中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080403

六角旋「蜂」．你來「瘋」

學校名稱：臺南市鹽水區鹽水國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳冠崴	何鳳珠
小五 許嘉麟	沈冠君
小五 黃馨慧	
小五 李佲漶	
小五 呂紫嫺	

關鍵詞：排列組合、試誤法、六角拼圖

摘　要

看起來相當不起眼的六角拼圖，不知爲何會在教室引起騷動，原只是想挑戰拼組的那份成就感，沒想到定心去探索竟別有洞天。六角拼圖在經過數字化後，其秘密就明朗多了，原本單純的拼圖，經過數字對應轉化後，又可生成更多組數列拼圖。爲了縮短拼組時間及判斷時的手感，我們想出了創意的快速拼組輔助道具～**長條數列棒**來替代六角模式，搭配尋得的一些規律，能有效縮短試誤次數，在很短的時間即可判斷出有解、有幾組解或無解，同時從很多線索的歸納整理中，我們也發現了單組解與多組解拼圖轉換之關鍵。

爾後又突發奇想的思考規則改變之可行性與實用性，深入探討同時符合兩種規則之有效拼圖組的設計規律，最後衍生出”**雙拼六角板**”以及”**六角棋**”的益智遊戲，做爲可推廣的數學益智教具，深具趣味性與挑戰性，真是令人雀躍。

關鍵字詞：排列組合、試誤法、六角拼圖

六角旋「蜂」.你來「瘋」

壹、研究動機

某天在老師桌上發現了幾盒六角拼圖，好奇心驅使下便和幾位同學玩了起來，但看似簡單的六角拼圖就像密碼鎖一樣，滿頭大汗仍解不開！就在我們想放棄之餘，有兩位同學陸續解出來了，結果發現他們所排列出來的方式卻是截然不同！想必其中是隱藏了某種神奇密碼！這真是有趣極了！到底六角拼圖的拼組密碼是什麼？這股神祕的力量牽引著我們進入這趟尋寶之旅，我們亟欲開啓這神秘的六角寶箱。

貳、研究目的

一、探討各種六角拼圖其排列情形。

二、探討是否有其快速拼法。

三、探討有效拼圖組的設計規律。

四、探討改變遊戲規則的可行性。

參、實驗研究器材

六角拼圖、數字標籤紙、長條數列棒、記錄紙、電腦、數字棋、冰棒棍

肆、名詞釋義

我們定義下列名詞在本研究的意義：

一、**六角拼圖**：是由七片正六邊形所組成的拼圖，每片上均有相同的六種圖案（數字），只是排列方式不同，拼組時相同的圖案（或數字）相連接形成似蜂窩狀。

二、**有效拼圖組**：能成功拼組的七組數列組合。

三、**長條數列棒**：連接方塊積木製作成的數列棒，替代六角拼圖上的數字列。

四、**３同**：兩組數列中有３個數字的對應位置完全相同。

五、**４同**：兩組數列中有４個數字的對應位置完全相同。

六、**試誤法**：有條理的操控數列組之擺放位置順序，直到找到拼圖的解。

七、**自由數**：指能在拼圖中互換且不影響此種拼組結果的數字。

八、**規則一**：六角拼圖採以相同圖案或數字才可以接合在一起。

九、**規則二**：六角拼圖採以數字和為 7 才可以接合在一起。

伍、研究歷程、討論與結果

活動一：探討各種六角拼圖其排列情形。

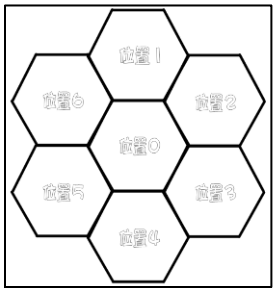
原始拼圖

對應的數字數列

A	123456
B	136542
C	145236
D	152346
E	153426
F	153624
G	156243

拼組的解答(DGFBECA)

拼組底格對應位置



【過程 1-1】找出六角拼圖的拼組答案。

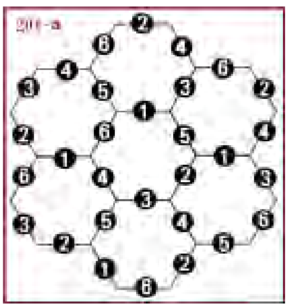
1. 首先將收集到的十一組六角拼圖，各組任取**<u>其中一片，將圖形對應到1～6按順時針方向編號並貼上數字標籤</u>**，其餘六片也樣依圖做編號，排出解答，解答的呈現方式，中心片一律將 1 朝 12 點鐘方向，以方便我們記錄。
2. 此時原始片 1-2-3-4-5-6 未必在中間，因此，我們把數字進行轉化，將中間位置的拼圖數字改以 12 點鐘方向順時針對應到 1～6，其餘六片也同樣做數字對應轉換，並記錄在下方。*(相關原始檔見附件資料)*

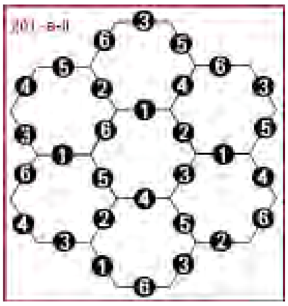
討 論：

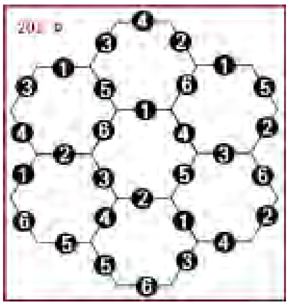
(1)11 種拼圖共找出 18 組解，有些拼圖竟出現兩組解(如圖 1-1-1)，這讓我們驚訝，因為當我們實際拼組成功時，以為解答就是如此，原來還有不同的解，這讓我們這個研究得以做更多的延伸探討。

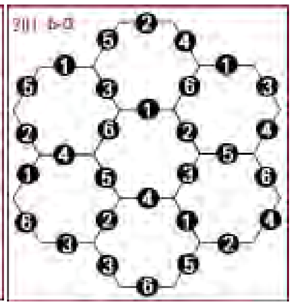
(2)因為我們是隨意從一組拼圖中抽一張編成 1-2-3-4-5-6，當完成拼組後，我們再將其中心的拼圖改為 1-2-3-4-5-6，因為原拼圖與重新對應後的拼圖雖數字列不同，但實際上拼法是相同的。

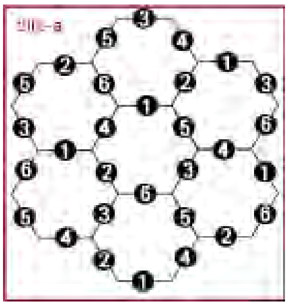
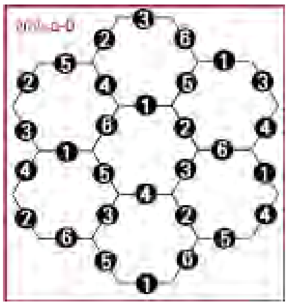
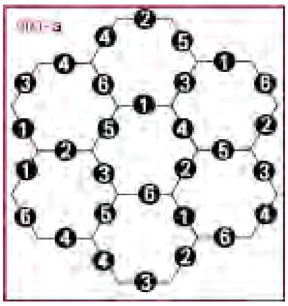
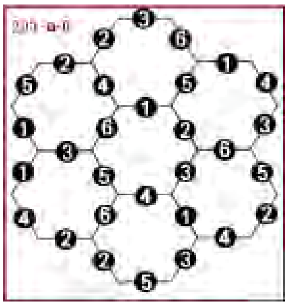
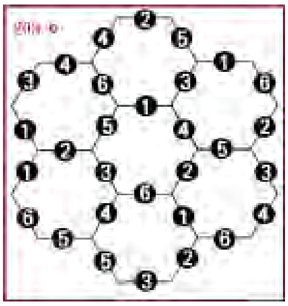
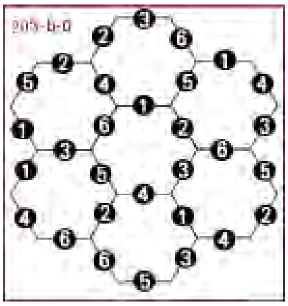
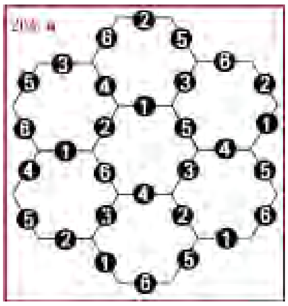
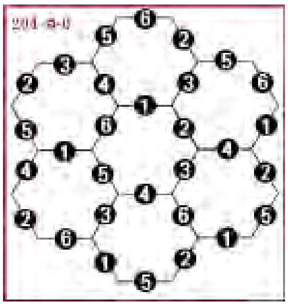
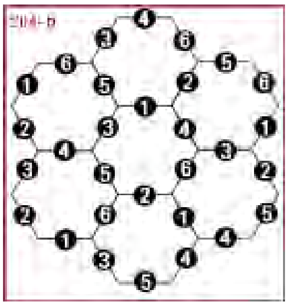
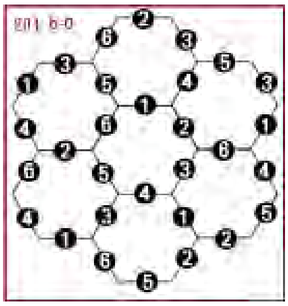
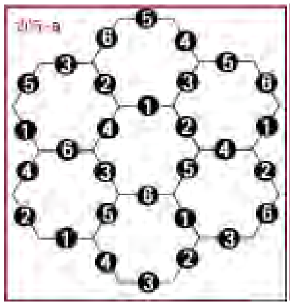
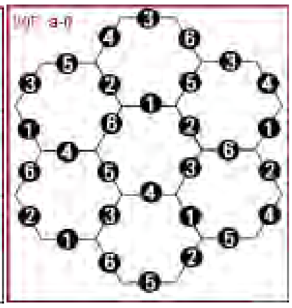
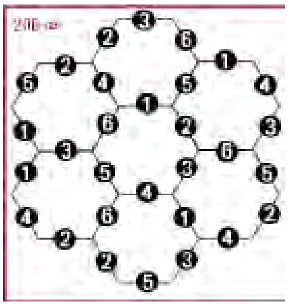
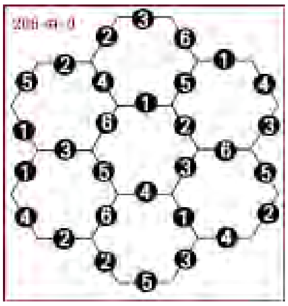
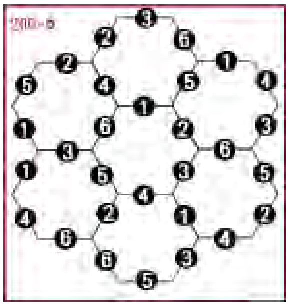
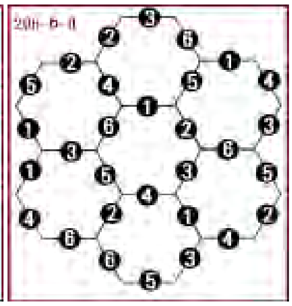
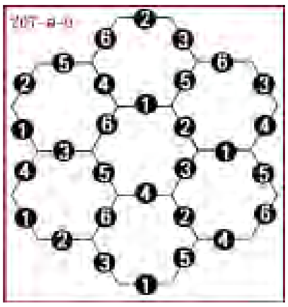
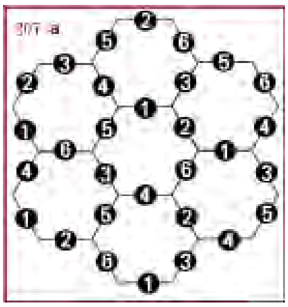
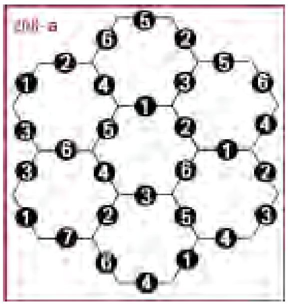
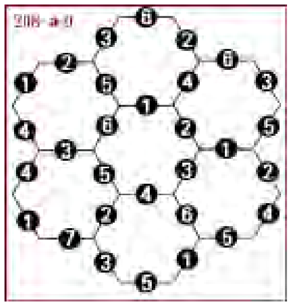
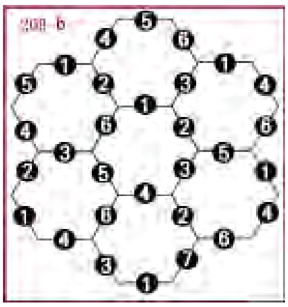
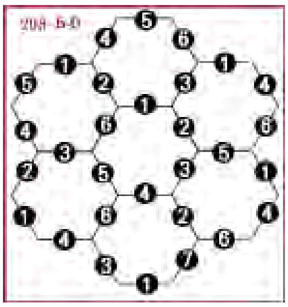
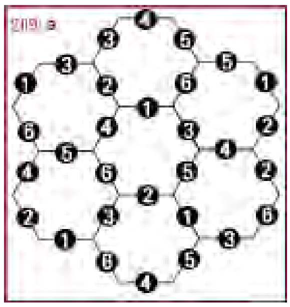
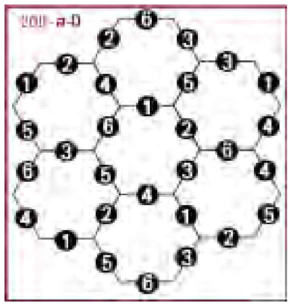
<註：第一組有二組解，分別是 201-a 及 201-b，而再經由數字轉換後則為 201-a-0 及 201-b-0>

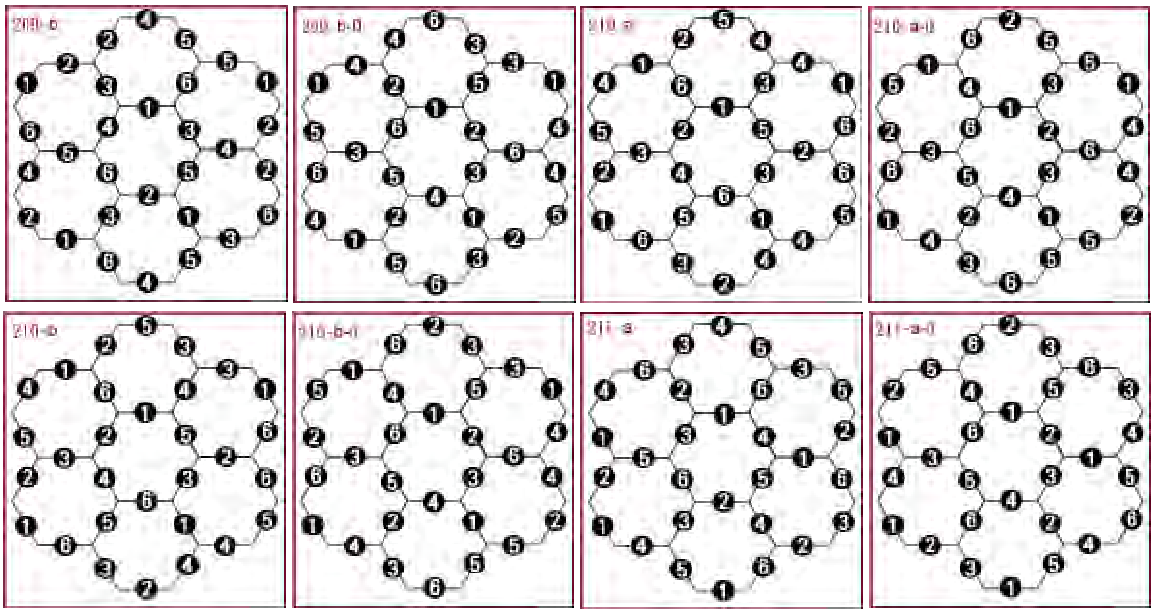










【圖 1-1-1】

(3)因為一組拼圖每一片都可以設定為 1-2-3-4-5-6，所以若以一組拼圖拼出一組解答後(如圖 1-1-2)，將可以分別把位置 0 上的六個數字轉換成<u>以 12 點鐘方向</u>順時針 1～6 排列，其餘拼圖上的數字也會跟著對應轉換，形成一組新的拼圖數列組(如圖 1-1-3)，也可以替換位置 1～6 的拼圖為 1-2-3-4-5-6，如此共可以形成至多 7 組不一樣的拼圖數列組，若原拼圖有二組解，即可以產出 7×2＝14 組的數列組，那麼將可以利用此法，設計多道拼圖題庫，雖然此皆為同一組拼圖，但數字列不同，就等同是不同的拼圖組合(如表 1-1-1)，以第一組拼圖為例，兩組解答就可以再經由數字轉換再生成 14 組拼圖數列(如表 1-1-2) (轉換時皆固定將欲轉換片的 12 點鐘方向數字設定為 1)：

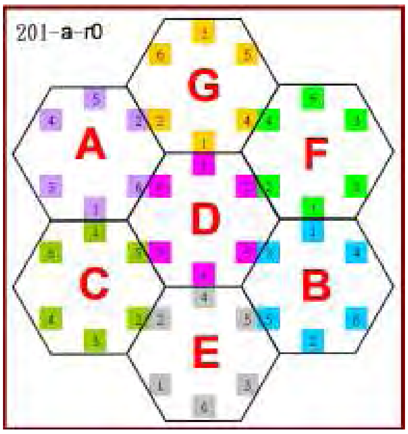
【圖 1-1-2】

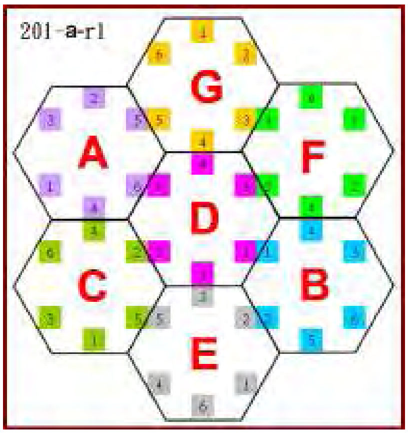
【圖 1-1-3】

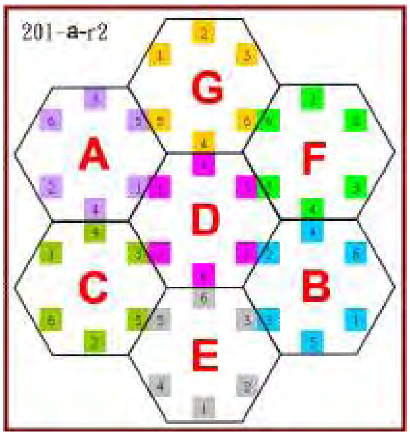
編號２０１	
A	１２３４５６
B	１３６５４２
C	１４５２３６
D	１５２３４６
E	１５３４２６
F	１５３６２４
G	１５６２４３

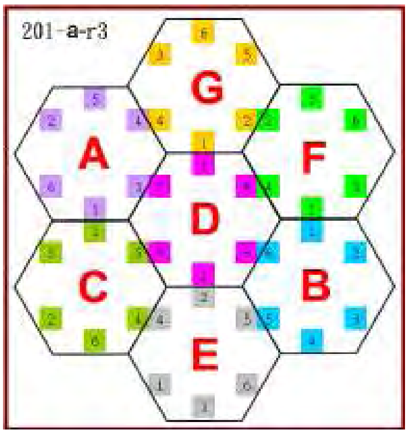
編號 201-a(第一組解)之位置 0～6 經轉換後產生出的新數列（新拼圖） 【表 1-1-1】

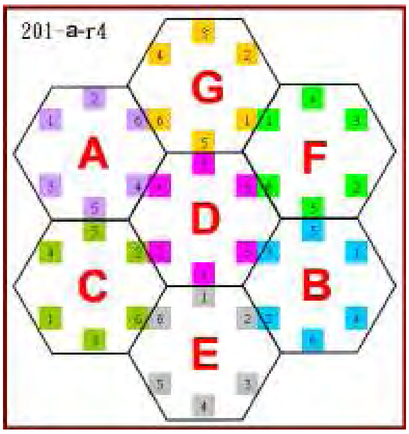
編號 201-a		位置 0 轉換		位置 1 轉換		位置 2 轉換		位置 3 轉換		位置 4 轉換		位置 5 轉換		位置 6 轉換	
A	1 2 3 4 5 6	A	1 3 4 5 2 6	A	1 3 2 5 6 4	A	1 4 2 6 3 5	A	1 6 2 5 4 3	A	1 2 6 4 5 3	A	1 4 5 2 3 6	A	1 2 3 4 5 6
B	1 3 6 5 4 2	B	1 4 6 2 5 3	B	1 4 3 6 5 2	B	1 5 3 2 4 6	B	1 2 3 4 5 6	B	1 4 6 2 3 5	B	1 5 6 3 2 4	B	1 5 4 6 3 2
C	1 4 5 2 3 6	C	1 5 2 3 4 6	C	1 3 6 4 2 5	C	1 4 3 5 2 6	C	1 5 4 6 2 3	C	1 4 5 2 6 3	C	1 2 3 4 5 6	C	1 2 5 6 3 4
D	1 5 2 3 4 6	D	1 2 3 4 5 6	D	1 3 2 6 4 5	D	1 4 5 2 6 3	D	1 4 6 2 5 3	D	1 2 4 5 6 3	D	1 3 4 5 2 6	D	1 3 4 2 5 6
E	1 5 3 4 2 6	E	1 2 4 5 3 6	E	1 6 4 5 3 2	E	1 4 5 6 3 2	E	1 4 2 5 6 3	E	1 2 3 4 5 6	E	1 3 5 2 4 6	E	1 5 3 4 2 6
F	1 5 3 6 2 4	F	1 2 4 6 3 5	F	1 2 4 5 3 6	F	1 2 3 4 5 6	F	1 4 2 3 6 5	F	1 4 3 2 5 6	F	1 3 5 6 4 2	F	1 4 2 6 3 5
G	1 5 6 2 4 3	G	1 2 6 3 5 4	G	1 2 3 4 5 6	G	1 2 3 6 4 5	G	1 4 3 6 5 2	G	1 5 6 4 3 2	G	1 3 6 4 2 5	G	1 6 4 2 3 5

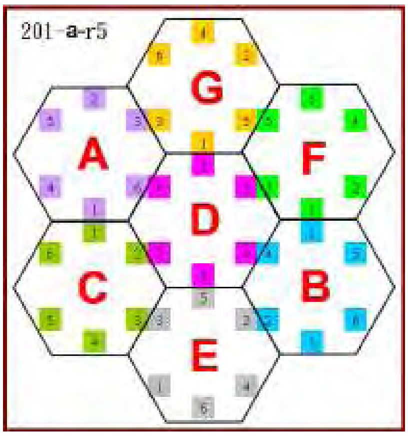


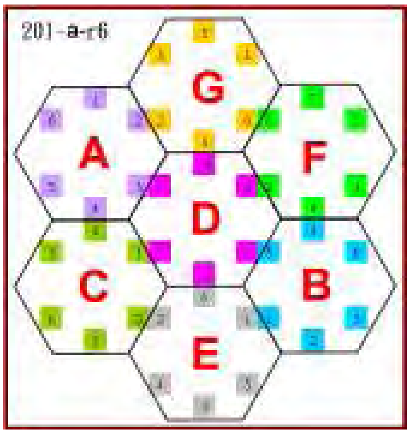




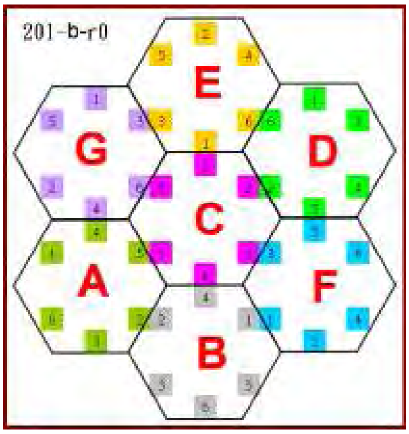


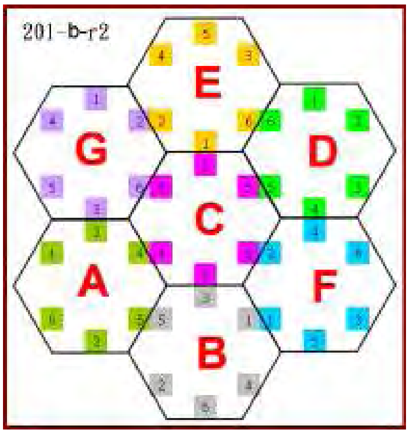


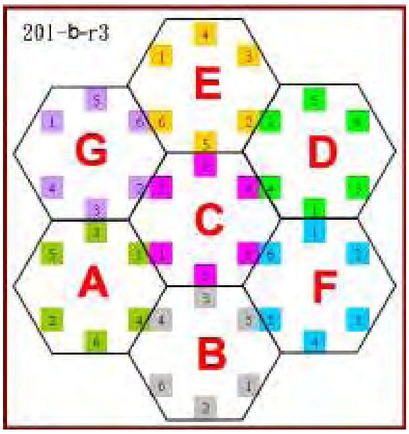


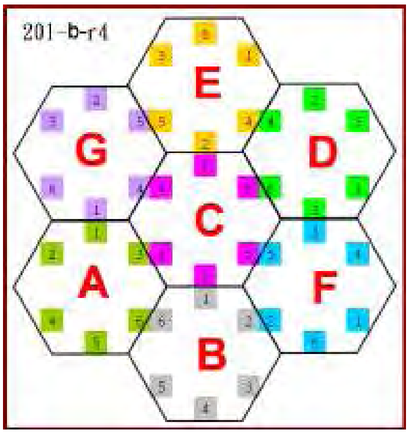


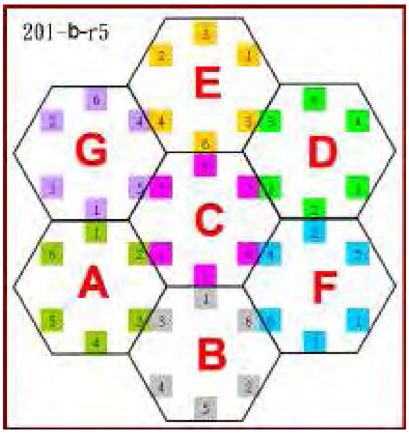

編號 201-b(第一組解)之位置 0～6 經轉換後產生出的新數列（新拼圖）															【表 1-1-2】
編號 201-b		位置 0 轉換		位置 1 轉換		位置 2 轉換		位置 3 轉換		位置 4 轉換		位置 5 轉換		位置 6 轉換	
A	123456	A	145236	A	153426	A	134526	A	146253	A	136542	A	123456	A	146523
B	136542	B	156324	B	124635	B	146253	B	126435	B	123456	B	162543	B	163254
C	145236	C	123456	C	152634	C	152346	C	125463	C	134265	C	125634	C	152463
D	152346	D	134526	D	134526	D	123456	D	142563	D	136425	D	123564	D	124653
E	153426	E	135246	E	123456	E	124536	E	143256	E	142536	E	156423	E	126543
F	153624	F	135642	F	145632	F	124635	F	123456	F	162534	F	136425	F	126345
G	156243	G	136425	G	164532	G	126354	G	156234	G	163254	G	132645	G	123456

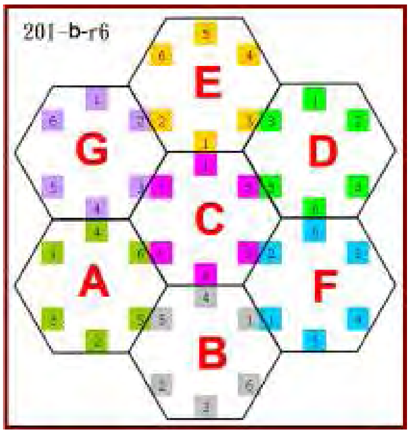












(4)利用上述方法轉換成新的 14 組拼圖數列組，再經由排序編碼 A～G，又可以各產生 2 種解答，再以解答去進行轉換，又可以生出”看起來不一樣的拼圖組”，但其實拼圖的本質都是一樣的，都是由同一組拼圖變化出來的，其解都是有兩解，如此，就可以運用此法變出很多組拼圖。

編號２０１	
A	123456
B	136542
C	145236
D	152346
E	153426
F	153624
G	156243

解 1	DGFBECA
解 2	CEDFBAG

解 1 位置 0 轉換	
A	134526
B	146253
C	152346
D	123456
E	124536
F	124635
G	126354

解 1	**D**GFBECA
解 2	CEDFBAG

排序後重編碼	
A	123456
B	124536
C	124635
D	126354
E	134526
F	146253
G	152346

解 1	ADCFBGE
解 2	GBACFED

解 2 位置 0 轉換	
A	134526
B	135246
C	135642
D	136425
E	145236
F	156324
G	123456

解 1	ADCFBGE
解 2	**G**BACFED

排序後重編碼	
A	123456
B	134526
C	135246
D	135642
E	136425
F	145236
G	156324

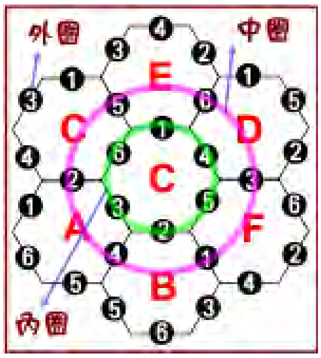
解 1	ACBDGFE
解 2	BEDGCAF

【過程 1-2】觀察拼圖排列的規律性。

1. 我們先就這 11 組拼圖拼組的情形觀察其規律性，
2. 原先做的 11 組拼圖樣本不夠，因此我們再亂數找出數十組有解的拼圖組(共 50 組)，依組合出來的結果做觀察。

討 論：

【圖 1-2-1】



(1)11 種拼圖共找出 18 組解，有些拼圖出現兩組解（如圖 1-1-1)。然而，在這 11 種拼圖中我們發現每一種拼圖一定會出現中圈數字包含 1～6，如右圖拼圖 201-b(圖 1-2-1)，但是這個規律在爾後我們亂數設定形成的拼圖組中被推翻了，因為有解的拼圖中，有些中圈數字並未包含 1～6，那麼可以猜測製作這 11 組拼圖之作者廠商，當初可能是以中圈為 1～6 去設計，設計出來一定有解<這個部分在活動三有做進一步的探討>。

(2)每組拼圖的七個數列中，有些存在著許多 3 同與 4 同的組合數列（3 同～兩數列中有 3 個數字的對應位置完全相同；4 同～兩數列中有 4 個數字的對應位置完全相同），因此，我們推測：3 同或 4 同的組合愈多，解答可能會愈多，因為可以方便做替換，因此我們一一去檢驗這 50 組拼圖，結果如下(表 1-2-1)。我們發現似乎與 3 同及 4 同的數量多寡無關，可能原因是因為拼圖的搭配牽扯到順逆方向，由於這些排列數字太過於複雜，在短時間內我們暫時無法找出其規律性，有些惋

惜，期待日後我們再進一步從多角度去分析找出其規律性。

a. 七排數列中，有數組 3 同或 4 同的組合，其未必就會有多組解。例如：編號 103，有 5 組 3 同，但其解只有 2 個，而編號 115，只有 3 組 3 同，但其解卻有 3 個；編號 117 及編號 124 中 4 同與 3 同總數是 5 組，但卻只有 1 解。

b. 七排數列中只有 2 組 3 同的，都剛好有一組解，例如編號 102、202、205、207、211 等。

c. 七排數列中只有 3 組 3 同的，幾乎都有三組解，例如編號 106、110、111、115、121、122，但此也有例外的，如編號 313 只有 1 組解，編號 306 只有 2 組解。

【表 1-2-1】

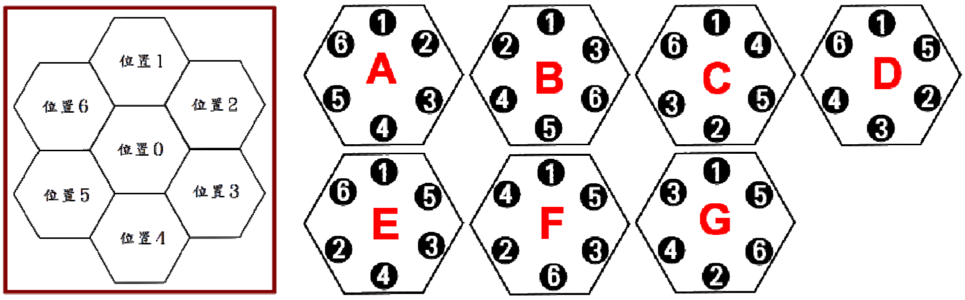
	101		102		103		104		105		106		107		108
4同	1組	4同		4同			2組		1組				1組		1組
3同	2組	3同	2組	3同	5組		4組		2組		3組				2組
A	123564	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123564	A	124563	A	123456
B	124563	B	123564	B	134256	B	124365	B	135246	B	125436	B	125346	B	123465
C	134256	C	126435	C	145362	C	124563	C	136542	C	125643	C	126543	C	135426
D	134265	D	135426	D	146253	D	132456	D	142365	D	126534	D	132456	D	142563
E	145236	E	145263	E	153462	E	135264	E	142653	E	134625	E	134526	E	143562
F	152346	F	146352	F	163254	F	154263	F	154362	F	145236	F	142635	F	154236
G	162354	G	165423	G	165342	G	154632	G	162345	G	162345	G	146325	G	164253
	CFEDGAB		CEBDGFA		DEBFCAG		EABFGCD		EDGABCF		CFDEGAB		FACBEDG		AFCBGDE
	CFEDGBA				EDCABFG		EDBFGCA				CBDEGAF				AFCBGED
											EADFBGC				
	109		110		111		112		113		114		115		116
4同		4同		4同		4同	1組	4同		4同	1組	4同		4同	1組
3同	4組	3同	3組	3同	3組	3同		3同	5組	3同	4組	3同	3組	3同	1組
A	123654	A	124563	A	123465	A	123456	A	124356	A	123645	A	123456	A	125364
B	124356	B	125463	B	124356	B	124536	B	124536	B	126534	B	124536	B	123456
C	136254	C	134256	C	125346	C	132645	C	125436	C	142356	C	132645	C	124356
D	146235	D	142635	D	125436	D	134625	D	132456	D	156324	D	136245	D	126354
E	146352	E	146325	E	126345	E	136524	E	134526	E	164523	E	143625	E	136524
F	156243	F	162543	F	135264	F	152634	F	135264	F	165234	F	145263	F	152364
G	156342	G	163452	G	135462	G	153264	G	156234	G	165342	G	152364	G	162453
	BFACDEG		DBFEGAC		BACFDGE		ACDEFGB		DABCFGE		AECBGDF		ACEBDFG		BAGEFCD
			DAFEBGC		DCEAGBF				DACBFGE				ADEBFCG		FADBGEC
			DAFEGBC		DECAGBF				DECAFGB				ACEBFDG		
									DBCAFGE						
	117		118	119		120			121		122		123		124
4同	2組	4同	1組	4同	1組	4同	1組	4同		4同		4同	1組	4同	1組
3同	3組	3同	3組	3同	4組	3同	1組	3同	3組	3同	3組	3同	3組	3同	4組
A	124635	A	123456	A	123654	A	123456	A	123456	A	123456	A	123465	A	123456
B	126345	B	125346	B	124365	B	132456	B	123546	B	124536	B	125643	B	124635
C	134526	C	132465	C	132456	C	134625	C	124536	C	132645	C	126435	C	145623
D	134562	D	135642	D	134625	D	135426	D	125463	D	136245	D	132456	D	146235
E	135426	E	136425	E	143562	E	136425	E	126543	E	143625	E	135246	E	146352
F	143562	F	145623	F	145623	F	145236	F	153264	F	145263	F	145623	F	152364
G	165324	G	145632	G	145632	G	153624	G	153462	G	152364	G	145632	G	164325
	ACBGDFE		ACBFDGE		DECABFG		ABDCGFE		AEBDGCF		ACEBDFG		DAEGBFC		ACFBEGD
							CBGFAED		ABEDGCF		ADEBFCG				
									CDBFAGE		ACEBFDG				

	201		202		203		204		205		206		207		208
4同		4同		4同		4同		4同		4同		4同		4同	
3同	4組	3同	2組	3同	4組	3同	5組	3同	2組	3同	4組	3同	2組	3同	5組
A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456
B	136542	B	123654	B	123546	B	134256	B	124635	B	135264	B	123564	B	123564
C	145236	C	135264	C	125346	C	145362	C	125634	C	135624	C	126435	C	124563
D	152346	D	136452	D	134652	D	146253	D	126543	D	136524	D	135426	D	126345
E	153426	E	153624	E	142635	E	153462	E	142356	E	142365	E	145263	E	136427
F	153624	F	162534	F	162543	F	163254	F	153246	F	143625	F	146352	F	146235
G	156243	G	165342	G	164253	G	165342	G	154263	G	152463	G	165423	G	146523
	CEDFBAG		EGDFBAC		EGFCABD		DEBFCAG		CDEGABF		AEFDBCG		CEBDGFA		ACGFEBD
	DGFBECA				EGFCBAD		EDCABFG				AEFDCBG				DGBAFEC
	209		210		211		301		302		303		304		305
4同	2組	4同	1組	4同		4同	1組	4同	1組	4同	1組	4同	1組	4同	
3同	4組	3同	5組	3同	2組	3同	4組	3同	3組	3同	2組	3同	3組	3同	4組
A	123456	A	123456	A	123456	A	125346	A	123456	A	123456	A	125364	A	124635
B	124365	B	132654	B	125634	B	136542	B	134652	B	124536	B	135642	B	126453
C	124563	C	142356	C	145263	C	145362	C	146352	C	124563	C	145623	C	132456
D	132456	D	153642	D	146235	D	153246	D	152634	D	125364	D	156234	D	135264
E	135264	E	162354	E	146352	E	153462	E	152643	E	136524	E	156324	E	145623
F	154263	F	162534	F	153246	F	162345	F	153264	F	143625	F	163452	F	146235
G	154632	G	162543	G	163245	G	163452	G	156342	G	165324	G	164253	G	164325
	EABFGCD		DFGBCAE		CAEGFBD		GBEACFD		BGFADEC		EGAFBCD		GABFDEC		ABEFCDG
	EDBFGCA		DGFBCAE				GBEAFCD		BCFADEG		EDAFBCG				
							GCEAFDB		BFAGDEC						
	306		307		308		309		310		311		312		313
4同		4同	2組	4同	1組	4同	1組	4同	2組	4同	2組	4同	1組	4同	
3同	3組	3同	1組	3同	3組	3同	4組	3同	4組	3同	4組	3同	2組	3同	3組
A	124365	A	123456	A	123456	A	123564	A	123456	A	123654	A	124563	A	123654
B	125364	B	123546	B	124536	B	123645	B	123465	B	124356	B	126453	B	124563
C	126435	C	132465	C	125643	C	125643	C	134256	C	152346	C	135624	C	124635
D	136452	D	134562	D	132456	D	126543	D	134562	D	152364	D	142536	D	125346
E	143625	E	136425	E	143625	E	145623	E	152463	E	156423	E	152364	E	134526
F	145632	F	143562	F	145632	F	152364	F	153246	F	162345	F	153624	F	145236
G	164325	G	164325	G	153264	G	163452	G	164253	G	165234	G	165234	G	156423
	ECDAGFB		EGBFDAC		BDGCFAG		CDEAGFB		AEBGDFC		DCBEGFA		EABCDGF		EFAGBCD
	GBDAFCE												EABFDGC		
	314		315												
4同	1組	4同	2組	4同		4同		4同		4同		4同		4同	
3同	5組	3同	2組	3同		3同		3同		3同		3同		3同	
A	123564	A	123465												
B	125643	B	126534												
C	154326	C	134652												
D	154362	D	145326												
E	156243	E	152346												
F	156423	F	156423												
G	163452	G	165243												
	AEFGBDC		GABECDF												

活動二：探討是否有其快速拼法。

【過程 2-1】六角拼圖組合數的探討

每組拼圖由七片正六角形組成，正六角形上的六個數字皆不重複，且七片正六角形上的數字排列也皆不同，究竟這七片正六角形可以有多少種排列組合呢？

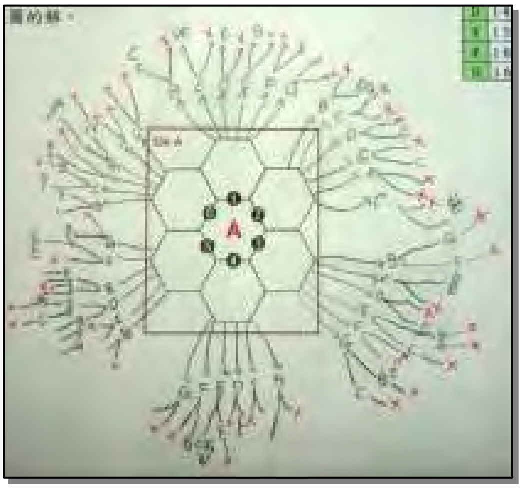


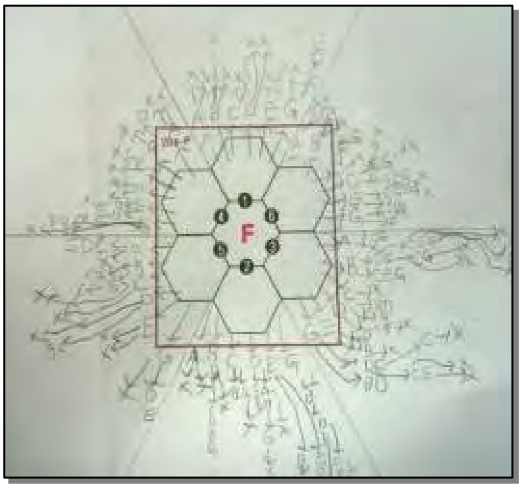
討 論：

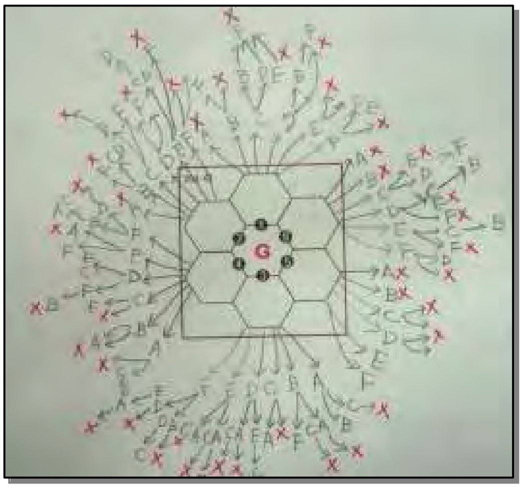
(1)先以位置 0 來做判斷，有七種選擇，當位置 0 固定後，剩餘的六片中，每一片都可以轉動六次和位置 0 的邊相接，因此初步推論共有 7×6^6 種排列組合。

(2)但實際上在條件限制下（相同數字才可以相接）給予已知的七片拼圖，其排列組合數就不會如此多了，即我們要窮盡所有解所需嘗試的次數不需要那麼多，因為能排在位置 1 的，有六種選擇，先固定位置 0 和位置 1 即有 6x7＝42 種組合，接著可以利用樹狀圖(圖 2-1-1)的方式解決位置 2 和位置 6 的組合，一旦位置 2 和位置 6 確定後，接著就可以探索位置 3 和位置 5 ，最後再檢驗位置 4 是否符合即可。但要從拼圖上的數字環找到符合條件，顯然不是很好找，因此，我們得另外想法子解決。<以拼圖 204 為例說明之>

204	
A	1 2 3 4 5 6
B	1 3 4 2 5 6
C	1 4 5 3 6 2
D	1 4 6 2 5 3
E	1 5 3 4 6 2
F	1 6 3 2 5 4
G	1 6 5 3 4 2







【圖 2-1-1】

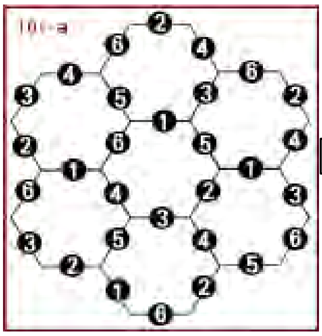
【過程 2-2】找出拼組的替代方式

因爲拼圖上的數字呈環狀排列，且有順逆時針的方向性，要找到配對的相連數字，常常看得眼花，因此我們想：能否將環狀數字改寫成一個數列，或許能幫助我們做數字的辨識。

討 論：

(1)我們實際排出一組數字拼圖組並將數列組隨機編號 A、B、C、D、E、F、G，在拼圖組合完後，將其數字列成表格觀察之，發現因爲相同數字需接合在一起，所以我們在表中將接合的數字用相同色標示出來(圖 2-2-1)。

	上	右上	右下	下	左下	左上
位置 0	1	5	2	3	4	6
位置 1	2	4	3	1	5	6
位置 2	6	2	4	1	5	3
位置 3	1	3	6	5	4	2
位置 4	3	4	2	6	1	5
位置 5	1	4	5	2	3	6
位置 6	4	5	6	1	2	3



	上	右上	右下	下	左下	左上
位置 0	1	5	2	3	4	6
位置 1	2	4	3	1	5	6
位置 2	6	2	4	1	5	3
位置 3	1	3	6	5	4	2
位置 4	3	4	2	6	1	5
位置 5	1	4	5	2	3	6
位置 6	4	5	6	1	2	3

【圖 2-2-1】

(2)我們移動數列將同色的區塊進行接合，形成如下圖(圖 2-2-2)，因此，我們想到以長條數列棒來解決六角拼圖的拼組困擾。

位置 0	1	5	2	3	4	6	1	5	2	3	4	6
位置 1	2	4	3	1	5	6	2	4	3	1	5	6
位置 2	6	2	4	1	5	3	6	2	4	1	5	3
位置 3	1	3	6	5	4	2	1	3	6	5	4	2
位置 4	3	4	2	6	1	5	3	4	2	6	1	5
位置 5	1	4	5	2	3	6	1	4	5	2	3	6
位置 6	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3

【圖 2-2-2】

(3)我們利用小積木組合成九格(含編號格)的長條棒共七根並進行編號 A～G，代表七片拼圖，同時搭配一張底格圖(如圖 2-2-3)。



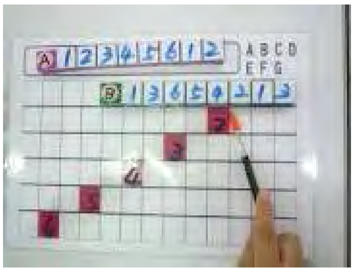
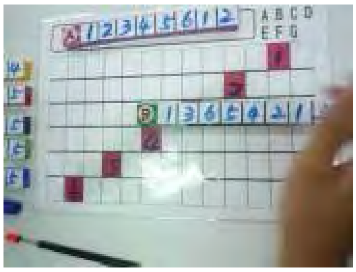
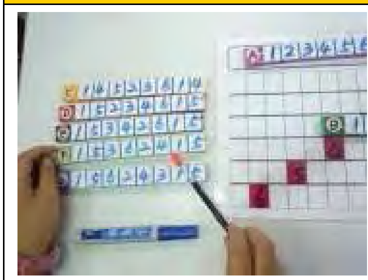
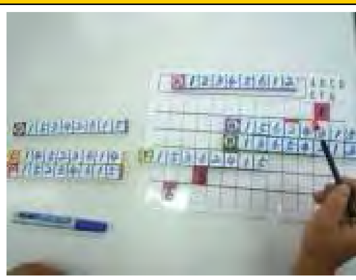
【圖 2-2-3】

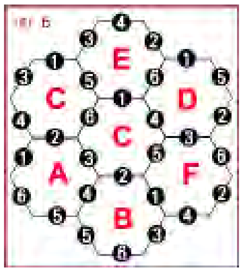
(4)操作方法有兩種：

A、**<u>固定數棒更換位置</u>**～以第一組拼圖爲例，操作方式說明如下(表 2-2-1)：

A	1 2 3 4 5 6	B	1 3 6 5 4 2	C	1 4 5 2 3 6	D	1 5 2 3 4 6
E	1 5 3 4 2 6	F	1 5 3 6 2 4	G	1 5 6 2 4 3		

【表 2-2-1】

七根長條棒	依序寫上經排序後的七組數列(A～G)	先以 A 長條棒爲中心，並在紅色區塊上填入 A 列數字
		
位置 1 先放置 B 長條棒觀察上下方可接的數字→2 2 不行	將 B 長條棒移至下一列位置 2，觀察上下可接數字→1 1 不行	將 B 長條棒移至下一列位置 3，觀察上下可接數字→4 1 & 6 2
		
4 1 只有一組(F)，所以直接選用	將 F 放置在下方，下方需要 5 2 有 2 組，上方需要 6 2 只有 G	G 放上去後，接著需要 4 1，但已沒有 4 1
		

再將 B 下移到位置 4，依序檢驗，遇到需接數字為重複數即跳過	當 B 無法排時，表位置 0 不是 A，改換成 B，並更改紅色區塊數字	改將 A 放在位置 1，再重複上述步驟＜A 的上方需要 2 2，不符＞
		
以 C 為中心，拿 A 開始依據前述的方法開始測試	遇到無解即再替換，如此重複步驟即可窮盡所有解	拼圖 101 的其中一組解
		101 A 123564 B 124563 C 134256 D 134265 E 145236 F 152346 G 162354 

B、<u>固定位置更換數棒</u>～說明如下：

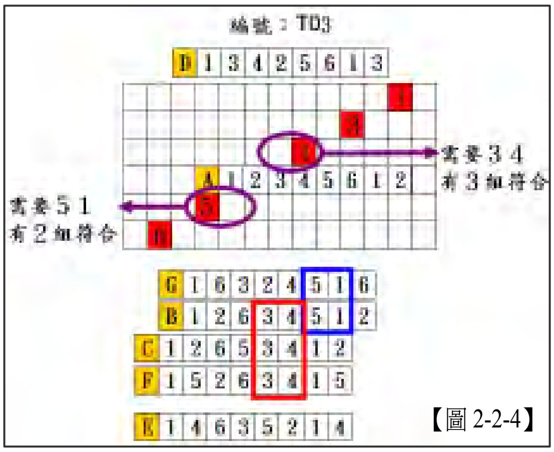
以數列 A 固定在位置 0，然後在第一列（位置 1 ）分別測試(B)～(G)，因為若數列 A 確定在位置 0，那麼位置 1 一定是剩下六列中的其中一列，所以就以數列 B 先放置在第一列上，若沒有解，那麼再改以數列 C 放置在第一列上，再無解，那麼再拿數列 D 放置在第一列上，以此類推，若都沒有解，那麼就表示數列 A 不會在位置 0，則再改以數列 B 放置在位置 0 上，繼續依此方法找答案。

(4)上述兩種操作方法，哪一種快，以我們師生八人而言，各有所愛，要搶快就看每個人對數字的敏感度了，一組拼圖，我們快則五分鐘內即能窮盡所有解，若只要找到一解即可，那麼可能就會更快了。

(5)以長條數列模式替代六角模式，的確可以很快找到答案，且窮盡所有解，比起一開始直接用六角拼圖拼排快多了。過程中往下接時若遇有 2 種以上的選擇時，則改由往上走，以<u>選擇較少的路徑為原則</u>；若遇到往上往下皆有 2 條以上路徑時，則有規律的選用字母較前面的先嘗試，或以相關的 3 個數字做判別來決定下哪根長條棒。

例 1：編號 T03 的拼組過程中(圖 2-2-4)，A 列上方需要【3、4】有三組（即三條路徑），而下方需要【5、1】有二組（即二條路徑）所以選擇 G、B 兩列，但 B、G 兩列擺上後就需要【6、4】，但沒有【6、4】的數列，因此 A 無法放在位置 4。

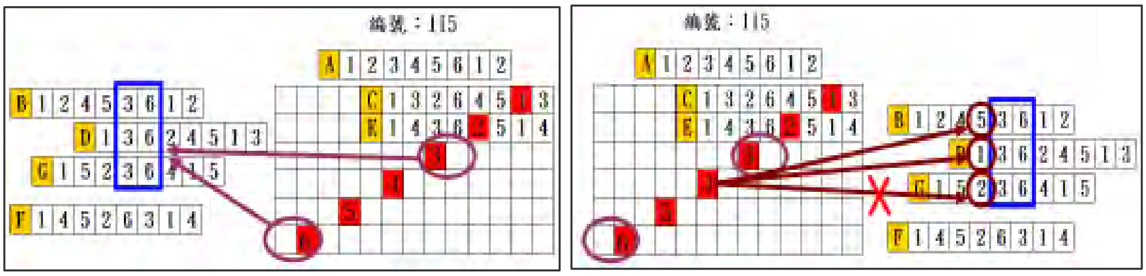
例 2 ：編號 210 的拼組過程中(圖 2-2-5)，A 列的下方需要【2、3】有 C、E 兩列，此時可以往上選擇，需要【5、6】剛好 C 列符合，所以唯一選擇是 C 列擺上方，E 列擺下方，即可以繼續進行。



【圖 2-2-4】

【圖 2-2-5】

例３：編號 115 的拼組過程中(圖 2-2-6)，E 列的下方需要【3、6】有 B、D、G 三列，反觀上方可以接在 C 列之上的也是【3、6】，因此上下兩個方向有３列可以選擇，此時可以固定字母順序做選擇，如選擇 B 列，看看能否接續下去，若不行則換 D 列，以此類推；也可以同時判斷三列爾後要接的數字分別是【4、5】、【4、1】、【4、2】，因為沒有【4、2】所以 G 列即刪除，也可以從反方向來判斷做刪除，如位置 6（最下方列）可以分別擺上 B、D、G，再接續上方需要【1、5】、【2、5】、【4、5】，只有【1、5】一解，則確定位置 6 僅能放 B 列，且接下來要接 G 列。



【圖 2-2-6】

(6)以長條數列模式用試誤法來拼組，整體上只要測試 42 次（６×７）即可判斷出有解、有幾組解或無解（不含中途的叉路）。

(7)運用長條數列的形式熟悉後，也找到對數字拼組的感覺，因此，我們再將這樣解題的策略想法轉回直接用六角拼圖來拼組，也是可以比以前更快，差別在六角環形數列與長條數列之數字找尋，還是長條數列較佳。

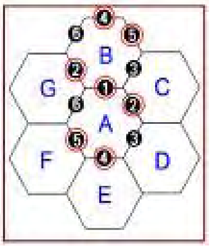
(8)我們研究此拼圖最大的期望是能快速找到或辨認出哪一片是中心片（即位置０），但很可惜，即使用這種長條數列棒的替代方式，還是無法很快判斷出誰最適合放在中心，因此，我們再回頭去檢視【過程 1-2】的那 50 組拼圖解答排列，發現七組數列中若有**非連續４同的兩片**，這兩片幾乎不會出現在中心位置 0 的地方(表 2-2-2)，因此我們興奮的開始進行假設與求証，但很可惜是的最後失敗了：

推論假設：非連續 4 同的兩片不會出現在中心位置

驗　　証：設計非連續 4 同的兩片，其中一片放在中心位置，看看能否能做出一組

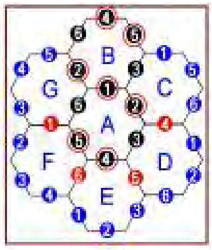
符合條件的拼圖。結果，也被我們做出一組成功的拼圖的，因此，非連續 4 同的兩片不會出現在中心位置這個結論被推翻了。

A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	6	4	5	3
C						
D						
E						
F						
G						



A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	6	4	5	3
C						
D						
E						
F						
G						

A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	6	4	5	3
C	1	5	6	4	2	3
D	1	2	6	5	3	4
E	1	6	4	5	3	2
F	1	5	6	4	3	2
G	1	3	4	5	2	6

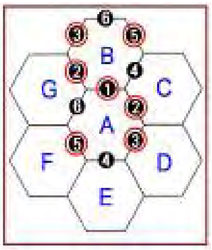


再 觀 察：非連續 4 同包含二種(2111 模式及 3131 模式)，發現 2111 模式都沒有出現在中心位置。

推論假設：2111 模式的兩片不會出現在中心位置

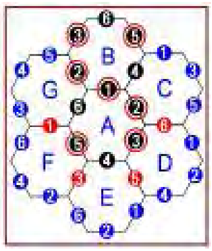
驗　　證：設計 2111 模式的兩片，其中一片放在中心位置，看看能否能做出一組符合條件的拼圖。結果，也被我們做出一組成功的拼圖的，因此，2111 模式的兩片不會出現在中心位置這個結論又被推翻了。

A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	3	6	5	4
C						
D						
E						
F						
G						



A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	3	6	5	4
C						
D						
E						
F						
G						

A	1	2	3	4	5	6
B	1	2	3	6	5	4
C	1	3	5	6	2	4
D	1	2	4	5	3	6
E	1	2	6	3	4	5
F	1	5	3	2	4	6
G	1	3	4	5	2	6



活動三：探討有效拼圖組的設計規律。

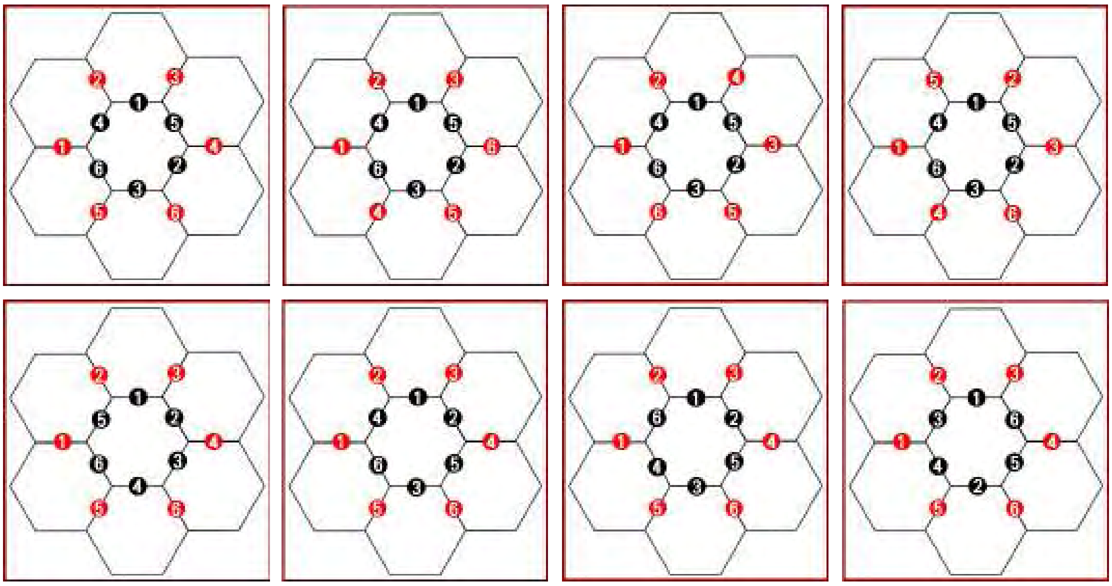
【過程 3-1】觀察一組成功拼圖組中的關鍵元素。

任取七列 1-6 不重複的數列組合未必能形成一組有效的拼圖，因此，我們試著從原有的拼圖中去尋找關鍵元素，並加以延伸探究。

討 論：

(1)因為拼圖是環環相扣的，因此每組拼圖內圈及中圈皆由兩片中相同數字組合而成，所以內圈與中圈的數字是關鍵之處，而內圈一定是由 1～6 組成，因此，我們可以先設定內圈數字，再將中圈數字填入，其餘外圈可以自由填入，只要注意數字不要重複，七組數列也不要重複即可。

(2)要更快速的產生至少一組解的拼圖，可以運用【過程 1-2】所觀察到的規律～中圈數字設定 1～6 即可(圖 3-1-1)，若再加上外圈每片三個數字的組合排列，那就可以形成非常多組拼圖了。



【圖 3-1-1】

【過程 3-2】如何製作多組解的拼圖

既然拼圖可以有多組解，那麼知道拼圖的設計方法後，我們嘗試再去思考，要如何就原先的拼圖組做最少的更改替換，使其形成有多組解的拼圖呢？

討 論：

(1)我們發現有一些多組解的拼圖，其都僅以兩片去調換，且這兩片多數是在位置 1～位置 6(表 3-2-1)，例如： 104、108、110、111、113、115、121、122、203、206、209、210、302、303、312，且多數交換的 2 片都是 4 同的數列組合。

【表 3-2-1】

104		108		110		111		113		121		122	
A	123456	A	123456	A	124563	A	123465	A	124356	A	123456	A	123456
B	124365	B	123465	B	125463	B	124356	B	124536	B	123546	B	124536
C	124563	C	135426	C	134256	C	125346	C	125436	C	124536	C	132645
D	132456	D	142563	D	142635	D	125436	D	132456	D	125463	D	136245
E	135264	E	143562	E	146325	E	126345	E	134526	E	126543	E	143625
F	154263	F	154236	F	162543	F	135264	F	135264	F	153264	F	145263
G	154632	G	164253	G	163452	G	135462	G	156234	G	153462	G	152364
	EABFGCD		AFCBGDE		DBFEGAC		BACFDGE		DABCFGE		AEBDGCF		ACEBDFG
	EDBFGCA		AFCBGED		DAFEBGC		DCEAGBF		DACBFGE		ABEDGCF		ADEBFCG
					DAFEGBC		DECAGBF		DECAFGB		CDBFAGE		ACEBFDG
									DBCAFGE				

203		206		209		302		303		312	
A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	123456	A	124563
B	123546	B	135264	B	124365	B	134652	B	124536	B	126453
C	125346	C	135624	C	124563	C	146352	C	124563	C	135624
D	134652	D	136524	D	132456	D	152634	D	125364	D	142536
E	142635	E	142365	E	135264	E	152643	E	136524	E	152364
F	162543	F	143625	F	154263	F	153264	F	143625	F	153624
G	164253	G	152463	G	154632	G	156342	G	165324	G	165234
	EGFCABD		AEFDBCG		EABFGCD		BGFADEC		EGAFBCD		EABCDGF
	EGFCBAD		AEFDCBG		EDBFGCA		BCFADEG		EDAFBCG		EABFDGC
							BFAGDEC				

也有一些三組解的拼圖，是固定四片，另外三片去交錯搭配出的解答(表 3-2-2)，例如：110(3)、113(4)、115(3)、122(3)、302(3)。

【表 3-2-2】

	110		113		115		122		302
A	124563	A	124356	A	123456	A	123456	A	123456
B	125463	B	124536	B	124536	B	124536	B	134652
C	134256	C	125436	C	132645	C	132645	C	146352
D	142635	D	132456	D	136245	D	136245	D	152634
E	146325	E	134526	E	143625	E	143625	E	152643
F	162543	F	135264	F	145263	F	145263	F	153264
G	163452	G	156234	G	152364	G	152364	G	156342
	DBFEGAC		DABCFGE		ACEBDFG		ACEBDFG		BGFADEC
	DAFEBGC		DACBFGE		ADEBFCG		ADEBFCG		BCFADEG
	DAFEGBC		DECAFGB		ACEBFDG		ACEBFDG		BFAGDEC
			DBCAFGE						

(2)有了上述的規律彙整，因此，我們拿 50 組拼圖組中只有一解的拼圖來嘗試做最少的替換，看看效果如何？(見下表 3-2-3)

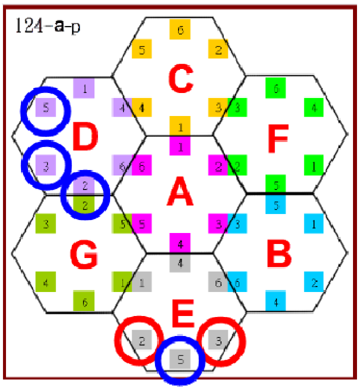
【表 3-2-3】

編號 124（嫺）

更改方法	將 E 的 2、3 位置交換

我觀察到 D、E 與其它片相接的有 4、6、2、1，所以可以將 E 的 3 與 2 做交換，即形成 4 同的狀況，如此可以多一組解。

	124
A	123456
B	124635
C	145623
D	146235
E	146352
F	152364
G	164325
	ACFBEGD



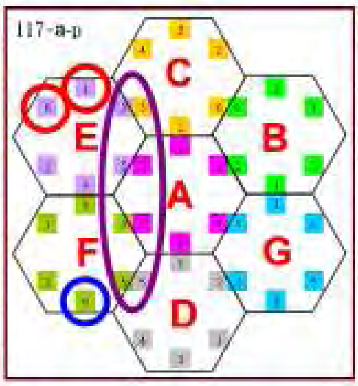
	124-改
A	123456
B	124635
C	145623
D	146235
E	146253
F	152364
G	164325
	ACFBDGE
	ACFBEGD

編號 117（麟）

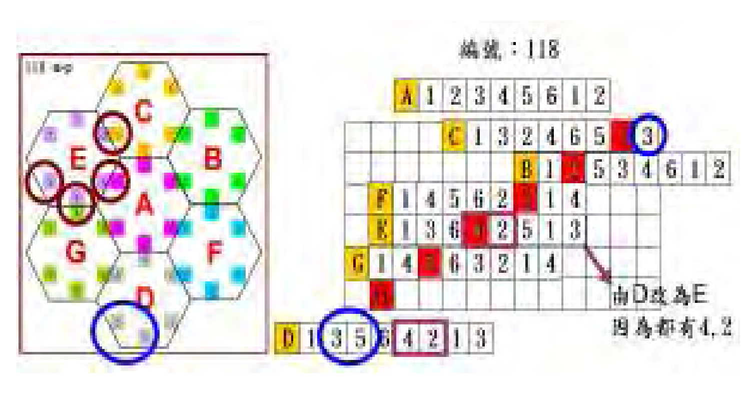
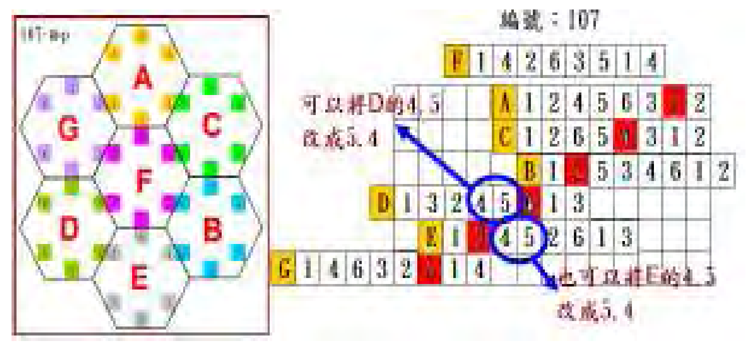
更改方法	將 E 的 6、1 位置交換

因為 E、F 的 3.5 位置相同，所以考慮上下交換，因此只要將 E 的 6.1 交換成 1.6，那麼就能與 F 的 6 相接形成第 2 組解了。

	117
A	124635
B	126345
C	134526
D	134562
E	135426
F	143562
G	165324
	ACBGDFE



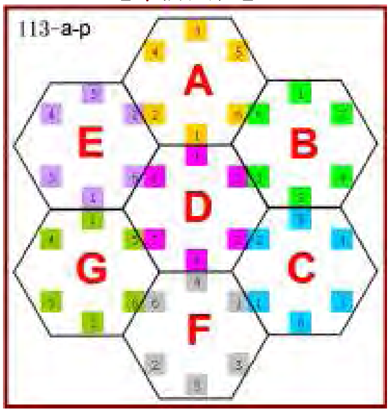
	117-改
A	124635
B	126345
C	134526
D	134562
E	163542
F	143562
G	165324
	ACBGDEF
	ACBGDFE

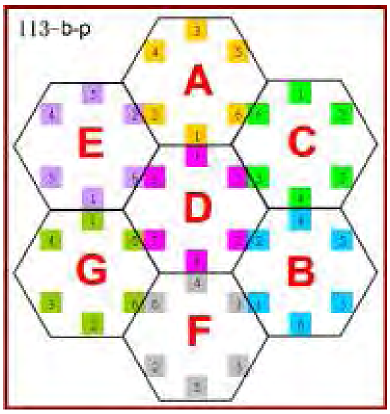
<table>
<tr><td colspan="2">編號 118（馨）</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>更改方法</td><td>將 D 的 3、5 位置交換</td></tr>
<tr><td colspan="2">因為 F 的下方要接 4.2，D、E 皆可，且 D、E 的 6$\boxed{42}$皆相同，不影響 G 的位置，因此只要將 D 的 3、5 交換，就能與就能與上方 C 接上了。</td></tr>
<tr><td colspan="2">編號 107（馨）</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>更改方法</td><td>將 D 或 E 的 4、5 改成 5、4(2 種改法)</td></tr>
<tr><td colspan="2">排到 B 列時剩 D、E(此時 G 已定位了)，因為 2 者都有 1.3 及 4.5，所以將其中一組的 4.5 更改為 5.4 即可。</td></tr>
</table>

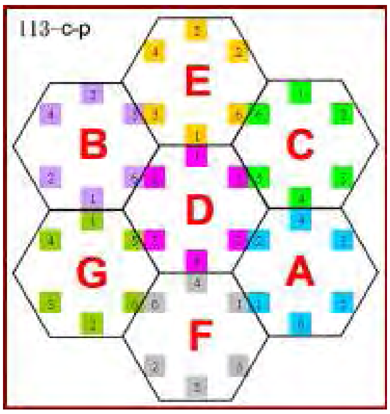
【意外的驚喜】

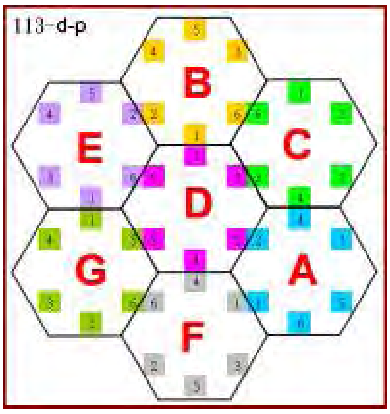
當我們已能用長條數列模式來增快找解的速度後，開始思考其實這些拼組試誤的步驟程序是有規律的，應可以交給電腦來處理，我們只需要從數據中進行分析探究，因此，我們麻煩畢業的學長依據我們的需求寫一個簡單的程式，輸入我們想要的數列讓電腦去幫我們跑答案，這樣我們就可以省下很多的時間。程式設計好後，我們迫不及待拿它去一一檢驗我們先前做出的答案時，竟然意外出了一個烏龍，小馨不小心將編號 113 的拼圖 G 列數字 1-5-6-2-3-4 誤打成 1-5-6-3-2-4，答案瞬間從 4 組解變成 9 組解，大家一陣驚呼，怎會如此？於是將這兩組數列所形成的答案兩相對照(圖 3-2-1)，看看能否看出什麼端倪？為了區辨，原編號 113 稱**甲拼圖**，改變後稱**乙拼圖**。

【甲拼圖組】

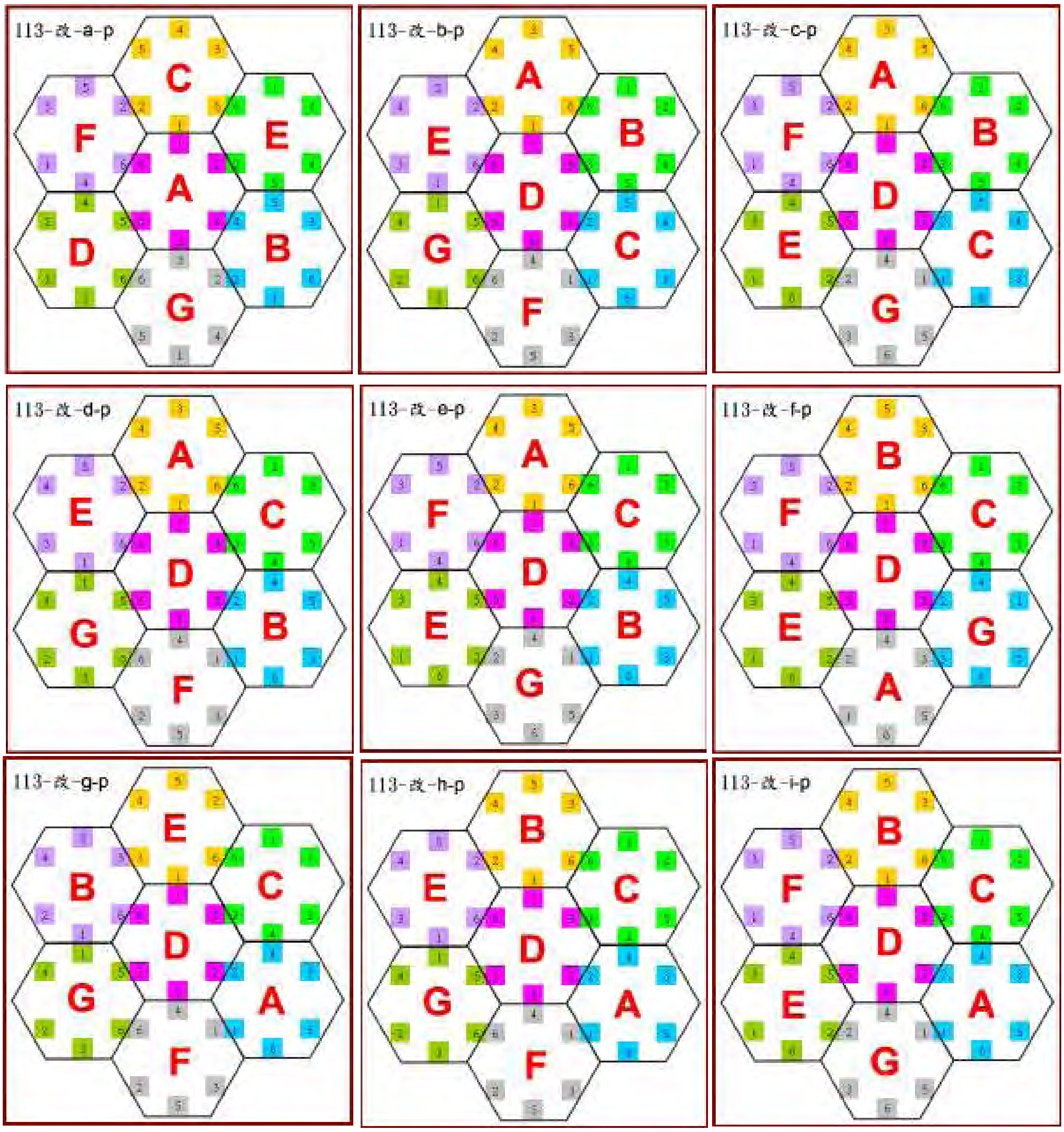








【乙拼圖組】

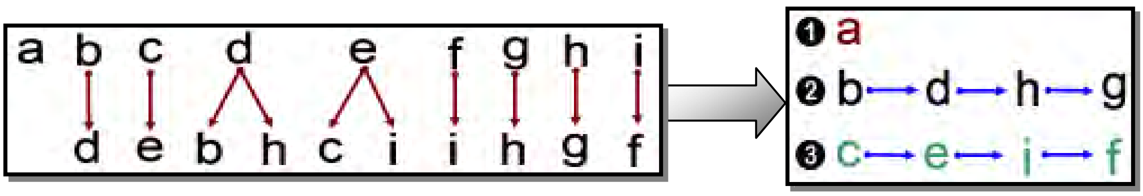


【圖 3-2-1】

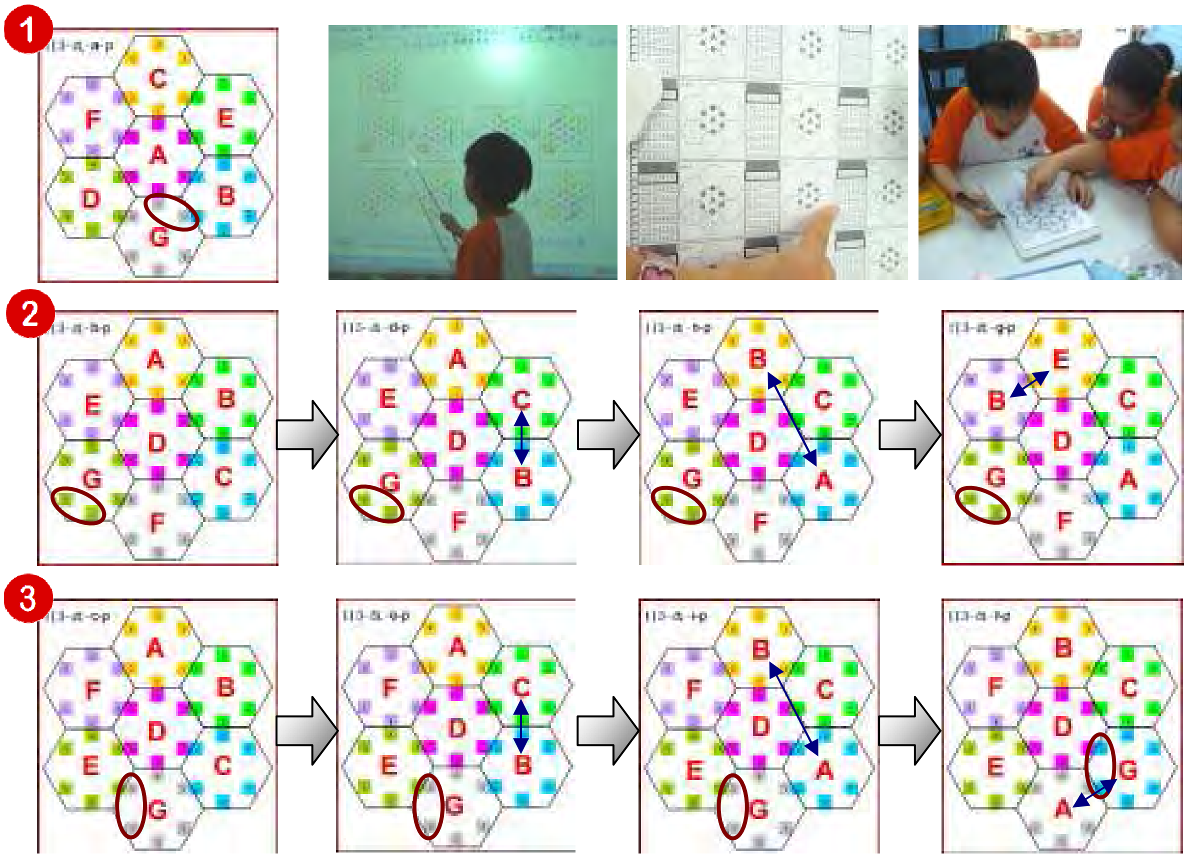
我們發現：

(1)乙拼圖有 4 組解答（第 b、d、g、h 組解）皆與甲拼圖完全一樣，表示其餘的 5 組解答（乙拼圖的第 a、c、e、f、i 組解）都是因為 G 數列改變而產生出來的。

(2)再分析乙拼圖的九組解中一次轉換之關係（僅只一次兩片互換的狀況），整理成右表，發現之間的轉換關係是可以分成三群：



(3)我們再重新將九組解重新做排序，以三群來做整理。感覺上好像是三組拼圖整合成一個拼圖，目前我們還在思考，這組拼圖給我們的啓發，究竟它還有多少我們未知的規律在其中，我們可以利用這個規律與關係，做什麼延伸呢？目前我們還未想出，但爾後的時間將會繼續去思考其關聯性。



(4)除了更改 G 的 2.3 外，我們發現，其實 F 的 3.5 也是一個關鍵，原編號 113 組其解答變化全在 A、B、C、E 四片交互產出的，因此 G、F 成了”自由列”，所以我們仔細去觀察它，在不牽動原有的 4 組解外，因爲它的改變又可以生出 4 組解，它可以由原有的 4 組解，經更改後，變成 8 組解(表 3-2-4)，因此，我們得到一個小結論：**從原有的拼圖解去找尋”自由列”的”自由數”，就有可能擴充解答數量。**

113			113(改G)			113(改F)	
A	124356		A	124356		A	124356
B	124536		B	124536		B	124536
C	125436		C	125436		C	125436
D	132456		D	132456		D	132456
E	134526		E	134526		E	134526
F	135264		F	135264		F	153264
G	156234		G	156324		G	156234
	DABCFGE			ACEBGDF			DABCFGE
	DACBFGE			DABCFGE			DABCGFE
	DECAFGB			DABCGEF			DACBFGE
	DBCAFGE			DACBFGE			DACBGFE
				DACBGEF			DECAFGB
				DBCGAEF			DBCAFGE
				DECAFGB			DECAGFB
				DBCAFGE			DBCAGFE
				DBCAGEF			

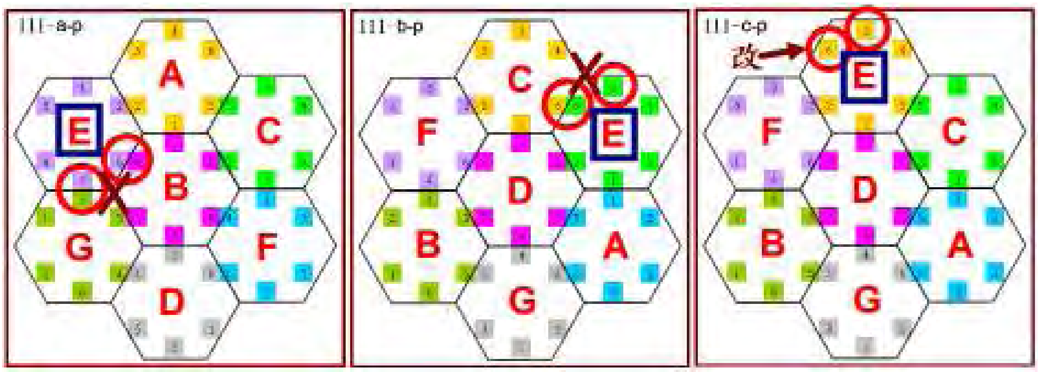
【反向思考】

我們可以改變最少數字，讓拼圖產生出多組解，那麼能否將多組解的拼圖，做最少的改變，使其變成單一解呢？雖然，不屬於此活動三的範圍內，但我們也嘗試

做了探究(表 3-2-5)：

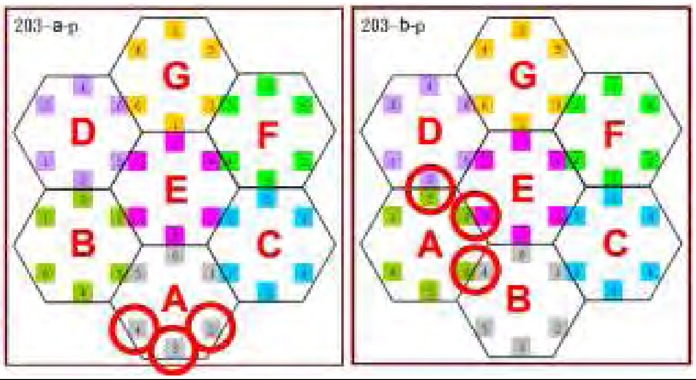
【表 3-2-5】

編號 111（麟）	
更改方法	將 D 或 E 的 4、5 改成 5、4(2 種改法)
先從三組解答中去找相關的 2 組數列 C、E(由 111-b-p 及 111-c-p 兩組最相近的解下手)，要進行關係的破壞關鍵就在 E 的 6.3，將 6.3 交換成 3.6，那麼 111-b-p 的 E 就無法與 C 相接了，一旦 E 的 6.3 改變位置後，那麼也同時破壞了 111-a-p 中 E、B、C 的關係，所以就由三組解變成唯一解了。	

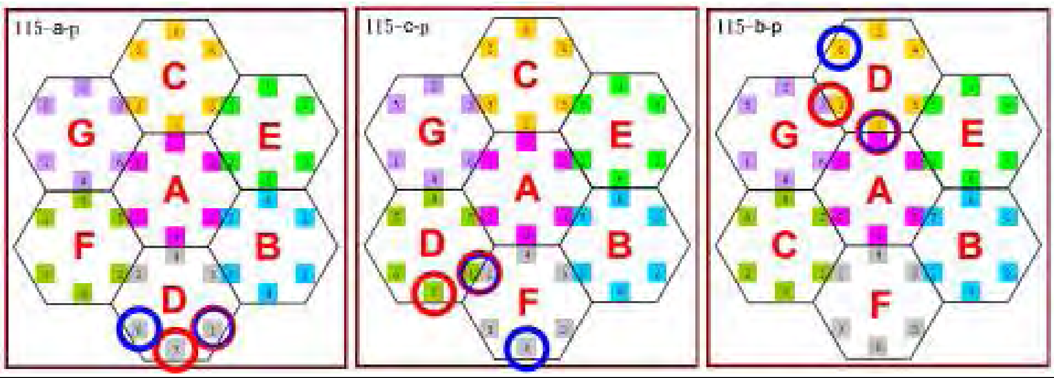


編號 203（佲）	
更改方法	將 A 的 2、4 交換
觀察兩種解的差異在 A、B，若保留 203-a-p，那麼可以動的數字是 2.3.4，所以只要任意更動這三數中的兩數即破壞 203-b-p 的組合，。	

	203
A	1 2 3 4 5 6
B	1 2 3 5 4 6
C	1 2 5 3 4 6
D	1 3 4 6 5 2
E	1 4 2 6 3 5
F	1 6 2 5 4 3
G	1 6 4 2 5 3
	EGFCABD
	~~EGFCBAD~~



編號 115（馨）	
更改方法	將 D 的 1、3 交換
觀察兩種解的差異在 C、D、F，若保留 115-a-p，那麼可以更動的數字是 1、3 或 1、6，一更動後就破壞了 115-c-p 及 115-b-p 的組合。	



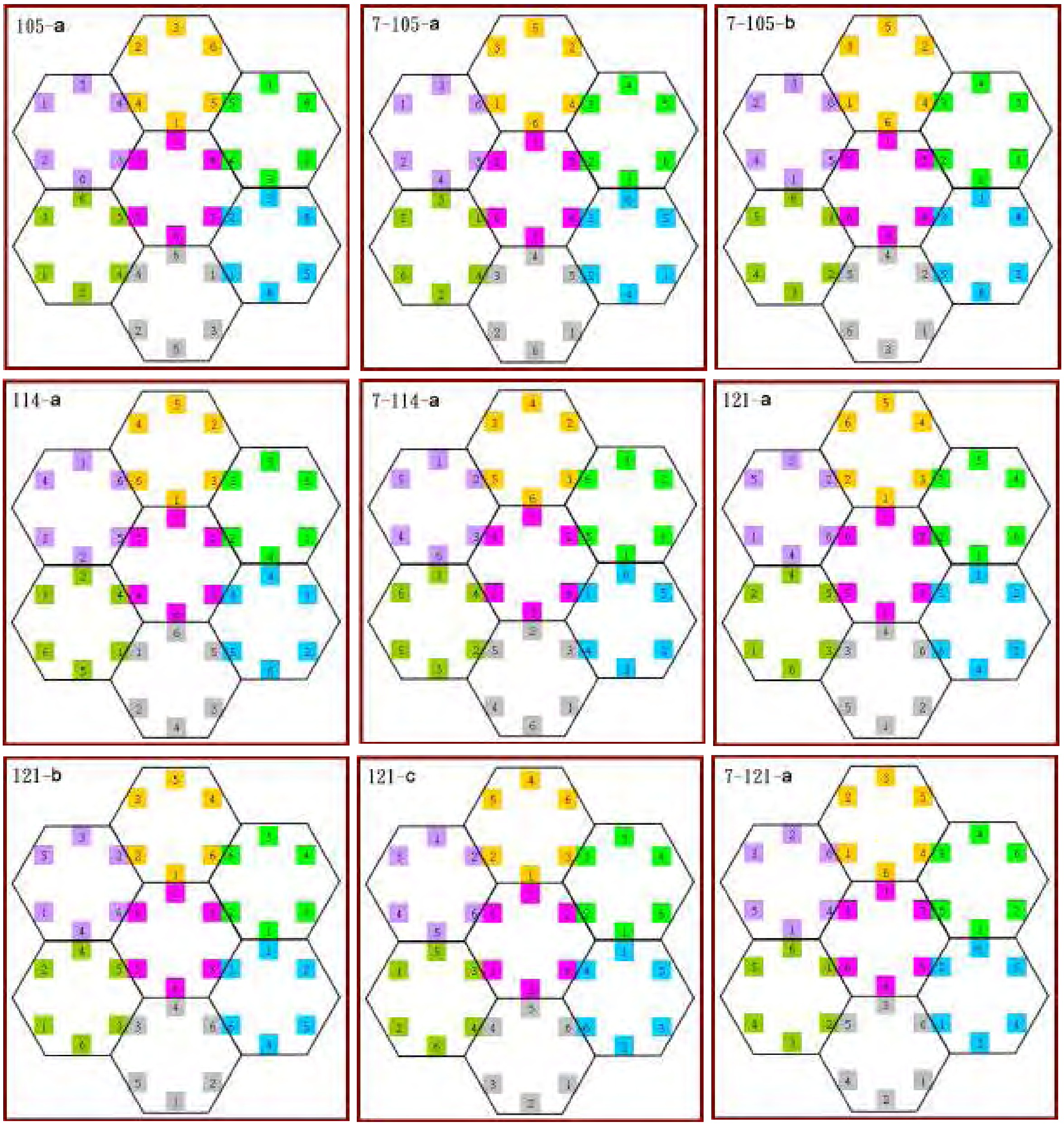
活動四：探討改變遊戲規則的可行性

【過程 4-1】探討另類拼組規則的可行性

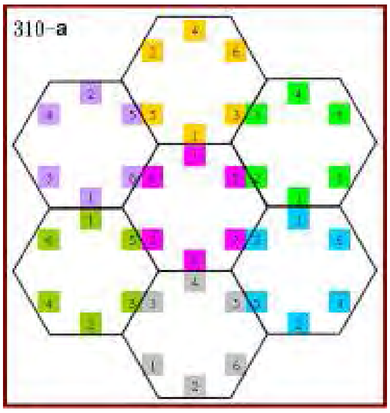
當原本的六角拼圖轉換成數字後，那麼與數學的結合性就更高了，因此，我們想：原本的拼組規則是相同的數字才可以接合在一起，那麼若將規則改變成和爲 7 的才可以接合在一起，是否可行呢？

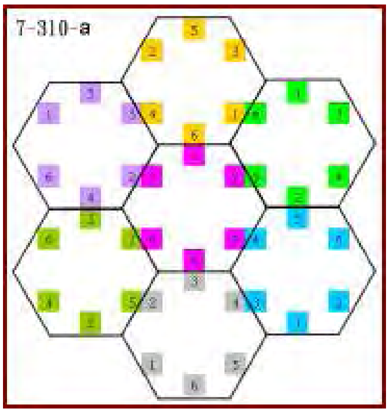
討 論：

(1)我們利用長條數列的拼組方法嘗試拼組和爲 7，發現也是適用的，只是思考的方向不是找相同數字，而是找和爲 7 的數字進行拼組，爾後爲了更快速，我們就運用電腦程式來幫我們跑這 50 組的拼圖數據，看看符合【規則一】的拼圖在改變規則下，是否也有解？結果發現 50 組中只有 4 組（編號 105、114、121、310）符合同時符合【規則二】(圖 4-1-1)。



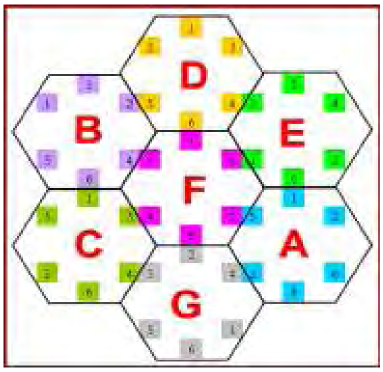
【圖 4-1-1】





(2)若利用六角拼圖來進行【規則二】 (和爲 7)的拼組，發現比【規則一】更不易拼組，因爲要做數字的對應，但轉換成長條數列模式就容易多了，也能很快判斷有解還是無解，最多 42 次即能窮盡所有解（不含中途的叉路）。

	和爲7
A	126435
B	132465
C	134625
D	134652
E	135426
F	162543
G	165324
	FDEAGCB



【過程 4-2】如何設計一組拼圖數列，使其能同時符合規則一及規則二。

在過程 3-1 中，我們發現 50 組拼圖數據中，竟然只有 4 組同時符合【規則一】與【規則二】，看來看來要找到一組拼圖能同時符合兩種遊戲規則似乎不是很容易，因此，我們嘗試自己來設計拼圖數列組。

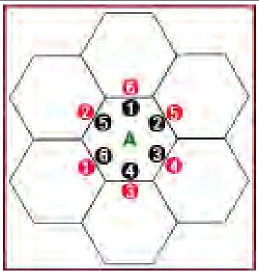
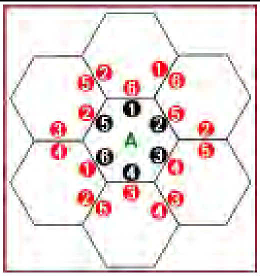
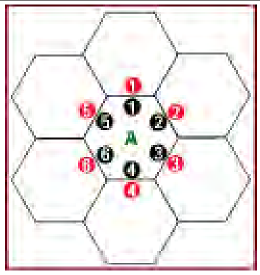
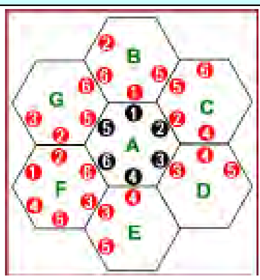
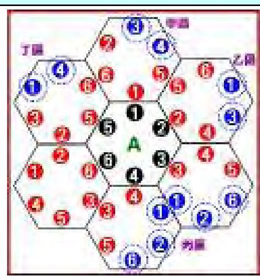
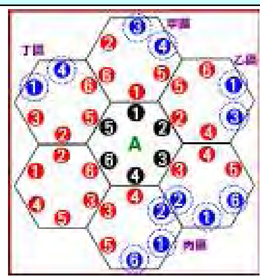
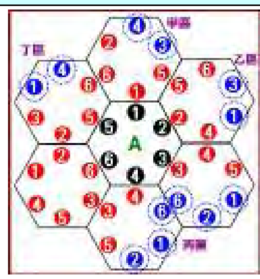
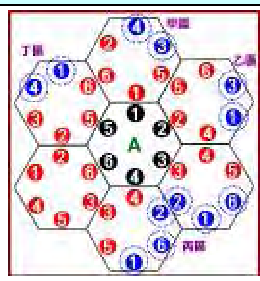
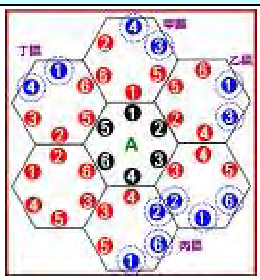
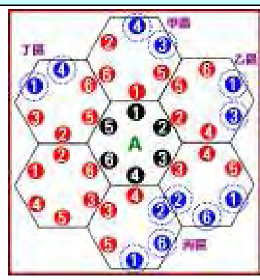
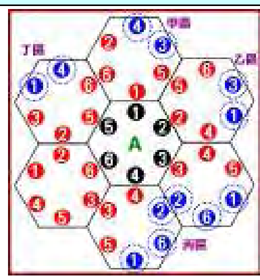
<u>方法一</u>：先用【過程 3-1】的方法找到符合【規則一】的數列組，再進行【規則二】的檢驗，找出同時符合兩種規則的數列。

討 論：我們實作的結果發現用這種方法效率很不好，雖然第二步可以用電腦下去跑，但就是像無頭蒼蠅一樣一直不斷的輸入替換數字跑程式，無解後又再改數字再跑程式，運氣好可以試出一組，運氣不好就得再試，因此這種方法不實用。

<u>方法二</u>：改以逆向思考，以【規則二】先設計內圈及中圈的數字，並記錄每片拼圖固定的三個數字(位置 0 的六個數字固定)，再全數清除數字，只留下位置 0 的拼圖，然後依據其它片拼圖的已知三個數字做【規則一】的搭配組合，下方爲圖示說明：

＊設計示範一＊

【表 4-2-1】

<table>
<tr><td>以規則二先設定內圈數字</td><td>固定內圈及中圈的數字</td><td>每列已確定 3 數不可更改</td><td>轉換成規則一的排法</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>將符合的數列放入位置中</td><td>藍框數字可自由替換</td><td>可從丙區先塡(組 1)</td><td>改丙區的共用邊(組 2)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>再改丙區的共用邊(組 3)</td><td>替換丙區右邊數字 (組 4)</td><td>替換乙區數字 (組 5)</td><td>替換甲區數字(組 6)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>替換丁區數字(組 7)</td><td>替換丙區右邊數字(組 8)</td><td>替換丙區左邊數字(組 9)</td><td>替換丙區中間數字(組 10)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>替換乙區數字(組 11)</td><td>替換丙區中間數字(組 12)</td><td>替換丁區數字(組 13)</td><td>替換乙區數字(組 14)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

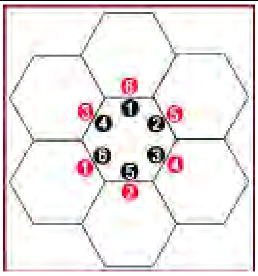
組 1		組 2		組 3		組 4		組 5		組 6		組 7	
A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 5 6	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5
B	1 2 6 3 5 4	B	1 2 3 4 6 5	B	1 2 5 3 4 6	B	1 2 5 3 4 6	B	1 2 5 3 4 6	B	1 2 5 3 4 6	B	1 2 5 3 4 6
C	1 2 6 5 3 4	C	1 2 6 3 5 4	C	1 2 6 3 5 4	C	1 2 6 3 4 5	C	1 2 6 3 4 5	C	1 2 6 3 4 5	C	1 2 6 3 4 5
D	1 3 4 2 5 6	D	1 3 4 2 5 6	D	1 3 4 2 5 6	D	1 2 6 3 5 4	D	1 2 6 3 5 4	D	1 2 6 3 5 4	D	1 2 6 3 5 4
E	1 3 4 5 6 2	E	1 4 6 5 2 3	E	1 4 6 5 2 3	E	1 3 4 2 5 6	E	1 4 2 5 6 3	E	1 4 2 5 6 3	E	1 4 2 5 6 3
F	1 4 6 5 2 3	F	1 6 2 3 4 5	F	1 6 2 3 4 5	F	1 4 6 5 2 3	F	1 4 6 5 2 3	F	1 4 6 5 2 3	F	1 6 2 4 3 5
G	1 6 2 3 4 5	G	1 6 5 3 4 2	G	1 6 3 4 5 2	G	1 6 2 3 4 5	G	1 6 2 3 4 5	G	1 6 2 4 3 5	G	1 6 5 2 3 4
一	AGDEBCF	一	BFDGACE	一	AFDGBCE	一	AGEBCDF	一	AGEBCDF	一	AGEBCDF	一	AFEBCDG
一	AGDCEBF	一	BFDAGCE	一	AFDBGCE	一	AGECBDF	一	AGECBDF	一	AGECBDF	一	AFECBDG
一	AGDECBF	二	BFDAGCE	二	AFDGBCE	一	CGBEDFA	二	AGECBDF	二	AGECBDF	二	AFECBDG
二	AGDECBF					一	DECBGFA						
						二	AGECBDF						

組 8		組 9		組 10		組 11		組 12		組 13		組 14	
A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 5 6	A	1 2 3 4 5 6	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5	A	1 2 3 4 6 5
B	1 2 5 3 4 6	B	1 2 6 3 5 4	B	1 2 3 4 6 5	B	1 2 3 4 6 5	B	1 2 6 3 5 4	B	1 2 6 3 5 4	B	1 2 6 3 5 4
C	1 2 6 3 5 4	C	1 4 2 5 6 3	C	1 2 6 3 5 4	C	1 2 6 3 5 4	C	1 3 4 2 5 6	C	1 3 4 2 5 6	C	1 4 2 5 6 3
D	1 4 2 5 6 3	D	1 5 3 4 6 2	D	1 4 2 5 6 3	D	1 3 4 2 5 6	D	1 5 3 4 2 6	D	1 4 6 5 2 3	D	1 4 6 5 2 3
E	1 6 2 4 3 5	E	1 6 2 4 3 5	E	1 5 3 4 2 6	E	1 5 3 4 2 6	E	1 6 2 3 4 5	E	1 5 3 4 2 6	E	1 5 3 4 2 6
F	1 6 3 4 5 2	F	1 6 3 4 5 2	F	1 6 2 4 3 5	F	1 6 2 4 3 5	F	1 6 2 4 3 5	F	1 6 2 3 4 5	F	1 6 2 3 4 5
G	1 6 5 2 3 4	G	1 6 5 2 3 4	G	1 6 5 2 3 4	G	1 6 5 2 3 4	G	1 6 5 2 3 4	G	1 6 2 4 3 5	G	1 6 2 4 3 5
一	AEDFBCG	一	AECDFBG	一	BFDEACG	一	BFDEACG	一	AFCDEBG	一	AGCEFBD	一	AGCEFBD
一	AEDBFCG	一	AECFDBG	一	BFDAECG	一	BFDAECG	一	AFCEDBG	一	AGCFEBD	一	AGCFEBD
二	AEDFBCG	二	AECFDBG	二	BFDAECG	二	BFDAECG	二	AFCEDBG	二	AGCFEBD	二	AGCFEBD
										二	BAEFCGD		

＊設計示範二＊

【表 4-2-2】

以規則二先設定內圈數字

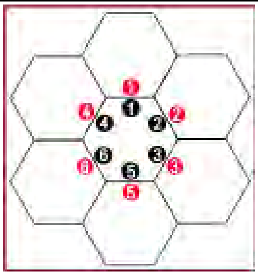


固定內圈及中圈的數字

每列已確定 3 數不可更改

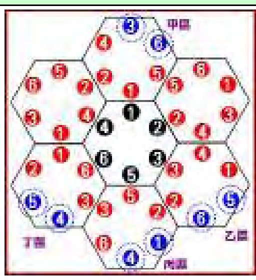
A	1	2	3	5	6	4
B	5	6	1			
C	6	5	2			
D	3	4	1			
E	1	2	4			
F	2	1	6			
G	6	3	5			

轉換成規則一的排法

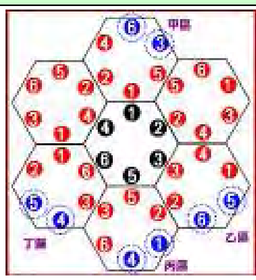


藍框數字可自由替換

先由小填到大(組 1)

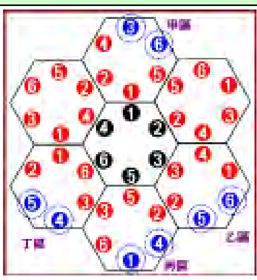


替換甲區數字(組 2)



替換乙、丙區數字(組 3)

替換甲區數字(組 4)



替換丁區數字 (組 5)

替換乙區數字 (組 6)

替換甲、丙區數字(組 7)

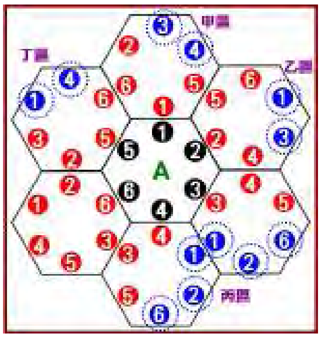
組 1		組 2		組 3		組 4		組 5		組 6		組 7	
A	123564	A	123564	A	123564	A	123564	A	123564	A	123564	A	123564
B	124365	B	124635	B	124635	B	124365	B	124365	B	124365	B	124635
C	134256	C	134256	C	134256	C	134256	C	134256	C	134256	C	134256
D	136524	D	136524	D	136524	D	136524	D	136524	D	136524	D	136524
E	146352	E	146352	E	163452	E	163452	E	163524	E	156234	E	146352
F	156234	F	156234	F	163524	F	163524	F	163542	F	163524	F	156234
G	163452	G	163452	G	165234	G	165234	G	165234	G	163542	G	163542
一	ABCFEGD	一	ABCFEGD	一	ABCGFED	一	ABCGFED	一	ABCGEFD	一	ABCEFGD	一	ABCFEGD
二	ACDFBGE	二	ACDFBGE	二	ACDGBEF	二	ACDGBEF	二	ACDGBFE	二	ACDEBGF	二	ACDFBGE

討 論：

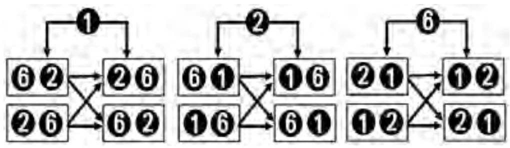
(1)先以【規則二】將內圈及中圈的數字定位，則以【規則一】做數字搭配組合，較容易做判別，因爲不用在經過運算的過程。

(2)當將已確知的數字做定位後，外圈任意填入不重複的數字（但需注意七列數字排序不可重複），皆可以形成一組符合兩種規則的六角拼圖。

(3)當已知的數字定位後，未填入的數字（如藍色虛線框）也可以做各種組合變化，如：【設計示範一】中，甲、乙、丙、丁四區，各有兩個到三個”自由數”，可以各自調換，也可以做區與區的搭配組合。以丙區來說，就可以做出下列 4*3＝12 種搭配組合，再加上甲、乙、丙區也可以有 2*2*2＝8 種變化，加乘起來就會有 96 種組合了，也就是<u>最多</u>可以變化出 96 種不同的拼圖＜當然這些變化中有部分會有重複的數列＞。



(4)由此設計出來的拼圖，必須同時符合兩種拼組規則，因此無法再做【過程 1-1-(3)】的轉換變形，因爲兩個數字和爲 7 經過轉換後，幾乎已無法再保持和爲 7 了，除非六個數字都剛好以對應方式互換（1↔6、2↔5、3↔4），但這種機率很小。

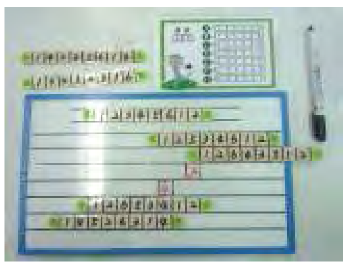


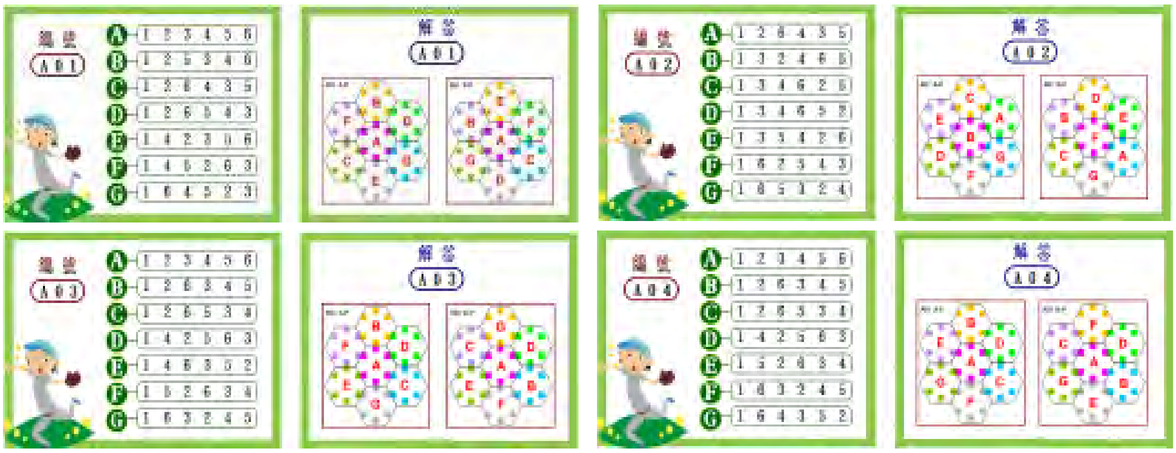
【過程 4-3】製作”雙拼六角板”做爲可推廣的數學拼組教材

爲了讓我們這份研究可以做最大的應用及推廣，我們將【過程 3-2】所設計出來符合兩種規則的拼圖，製作成雙拼六角板。

＜類型一＞雙拼單組解

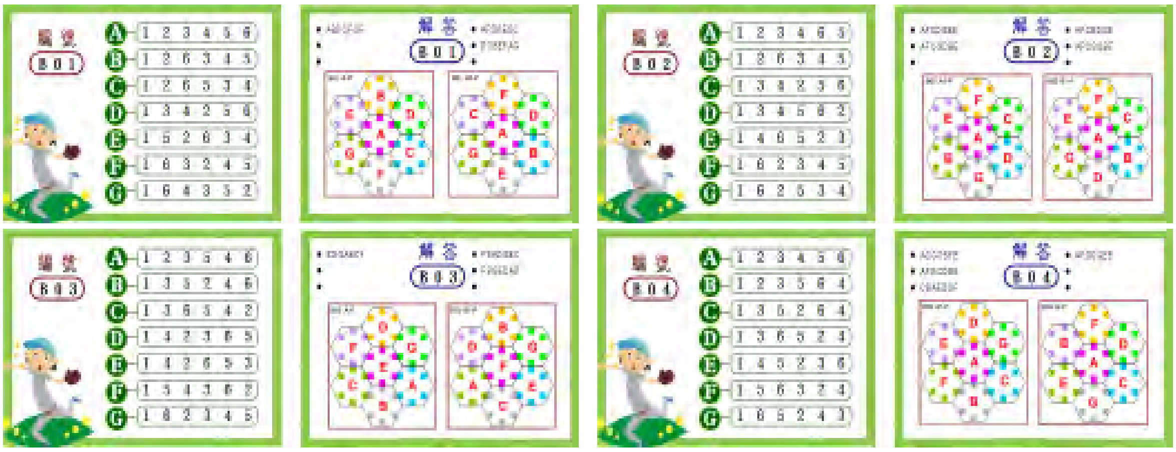
說明：【規則一】及【規則二】的拼組都只有一組解。我們做出來的成品數據列於附件中，在此僅列出數組供參考。





＜類型二＞雙拼多組解

說明：【規則一】及【規則二】的拼組至少有三組解以上。我們做出來的成品數據列於附件中，在此僅列出數組供參考。

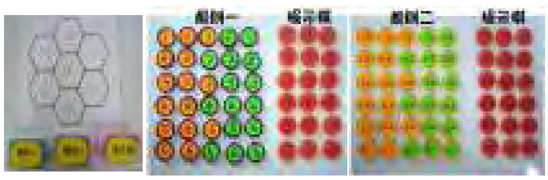


【過程 4-4】將研究成果設計成【六角棋】的益智遊戲

前面過程 4-3 之【雙拼六角板】之設計，其目的在用另一種方式來快速窮盡六角拼圖之解答，但，我們後來又想想，若它是個棋盤，是個可以對奕的棋盤呢？那不就可以成爲一個創意的益智遊戲了嗎？因此，我們結合數字棋與棋盤，結合規則一及規則二設計出了一個好玩的遊戲。

遊戲材料：

3 盒數字棋(規則一、規則二、指定棋)、六角棋盤格



遊戲說明：

(1)將位置 0 的 12 點鐘方向擺放指定棋 1，然後再選擇 7～9 顆指定棋放在外圈任意位置，但每個六角形內的數字不可重複，即固定此位置的數字。

(2)雙方先選擇顏色棋，猜拳決定先手後手，再開始輪流擺放數字，使其六角形上的數字不可重複。

(3)當六角形上只剩兩個空格時，可以將兩個旗子都放上去，但若空格都在外圈，就屬

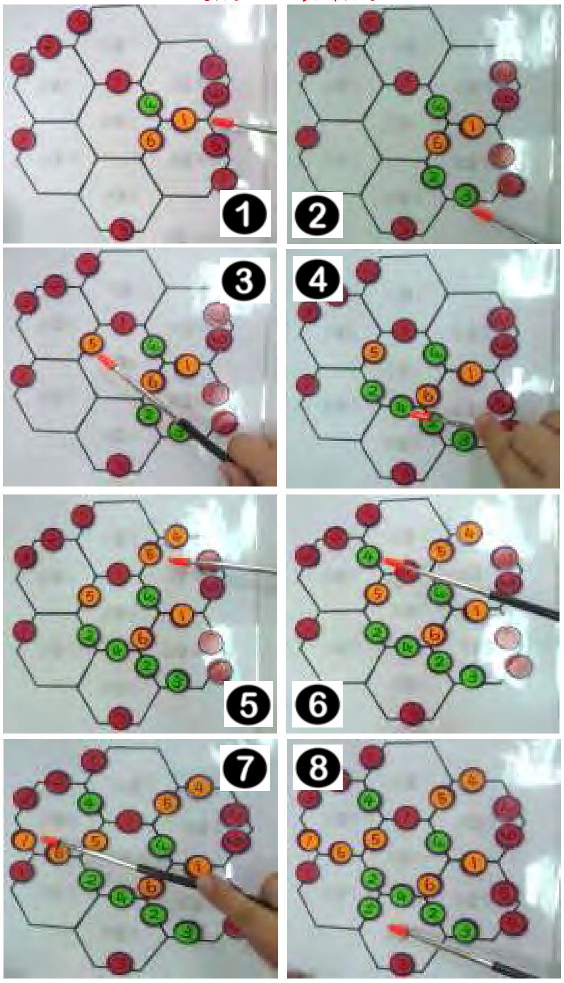
於自由數，則此兩格不能再放，即算失效。

(4)若發現對方錯誤，則可拔掉對方的棋子，放上自己的棋子，然後再多一次進攻機會。

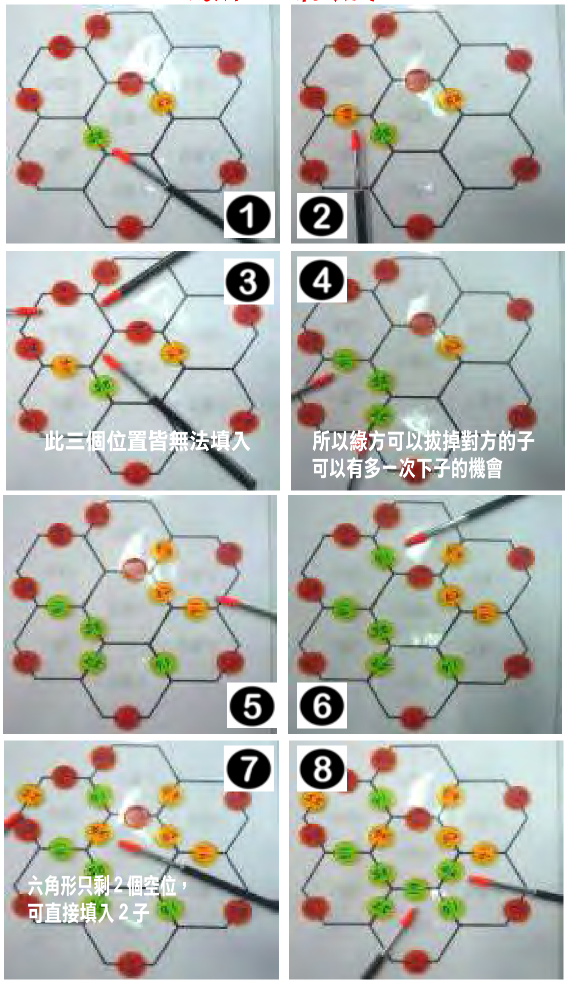
(5)直到內圈及中圈數字全填滿後，遊戲即結束。

(6)分數計算：內圈和中圈每子 2 分，外圈每子 1 分，多分者獲勝。

規則一示範棋局



規則二示範棋局



遊戲策略歸納：

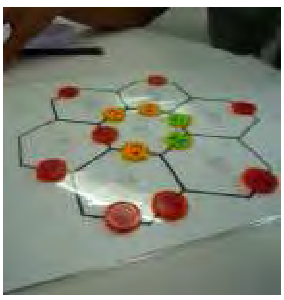
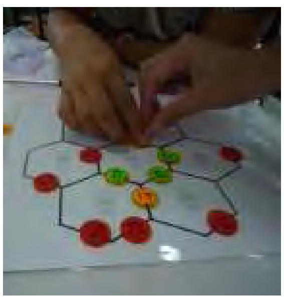
(1)當六角形內剩下 3 格時，盡量不要下子，否則剩下二個位置都會被對方填。

(2)若中心剩 3 格時，可以引誘對方下一子，則我們即可吃 4 分。

(3)規則 2 的 2 片接合處較不容易下，因爲影響的局勢較大，可用試誤法檢視。

(4)接合處若沒法子下子，那麼就回溯找到根本錯誤，給自己多一次下子的機會。

(5)下子處最好能形成多片六角形都只剩三子。

陸、結論

一、市售的六角拼圖並非只有一種解。

二、一組有效拼圖可以利用數字的對應轉換再變化出至少 7 種不同的拼圖組，若此組拼圖有二種解，那麼就可以變化出至少 14 種，再由這些變化出來的拼圖組之解答繼續做轉化，可生成的拼圖就更多了，但實質上都是同一組拼圖，且拼圖解也都是一樣多。

三、有效拼圖組完成的組合可區分成內、中、外三圈，市售的拼圖組其【中圈】必包含了六種圖案（或數字），但其非必要條件，因為我們也可以設計出無此條件的有效拼圖。

四、每組拼圖的數列中，3 同或 4 同的組合愈多，未必可以拼出多組解。

五、我們可以將六角拼圖組轉換成長條數列組，可以很快找到六角拼圖的解答，可以採用下列兩種方法，整體上只要測試 42 次（6×7）即能窮盡所有解（不含中途的叉路）：

(一)固定數棒更換位置：以一個數列棒分別在位置 1～位置 6 上移動找解。

(二)固定位置更換數棒：在同一個位置上更換其它六個數列棒找解。

六、運用移動長條數列組的方式找六角拼圖解的技巧，有許多策略可縮短試誤次數：

(一)同時辨認上下兩條路徑，選擇唯一路徑來排。

(二)遇同時皆有雙路徑時，可擅用字母編號順序來測試排列。

(三)利用數列的前後數字搭配判別。

七、製作一組有效拼圖，內圈及中圈數字為關鍵處，此兩圈數字一旦定位後，外圈三個自由數即可做排列組合，生成很多有效拼圖。

八、想要由單一解拼圖轉換成多組解拼圖，或由多組解拼圖轉換成單一解拼圖，只要找出每組拼圖的關鍵數列，將外圈自由數做最少的更動即可成功。

九、六角拼圖的拼組規則可以由相同數字的拼組【規則一】，變化成和為 7 的拼組【規則二】，但現有的拼圖（轉換成數字的拼圖）多數是無法同時符合兩種遊戲規則。

十、我們可以利用【規則二】先將固定內、中圈的數字，將每片拼圖上的 3 個數字做定位，再依據【規則一】將其它數字做定位，同時搭配部分拼圖片上的自由數做搭配組合，即可輕而易舉製作出很多同時符合兩種規則的”雙拼六角板”拼圖。

十一、由研究成果延伸出來的”六角棋”之益智遊戲，非常適合２人對奕，對奕時需思考環環相扣的數字關係，是一個極具挑戰性的益智遊戲教材。

柒、參考資料

一、誰來角逐-剖析四角拼圖的拼圖原理。高師大附中，四十四屆高中組數學科展。

二、四角的震撼。北一女，八十八年校慶科展作品。

三、簡單而不容易的拼圖—六角拼圖。高雄市第三十九屆科展作品。

四、幫你解四角拼圖。2012 年 2 月 2 日，取自 http://wildbird.e-land.gov.tw/wildbird/four.HTM

【評語】080403

本研究巧妙的將六角拼圖上的數字列（平面上六角排列）轉換為長條數列棒（直綫排列），以此快速找出拼圖解，頗具創意。另外作者探討有效拼圖組的設計規律，並將研究成果設計出六角棋的益智遊戲，做了很好的應用，精神可嘉，值得稱許。