中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080404

翩翩起舞－間隔排法的探討

學校名稱：新北市樹林區文林國民小學

作者：	指導老師：
小六 林子欽	林忠正 王郁惠

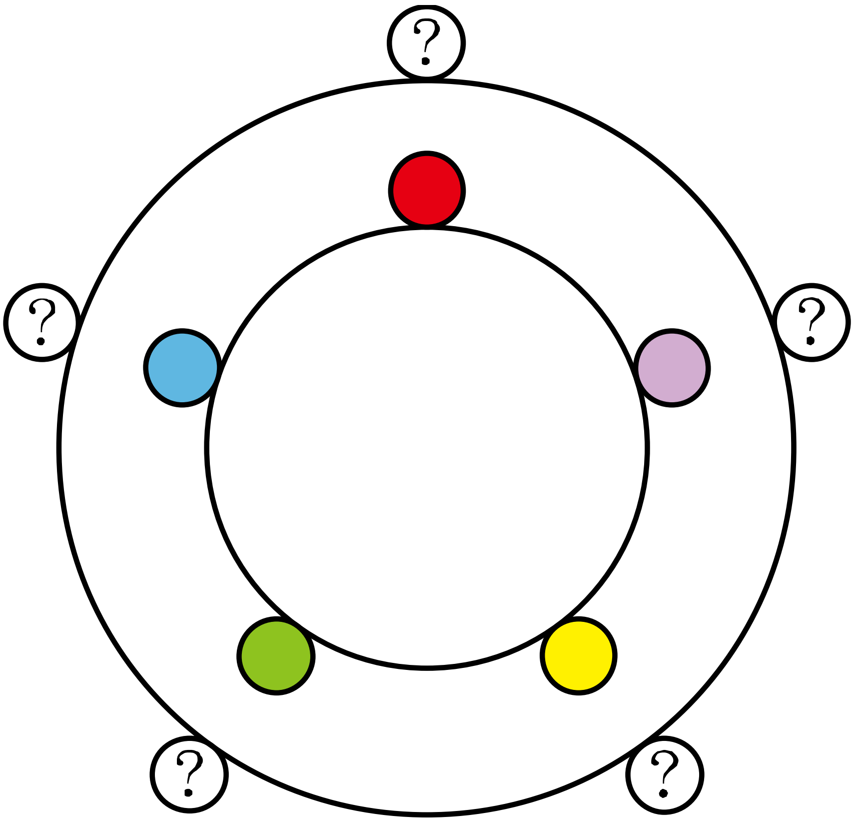
關鍵詞：同餘、完全剩餘系

翩翩起舞—間隔排法的探討

摘要

有 5 對男女舞者穿著 5 種不同顏色的舞衣(男舞者舞衣顏色各異，女舞者舞衣亦然)，圍成內、外兩圈跳舞。每當他們跳完一小節後，內圈的舞者會以順時針方向移動一個位置來交換舞伴，現在如果女生排在內圈(如圖一)，那麼外圈的男生該怎麼排，才能使得排定跳舞位置時，以及每次交換舞伴後，恰好都只有 1 對男女舞者穿著同顏色的舞衣。

我們探討 3 對、5 對、7 對、……15 對男女舞者的跳舞位置，觀察這些位置的排法，找到一種有規律的排列方式，將它稱為間隔排法，間隔排法中的間隔數以 n 表示，後來利用間隔排法排出 m 對男女舞者的跳舞位置，並說明間隔排法的適用性，最後歸納得到：當(m、n)=1 且(m、n-1)=1 時，就可利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置。

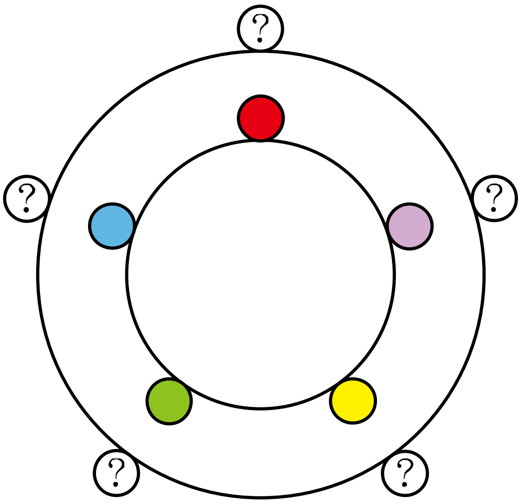


圖一

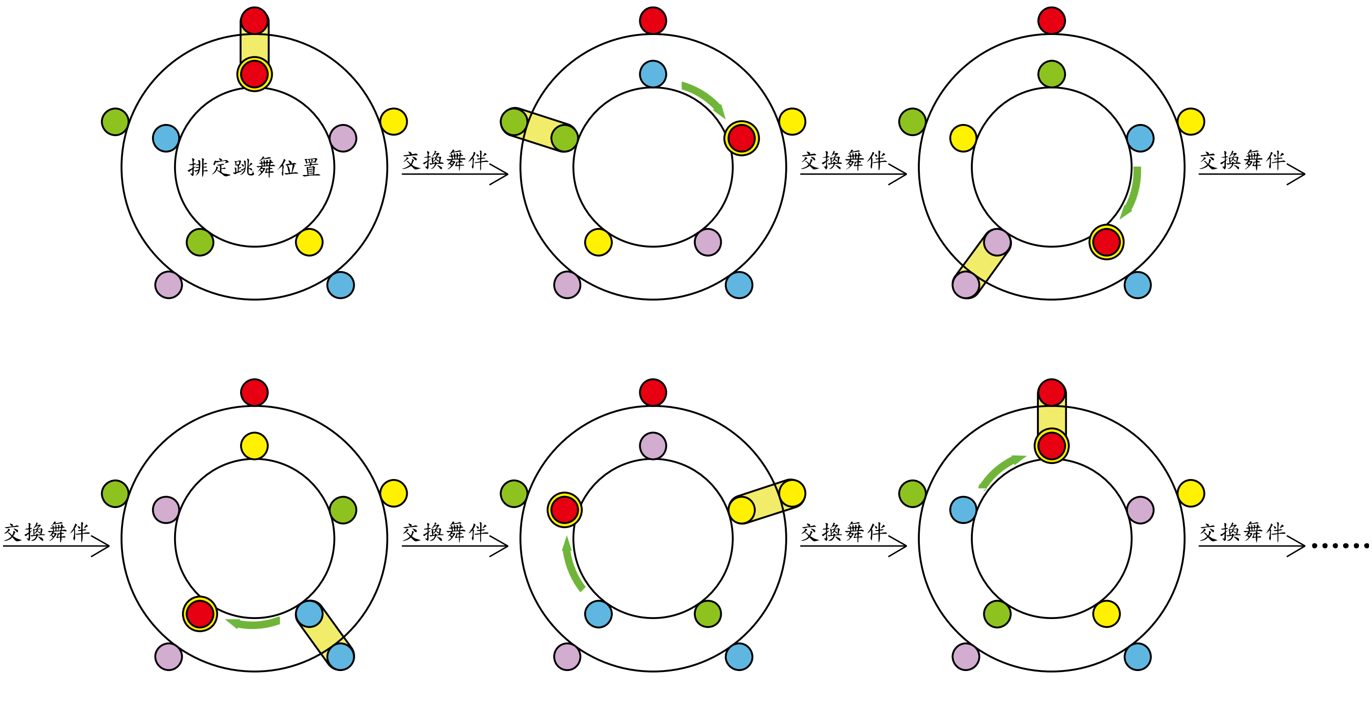
壹、研究動機：

學校的數學網站裡有一道題目如下：有 5 對男女舞者穿著 5 種不同顏色的舞衣(男舞者舞衣顏色各異，女舞者舞衣亦然)，圍成內、外兩圈跳舞。每當他們跳完一小節後，內圈的舞者會以順時針方向移動一個位置來交換舞伴，現在如果女生排在內圈(如圖二~1)，那麼外圈的男生該怎麼排，才能使得排定跳舞位置時，以及每次交換舞伴後，恰好都只有 1 對男女舞者穿著同顏色的舞衣(如圖二~2)。

這個問題，我和同學討論了很久，於是我們去請教老師，老師除了提供我們思考的方向外，並要我們增加跳舞人數，做更進一步的探討。



圖二~1



圖二~2：m=5

貳、研究目的：

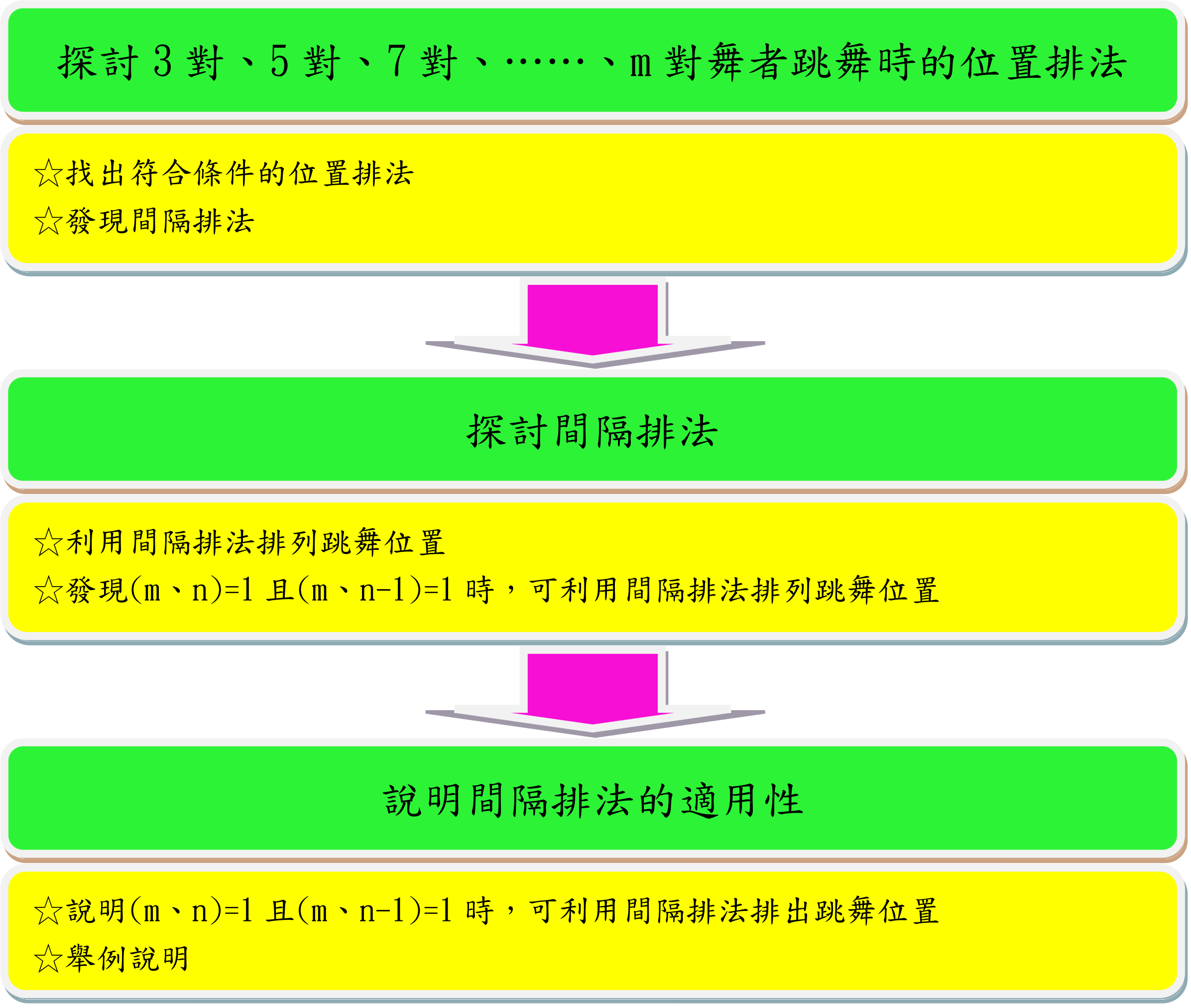
一、探討 3 對(3 男 3 女)、5 對(5 男 5 女)、7 對(7 男 7 女)、……m 對(m 男 m 女，m 為奇數)男女舞者跳舞時的位置排法，這些排法必須使得排定跳舞位置時，以及每次交換舞伴後，恰巧都只有 1 對男女舞者穿著同顏色(數字)的衣服。

二、觀察符合條件的排法，從中找出規律。

參、研究設備及器材：紙、筆、電腦、簡易跳舞模型

肆、研究過程：

一、研究過程流程圖



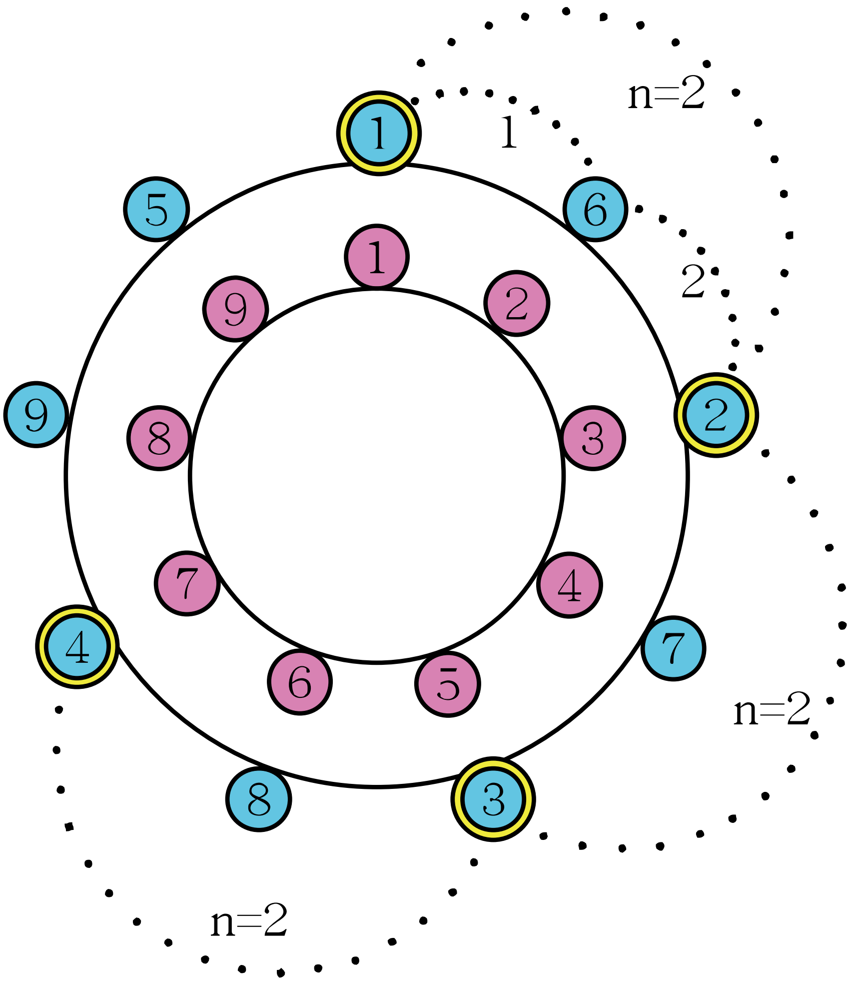
二、定義：

(一)為了方便說明及避免過多的顏色名稱，我們就用數字 1、2、3、……m 分別來標記這 m 種顏色(如圖三)，此外內圈為女生排列的位置，以紅色圓圈表示，且依序由 1 到 m 排成一圈，而外圈男生排列的位置，以藍色圓圈表示。

(二)符號

1.m：跳舞的對數，本研究中 m 要為奇數，且要大於等於 3。

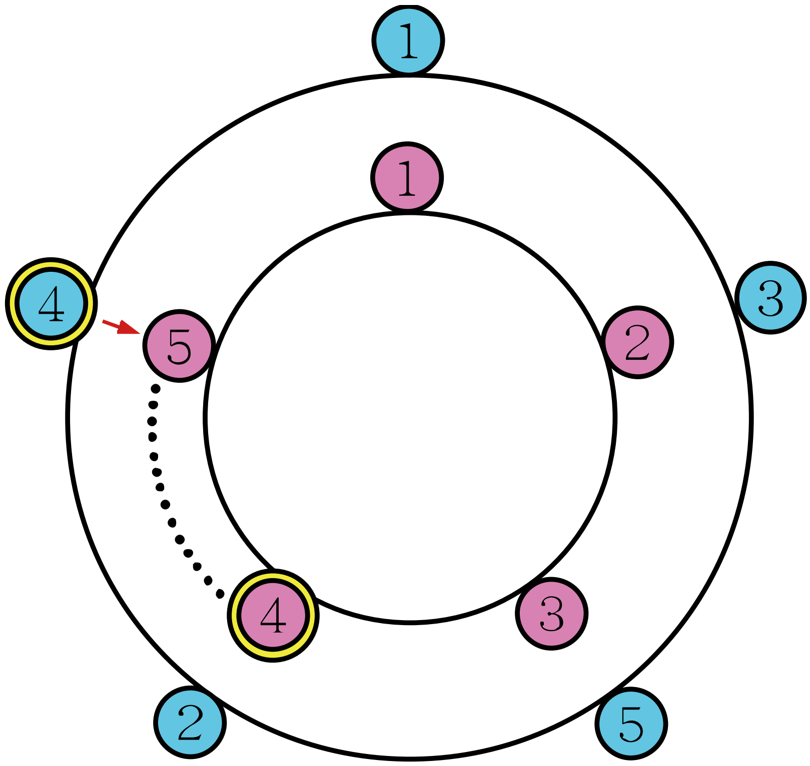
2.n：間隔數，是指外圈要排定位置的第 i 個人與前一個已排定位置的第(i-1)個人，兩者之間的間隔數量，如圖三外圈的 1 和 2、2 和 3、3 和 4，其間隔數都是 2，本研究中 n 為 2 到 m-1。



圖三：紅色圓圈代表女生，藍色圓圈代表男生

(三)名詞解釋

1.數字差：內圈數字 m，依順時針方向到等同外圈數字 m 的位置之間隔數，此間隔數稱為數字差，如圖四數字 4 的數字差為 1，數字 5 的數字差為 3。



圖四

【說明】:(1)表一是圖四內圈數字 m 的數字差。

表一

m	1	2	3	4	5
數字差	0	2	4	1	3

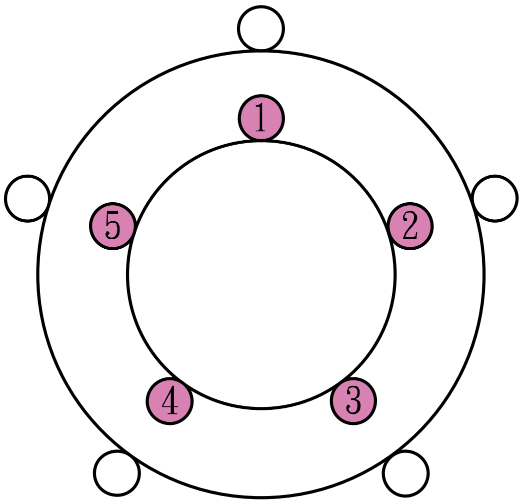
(2)當 m 的數字差為 k 時，表示**內、外**圈的 m 會在第 k 次交換舞伴後相遇，例如 5 的數字差為 3，表示內、外圈的 5 會在第 3 次交換舞伴後相遇，而數字差為 0 的數，表示排定跳舞位置時即相遇。

(3)要排出符合條件的跳舞位置，m 的數字差要為 0、1、2、……m-1 這 m 個數都要有，缺一不可，否則無法在每次交換舞伴後，恰巧都只有 1 對相同的數字相遇。

2.間隔排法：排外圈的跳舞位置是按照固定的間隔數去排下一個數字，這樣的排法將它稱為間隔排法，如第四頁圖三和第五頁圖四的排法皆為間隔排法，圖三中的 n=2，圖四中的 n=3。

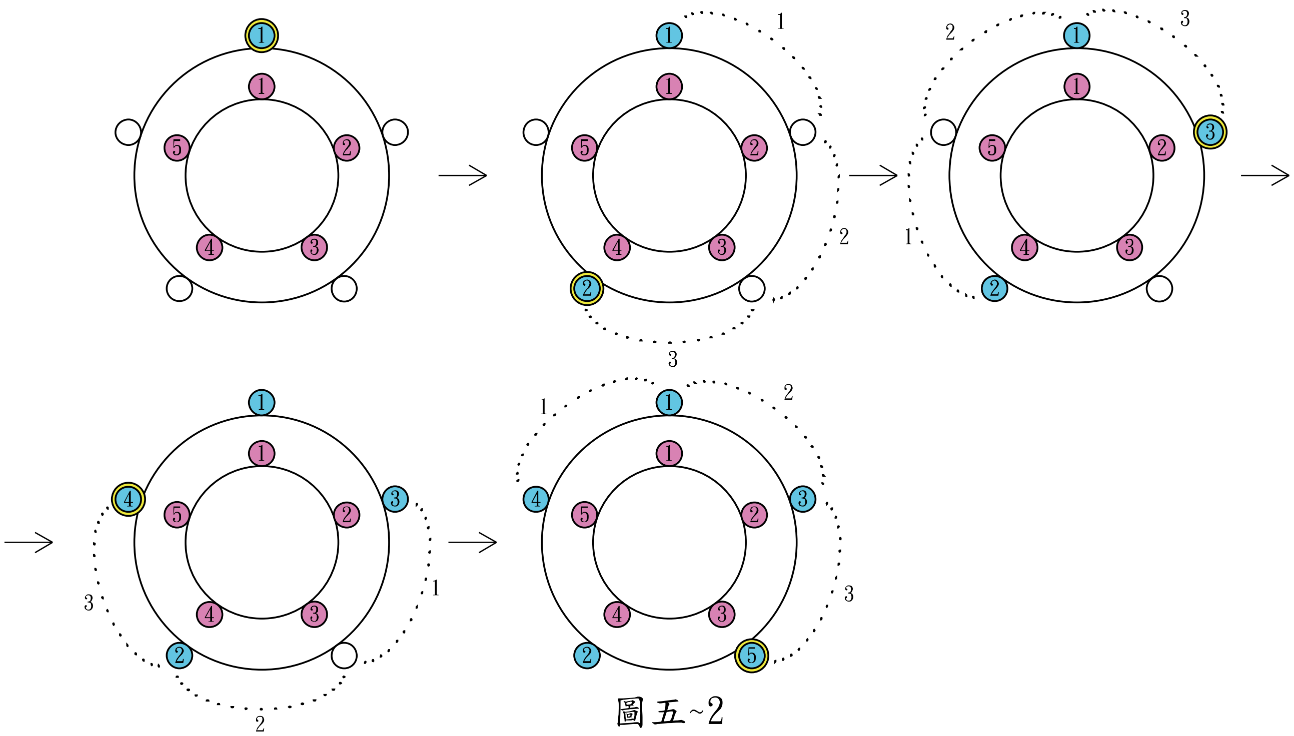
(四)排列跳舞位置的過程：舉 5 男 5 女以間隔排法說明之。

1.先排內圈女生位置，其方式為依順時針方向，從數字 1、數字 2、……由小到大依序排列，如圖五~1。



圖五~1

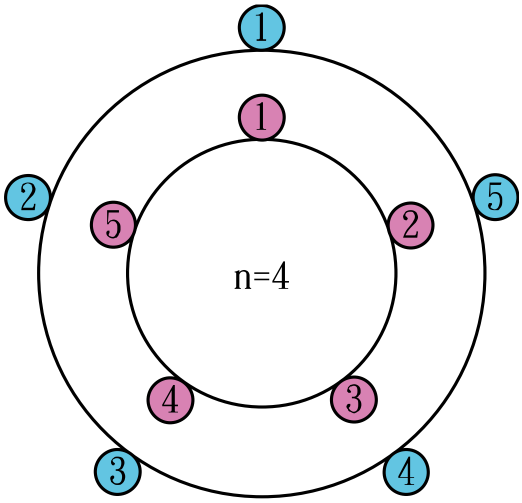
2.再排外圈男生位置，其方式為按間隔數依序排列，本研究中都先排定數字 1，且與內圈的 1 構成一對，如圖五~2，這時排列的間隔數 n=3。



圖五~2

三、探討 3 男 3 女、5 男 5 女、7 男 7 女、……、15 男 15 女跳舞時的位置排法

(一) 舉例說明圖中符號的意義，圖六為 5 男 5 女以間隔排法排列跳舞位置。



m	1	2	3	4	5
數字差	0	3	1	4	2

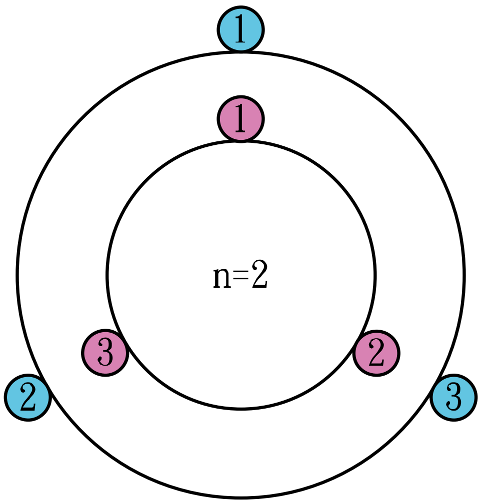
圖六：m=5，n=4

【說明】：1.m=5 表示有 5 個男生、5 個女生。

2.n=4 表示間隔數為 4。

3.列出內圈每個數的數字差。

(二)3 男 3 女的排法



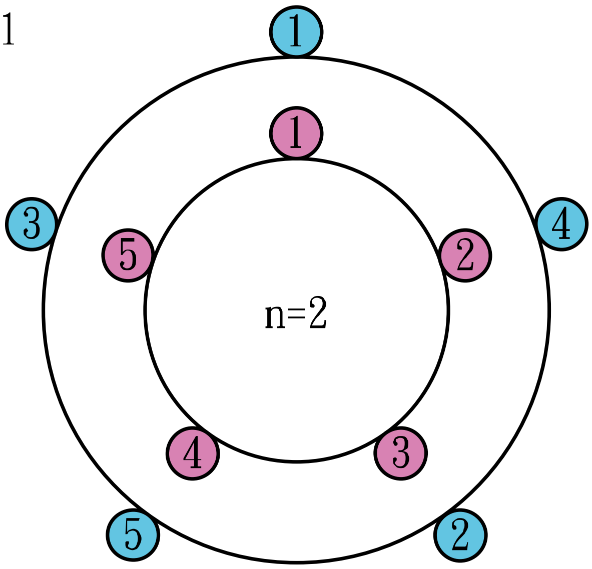
m	1	2	3
數字差	0	1	2

圖七：m=3，n=2

我發現：有 1 種間隔排法，其數字差為 0、1、2。

(三)5 男 5 女的排法：

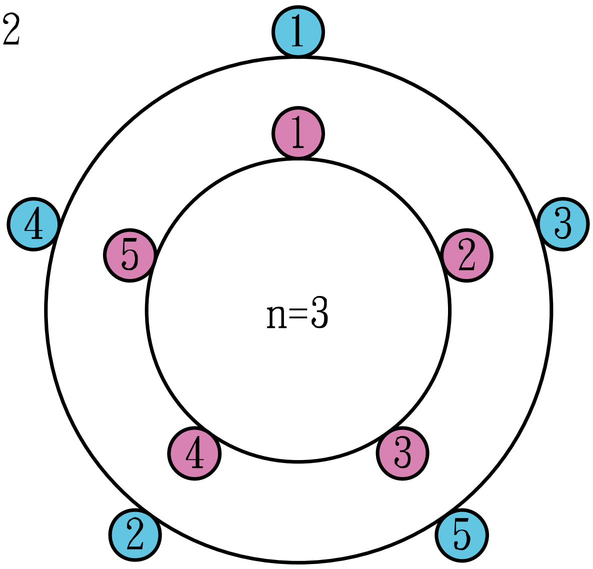
1



m	1	2	3	4	5
數字差	0	1	2	3	4

圖八~1：m=5，n=2

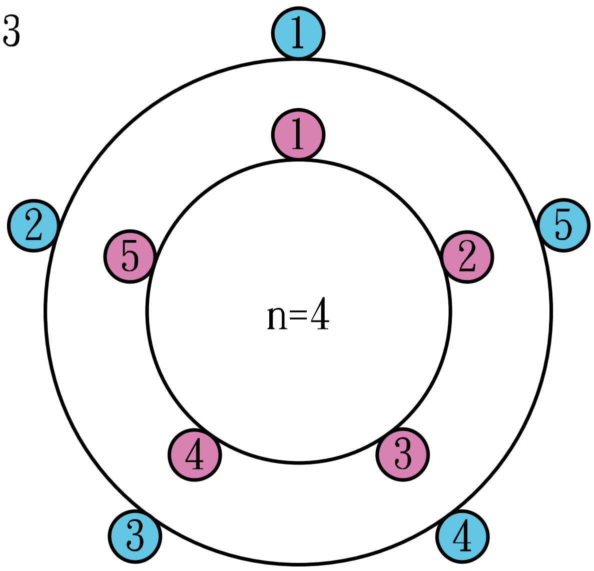
2



m	1	2	3	4	5
數字差	0	2	4	1	3

圖八~2：m=5，n=3

3



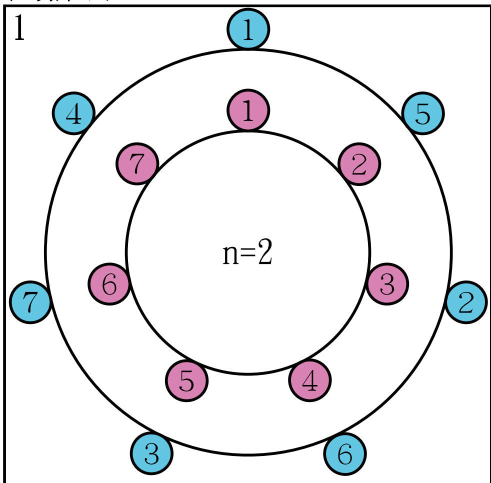
m	1	2	3	4	5
數字差	0	3	1	4	2

圖八~3：m=5，n=4

我發現：有 3 種間隔排法，其數字差皆為 0、1、2、3、4。

(四)7 男 7 女的排法：

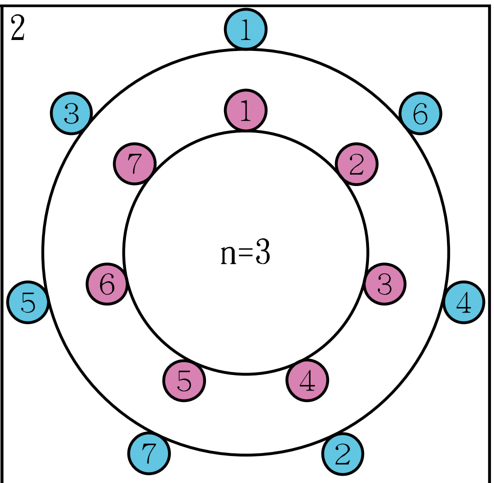
1



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	1	2	3	4	5	6

圖九~1：m=7，n=2

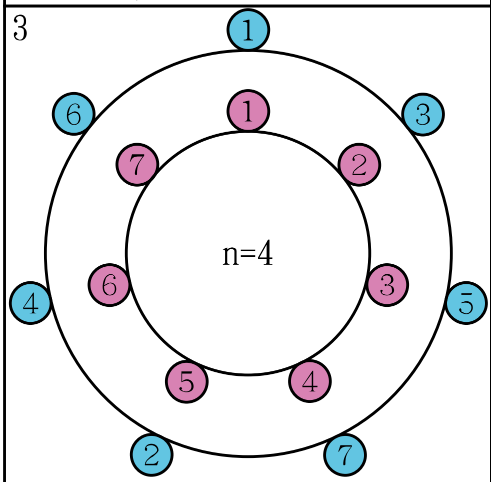
2



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	2	4	6	1	3	5

圖九~2：m=7，n=3

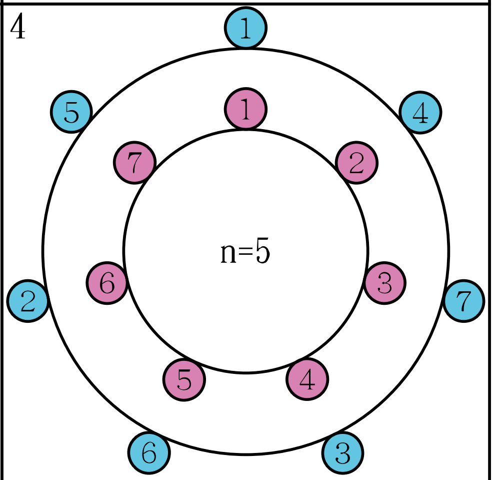
3



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	3	6	2	5	1	4

圖九~3：m=7，n=4

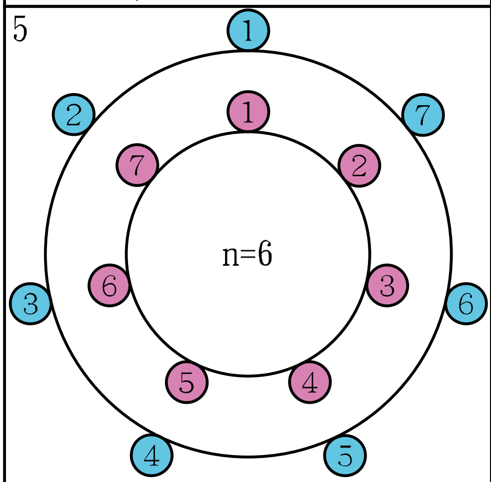
4



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	4	1	5	2	6	3

圖九~4：m=7，n=5

5



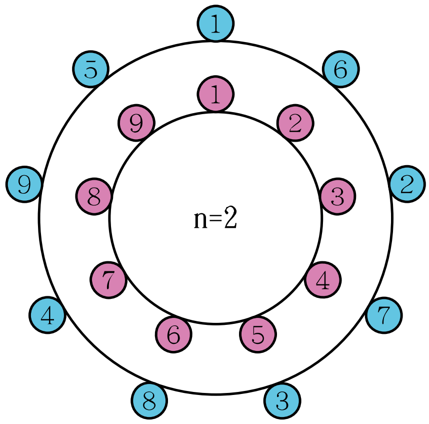
m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	5	3	1	6	4	2

圖九~5：m=7，n=6

我發現：有 5 種間隔排法，其數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6。

(五)9 男 9 女的排法：

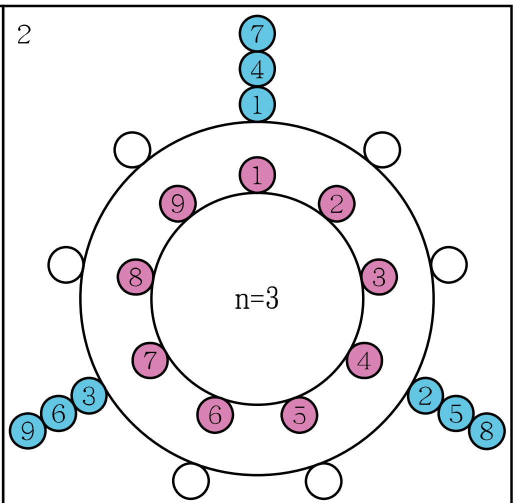
1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	1	2	3	4	5	6	7	8

圖十~1：m=9，n=2

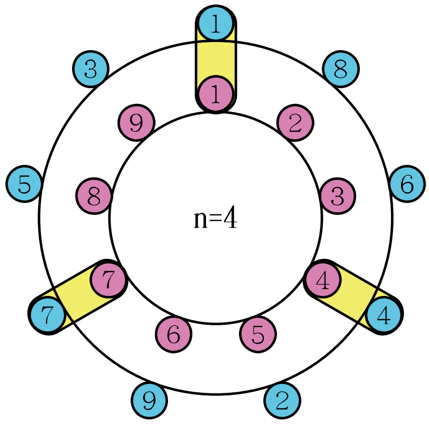
2



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	2	4	6	8	1	3	5	7

圖十~2：m=9，n=3(不符合條件要求)

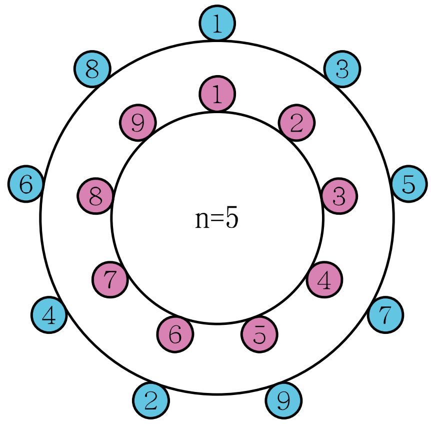
3



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	3	6	0	3	6	0	3	6

圖十~3：m=9，n=4(不符合條件要求)

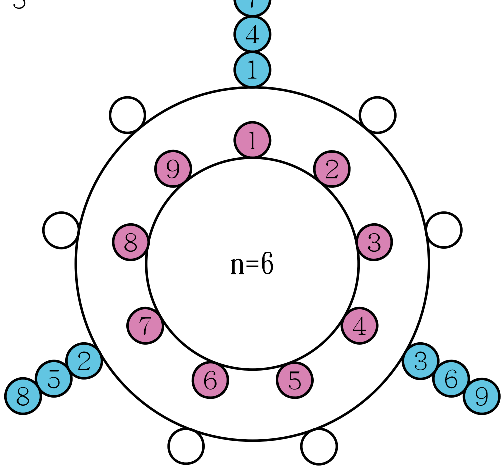
4



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	4	8	3	7	2	6	1	5

圖十~4：m=9，n=5

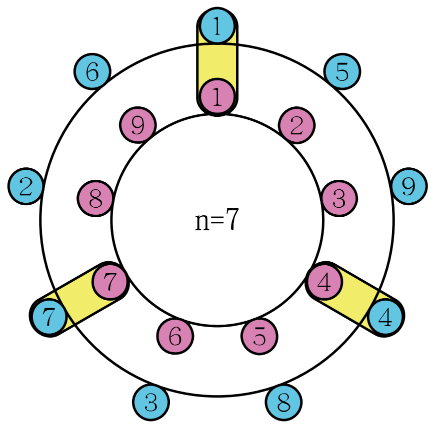
5



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	5	1	6	2	7	3	8	4

圖十~5：m=9，n=6(不符合條件要求)

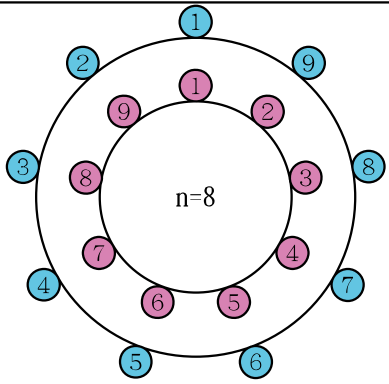
6



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	6	3	0	6	3	0	6	3

圖十~6：m=9，n=7(不符合條件要求)

7



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	7	5	3	1	8	6	4	2

圖十~7：m=9，n=8

我發現：1.並非所有間隔排法都可以排出符合條件的跳舞位置。

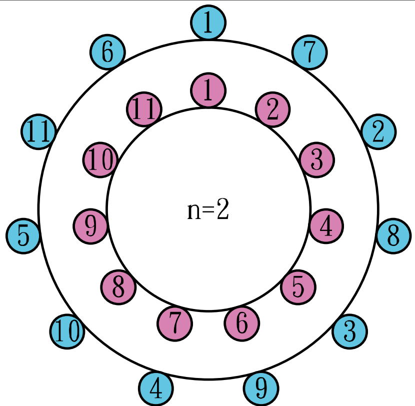
2.有 3 種間隔排法，此時的 n 分別為 2、5、8，數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6、7、8。

3.觀察圖十~2 和圖十~5 知，當 n 為 3、6 時，有些位置會一直重覆排，但有些位置卻沒有人排，此時數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6、7、8。

4.觀察圖十~3 和圖十~6 知，當 n 為 4、7 時，有 3 對男女生穿著同數字的衣服，此時數字差皆為 0、3、6。

(六)11 男 11 女的排法：

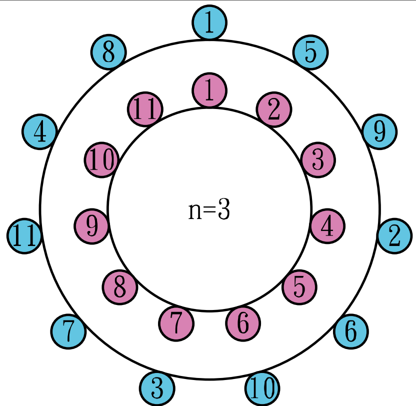
1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

圖十一~1：m=11，n=2

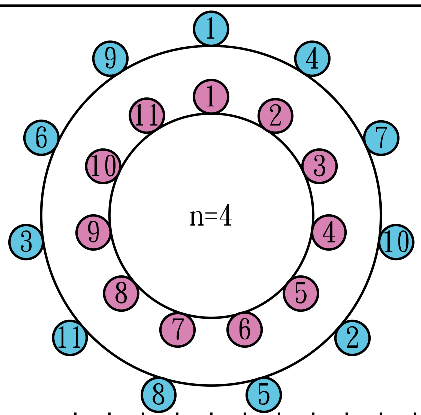
2



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9

圖十一~2：m=11，n=3

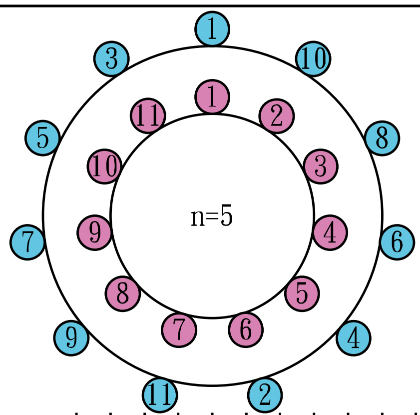
3



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

圖十一~3：m=11，n=4

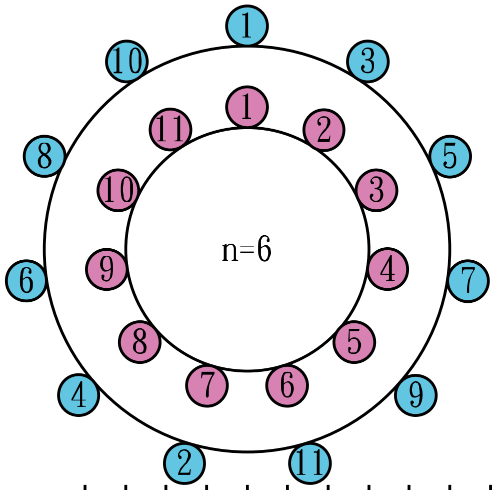
4



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7

圖十一~4：m=11，n=5

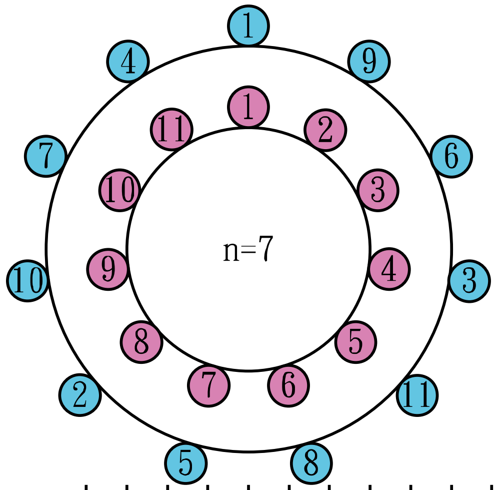
5



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6

圖十一~5：m=11，n=6

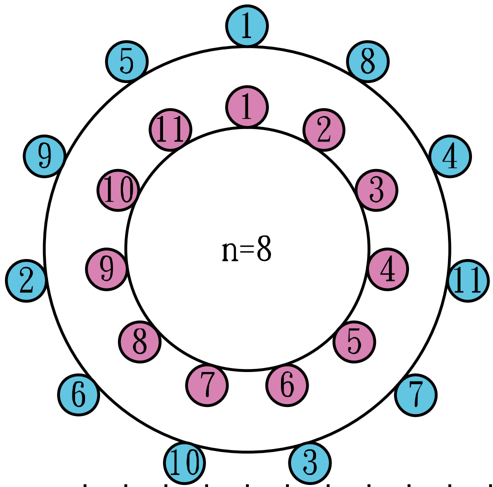
6



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

圖十一~6：m=11，n=7

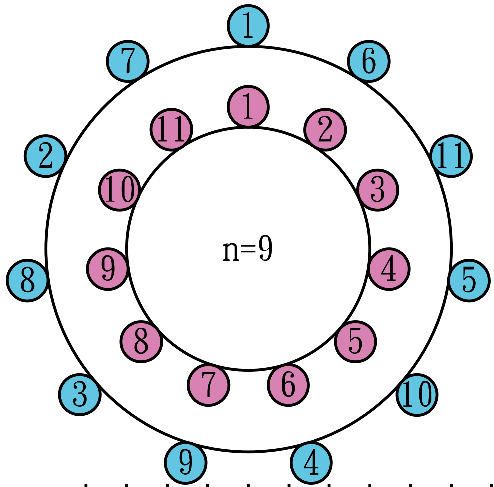
7



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4

圖十一~7：m=11，n=8

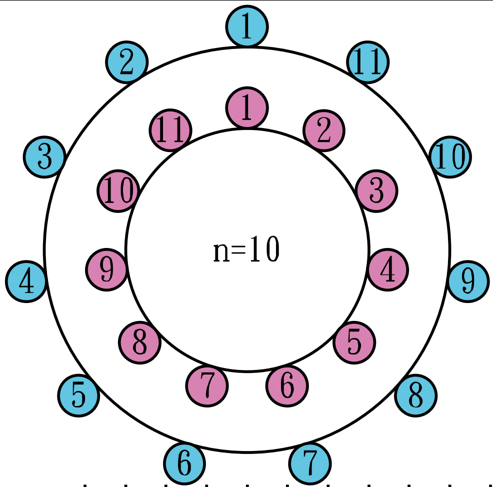
8



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3

圖十一~8：m=11，n=9

9



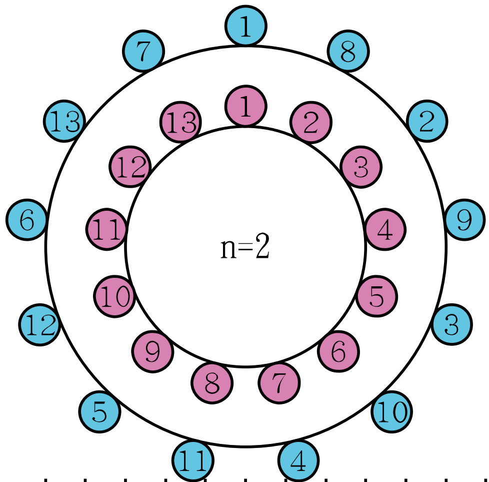
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
數字差	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

圖十一~9：m=11，n=10

我發現：有 9 種間隔排法，其數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10。

(七)13 男 13 女的排法：

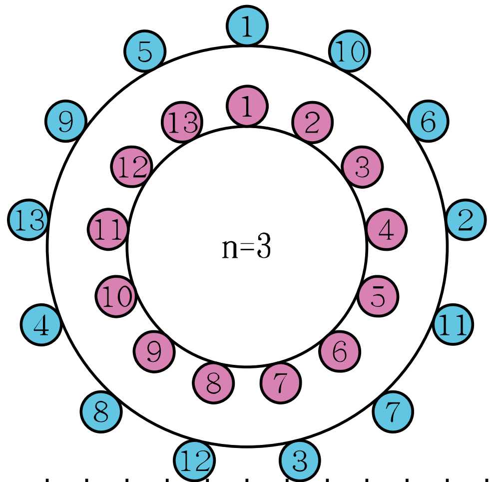
1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

圖十二~1：m=13，n=2

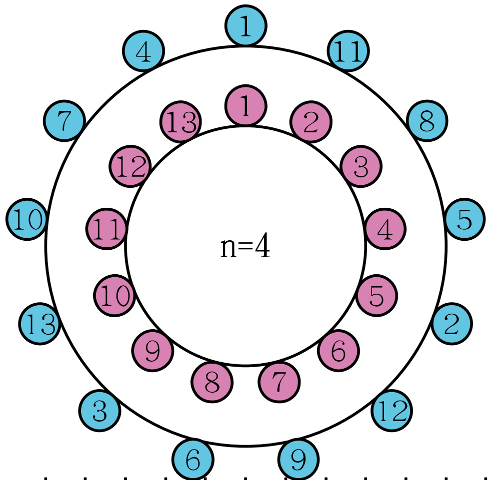
2



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11

圖十二~2：m=13，n=3

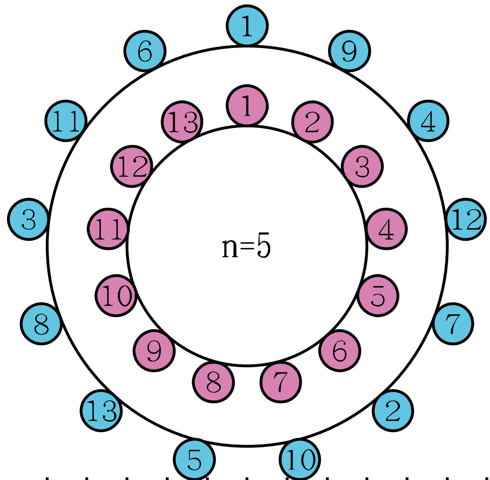
3



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10

圖十二~3：m=13，n=4

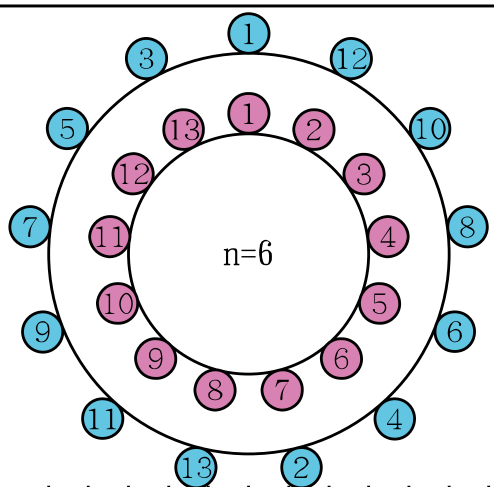
4



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9

圖十二~4：m=13，n=5

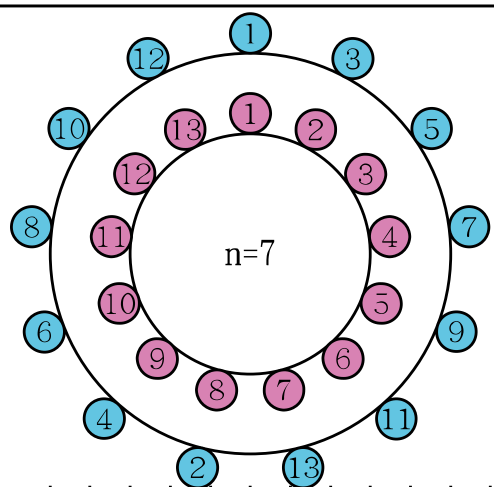
5



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8

圖十二~5：m=13，n=6

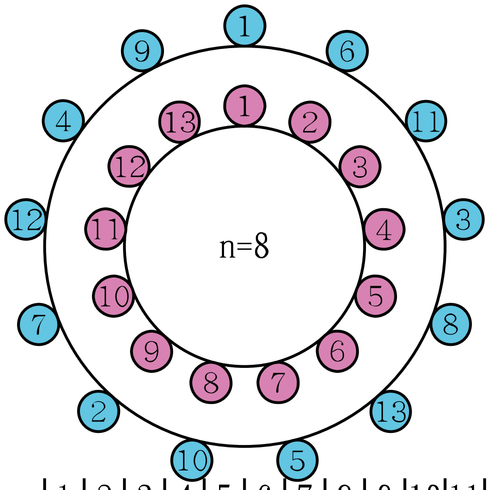
6



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7

圖十二~6：m=13，n=7

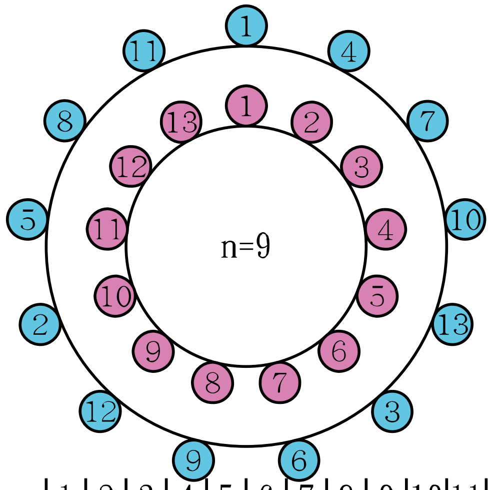
7



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6

圖十二~7：m=13，n=8

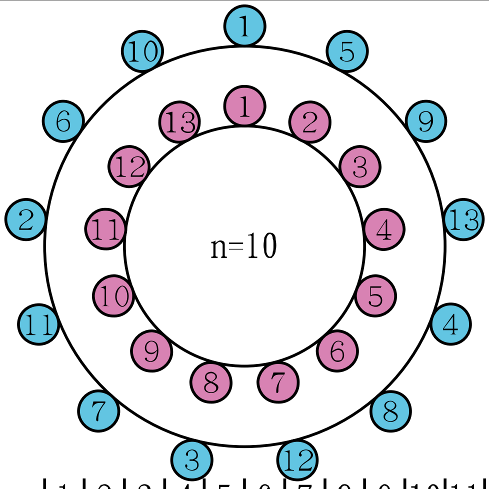
8



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5

圖十二~8：m=13，n=9

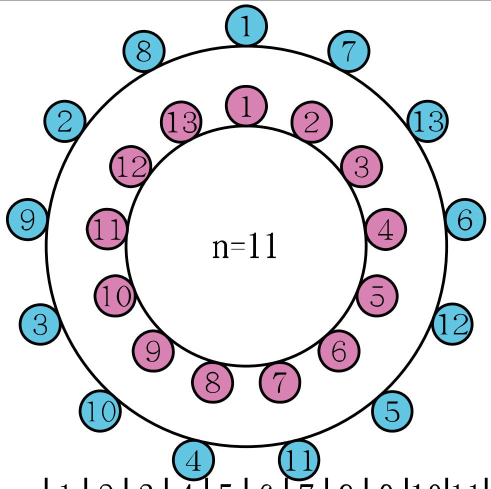
9



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4

圖十二~9：m=13，n=10

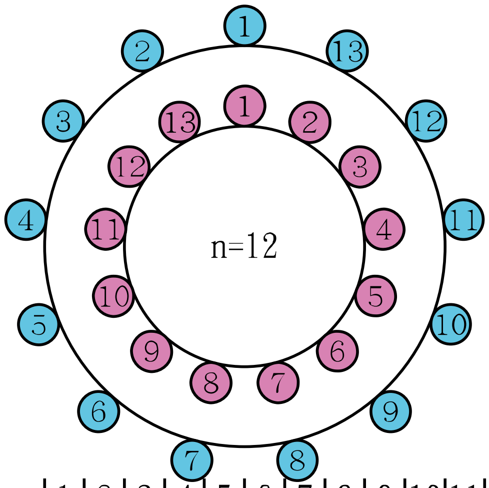
10



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3

圖十二~10：m=13，n=11

11



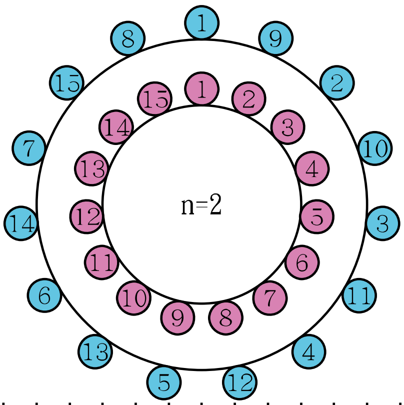
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
數字差	0	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2

圖十二~11：m=13，n=12

我發現：有 11 種間隔排法，其數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12。

(八)15 男 15 女的排法：

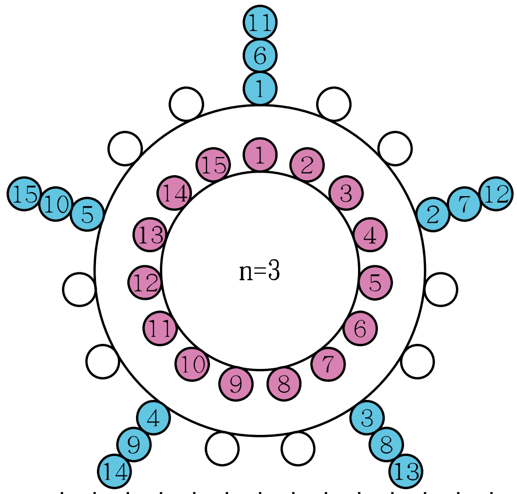
1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

圖十三~1：m=15，n=2

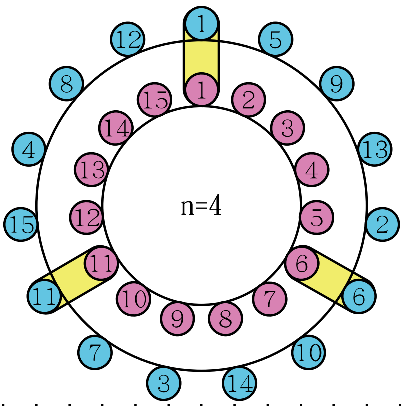
2



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13

圖十三~2：m=15，n=3(不符合條件要求)

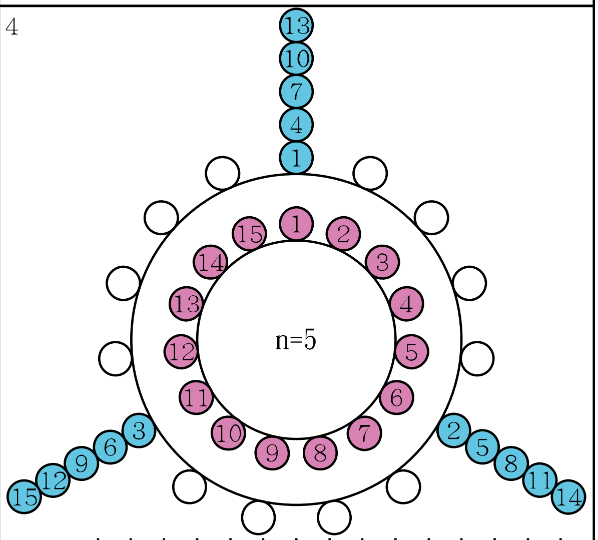
3



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12

圖十三~3：m=15，n=4(不符合條件要求)

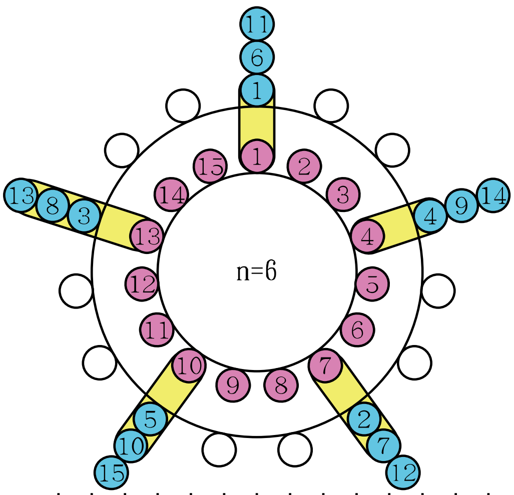
4



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11

圖十三~4：m=15，n=5(不符合條件要求)

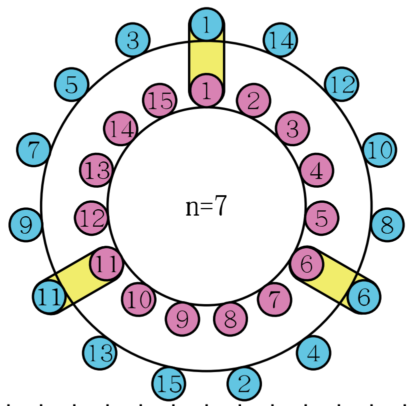
5



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10

圖十三~5：m=15，n=6(不符合條件要求)

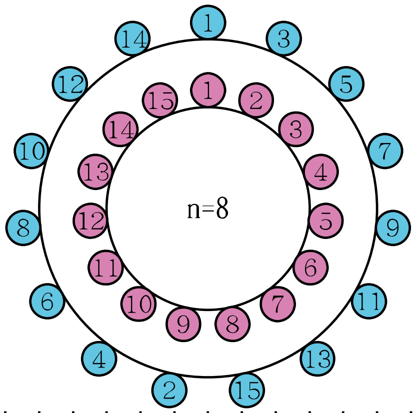
6



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	6	12	3	9	0	6	12	3	9	0	6	12	3	9

圖十三~6：m=15，n=7(不符合條件要求)

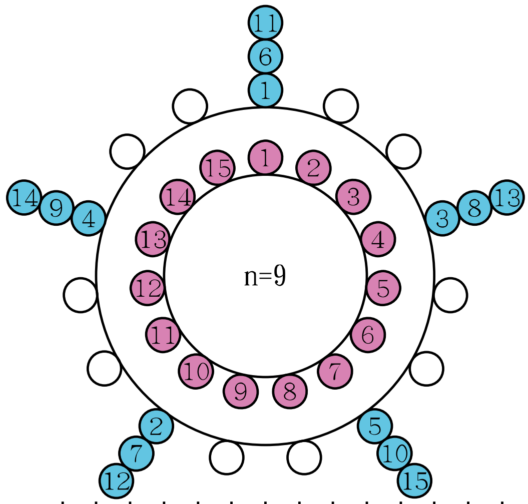
7



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	7	14	6	13	5	12	4	11	3	10	2	9	1	8

圖十三~7：m=15，n=8

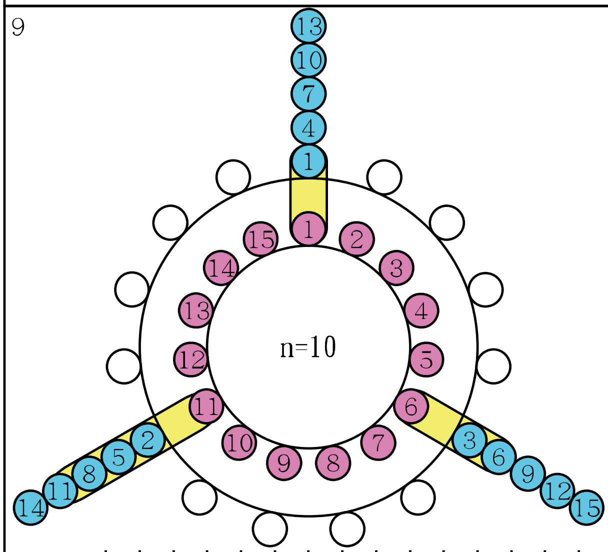
8



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7

圖十三~8：m=15，n=9(不符合條件要求)

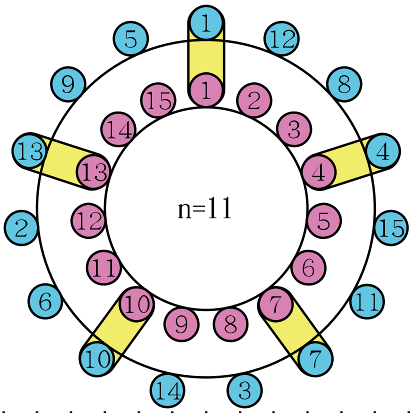
9



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	9	3	12	6	0	9	3	12	6	0	9	3	12	6

圖十三~9：m=15，n=10(不符合條件要求)

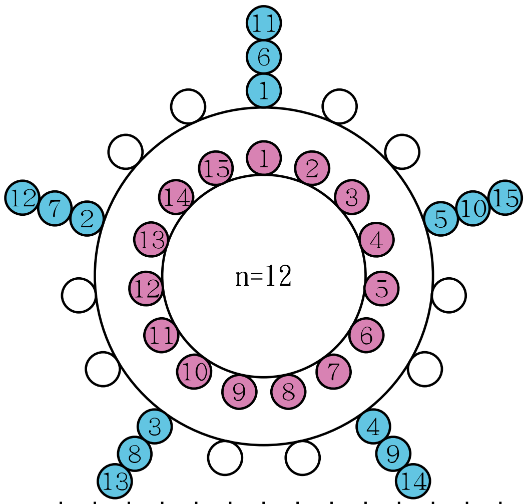
10



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	10	5

圖十三~10：m=15，n=11(不符合條件要求)

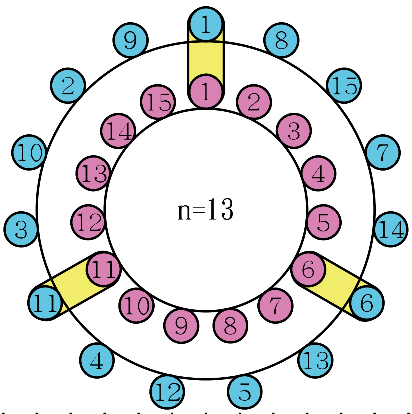
11



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	11	7	3	14	10	6	2	13	9	5	1	12	8	4

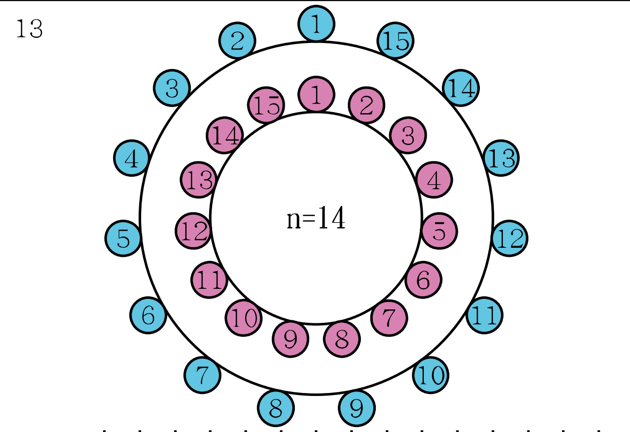
圖十三~11：m=15，n=12(不符合條件要求)

12



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	12	9	6	3	0	12	9	6	3	0	12	9	6	3

圖十三~12：m=15，n=13(不符合條件要求)



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
數字差	0	13	11	9	7	5	3	1	14	12	10	8	6	4	2

圖十三~13：m=15，n=14

我發現：1.並非所有間隔排法都可以排出符合條件的跳舞位置。

2.有 3 種間隔排法，此時的 n 分別為 2、8、14。數字差皆為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14。

3.觀察第 15 頁的圖十三~2、圖十三~4、圖十三~5，第 16 頁的圖十三~8、圖十三~9、圖十三~11 知，當 n 為 3、5、6、9、10、12 時，有些位置會一直重覆排，但有些位置卻沒有人排。

4.觀察第 15 頁的圖十三~3、圖十三~5、圖十三~6，第 16 頁的圖十三~9、圖十三~10、圖十三~12 知，當 n 為 4、6、7、10、11、13 時，不只 1 對男女生穿著同數字的衣服。

5.觀察第 15 頁的圖十三~5、第 16 頁的圖十三~9 知，當 n 為 6、10 時，同時具有位置重覆排列和不只 1 對男女生穿著同數字的衣服。

(九)將(二)~(八)的發現整理成表二

表二

人數(m)	間隔排法中符合條件的 n 值	位置會重覆排列的 n 值	不只 1 對男女生穿著同數字的衣服的 n 值
m=3	n=2	×	×
m=5	n=2、3、4	×	×
m=7	n=2、3、4、5、6	×	×
m=9	n=2、5、8	n=3、6	n=4、7
m=11	n=2、3、4、5、6、7、8、9、10	×	×
m=13	n=2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12	×	×
m=15	n=2、8、14	n=3、5、6、9、10、12	n=4、6、7、10、11、13

分析表二發現：1.當 m=3、5、7、11、13 時，都可利用間隔排法排出跳舞位置，此時的 n 為 2 到 m-1。

2.當 m=9 時，n 要為 2、5、8 才可利用間隔排法排出跳舞位置。

3.當 $m=15$ 時，n 要為 2、8、14 才可利用間隔排法排出跳舞位置。

4.上述 1~3 中可利用間隔排法排出跳舞位置，其$(m、n)=1$ 且 $(m、n-1)=1$。

5.位置有重覆排列的情形，其$(m、n)\neq 1$。

6.不只有 1 對男女生穿著同數字的衣服，其$(m、n-1)\neq 1$。

(十)探討上述(九)的發現並說明其正確性和適用性

1.為了方便探討上述(九)的發現並究其原因，我們不妨將 m 男 m 女利用間隔排法排列跳舞位置時，外圈數字(m)與被對應的內圈數字整理成表三，表三中的間隔數為 n。

表三

<table>
<tr><td>A</td><td colspan="2">外圈數字(m)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>……</td><td>m</td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">與外圈數字(m)相對應的內圈數字(當數字大於 m 時，要減去 m)</td><td>1</td><td>1+n</td><td>1+2n</td><td>1+3n</td><td>1+4n</td><td>……</td><td>1+(m-1)n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">數字差(B 欄的數減 A 欄的數)</td><td>原始</td><td>0</td><td>n-1</td><td>2n-2</td><td>3n-3</td><td>4n-4</td><td>……</td><td>1+m・n-n-m</td></tr>
<tr><td>整理後</td><td>0</td><td>n-1</td><td>2(n-1)</td><td>3(n-1)</td><td>4(n-1)</td><td>……</td><td>(m-1)(n-1)</td></tr>
</table>

2.表三中 B 欄內的數，可由排列跳舞位置的過程中發現，每增加一個間隔數 n，就排下一個位置。

3.表三中 B 欄內的 1、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)・n 這 m 個數要為模 m 的一組完全剩餘系，因為如果它不是，則內、外圈的數就無法「一對一」對應，這會造成有些位置一直重覆排列，但有些位置卻沒有人排，像第 10 頁的圖十~2、圖十~5，第 15 頁的圖十三2、圖十三~4、圖十三~5，第 16 頁的圖十三~8、圖十三~9、圖十三~11。

4.說明表三中 B 欄內的這 m 個數為模 m 的一組完全剩餘系。

(1)定義 1：設 m 是給定的正整數，k_r($r=0$、1、2、3、……、$m-1$)表示所有形如 $qm+r$($q\in Z$)的整數組成的集合，則 k_0、k_1、k_2、……、k_{m-1} 稱為模 m 的剩餘類。在模 m 的剩餘類 k_0、k_1、k_2、……、k_{m-1} 中各取一個數 $a_r\in k$，$r=0$、1、2、3、……、$m-1$，則這 m 個數 a_0、a_1、a_2、……、a_{m-1} 為模 m 的一組完全剩餘系。

(2)引理 1：m 個整數做成模 m 的一個完全剩餘系的充分必要條件是這 m 個數兩兩對模 m 不同餘。

【說明】：由定義 1 即知引理 1 成立。

(3)性質 1：若 $na\equiv nb(\mathrm{mod}\,m)$且$(m、n)=1$ 則 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$

【說明】：$\because na\equiv nb(\mathrm{mod}\,m) \Rightarrow m \mid na-nb \Rightarrow m \mid n(a-b)$

$\because (m、n)=1 \quad \therefore m \mid a-b \Rightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$

(4)引理 2：若 a_1、a_2、a_3、……、a_m 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n)=1，則 na_1、na_2、na_3、……、na_m 也是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：如果 $i\neq j$，$1\leqq i$，$j\leqq m$，使 $na_i\equiv na_j(\mathrm{mod}\,m)$，因為(m、n)=1，則由性質 1 知 $a_i\equiv a_j(\mathrm{mod}\,m)$，這與所假設的互相矛盾。這表明 na_1、na_2、na_3、……、na_m 中沒有任意兩數對模 m 同餘，故再由引理 1 知它們是模 m 的一組完全剩餘系。

(5)定理 1：若 0、1、2、3、……、m-1 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n)=1，則 0、n、2n、3n、……、(m-1)・n 也是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：由引理 2 即知定理 1 成立。

(6)性質 2：若 $a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m)$，$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\,m)$，則 $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\mathrm{mod}\,m)$

【說明】：$\because a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m)$ $\therefore m\mid a_1-b_1 \Rightarrow a_1-b_1=mt_1 \Rightarrow a_1=b_1+mt_1$……①

$\because a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\,m)$ $\therefore m\mid a_2-b_2 \Rightarrow a_2-b_2=mt_2 \Rightarrow a_2=b_2+mt_2$……②

由①±② $\Rightarrow a_1\pm a_2=(b_1\pm b_2)+m(t_1\pm t_2) \Rightarrow (a_1\pm a_2)-(b_1\pm b_2)= m(t_1\pm t_2)$

$\therefore m\mid (a_1\pm a_2)-(b_1\pm b_2) \Rightarrow a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\mathrm{mod}\,m)$

(7)引理 3：若 a_1、a_2、a_3、……、a_m 是模 m 的一組完全剩餘系，則對任意整數 b，會有 $b+a_1$、$b+a_2$、$b+a_3$、……、$b+a_m$ 也是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：由引理 1 知，只要證明 $b+a_1$、$b+a_2$、$b+a_3$、……、$b+a_m$ 這 m 個數對模 m 兩兩不同餘即可。如果 $i\neq j$，$1\leqq i$，$j\leqq m$，使 $b+a_i\equiv b+a_j(\mathrm{mod}\,m)$，則由性質 2 知 $a_i\equiv a_j(\mathrm{mod}\,m)$，這不可能，因為 a_1、a_2、a_3、……、a_m 中沒有任意兩數對模 m 同餘，所以 $b+a_1$、$b+a_2$、$b+a_3$、……、$b+a_m$ 是模 m 的一組完全剩餘系。

(8)定理 2：若 0、n、2n、3n、……、(m-1)・n 是模 m 的一組完全剩餘系，則對於整數 1，會有 1+0、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)・n 也是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：由引理 3 即知定理 2 成立。

(9)推論 1：若 0、1、2、3、……、m-1 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n)=1，則由定理 1 知 0、n、2n、3n、……、(m-1)・n 也是模 m 的一組完全剩餘系。若 0、n、2n、3n、……、(m-1)・n 是模 m 的一組完全剩餘系，則由定理 2 知，對於整數 1，會有 1+0、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)・n 也是模 m 的一組完全剩餘系。

(10)結論 1：要使表三中 B 欄內的 1、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)・n 這 m 個數為模 m 的一組完全剩餘系，其條件是(m、n)=1。

5.表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這 m 個數要為模 m 的一組完全剩餘系，因為如果它不是，就表明有些數字差會相同，這樣就無法在排定跳舞位置時或是每次交換舞伴後，都只有 1 對男女舞者穿著同數字的衣服，像第 10 頁的圖十~3、圖十~6，第 15 頁的圖十三~3、圖十三~5、圖十三~6，第 16 頁的圖十三~9、圖十三~10、圖十三~12 一樣，有不只 1 對穿著同數字的衣服。

6.證明表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這 m 個數為模 m 的一組完全剩餘系。

(1)定理 3：若 0、1、2、3、……、m-1 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n-1)=1，則 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)也是模 m 的一組完全剩餘系。

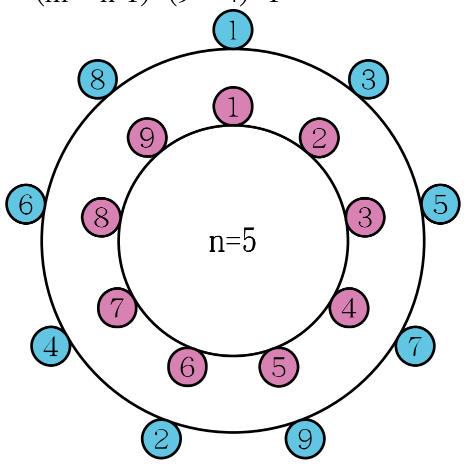
【說明】：由定理 1 即知定理 3 成立。

(2)結論 2：要使表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)這 m 個數為模 m 的一組完全剩餘系，其條件是(m、n-1)=1。

7.綜合結論 1 和結論 2 知：若(m、n)=1 且(m、n-1)=1 時，則可利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，如下面的例 1；反之，若(m、n)≠1 或(m、n-1)≠1 時，則無法利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，如下面的例 2、例 3。

〔例 1〕：當 m=9、n=5 時，可利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，如圖十四~1。

【說明】：(m、n)=(9、5)=1，(m、n-1)=(9、4)=1

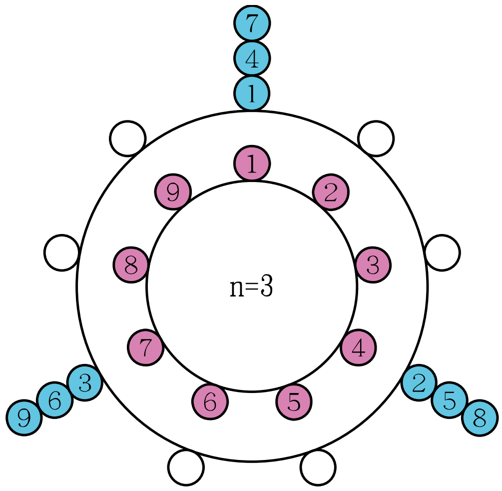


m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	4	8	3	7	2	6	1	5

圖十四~1：m=9，n=5

〔例 2〕：當 m=9、n=3 時，無法利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，如圖十四~2。

【說明】：(m、n)=(9、3)≠1，(m、n-1)=(9、2)=1

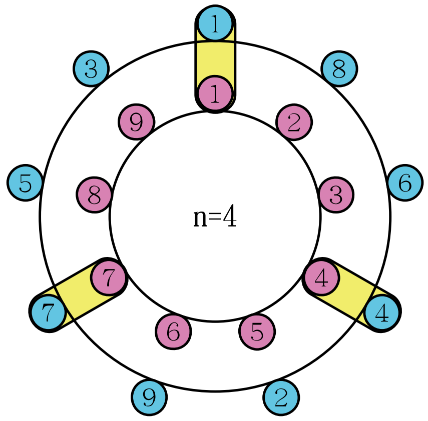


m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	2	4	6	8	1	3	5	7

圖十四~2：m=9，n=3(不符合條件要求)

〔例 3〕：當 m=9、n=4 時，無法利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，如圖十四~3。

【說明】：(m、n)=(9、4)=1，(m、n-1)=(9、3)≠1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	3	6	0	3	6	0	3	6

圖十四~3：m=9，n=4(不符合條件要求)

伍、討論

一、本研究中以間隔排法排出跳舞位置時，我們規定 m 要為奇數，因為若 m 為偶數，則(1) 當 n 為奇數時，(m、n-1)≠1；(2) 當 n 為偶數時，(m、n)≠1，皆無法使用間隔排法排出符合條件的跳舞位置。

二、當 m 為質數時，因為(m、n)=1 且(m、n-1)=1，故所有的間隔排法都可以排出符合條件的跳舞位置，此時，間隔排法有 m-2 種。

三、若(m、n)=1 且(m、n-1)=1 時，我們可以利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置。

四、排列跳舞位置除了可由間隔排法找到外，還有其它不具規律的排法，將它稱為非間隔排法，但要找到非間隔排法有些繁瑣，不值得推廣，我們僅找出 m 較小時的一些非間隔排法，如附件二。

陸、結論

一、若(m、n)=1 且(m、n-1)=1，就可利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置。

二、若(m、n)≠1 或(m、n-1)≠1，則無法利用間隔排法排出符合條件的跳舞位置，說明如附件一。

柒、參考資料

一、張文忠　基礎數論-原理及解題　台北　中央圖書出版社　347~351 頁　2002 年

捌、附件

一、說明結論二

(一)若(m、n)≠1，則表三中 B 欄內的 1+0、1+n、1+2n、……、1+(m-1)．n 這 m 個數不是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：1.由定理 1 知，若 0、1、2、3、……、m-1 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n)=1，則 0、n、2n、3n、……、(m-1)．n 也是模 m 的一組完全剩餘系。反之，若(m、n)≠1，則 0、n、2n、3n、……、(m-1)．n 不是模 m 的一組完全剩餘系。

2.由定理 2 知，若 0、n、2n、3n、……、(m-1)．n 是模 m 的一組 完全剩餘系，則對於整數 1，會有 1+0、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)．n 也是模 m 的一組完全剩餘系。反之，若 0、n、2n、3n、……、(m-1)．n 不是模 m 的一組完全剩餘系，則對於整數 1，也不會有 1+0、1+n、1+2n、1+3n、……、1+(m-1)．n 是模 m 的一組完全剩餘系。

3.設(m、n)＝d，且 d＞1，則 $m=m_1d$，$n=n_1d$

∵ m 為奇數(說明於第 21 頁的討論一)， ∴ m_1、d 亦為奇數

∵ d 為奇數且大於 1， ∴ d≧3 ，且 $2m_1\leqq m-1$

從 0、n、2n、3n、……(m-1)．n 這一列數中，取兩數 m_1n、$2m_1n$

則 $2m_1n-m_1n=m_1n=m_1dn_1=mn_1$

$\Rightarrow m \mid 2m_1n-m_1n$，即 $2m_1n\equiv m_1n \pmod{m}$

$\because 2m_1n\equiv m_1n \pmod{m}$ ，由性質 2 知，$1+2m_1n\equiv 1+m_1n \pmod{m}$

所以當(m、n)≠1 時，則表三中 B 欄內的 1+0、1+n、1+2n、……、1+(m-1)．n 這 m 個數不是模 m 的一組完全剩餘系。

(二)若(m、n-1)≠1，則表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1) 這 m 個數不是模 m 的一組完全剩餘系。

【說明】：1.由定理 1 知，若 0、1、2、3、……、m-1 是模 m 的一組完全剩餘系，且(m、n-1)=1，則 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)也是模 m 的一組完全剩餘系。反之，若(m、n-1)≠1，則 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1)不是模 m 的一組完全剩餘系。

2.設(m、n-1)＝d，且 d＞1，則 $m=m_1d$，$n-1=n_1d$

∵ m 為奇數(說明於第 21 頁的討論一)， ∴ m_1、d 亦為奇數

∵ d 為奇數且大於 1， ∴ d≧3，且 $2m_1\leqq m-1$

從 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)……、(m-1)(n-1)這列數中，

取兩數 $m_1(n-1)$、$2m_1(n-1)$，

則 $2m_1(n-1)-m_1(n-1)=m_1(n-1)=m_1dn_1=mn_1$

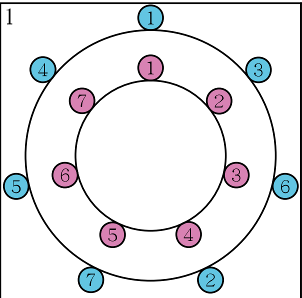
$\Rightarrow m \mid 2m_1(n-1)-m_1(n-1)$，即 $2m_1(n-1)\equiv m_1(n-1) \pmod{m}$

所以當(m、n-1)≠1 時，則表三中 C 欄內的 0、n-1、2(n-1)、3(n-1)、……、(m-1)(n-1) 這 m 個數不是模 m 的一組完全剩餘系。

二、非間隔排法

(一)七男七女

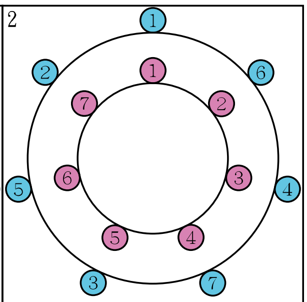
1



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	2	6	3	1	4	5

圖十五~1：m=7，非間隔排法

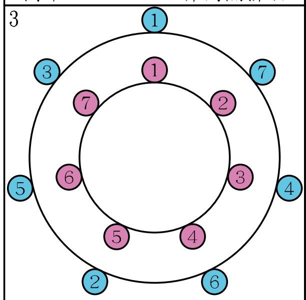
2



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	5	2	6	1	3	4

圖十五~2：m=7，非間隔排法

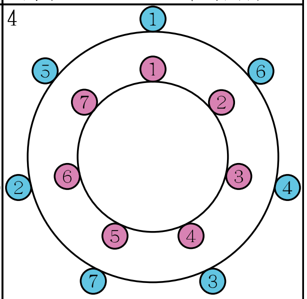
3



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	3	4	6	1	5	2

圖十五~3：m=7，非間隔排法

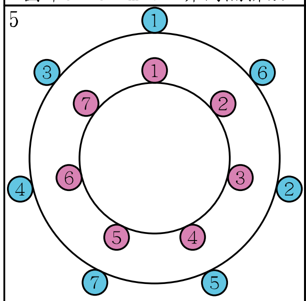
4



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	4	1	6	2	3	5

圖十五~4：m=7，非間隔排法

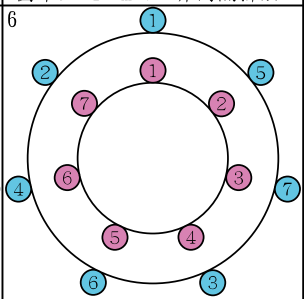
5



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	1	4	2	6	3	5

圖十五~5：m=7，非間隔排法

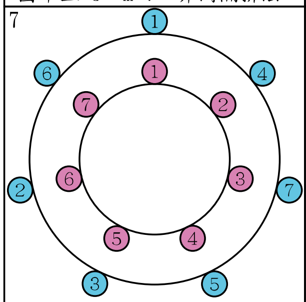
6



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	5	1	2	4	6	3

圖十五~6：m=7，非間隔排法

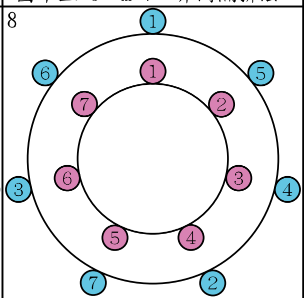
7



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	4	2	5	6	1	3

圖十五~7：m=7，非間隔排法

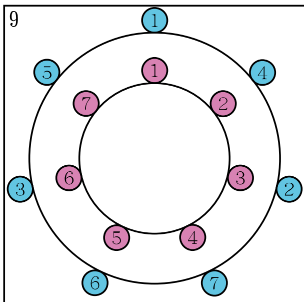
8



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	2	3	6	4	1	5

圖十五~8：m=7，非間隔排法

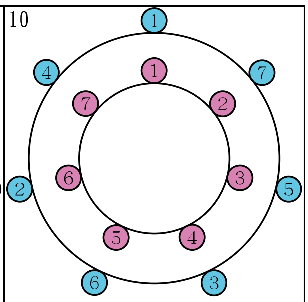
9



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	1	3	5	2	6	4

圖十五~9：m=7，非間隔排法

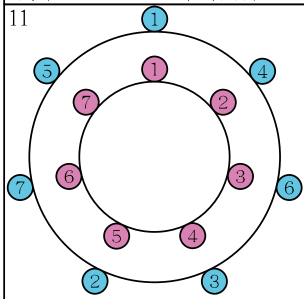
10



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	4	1	3	5	6	2

圖十五~10：m=7，非間隔排法

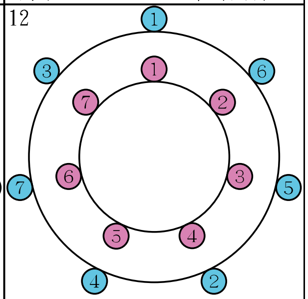
11



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	3	1	5	2	4	6

圖十五~11：m=7，非間隔排法

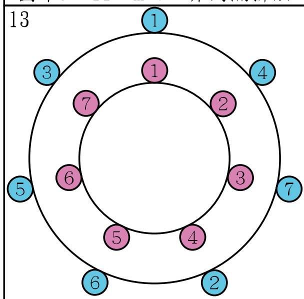
12



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	2	4	1	5	3	6

圖十五~12：m=7，非間隔排法

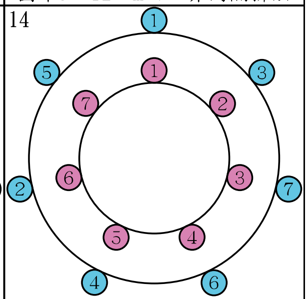
13



m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	2	4	5	1	6	3

圖十五~13：m=7，非間隔排法

14

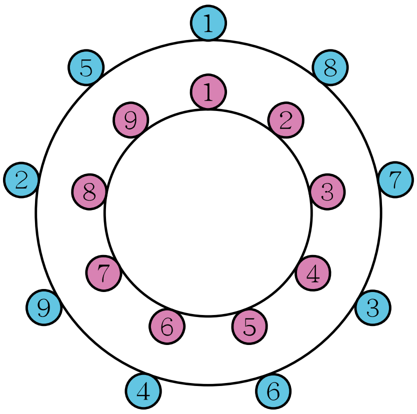


m	1	2	3	4	5	6	7
數字差	0	4	6	1	2	5	3

圖十五~14：m=7，非間隔排法

(二)九男九女

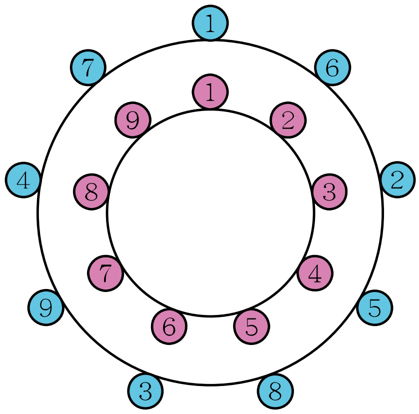
1



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	6	1	2	4	8	5	3	7

圖十六~1：m=9，非間隔排法

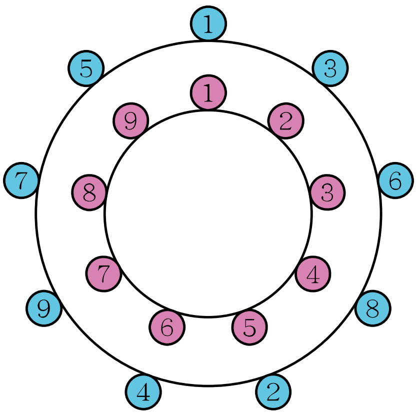
2



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	1	3	4	8	5	2	6	7

圖十六~2：m=9，非間隔排法

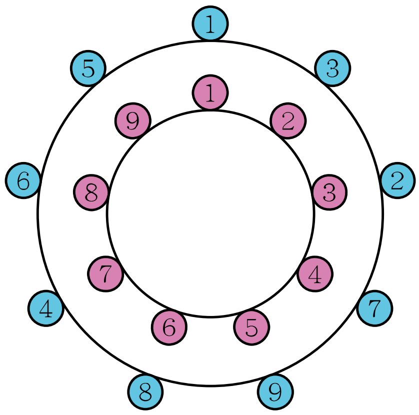
3



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	3	8	2	4	6	1	5	7

圖十六~3：m=9，非間隔排法

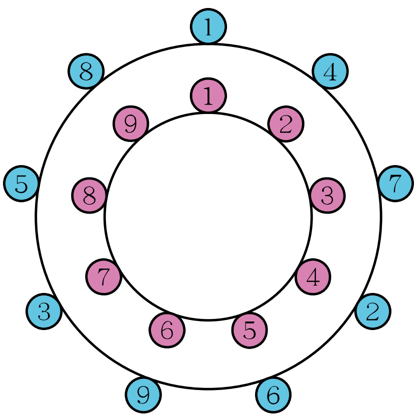
4



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	1	8	3	4	2	6	7	5

圖十六~4：m=9，非間隔排法

5



m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字差	0	2	4	7	3	8	5	1	6

圖十六~5：m=9，非間隔排法

【評語】080404

主題有趣，作者從探討 3 對、5 對…m 對的位置排法，提出「間隔排法」，並應用同餘和完全剩餘系的概念，說明間隔排法的適用性。探討過程完整，步驟清楚，值得肯定。未來可再繼續探討非間隔排法以充實成果。