
ABCADCADCBDBA	ABCBDBACADCDA	ABCDADCBDDBACA	ABCDCBADBDACA
ABCADCADCBDBA	ABCBDBACDACDA	ABCDBCACDABDA	ABCDCBDABDACA
ABCADCADCBDBA	ABCBDBACDADCA	ABCDBCACDADBA	ABCDCBDACABDA
ABCADCDBADBACA	ABCBDBACDCADA	ABCDBCACDBADA	ABCDCBDACADBA
ABCADCDBADBACA	ABCBDBADACDCA	ABCDBCADACDBA	ABCDCBDADBACA
ABCBACADBDCDA	ABCBDBADCACDA	ABCDBCADCABDA	ABCDCBDBACADA
ABCBACADCDBDA	ABCBDBADCADCA	ABCDBCADCADBA	ABCDCBDBADACA
ABCBACDACDBDA	ABCBDBADCADACA	ABCDBCADABDACA	ABDABCACBDCDA
ABCBACDADBDCDA	ABCBDCACDABDA	ABCDBCADACABDA	ABDABCACBDCDA
ABCBACDBDACDA	ABCBDCACDADBA	ABCDBCADACADBA	ABDABCACDCBDA
ABCBACDBDADCA	ABCBDCACDBADA	ABCDBCADADBACA	ABDABCBDACDCA

表 9-4(3)、正、反兩面分別呈現：「」圖樣空間中一筆畫路徑

ABDABCBCDACDA	ABDADBACBCDCA	ABDBCABCDCADA	ABDCBCDABDACA
ABDABCBCDADCA	ABDADBACDCBCA	ABDBCACBADCDCA	ABDCBCDACABDA
ABDABCBCDACA	ABDADBCABCDCA	ABDBCACDCBADA	ABDCBCDADBACA
ABDABCDBCACDA	ABDADBCBACDCA	ABDBCADABCDCA	ABDCBCDBACADA
ABDABCDBCADCA	ABDADBCDCABCA	ABDBCADCDABCA	ABDCBCDBADACA
ABDABCDBCADACA	ABDADBCDCBACA	ABDBCBCACADCDA	ABDCBDACDABCA
ABDABCDCACBDA	ABDADCACBCDBA	ABDBCBCACDACDA	ABDCBDADCABCA
ABDABCDCBDACA	ABDADCBCACDBA	ABDBCBCACDADCA	ABDCBDADCBCACA
ABDABDACBCDCA	ABDADCBCDBACA	ABDBCBCACDCADA	ABDCBDCABCADA
ABDABDACDCBCA	ABDADCBCDCABCA	ABDBCBCADACDCA	ABDCBDCACBADA
ABDABDCACBCDA	ABDADCBCDCBACA	ABDBCBCADCACDA	ABDCBDCADABCA
ABDABDCADCBCA	ABDADCDBACBCA	ABDBCBCADCADCA	ABDCBDCBCACADA
ABDABDCBCACDA	ABDADCDBCBABCA	ABDBCBCADCADACA	ABDCBDCBCADACA
ABDABDCBCADCA	ABDADCDBCBACA	ABDBCBCADCADABCA	ABDCDABCACBDA
ABDABDCBCDACA	ABDBACADCBCDA	ABDBCBCADCADABCA	ABDCDABCBDACA
ABDABDCDABCBA	ABDBACBCADCDA	ABDBCBCADCBCACA	ABDCDABDACBCA
ABDACABCBCDCA	ABDBACBCDACDA	ABDBCBCADCBCADA	ABDCDACABCBCDA
ABDACABCDBCDA	ABDBACBCDADCA	ABDBCBCADCBCBADA	ABDCDACBACBCDA
ABDACABCDCBDA	ABDBACBCDCADA	ABDBCBCADCBCADABCA	ABDCDACBCABDA
ABDACABDCBCDA	ABDBACDACBCDA	ABDBCBCDCBACADA	ABDCDADBACBCA
ABDACADCBCDBA	ABDBACDADCBCA	ABDBCBCDCBADACA	ABDCDADBCABCA
ABDACBACBCDCA	ABDBACDCBCADA	ABDCACBCDABDA	ABDCDADBCBACA
ABDACBACDBCDA	ABDBADACBCDCA	ABDCACBCDBADA	ABDCDBACBCADA
ABDACBACDCBDA	ABDBADACDCBCA	ABDCACBDCBADA	ABDCDBADACBCA
ABDACBCABDCDA	ABDBADCACBCDA	ABDCACDABCBCDA	ABDCDBCABCADA
ABDACBCADCDBA	ABDBADCADCBCA	ABDCACDBCBCADA	ABDCDBCACBADA
ABDACBCDACDBA	ABDBADCBCACDA	ABDCADACBCDBA	ABDCDBCADABCA
ABDACBCDCABDA	ABDBADCBCADCA	ABDCADCABCBCDA	ABDCDBCBCACADA
ABDACBCDCADBA	ABDBADCBCDACA	ABDCADCBACBCDA	ABDCDBCBCADACA
ABDACDACBCDBA	ABDBADCDCACBCA	ABDCADCBCABDA	ACABADBCBCDCA
ABDACDCABCBCDA	ABDBCABCADCDA	ABDCBCACDABDA	ACABADBCDBCDA
ABDACDCBACBCDA	ABDBCABCDCADA	ABDCBCACDBADA	ACABADBCDCBDA
ABDACDCBCABDA	ABDBCABCDCADCA	ABDCBCADCABDA	ACABADBDCBCDA

表 9-4(4)、正、反兩面分別呈現：「」圖樣空間中一筆畫路徑

ACABADCBCDBDA	ACADBCDBABCDA	ACBACBDABDCDA	ACBCDABDBADCA
ACABADCBCDBCDA	ACADBCDCBABDA	ACBACBDBADCDA	ACBCDACDBABDA
ACABADCBCDCBDA	ACADBDCBABCDA	ACBACBDCDABDA	ACBCDADBABDCA
ACABADCBCBDBDA	ACADCBABCDBDA	ACBACBDCDBADA	ACBCDBABDACDA
ACABCBABDBCDA	ACADCBABDBCDA	ACBACBDCDABDA	ACBCDBABDADCA
ACABCBADCDBDA	ACADCBABDCBDA	ACBACBDCDBADA	ACBCDBABDCADA
ACABCBADABDCDA	ACADCBABCDBABDA	ACBACBDCBADA	ACBCDBADABDCA
ACABCBDBADCDA	ACADCBDBABCDA	ACBACDCBADBDA	ACBCDBADBACDA
ACABCBDCDABDA	ACADCBDCBABDA	ACBACDCBDABDA	ACBCDBADBADCA
ACABCBDCDBADA	ACADCBABCBDA	ACBACDCBDBADA	ACBCDBDABACDA
ACABCBDCDABDA	ACADCBBCBABDA	ACBADABCDBDCA	ACBCDBDABADCA
ACABCBDCBADA	ACBABCADBDCDA	ACBADABDBCDCA	ACBCDBDCABADA
ACABCDCBADBDA	ACBABCADCDBDA	ACBADABDCBDCA	ACBCDCABADBDA
ACABCDCBDABDA	ACBABCADABDCA	ACBADABDCBCA	ACBCDCABDABDA
ACABCDCBDBADA	ACBABCDBDACDA	ACBADBADCBDCA	ACBCDCADBABDA
ACABDABCBCDCA	ACBABCDBDADCA	ACBADBADCBCA	ACBDABADBCDCA
ACABDABCDBCDA	ACBABCDBDCADA	ACBADBDABCDCA	ACBDABADCBDCA
ACABDABCDCBDA	ACBABCDCADBDA	ACBADBDCDABCA	ACBDABADCBCA
ACABDABDCBCDA	ACBABDADBCDCA	ACBADCDABDBCA	ACBDABDABCDCA
ACABDBADCBCDA	ACBABDADCBDCA	ACBADDCBADBCA	ACBDADBABCDCA
ACABDBCBAADCDA	ACBABDADCBCA	ACBCABADBDCDA	ACBDADCABABDCA
ACABDBCBCBADA	ACBABDBCADCDA	ACBCABADCDBDA	ACBDBABCADCDA
ACABDBCBCDABDA	ACBABDBC DACDA	ACBCABDABDCDA	ACBDBABC DACDA
ACABDBCBCBADA	ACBABDBC DADCA	ACBCABDBADCDA	ACBDBABC DADCA
ACABDBCBCBADA	ACBABDBC DCADA	ACBCABDCDABDA	ACBDBABC DCADA
ACABDCDABCBDCA	ACBABDCBDACDA	ACBCABDCDBADA	ACBDBACBADCDCA
ACABDCDBCBCDA	ACBABDCBDADCA	ACBCADBABDCDA	ACBDBACDCBADA
ACADBABCBCDCA	ACBABDCBCADA	ACBCADCDBABDA	ACBDBADABCDCA
ACADBABCDBCDA	ACBABDCDADBCA	ACBCDABACDBDA	ACBDBCABADCDA
ACADBABCDCBDA	ACBABDCBCADA	ACBCDABADBDCA	ACBDBC DABACDA
ACADBABDCBCDA	ACBACBADBDCDA	ACBCDABDABDCA	ACBDBC DABADCA
ACADBCBABCDCDA	ACBACBADCBDA	ACBCDABDBACDA	ACBDBC DCABADA

表 9-4(5)、正、反兩面分別呈現：「」圖樣空間中一筆畫路徑

ACBDCBABDACDA	ACDACBDBABCDABA	ACDCABCBDABDA	ADBACBCABDCDA
ACBDCBABDADCA	ACDACBDCBABDA	ACDCABCBDABDA	ADBACBCDCABDA
ACBDCBABDCADA	ACDACDBABCBDA	ACDCABDABCBDABA	ADBACDCABCBDABA
ACBDCBADABDCA	ACDACDBCABABDA	ACDCABDDBCABADA	ADBACDCBACBDABA
ACBDCBADBACDA	ACDADBABCBDCA	ACDCADBABCBDABA	ADBCABACBDCDA
ACBDCBADBADCA	ACDADBCBABDCA	ACDCADBCBABDABA	ADBCABACDBCDA
ACBDCBDABACDA	ACDBABCBDACDA	ACDCBABCADBDA	ADBCABACDCBDA
ACBDCBDABADCA	ACDBABCBDCAADA	ACDCBABDBCADABA	ADBCABCABDCDA
ACBDCBDCABADA	ACDBABCDBCADABA	ACDCBACBADBDA	ADBCACBABDCDA
ACBDCDBABCADA	ACDBABDACBCDABA	ACDCBACBDABDABA	ADBCACDBABCDA
ACBDCDBACBADA	ACDBABDCBCADABA	ACDCBACBDBADABA	ADBCBABDCACDA
ACBDCDBCABADA	ACDBADABCBDCA	ACDCBCABADBDA	ADBCBACABDCDA
ACDABACBCDBDA	ACDBADBACBCDABA	ACDCBCABDABDABA	ADBCBDCABACDA
ACDABACBDBCDA	ACDBADBCABCDA	ACDCBCABDBADABA	ADBCDBABCACDA
ACDABACBDCBDA	ACDBADBCBACDA	ACDCBCADBABDABA	ADBCDBACABCDA
ACDABACDBCBDABA	ACDBCABDACDA	ACDCBDBABCADABA	ADBCDBACBACDA
ACDABADBCBDCA	ACDBCABADCADABA	ACDCBDBACBADABA	ADBCDBCABACDA
ACDABCABCDBDA	ACDBCABADBACDA	ACDCBDBCABADABA	ADBDCABACBCDABA
ACDABCABDBCDA	ACDBCBDABACDA	ADBABCACBDCDA	ADBDCABCABCDA
ACDABCABDCBDABA	ACDBCBCDCABADABA	ADBABCACDBCDA	ADBDCABCBACDA
ACDABCABCDBDA	ACDBCDBABCADABA	ADBABCACDCBDABA	ADBDCACBABCDA
ACDABCBADBDCA	ACDBCDBACBADABA	ADBABCBDACDA	ADBDCBABCACDA
ACDABCBDABDCA	ACDBCDBCABADABA	ADBABCDBCACDA	ADBDCBACABCDA
ACDABCBDDBACDA	ACDBDABACBCDABA	ADBABCDCACBDABA	ADBDCBACBACDA
ACDABCBDDBADCA	ACDBDABCABCDA	ADBABDCACBCDABA	ADBDCBCABACDA
ACDABDABCBDCA	ACDBDABCBACDA	ADBABDCBCACDA	ADCABACBDBCDA
ACDABDBACBCDA	ACDBDACBABCDA	ADBACABCBDCDA	ADCABCABDBCDA
ACDABDBCABCDA	ACDBDCABCADABA	ADBACABCDBCDA	ADCABCBDACDA
ACDABDBCBCADABA	ACDBDCBABCADABA	ADBACABCDCBDABA	ADCABDBACBCDABA
ACDACBABCDBDA	ACDBDCBACBADABA	ADBACABDCBCDABA	ADCABDBCABCDA
ACDACBABDBCDA	ACDBDCBCABADABA	ADBACBACBDCDA	ADCACBABDBCDA
ACDACBABDCBDABA	ACDCABADBCCDABA	ADBACBACDBCDA	ADCACBDBABCDA
ACDACBCDBABDABA	ACDCABCBADBDABA	ADBACBACDCBDABA	ADCBACABDBCDA

【評語】 080405

本研究延伸平面上的一筆畫路徑，探討空間上的一筆畫路徑。從縫鈕扣的問題出發，尋找「最短」連續縫線。經由有系統的分類方法和探究，對三孔扣、四孔扣、五孔扣以及六孔扣的問題皆找出最佳解，值得嘉許。另外對處理縫線可跨越交叉的複雜情形，本研究也能適時運用電腦試算軟體，協助資料篩選以提高效率，頗具創意。