

# 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080402

填填圈

—從數字和與重覆部份討論每邊和相等問題

學校名稱：新北市私立康橋雙語國中小學

作者： 小五 謝涵婕 小五 謝涵淳	指導老師： 吳宣鋒
-------------------------	--------------

關鍵詞：多邊形、解題、數形關係

# 作品名稱：填填圈-從數字和與重覆部份討論每邊和相等問題

## 摘要

填填圈是一個常見的數學遊戲，規則是在一個三角形的每一邊畫上三個圈圈，並在圈圈內分別填入數字 1~6 使每邊數字和相等，我們討論了四邊形、五邊形、六邊形（規則不變）和可用數字範圍加大的進階版三、四邊形，以及每邊和與每邊平方和都相等的三、四邊形。普通版的研究我們找到一種適用於三、四、五、六邊形的快速刪解法稱作「三數字消去法」與「雙三數字消去法」，另外我們還發現普通版和進階版的填填圈均有「互補關係」，只要找出一半的答案，便能推出另外一半的解答。最後還發現只要找出一組答案便能以等差推出無限組其他的解答，稱為「平移關係」。以及找出所有奇數邊放入連續整數時必有的一解與排法。

## 壹、研究動機

有一次表哥問我們有沒有玩過完美三角形這個數學遊戲，當時我們並沒有玩過這個遊戲，他便解釋規則給我們聽並要跟我們比賽誰找的答案最多。表哥花了十幾分鐘便找到許多答案，而我們卻一無所獲，之後又在數學課本上看見類似的問題，所以我們就決定要研究這個題目。

## 貳、研究目的

- 一、是否可以用同一種方法有條理的找出答案。
- 二、是否可以快速判別答案的正確性。
- 三、每種形狀與總和的答案個數有多少，它們之間有沒有關係？
- 四、三角形、四邊形、五邊形、六邊形的每邊和的最小值和最大值是多少，它們彼此之間有沒有關係？
- 五、答案的發展是否有規律性，如果有規律性，可以直接推出後面的答案嗎？

## 參、研究設備及器材

紙、筆、尺、電腦、軟體(excel)

## 肆、研究過程與結果

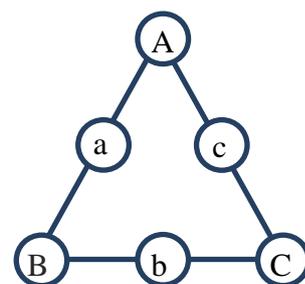
一開始我們隨意地把 1~6 的數字填入三角形中嘗試找出結果，找出解答後我們開始思考有沒有比較規律的辦法能找出所有結果，所以就試著從每邊數字總和最小找起，我們猜測是 9，因為 1~6 中最大的數 6 跟最小的兩個數 1 和 2 搭配成一邊，後來我們在嘗試的過程中想到一個方法，說明如下。

先將所有會用到的數字加起來  $1+2+3+4+5+6=21$ ，因為每個數字都會用到一次，所以答案每邊總和都是 9，三個邊的總和就是  $9 \times 3 = 27$ ，答案竟然比 21 還大，覺得這樣的結果很奇怪，後來發現原來是因為位在三個頂點的「角落數」會同時被兩個邊重複使用到，所以說如果把  $27 - 21 = 6$ ，6 就是三個被重複用到的數之總和，我們便利用這點先找出三個加起來等於 6 的數字組合，再把它填入角落並放入剩下的數字。(四、五與六邊形皆依此類推)到了四、五、六邊形時，因為角落數的組合太多，所以發現了適用於四邊形和五邊形的「三數字消去法」、六邊形的「雙三數字消去法」。(附註：紅的表示有解，黑的表示無解)

### 一、三角形

三角形各圓圈位置代號如右圖。

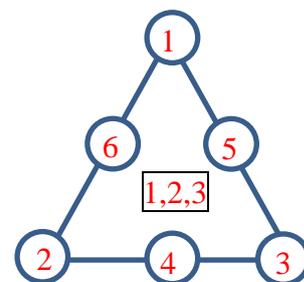
填入三角形圓圈中的所有數字和： $1+2+3+4+5+6=21$



1. 三角形每邊和為 9 ( $1+2+6$ )，三角落數總和  $A+B+C=9 \times 3 - 21=6$

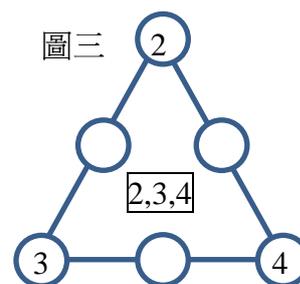
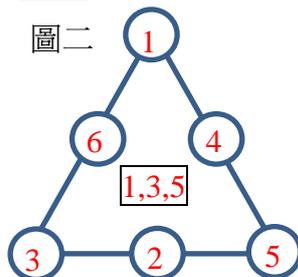
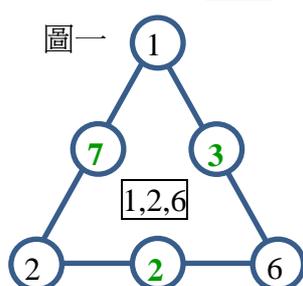
ABC 可能答案為 1,2,3：

右下圖是每邊和為 9 的唯一答案，因為  $9 \times 3 - 21 = 6$  (三邊總和 - 所有數字和 = 角落數總和)，所以三個角落數加起來等於 6，在數字 1~6 中要有三個數字且和等於 6 的組合只有 1、2、3 這一種。



2. 三角形每邊和為 10， $A+B+C=10 \times 3 - 21=9$

ABC 可能答案為 1,2,6、1,3,5、2,3,4：



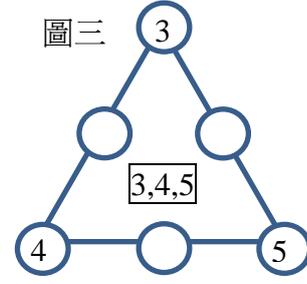
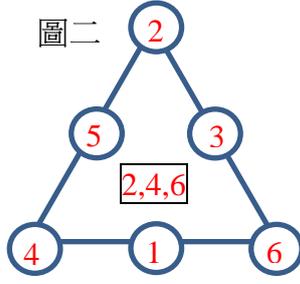
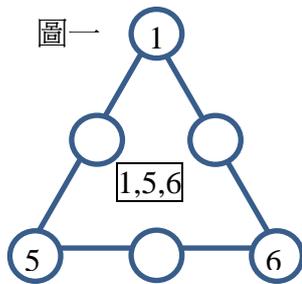
(1) 圖一：小 c 的位置要放 3，頂點 1 和 2 的中間要搭配 7(但是沒 7)，頂點 2 和 6 的中

間要放 2 (但 2 已用過), 所以角落數  $\boxed{1,2,6}$  不合。

(2) 圖三: 頂點 3 和 4 的中間要放 3 (但 3 已用過), 頂點 2 和 4 的中間要放 4 (但 4 已用過), 所以角落數  $\boxed{2,3,4}$  不合。

3. 三角形每邊和為 11,  $A+B+C=11 \times 3 - 21=12$

ABC 可能答案為  $\boxed{1,5,6}$ 、 $\boxed{2,4,6}$ 、 $\boxed{3,4,5}$  :



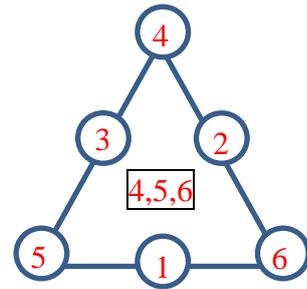
(1) 圖一:  $5+6$  必須搭配 0, 故  $\boxed{1,5,6}$  不合。

(2) 圖三:  $3+4$  必須搭配 5, 但 5 已經被另一角落數使用, 故  $\boxed{3,4,5}$  不合。

4. 三角形每邊和為 12,  $A+B+C=12 \times 3 - 21=15$

ABC 可能答案為  $\boxed{4,5,6}$  :

右圖是每邊和為 12 的唯一答案。



5. 小結 :

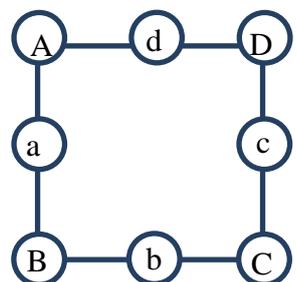
(1) 可以利用三邊總和減所有數字總和找出角落數後再填入剩餘數字找到答案, 答案數共有四個, 如下表。

每邊和	可能答案數(角落數組合的數量)	實際答案數(能成功)
9	1	1
10	3	1
11	3	1
12	1	1

(2) 每邊和最大解 12, 最小解 9。

二、四邊形

填入四邊形圓圈中的所有數字和:  $1+2+3+4+5+6+7+8=36$



1. 四邊形每邊和為 11 ( $1+2+8$ )，因為有四條邊所以是  $11 \times 4$ ，我們發現

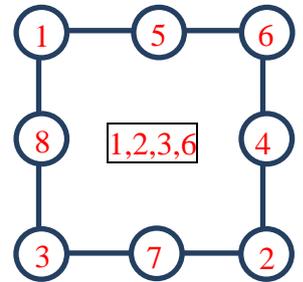
$11 \times 4 = 1+2+3+4+5+6+7+8+A+B+C+D$ ，所以  $A+B+C+D = 11 \times 4 - 36 = 8$ ，8 為角落數的總和，但最小的總和  $1+2+3+4$  比 8 大，所以每邊數字和為 11 不合。

2. 四邊形每邊和為 12， $A+B+C+D = 12 \times 4 - 36 = 12$

ABCD 可能答案為  $\boxed{1,2,3,6}$ 、 $\boxed{1,2,4,5}$ ：

(1)  $\boxed{1,2,3,6}$ ：先把 A 放 1，此時發現 B 和 D 都不能放 2，因為  $1+2$  必須搭配 9，所以 2 只能放在 C。

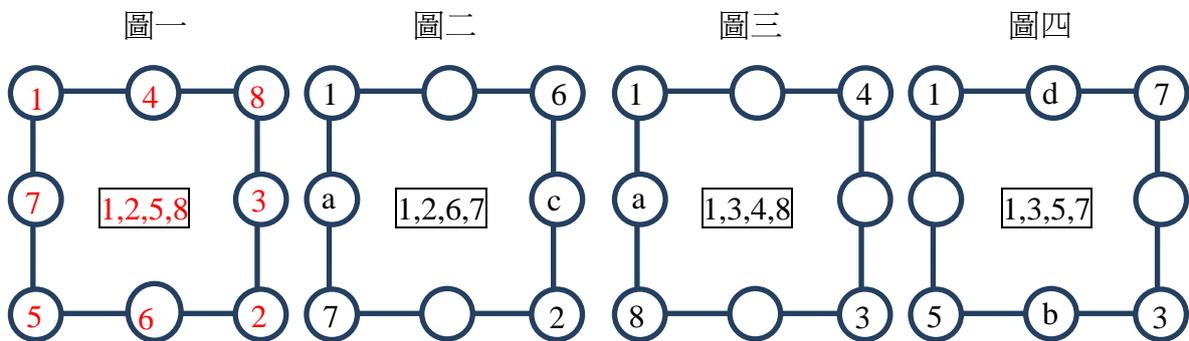
(2)  $\boxed{1,2,4,5}$ ：先把 1 放在 A，2 只能放在 C，B 放 4，D 放 5。因為  $4+2$  和  $5+1$  都是 6，所以 a 和 c 都需要 6 不合。



3. 四邊形每邊和為 13， $A+B+C+D = 13 \times 4 - 36 = 16$

ABCD 可能答案為  $\boxed{1,2,5,8}$ 、 $\boxed{1,2,6,7}$ 、 $\boxed{1,3,4,8}$ 、 $\boxed{1,3,5,7}$ 、 $\boxed{1,4,5,6}$ 、 $\boxed{2,3,4,7}$ 、 $\boxed{2,3,5,6}$ ：

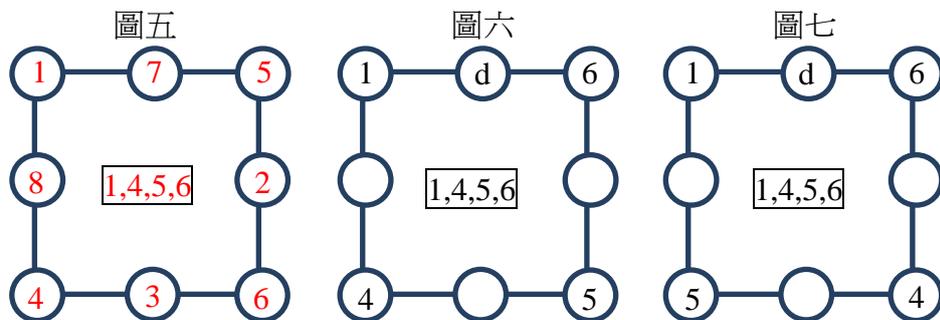
上面的  $\boxed{1,2,5,8}$ 、 $\boxed{1,2,6,7}$ 、 $\boxed{1,3,4,8}$ 、 $\boxed{1,3,5,7}$  因為  $1+2$  要搭配 10， $1+3$  要搭配 9，但數字選擇只有 1 至 8，所以這四組答案中的 1、2 或 1、3 只能放對角。



(1) 圖二：a 和 c 都需要 5，所以不合。

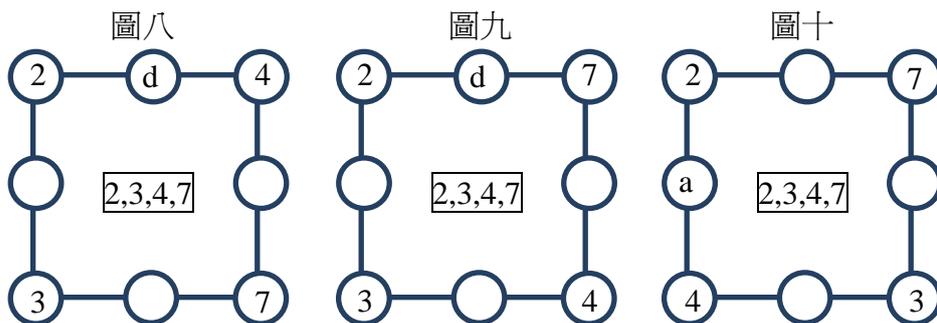
(2) 圖三：a 需要 4，所以不合。

(3) 圖四：b 和 d 都需要 5，所以不合。



(4) 圖六：d 需要 6，所以不合。

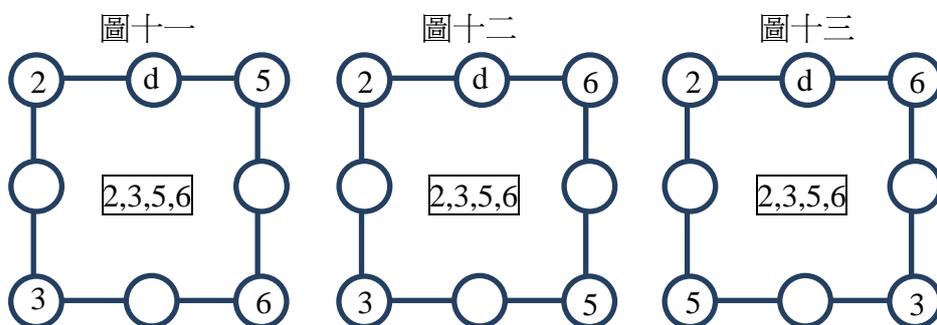
(5) 圖七：d 需要 6，所以不合。



(6) 圖八：d 需要 7，所以不合。

(7) 圖九：d 需要 4，所以不合。

(8) 圖十：a 需要 7，所以不合。



(9) 圖十一 d 需要 6，所以不合。

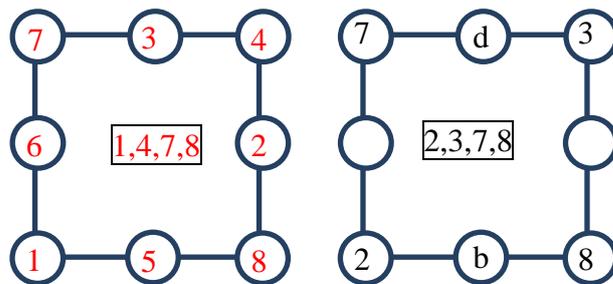
(10) 圖十二 d 需要 6，所以不合。

(11) 圖十三 d 需要 5，所以不合。

#### 4. 四邊形每邊和為 14， $A+B+C+D=14 \times 4 - 36=20$

ABCD 可能答案為 1,4,7,8、1,5,6,8、2,3,7,8、2,4,6,8、2,5,6,7、3,4,5,8、3,4,6,7：

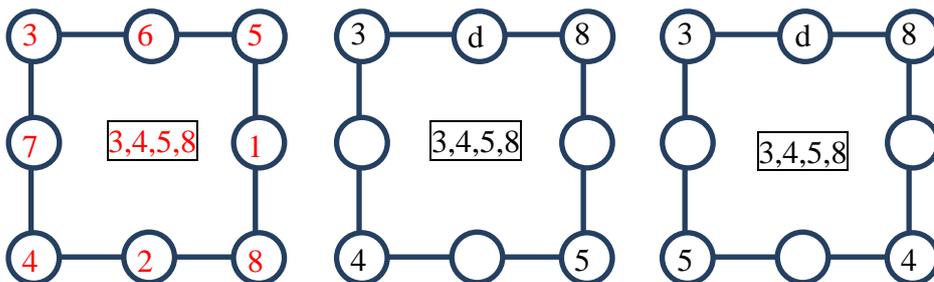
- (1) 在尋找四邊形每邊數字和 13 答案的時候，我們發現如果 ABCD 四個數字中的任意三個數字加起來的總和，與每邊和一樣時會沒有答案，例如：每邊和 14 的 1,5,6,8 中，因為  $1+5+8=14$  無論角落數怎樣放，1、5、8 一定會有兩個數字在同一邊，若 1 和 5 在同一邊就需要 8，但 8 已經放在角落了，所以沒有答案，利用這個方法可發現下面四種組合 1,5,6,8( $1+5+8=14$ )、2,4,6,8( $2+4+8=14$ )、2,5,6,7( $2+5+7=14$ )、3,4,6,7( $3+4+7=14$ )無解！
- (2) 同時我們回頭驗證也發現每邊和為 13 中的 1,3,4,8、1,3,5,7、2,3,4,7、2,3,5,6 確實沒有答案，我們稱這個判斷方法為「三數字消去法」。
- (3) 每邊和 14 的 ABCD 可能答案剩下：1,4,7,8、2,3,7,8、3,4,5,8，其中的 1,4,7,8 和 2,3,7,8 中的 7 和 8 只能放對角，因為  $7+8$  會超過 14。



上面為一組失敗的答案，b 和 d 都需要 4 所以不成功

圖一

圖二



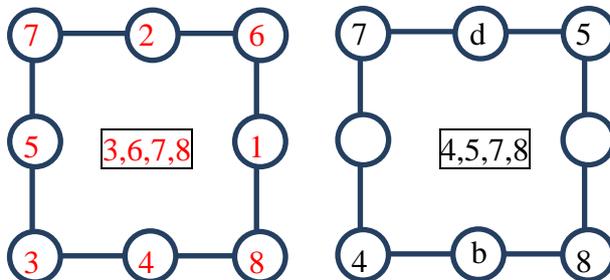
(1) 圖一：d 需要 3，所以不合。

(2) 圖二：d 需要 3，所以不合。

5. 四邊形每邊和為 15， $A+B+C+D=15 \times 4 - 36=24$

ABCD 可能答案為  $\boxed{3,6,7,8}$ 、 $\boxed{4,5,7,8}$ ：

7 和 8 只能放對角，否則再加一數會超過每邊和 15。



上面失敗的答案，因為 b 和 d 都需要 3，所以不合。

6. 四邊形每邊和為 16， $A+B+C+D=16 \times 4 - 36=28$

此時我們發現最大的四個數  $5+6+7+8$  比 28 小，所以每邊和 16 不合。

7. 小結：

(1) 角落數的可能組合中，如果有三個數字加起來和每邊數字和一樣時會失敗。

(2) 答案數有六個，分配如下

每邊和	可能答案數(角落數的數量)	實際答案數(能成功)
12	2	1
13	7	2
14	7	2
15	2	1

(3) 每邊和最大 15、最小 12。

(4) 理論上最大的角落數組合應該是  $5+6+7+8$ ，而最大解應該是

$\{(1+2+3+4+5+6+7+8)+(5+6+7+8)\} \div 4 = 15.5$ ，但因為每邊數字和是整數相加不會出現小數，而且這是最大解不能再大了，所以取到整數 15。同理最小的角落數組合應該是  $1+2+3+4$ ，而最小解應該是  $\{(1+2+3+4+5+6+7+8)+(1+2+3+4)\} \div 4 = 11.5$ ，同樣因為整數相加，且是最小解不能再小了，所以取到整數 12。

(5) 特殊關係：

三角形 (可能答案數：可以放在角落的數字組合)		
△每邊和	可能答案數	實際答案數
9	1	1
10	3	1
11	3	1
12	1	1
四邊形		
□每邊和	可能答案數	實際答案數
12	2	1
13	7	2
14	7	2
15	2	1

我們發現三角形每邊和為 9 的答案和三角形每邊和為 12 的關係很像，四邊形每邊數字和為 10 的答案和四邊形每邊數字和為 11 的關係很像，四邊形每邊數字和為 12 的答案和四邊形每邊數字和為 15 的關係很像，四邊形每邊數字和為 13 的答案和四邊形每邊數字和為 14 的關係很像，所以把角落數的組合拿來比較。

三角形

9 的答案為 123

11 的答案為 246

10 的答案為 135

12 的答案為 456

四邊形

12 的答案為	1236	14 的答案為	1478
13 的答案為	1258		3458
	1456	15 的答案為	3678

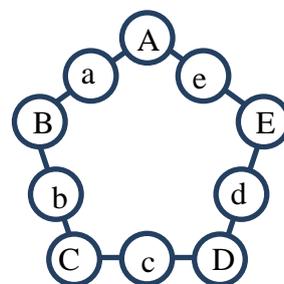
可發現：如果把三角形答案的數字 **1 和 6** 對調，**2 和 5** 對調，**3 和 4** 對調，123 會變成 654，135 會變成 642，如果把四邊形答案的數字 **1 和 8** 對調，**2 和 7** 對調，**3 和 6** 對調，**4 和 5** 對調，1236 會變成 8763，1258 會變成 8741，1456 會變成 8543，而進一步去驗證會發現三角形 12 的答案其實就是 9 的答案對調後的結果，11 的答案也只是 10 答案對調後結果，甚至連角落數字組合也可以用對調求出。四邊形也有相同的結果，所以我們推測五六邊形可能也有這樣的關係，我們稱這種關係為「互補關係」。

### 三、五邊形

填入五邊形圓圈中的所有數字和： $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$

五邊形每邊和最小為 13 ( $1+2+10$ )

$$13 \times 5 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+A+B+C+D+E$$



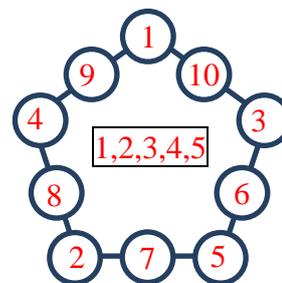
1. 五邊形每邊和為 13， $A+B+C+D+E=13 \times 5 - 55=10$

此時我們發現，就算最小的五個數字加起來  $1+2+3+4+5$  也比 10 大，所以每邊 13 不合。

2. 五邊形每邊和為 14， $A+B+C+D+E=14 \times 5 - 55=15$

ABCDE 可能答案為 **1,2,3,4,5**：

因為 1 和 2 必須搭配 11 但沒有 11 所以不能放同一邊，經過排列後找出一組答案（如右圖）。



3. 五邊形每邊和為 15， $A+B+C+D+E=15 \times 5 - 55=20$

ABCDE 可能答案為 **1,2,3,4,10**、**1,2,3,5,9**、**1,2,3,6,8**、**1,2,4,5,8**、**1,2,4,6,7**、**1,3,4,5,7**、**2,3,4,5,6**：

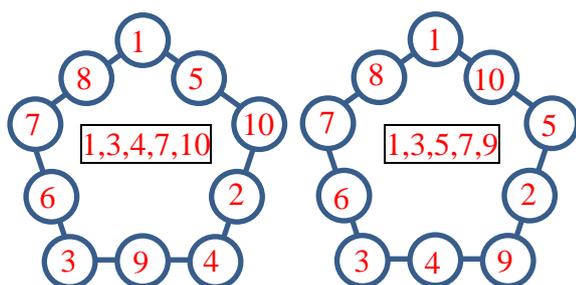
我們發現原來四邊形的「三數字消去法」在五邊形也適用，只要有 3 個角落數的總和與每邊數字總和一樣時，無論這 3 個數放在哪個角落，必定會有兩個角落數相鄰，此時就滿足三數字消去的原則，所以答案就會失敗。將五邊形組合利用「三數字消去法」檢驗後，我們發現每邊總和為 15 的五邊形沒有答案。

4. 五邊形每邊和為 16， $A+B+C+D+E=16 \times 5 - 55 = 25$

ABCDE 可能答案為  $\boxed{1,2,3,9,10}$ 、 $\boxed{1,2,4,8,10}$ 、  
 $\boxed{1,2,5,7,10}$ 、 $\boxed{1,2,5,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,6,7,9}$ 、 $\boxed{1,3,4,7,10}$ 、 $\boxed{1,3,4,8,9}$ 、  
 $\boxed{1,3,5,6,10}$ 、 $\boxed{1,3,5,7,9}$ 、 $\boxed{1,3,6,7,8}$ 、 $\boxed{2,3,4,6,10}$ 、 $\boxed{2,3,4,7,9}$ 、  
 $\boxed{2,3,5,6,9}$ 、 $\boxed{2,3,5,7,8}$ 、 $\boxed{2,4,5,6,8}$ 、 $\boxed{3,4,5,6,7}$ ：

其中有十三組數字可以用「三數字消去法」剔除，  
 剩餘可能有解的組合只剩  $\boxed{1,2,3,9,10}$ 、 $\boxed{1,3,4,7,10}$ 、  
 $\boxed{1,3,5,7,9}$ 。

$\boxed{1,2,3,9,10}$  經我們試過所有排法後沒有答案，而  $\boxed{1,3,4,7,10}$ 、 $\boxed{1,3,5,7,9}$  則各自排出一個解  
 （如右上圖）。

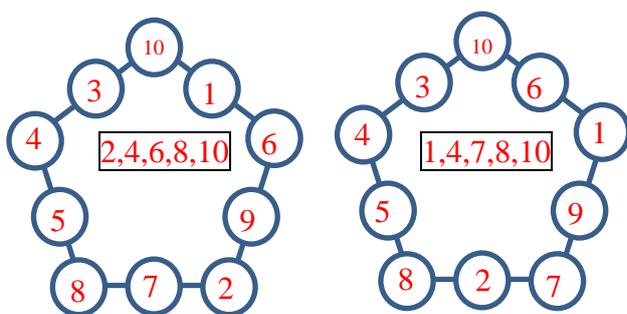


5. 五邊形每邊和為 17， $A+B+C+D+E=17 \times 5 - 55 = 30$

ABCDE 可能答案為  $\boxed{1,2,8,9,10}$ 、 $\boxed{1,3,7,9,10}$ 、 $\boxed{1,4,6,9,10}$ 、 $\boxed{1,4,7,8,10}$ 、 $\boxed{1,5,6,8,10}$ 、 $\boxed{1,5,7,8,9}$ 、  
 $\boxed{2,3,6,9,10}$ 、 $\boxed{2,3,7,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,5,9,10}$ 、 $\boxed{2,4,6,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,7,8,9}$ 、 $\boxed{2,5,6,7,10}$ 、 $\boxed{2,5,6,8,9}$ 、 $\boxed{3,4,5,7,10}$ 、  
 $\boxed{3,4,5,8,9}$ 、 $\boxed{4,5,6,7,8}$ ：

其中有十三組數字可以用「三數字消去法」消除，剩餘可能有解的組合只剩  $\boxed{1,2,8,9,10}$ 、  
 $\boxed{1,4,7,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,6,8,10}$ 。

$\boxed{1,2,8,9,10}$  經我們試過所有排法後，沒有答案，而  $\boxed{1,4,7,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,6,8,10}$  則是各自排出一  
 個唯一解。

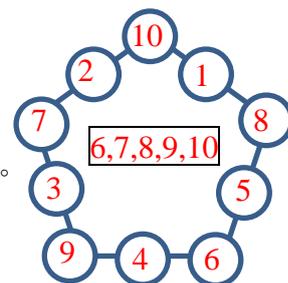


6. 五邊形每邊和為 18， $A+B+C+D+E=18 \times 5 - 55 = 35$

ABCDE 可能答案為  $\boxed{1,7,8,9,10}$ 、 $\boxed{2,6,8,9,10}$ 、 $\boxed{3,5,8,9,10}$ 、 $\boxed{3,6,7,9,10}$ 、 $\boxed{4,5,7,9,10}$ 、 $\boxed{4,6,7,8,10}$ 、  
 $\boxed{5,6,7,8,9}$ ，而用「三數字消去法」後每邊和為 18 並沒有答案。

7. 五邊形每邊和為 19， $A+B+C+D+E=19 \times 5 - 55 = 40$

ABCDE 可能答案為 6,7,8,9,10，在排列過後找出唯一答案（如右圖）。



8.小結：

(1)「三數字消去法」五邊形也適用。

(2) 五邊形全部的答案數共有六個，分配如下。

每邊和	可能答案數	實際答案數
14	1	1
15	7	0
16	16	2
17	16	2
18	7	0
19	1	1

(3) 每邊和最大 19、最小 14。

(4) 我們發現五邊形實際答案也有「互補關係」，每邊和 14 與每邊和 17 互補，每邊和 15 與每邊和 18 互補，每邊和 16 與每邊和 19 互補，「可能答案數」也有「互補關係」。

#### 四、六邊形

填入五邊形圓圈中的所有數字和：

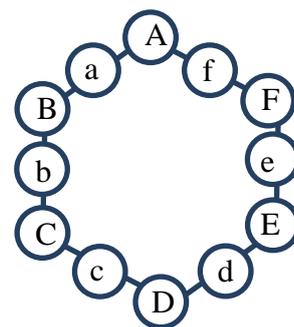
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$$

1.六邊形每邊和最小為 15 (1+2+12)

$$15 \times 6 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+A+B+C+D+E+F$$

$$\rightarrow A+B+C+D+E+F = 15 \times 6 - 78 = 12$$

我們發現就算最小的角落數組合 1+2+3+4+5+6 也比 12 大，所以每邊 15 不合。



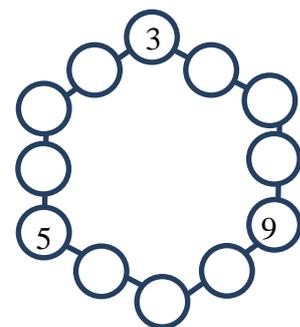
2.六邊形每邊和為 16， $A+B+C+D+E+F=16 \times 6 - 78=18$

我們發現就算最小的角落數組合 1+2+3+4+5+6 也比 18 大，所以每邊 16 不合。

3.六邊形每邊和為 17， $A+B+C+D+E+F=17 \times 6 - 78=24$

ABCDEF 可能答案為 1,2,3,4,5,9、1,2,3,4,6,8、1,2,3,5,6,7 (2種)：

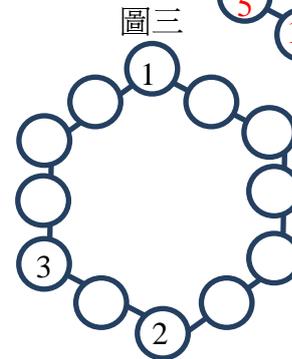
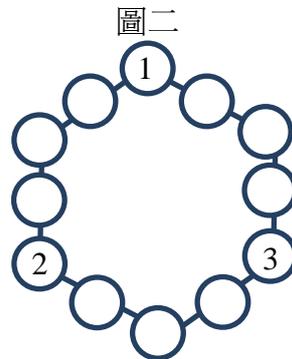
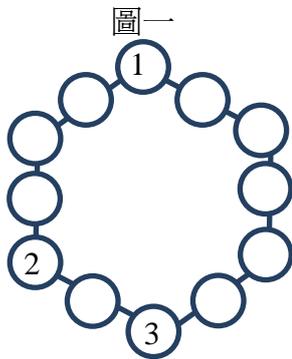
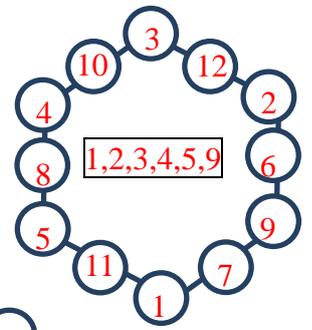
我們發現「三數字消去法」在六邊形時，只可以消去部份放法，但不能像四、五邊形一樣完全刪去不可能的答案，因為，三數字消去法可以固定三個角，例如：1,2,3,4,5,9中的  $3+5+9=17$ ，這三個數字不能相鄰，所以只能放六邊形的三個角（如右圖）。



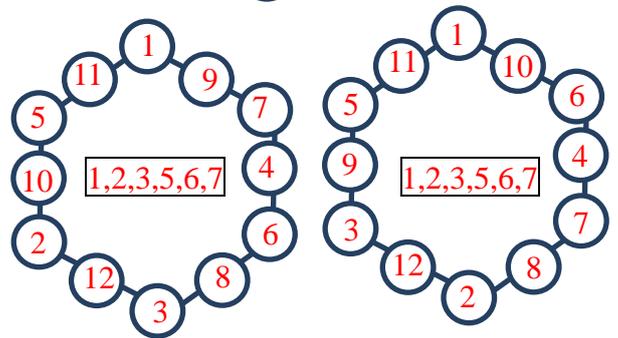
1,2,3,4,5,9、1,2,3,4,6,8這兩組答案可以用三數字消去法刪除部份排列方式，剩餘的可能

經過我們全部排完後，找到  $\boxed{1,2,3,4,5,9}$  的一組答案（如右圖）。

$\boxed{1,2,3,5,6,7}$ （2種）這組數字沒有任何方法可省略，但 1 和 2 以及 1 和 3 不能在同一邊，所以 1,2,3 的排法被固定成三種情況如下：



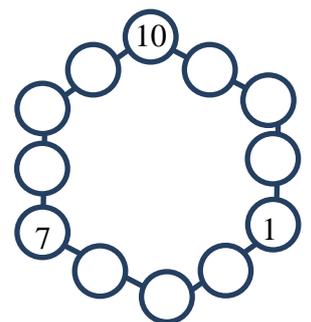
由圖一和圖三分別找到一組答案，如右圖。



#### 4. 六邊形每邊和為 18， $A+B+C+D+E+F=18 \times 6 - 78 = 30$

ABCDEF 可能答案為  $\boxed{1,2,3,4,8,12}$ 、 $\boxed{1,2,3,4,9,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,7,12}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,8,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,9,10}$ 、 $\boxed{1,2,3,6,7,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,6,8,10}$ 、 $\boxed{1,2,3,7,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,4,5,6,12}$ 、 $\boxed{1,2,4,5,7,11}$ 、 $\boxed{1,2,4,5,8,10}$ 、 $\boxed{1,2,4,6,7,10}$ 、 $\boxed{1,2,4,6,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,5,6,7,9}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,6,11}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,7,10}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,8,9}$ 、 $\boxed{1,3,4,6,7,9}$ 、 $\boxed{1,3,5,6,7,8}$ 、 $\boxed{2,3,4,5,6,10}$ 、 $\boxed{2,3,4,5,7,9}$ 、 $\boxed{2,3,4,6,7,8}$ ：

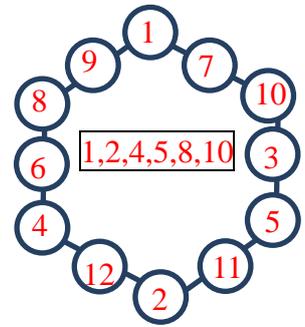
此時我們發現由「三數字消去法」延伸出來的想法，就是在角落數的六個數字中，如果有五個數字能湊出兩組你要做的每邊和（其中一個數重複），就可以直接刪去，例如 1,2,4,6,7,10 可以湊成  $10+7+1=18$  和  $10+6+2=18$ ，如果把 10,7,1 分別放在 A,C,E 的位置，會發現剩下的 2 和 6 無論放哪一個角落都會和 10 相鄰，所以我們得到一個結論，只要有五個數字組合成兩組和等於每邊數字和（其中一數重複）就會無解，稱為「雙三數字消去法」；而「三數字消去法」在六邊形則可以減去部分排列的方式。



- (1)  $\boxed{1,2,3,4,8,12}$ 、 $\boxed{1,2,3,4,9,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,7,12}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,8,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,5,9,10}$ 、 $\boxed{1,2,3,6,7,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,6,8,10}$ 、 $\boxed{1,2,4,5,7,11}$ 、 $\boxed{1,3,4,6,7,9}$  的組合都可發現一組三數字和恰為 18 與每邊數字和相同，在排出所有可能後發現這九組都沒有答案。
- (2)  $\boxed{1,2,3,7,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,4,5,6,12}$ 、 $\boxed{1,3,5,6,7,8}$ 、 $\boxed{2,3,4,5,6,10}$ 、 $\boxed{2,3,4,5,7,9}$ 、 $\boxed{2,3,4,6,7,8}$ 、 $\boxed{1,2,4,6,7,10}$ 、 $\boxed{1,2,4,6,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,5,6,7,9}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,6,11}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,7,10}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,8,9}$  的組合都可以發現兩

組三數字和恰為 18 與每邊數字和相同，可卻定沒有答案。

(3) 右圖為每邊和 18 的唯一答案。



5. 六邊形每邊和為 19， $A+B+C+D+E+F=19 \times 6 - 78=36$

ABCDEF 可能答案為  $\boxed{1,2,4,6,11,12}$ 、 $\boxed{1,2,5,6,10,12}$ 、

$\boxed{1,2,5,7,10,11}$ 、 $\boxed{1,2,6,7,9,11}$ 、 $\boxed{1,2,6,8,9,10}$ 、 $\boxed{1,3,4,5,11,12}$ 、 $\boxed{1,3,4,6,10,12}$ 、 $\boxed{1,3,4,7,9,12}$ 、

$\boxed{1,3,5,6,10,11}$ 、 $\boxed{1,3,5,7,9,11}$ 、 $\boxed{1,3,6,7,9,10}$ 、 $\boxed{1,4,5,6,8,12}$ 、 $\boxed{1,4,5,7,8,11}$ 、 $\boxed{1,4,6,7,8,10}$ 、

$\boxed{2,3,4,5,10,12}$ 、 $\boxed{2,3,4,6,9,12}$ 、 $\boxed{2,3,4,6,10,11}$ 、 $\boxed{2,3,4,7,8,12}$ 、 $\boxed{2,3,5,6,8,12}$ 、 $\boxed{2,3,5,6,9,11}$ 、

$\boxed{2,3,5,7,9,10}$ 、 $\boxed{2,3,6,7,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,5,6,8,11}$ 、 $\boxed{2,4,5,6,9,10}$ 、 $\boxed{2,4,5,7,8,10}$ 、 $\boxed{2,4,6,7,8,9}$ 、 $\boxed{3,4,5,6,8,10}$ 、

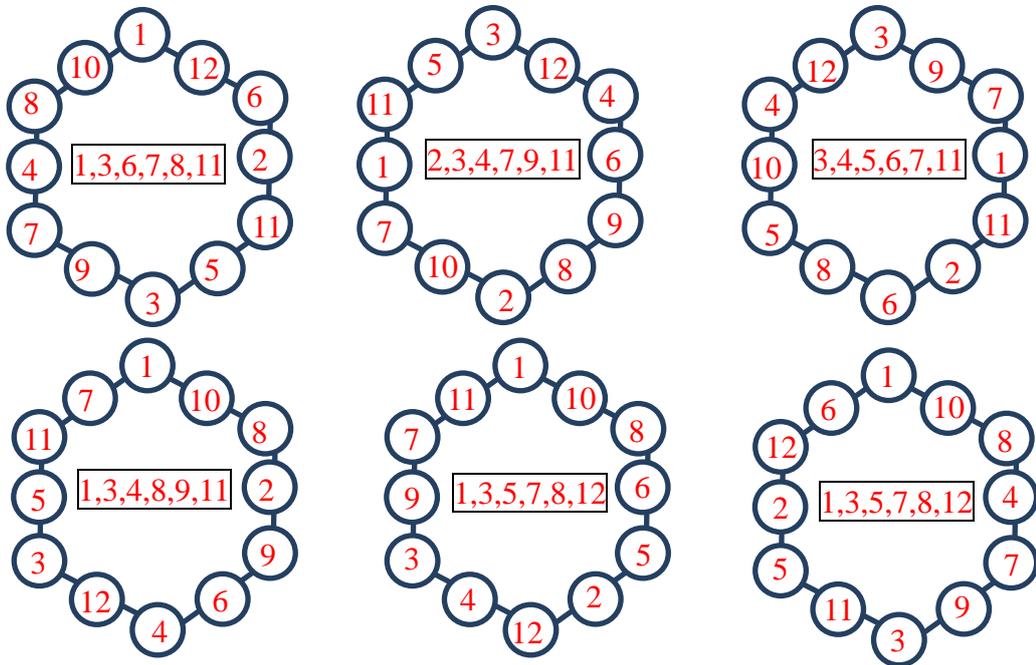
$\boxed{3,4,5,7,8,9}$ 、 $\boxed{1,2,3,7,11,12}$ 、 $\boxed{1,2,3,8,10,12}$ 、 $\boxed{1,2,4,7,10,12}$ 、 $\boxed{1,2,4,8,9,12}$ 、 $\boxed{1,2,4,8,10,11}$ 、

$\boxed{1,2,5,7,9,12}$ 、 $\boxed{1,2,5,8,9,11}$ 、 $\boxed{1,2,6,7,8,12}$ 、 $\boxed{1,3,4,7,10,11}$ 、 $\boxed{1,3,5,6,9,12}$ 、 $\boxed{1,3,5,8,9,10}$ 、

$\boxed{1,3,6,7,8,11}$ 、 $\boxed{1,4,5,6,9,11}$ 、 $\boxed{1,4,5,7,9,10}$ 、 $\boxed{1,5,6,7,8,9}$ 、 $\boxed{2,3,4,7,9,11}$ 、 $\boxed{2,3,4,8,9,10}$ 、 $\boxed{2,3,5,7,8,11}$ 、

$\boxed{2,4,5,6,7,12}$ 、 $\boxed{3,4,5,6,7,11}$ 、 $\boxed{1,2,3,9,10,11}$ 、 $\boxed{1,3,4,8,9,11}$ 、 $\boxed{1,3,5,7,8,12}$ (2種)：

總共 51 種可能的角落數組合，把它們分成三部分，第一部分是可找出兩組三數字和恰與每邊數字和相同(可以直接刪去)；第二部分是可找出一組三數字和恰與每邊數字和相同；第三部分則是沒有三數字只能依序排出所有可能。按照此規則我們找到六組解。



6. 六邊形每邊和為 20， $A+B+C+D+E+F=20 \times 6 - 78=42$

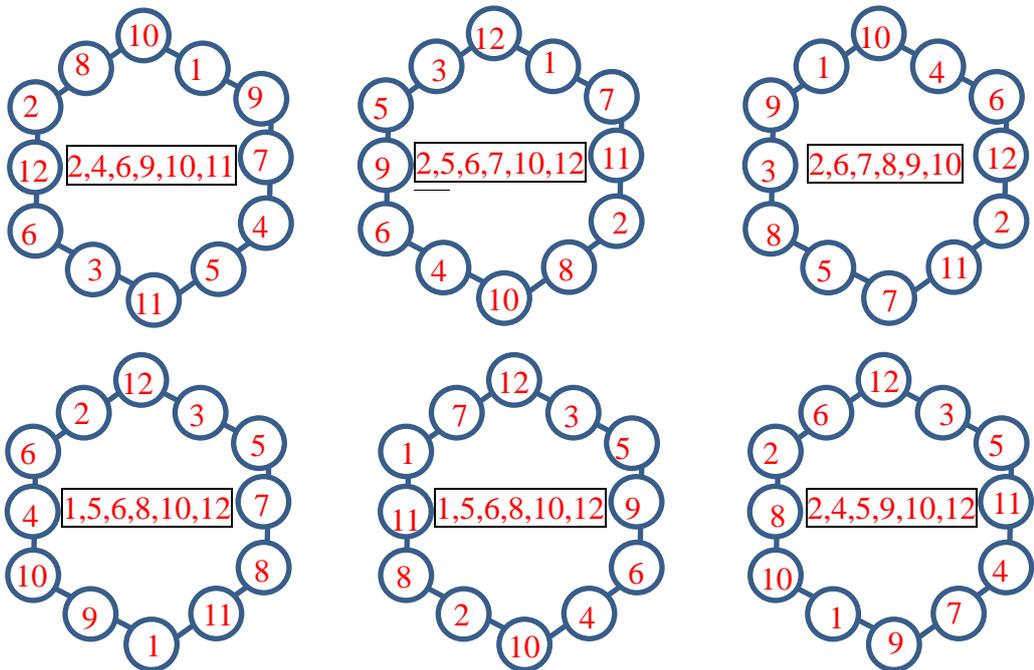
ABCDEF 可能答案為  $\boxed{1,2,7,9,11,12}$ 、 $\boxed{1,2,8,9,10,12}$ 、 $\boxed{1,3,7,8,11,12}$ 、 $\boxed{1,3,7,9,10,12}$ 、

$\boxed{1,3,8,9,10,11}$ 、 $\boxed{1,4,6,9,10,12}$ 、 $\boxed{1,4,7,9,10,11}$ 、 $\boxed{1,5,6,9,10,11}$ 、 $\boxed{1,5,7,8,9,12}$ 、 $\boxed{1,5,7,8,10,11}$ 、

$\boxed{2,3,6,8,11,12}$ 、 $\boxed{2,3,7,8,10,12}$ 、 $\boxed{2,3,7,9,12,11}$ 、 $\boxed{2,4,6,7,11,12}$ 、 $\boxed{2,4,6,8,10,12}$ 、 $\boxed{2,4,7,8,10,11}$ 、

$\boxed{2,5,6,8,9,12}$ 、 $\boxed{2,5,7,8,9,11}$ 、 $\boxed{3,4,5,7,11,12}$ 、 $\boxed{3,4,6,7,10,12}$ 、 $\boxed{3,4,6,8,10,11}$ 、 $\boxed{3,4,7,8,9,11}$ 、  
 $\boxed{3,5,6,7,9,12}$ 、 $\boxed{3,5,6,7,10,11}$ 、 $\boxed{3,5,6,8,9,11}$ 、 $\boxed{3,5,7,8,9,10}$ 、 $\boxed{4,5,6,7,9,11}$ 、 $\boxed{4,5,6,8,9,10}$ 、  
 $\boxed{1,2,6,10,11,12}$ 、 $\boxed{1,3,5,10,11,12}$ 、 $\boxed{1,3,6,9,11,12}$ 、 $\boxed{1,4,5,9,11,12}$ 、 $\boxed{1,4,6,8,11,12}$ 、 $\boxed{1,4,7,8,10,12}$ 、  
 $\boxed{1,5,6,7,11,12}$ 、 $\boxed{1,6,7,8,9,11}$ 、 $\boxed{2,3,5,9,11,12}$ 、 $\boxed{2,3,6,9,10,12}$ 、 $\boxed{2,4,5,8,11,12}$ 、 $\boxed{2,4,6,9,10,11}$ 、  
 $\boxed{2,4,7,8,9,12}$ 、 $\boxed{2,5,6,7,10,12}$ 、 $\boxed{2,5,6,8,10,11}$ 、 $\boxed{2,6,7,8,9,10}$ 、 $\boxed{3,4,5,8,10,12}$ 、 $\boxed{3,4,5,9,10,11}$ 、  
 $\boxed{3,4,6,8,9,12}$ 、 $\boxed{4,5,6,7,8,12}$ 、 $\boxed{1,5,6,8,10,12}$ (2種)、 $\boxed{2,3,4,10,11,12}$ 、 $\boxed{2,4,5,9,10,12}$ ：

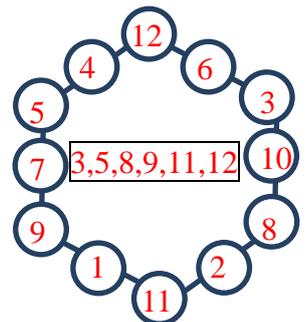
總共 51 種可能，同樣分成三部分，第一部分是可找出兩組三數字和恰與每邊數字和相同(可以直接刪去)；第二部分是可找出一組三數字和恰與每邊數字和相同；第三部分則是沒有三數字只能依序排出所有可能。按照此規則我們找到六組解，如下圖。



7. 六邊形每邊和為 21， $A+B+C+D+E+F=21 \times 6 - 78=48$

ABCDEF 可能答案為  $\boxed{1,7,8,9,11,12}$ 、 $\boxed{2,7,8,9,10,12}$ 、 $\boxed{3,6,7,9,11,12}$ 、 $\boxed{3,6,8,9,10,12}$ 、  
 $\boxed{3,7,8,9,10,11}$ 、 $\boxed{4,5,6,10,11,12}$ 、 $\boxed{4,5,7,9,11,12}$ 、 $\boxed{4,5,8,9,10,12}$ 、 $\boxed{4,6,7,8,11,12}$ 、 $\boxed{4,6,8,9,10,11}$ 、  
 $\boxed{5,6,7,8,10,12}$ 、 $\boxed{5,6,7,9,10,11}$ 、 $\boxed{1,5,9,10,11,12}$ 、 $\boxed{1,6,8,10,11,12}$ 、 $\boxed{2,4,9,10,11,12}$ 、 $\boxed{2,5,8,10,11,12}$ 、  
 $\boxed{2,6,7,10,11,12}$ 、 $\boxed{2,6,8,9,11,12}$ 、 $\boxed{3,4,8,10,11,12}$ 、 $\boxed{3,5,7,10,11,12}$ 、 $\boxed{4,6,7,9,10,12}$ 、 $\boxed{3,5,8,9,11,12}$ ：

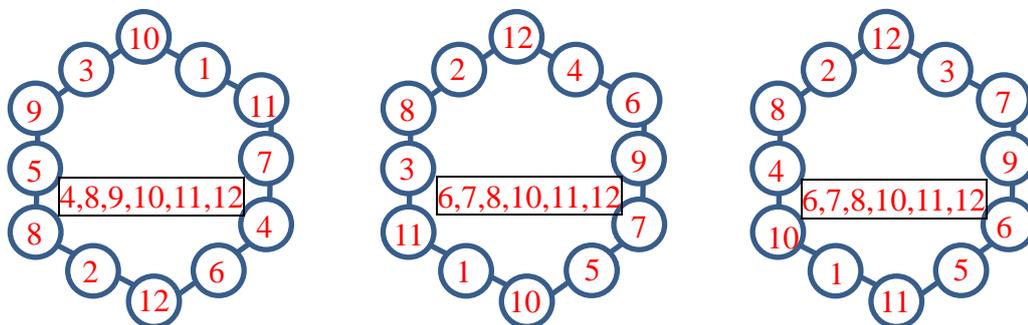
上面總共 22 種可能，我們把它們分成三部分，第一部分是找出兩組三數字和恰與每邊數字和相同(這一部分可以直接刪去)；第二部分是找出一組三數字和恰與每邊數字和相同；第三部分則是沒有三數字只能排出所有可能。右圖為每邊和 21 的唯一答案。



8.六邊形每邊和為 22， $A+B+C+D+E+F=22\times 6-78=54$

ABCDEF 可能答案為  $\boxed{4,8,9,10,11,12}$ 、 $\boxed{5,7,9,10,11,12}$ 、 $\boxed{6,7,8,10,11,12}$  (2種)：

我們找到三組答案如下。



9.小結：

(1)「三數字消去法」在六邊形只能簡化排法，但配合使用「雙三數字消去法」可減少需要嘗試的結果。

(2) 答案數有二十個，分配如下。

每邊和	可能答案數	實際答案數
17	3	3
18	22	1
19	51	6
20	51	6
21	22	1
22	3	3

(3) 每邊數字和最大解 22、最小解 17。

(4) 我們發現六邊形也有「互補關係」。

## 伍、討論

我們經由歸納找出了一些方法，可有效減少需要嘗試的可能性，但這些方法是否能用數學的方式解釋它，讓它不只是一個經驗，也希望能讓其他人更容易理解。因此，我們針對研究結果中所發現的方法逐一進行討論，內容如下：

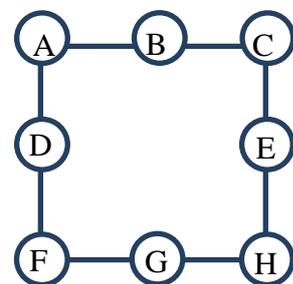
- 一、利用三邊總和與連續整數總和的差找出角落數和的範圍減少需要嘗試的可能結果，先找出最大與最小角落數字和，再逐一進行檢驗：假設  $n$  多邊形有  $1, 2, 3, \dots, 2n$  共  $2n$  個數字，每邊數字和為  $A$ ，每邊 3 個圈，由每邊數字和的總和等於所有數字和加角落數字和，得到：

$$\frac{(1+2n) \times 2n}{2} + \underbrace{\frac{(1+n) \times n}{2}}_{\text{最小角落數和}} \leq nA \leq \frac{(1+2n) \times 2n}{2} + \underbrace{\frac{(3n+1) \times n}{2}}_{\text{最大角落數和}}$$

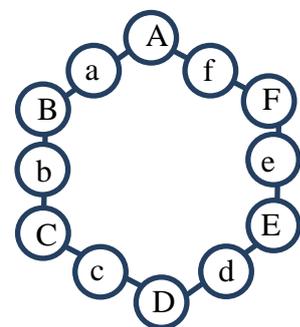
$$\text{即 } \frac{5n+3}{2} \leq A \leq \frac{7n+3}{2}$$

根據上面的不等式可以找到不同多邊形每邊數字和  $A$  的最大和最小值是多少，接著利用這些結果進行排列，這樣可以減少許多不可能的結果，提高解題成功的效率。

- 二、在檢驗每邊數字和為 13 的四邊形時，發現其中有一邊需要被填進空格的數字已被放在其他的角落，因此我們發現角落的 4 個數字其中的 3 個數字加起來的總和與每邊數字和一樣時，這組數字是無解的，我們稱它為「三數字消去法」。以四邊形為例，若四邊形每邊數字和為 17，而  $A+C+F=17$ ，則可知  $A+B+C=17=A+C+F=17$ ，得到  $B=F$ ，但因每個數字限用一次，所以無解！

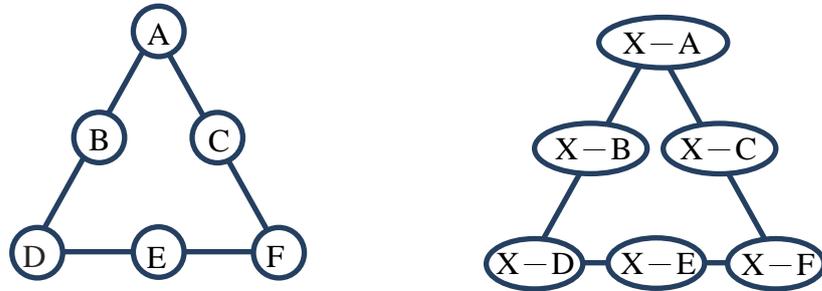


因為「三數字消去法」在六邊形只能刪去部份放法，所以在檢驗六邊形時，我們將「三數字消去法」延伸。以六邊形為例，若六邊形每邊數字和為 18，當  $A+C+E=18$  時， $ADF$  或  $ABD$  或  $ABF$  任一等於 18，即滿足「三數字消去法」無解成立。若  $ACE$  放置於其他位置，會直接使「三數字消去法」成立，所以得到結論：當角落數的六個數字中，有五個數字能湊出兩組所求的每邊數字和（其中一數重複），就可以直接刪去，稱為「雙三數字消去法」。



- 三、經由觀察發現三、四、五與六邊形的結果與角落數都可用對調求出，我們稱這種關係為「互補關係」。以三角為例，若左下圖是滿足每邊數字和相等及連續整數的三角形，

而右下圖是另一個三角形六個數分別是  $X-A$ 、 $X-B$ 、 $X-C$ 、 $X-D$ 、 $X-E$ 、 $X-F$ ，由左圖可知  $A+B+D=D+E+F=A+C+F$ ，經過整理可知每邊數字和分別為  $3X-(A+B+D)$ 、 $3X-(D+E+F)$ 、 $3X-(A+C+F)$ ，發現每邊數字和仍會相等，所以「互補關係」成立，又因為連續整數由 1 開始，所以  $X = \text{連續整數中最大的數} + 1$ ，可再以「平移關係」延伸套用到其他數字組合。

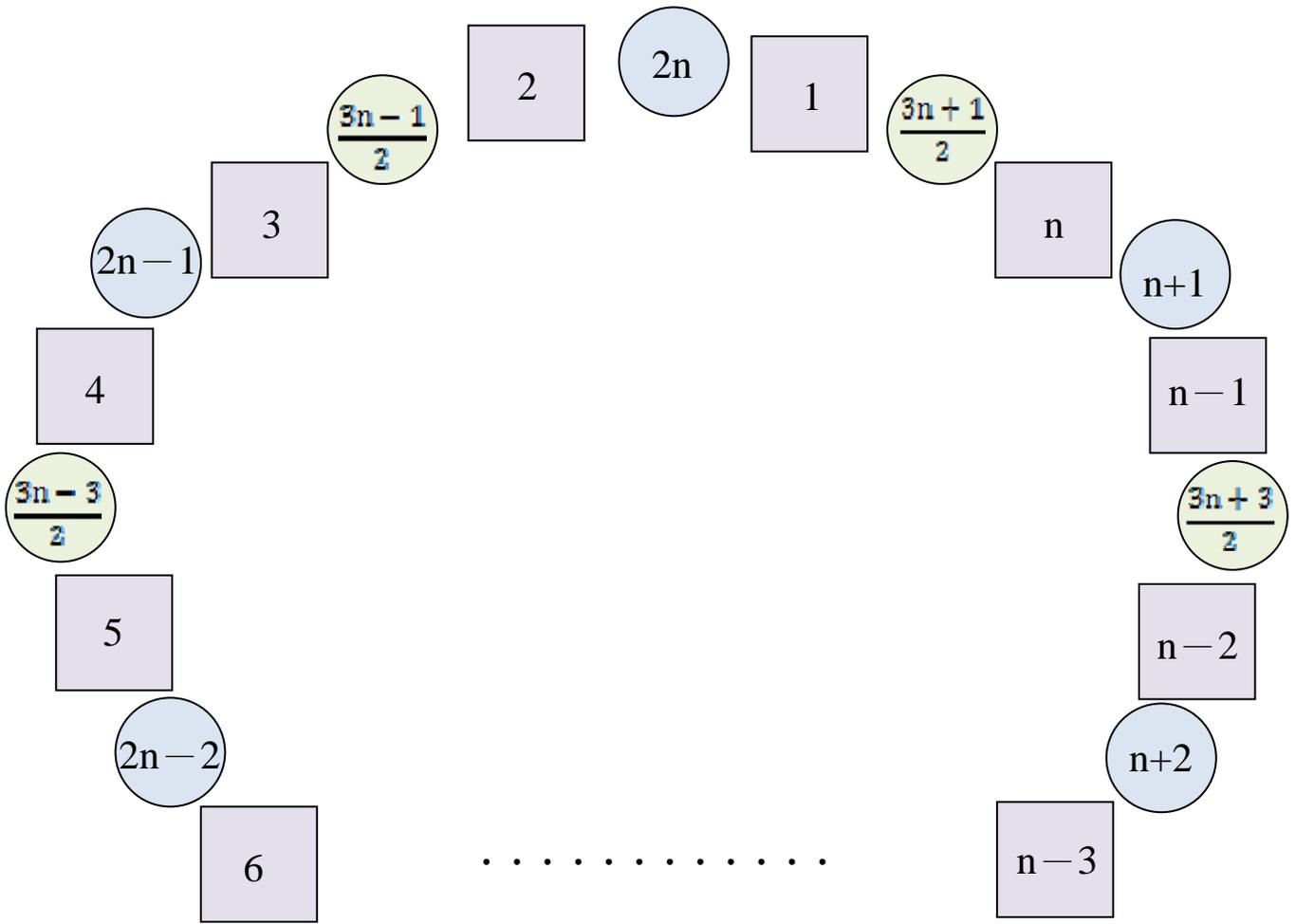


四、在整理三、四、五及六邊形的結果時，發現奇數邊的多邊形在每邊數字和最大時，角落數放入較大數的狀況下都找得到答案，所以猜想是不是奇數邊的時候都有解，經過整理（如下表）發現奇數邊的  $n$  邊形可以找到下表中的關係，確定奇數邊的  $n$  邊形有解，因此得到結論：「奇數邊且每邊三個圈的  $n$  邊形一定有一組解」，其每邊數字和最大且角落數是由  $n+1 \sim 2n$  所組成（如下圖）。

相差  $\frac{n-1}{2}$

角落數	$2n$	$2n$	$2n-1$	...	...	$\frac{3n+5}{2}$	$\frac{3n+3}{2}$	$\frac{3n+1}{2}$
角落數	$\frac{3n+1}{2}$	$\frac{3n-1}{2}$	$\frac{3n-3}{2}$	...	...	$n+2$	$n+1$	$n+1$
	1	2	3	...	...	$n-2$	$n-1$	$n$
每邊和	$\frac{7n+3}{2}$	$\frac{7n+3}{2}$	$\frac{7n+3}{2}$	...	...	$\frac{7n+3}{2}$	$\frac{7n+3}{2}$	$\frac{7n+3}{2}$

奇數邊每邊 3 個圈填入連續整數  $1 \sim 2n$  之擺放圖



註：○表示為角落數，□兩角落數中不被重複使用的數，相同顏色屬於同一規則數列。

## 陸、結論

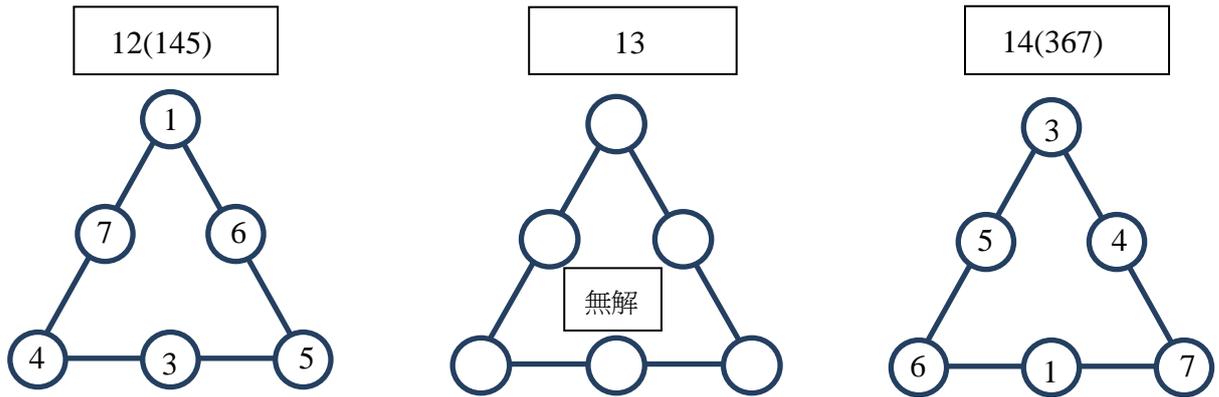
- 一、每個圖形的解都能用「平移關係」由 1 延伸至無限多組的結果。
- 二、利用  $n$  邊總和與連續整數總和的差找出角落數之和(A)的範圍是  $\frac{5n+3}{2} \leq A \leq \frac{7n+3}{2}$   
減少需要嘗試的可能結果，再逐一檢驗。
- 三、可利用「三數字消去法」減少四、五邊形中需要嘗試的可能解，且結合「三數字」與「雙三數字消去法」也能減少六邊形中需要嘗試的可能解。
- 四、當填入數字是由 1 開始的連續整數，在三、四、五、六邊形的結果都會產生「互補關係」，兩互補數的和會等於「連續整數中最大的數+1」，若要放入不從 1 開始的連續整數可再以平移關係延伸套用到其他數字組合，藉以利用「互補關係」更快速的找出其它結果。
- 五、「奇數邊」且每邊三個圈的  $n$  邊形，一定有一組解在「每邊數字和最大」且角落數由「 $n+1 \sim 2n$ 」組成時成立。

## 柒、推廣內容

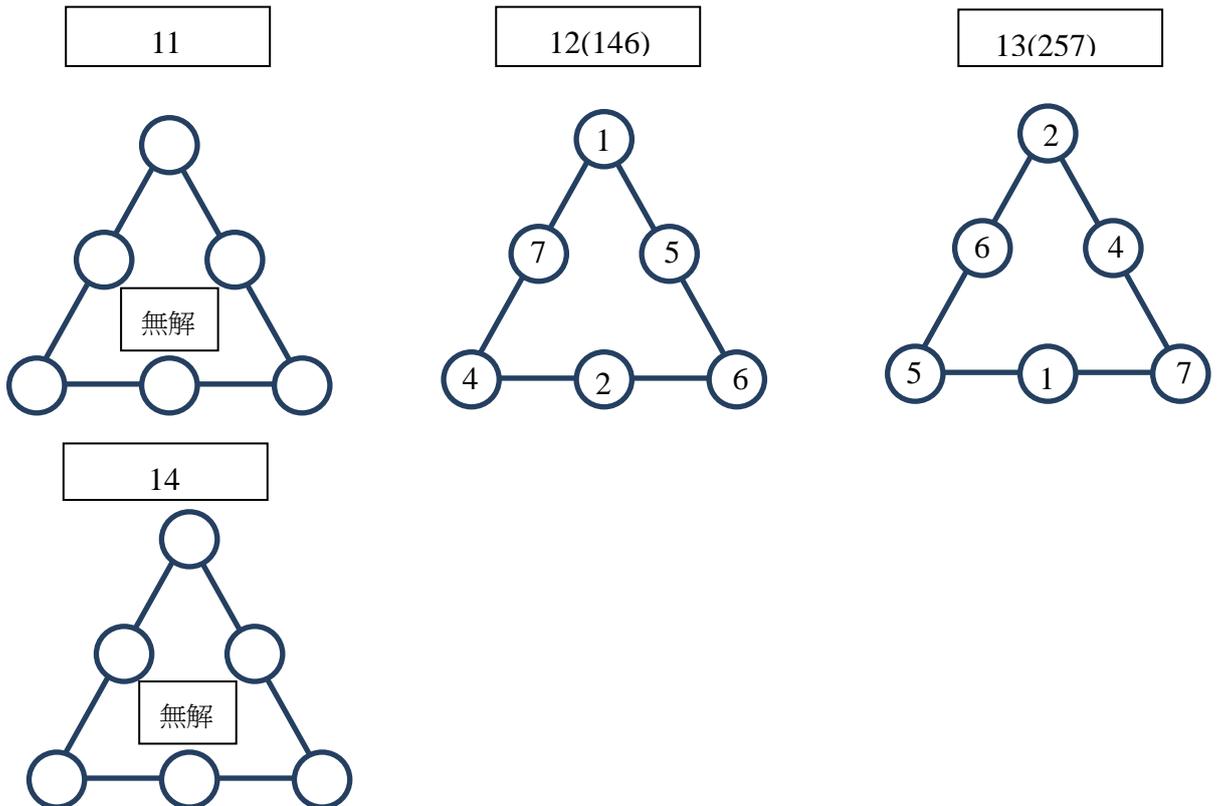
爲了驗證發現將推廣內容分爲兩部分，第一部份是將連續整數跳過一數字；第二部分是同時能夠每邊數字和與其平方和皆相等的結果，內容如下。

一、三角形空數字研究：討論三角形每邊放入三個圓圈，由數字 1、2、3、4、5、6、7(任選六個)填入，使每邊數字和相等。

(1) 缺 2：可用數字 1、3、4、5、6、7，每邊和下限:12 上限:14。

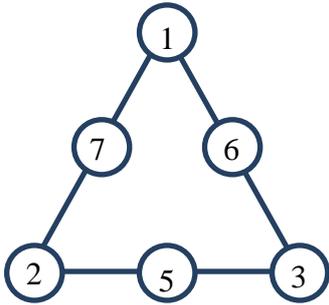


(2) 缺 3：可用數字 1、2、4、5、6、7，每邊和下限:11 上限:14。

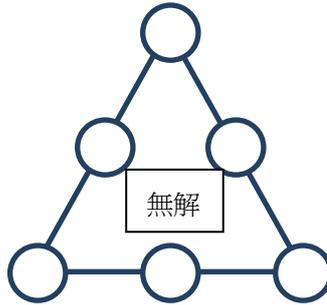


(3) 缺 4：可用數字 1、2、3、5、6、7，每邊和下限:14 上限:10。

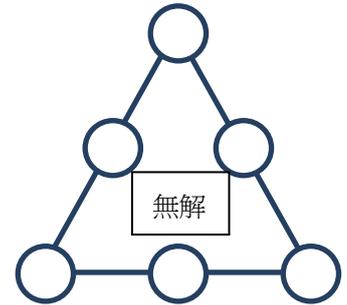
10(123)



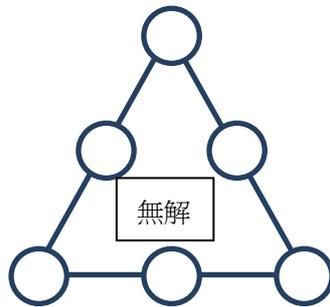
11



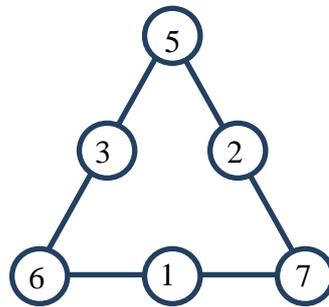
12



13

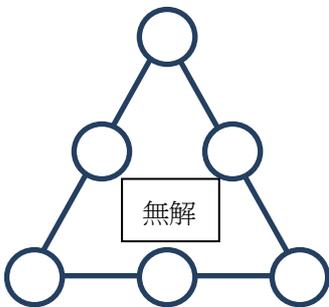


14(567)

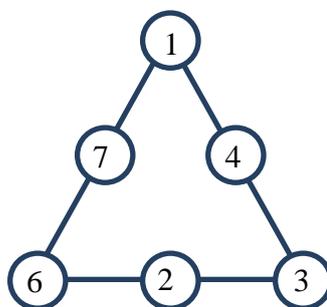


(4) 缺 5：可用數字 1、2、3、4、6、7，每邊和下限:10 上限:13。

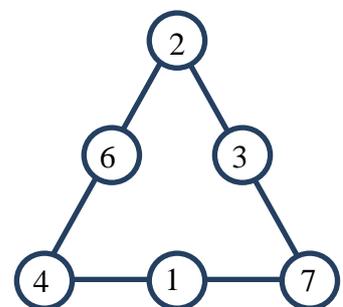
10



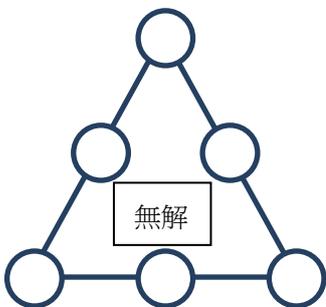
11(136)



12(247)

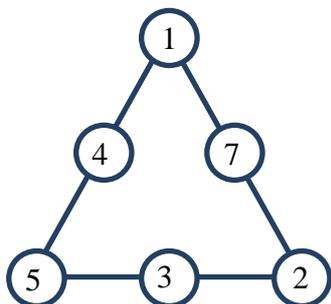


13

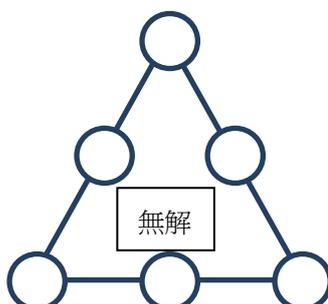


(5) 缺 6：可用數字 1、2、3、4、5、7，每邊和下限:10 上限:12。

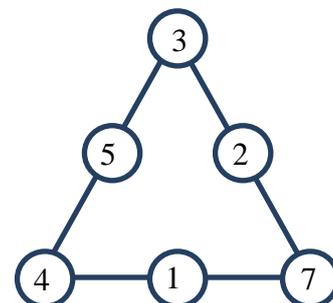
10(125)



11



12(347)



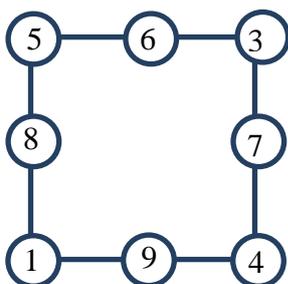
(6) 小結：三角形空數字發現：

- 1.不用做頭尾兩數。
- 2.答案可以平移。
- 3.答案會互補，如：缺 2 至 3 互補會變成缺 5 至 6，但缺 4 是中間數所以不算在內。
- 4.前半段的答案數量（缺 2 至 3）會和後半段(缺 5 至 6)一樣,缺 4 一樣不算在內。

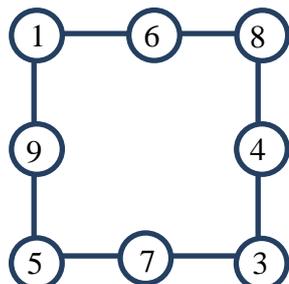
二、四邊形空數字研究：討論四邊形每邊放入三個圓圈，由數字 1、2、3、4、5、6、7、8、9(任選 8 個)填入，使每邊數字和相等。

(1) 缺 2，每邊和下限 14 上限 18。

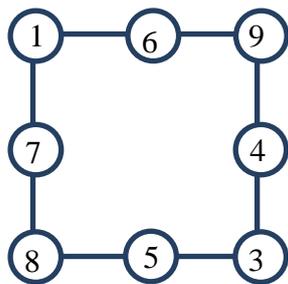
邊和 14 (1345)



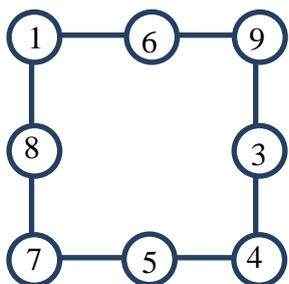
邊和 15 (1358)



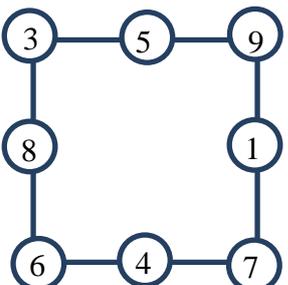
邊和 16 (1389)



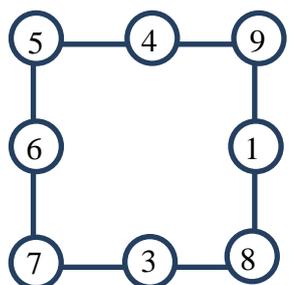
邊和 16 (1479)



邊和 17 (3679)

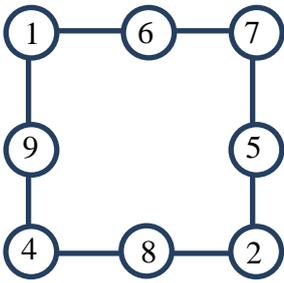


邊和 18 (5789)

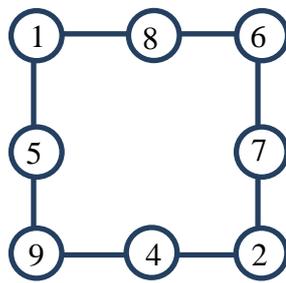


(2) 缺 3，每邊和下限 14 上限 18。

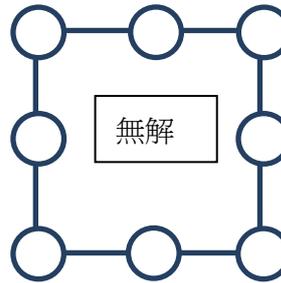
邊和 14 (1247)



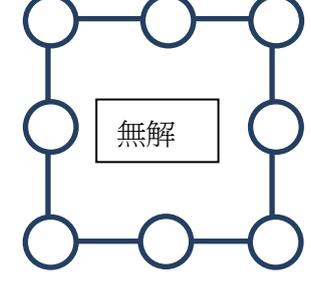
邊和 15 (1269)



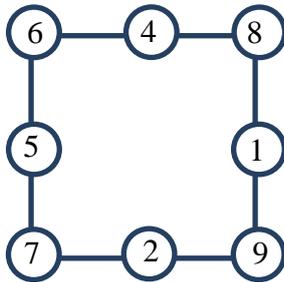
邊和 16



邊和 17

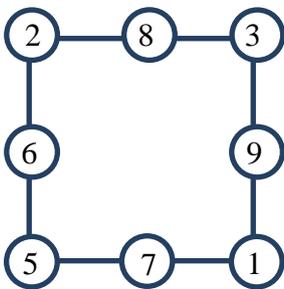


邊和 18(6789)

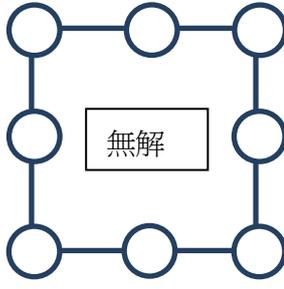


(3) 缺 4，每邊和下限 13 上限 17。

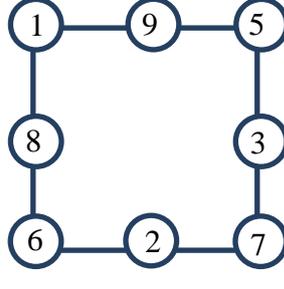
邊和 13(1235)



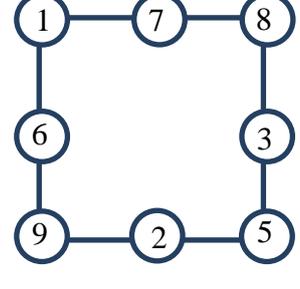
邊和 14



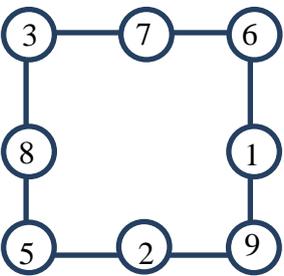
邊和 15(1567)



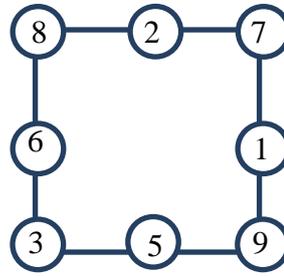
邊和 16(1589)



邊和 16(3569)

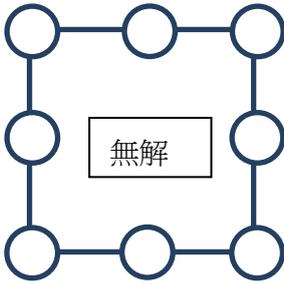


邊和 17(3789)

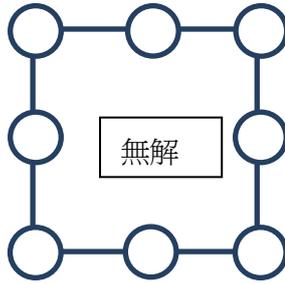


(4) 缺 5，每邊和下限 13 上限 17。

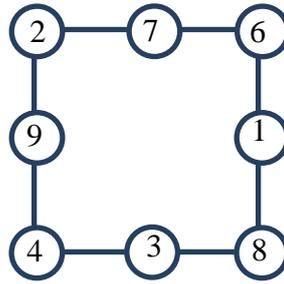
邊和 13



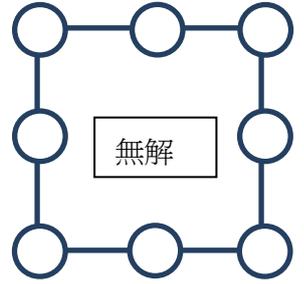
邊和 14



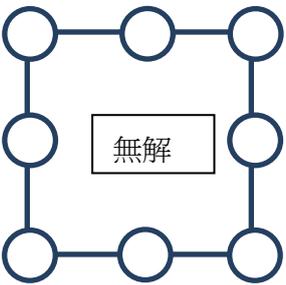
邊和 15(2468)



邊和 16

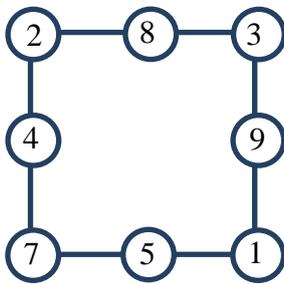


邊和 17

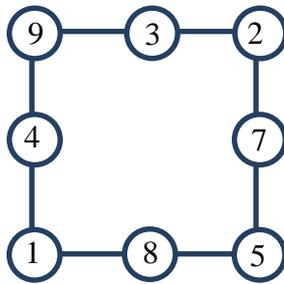


(5) 缺 6，每邊和下限 13 上限 17。

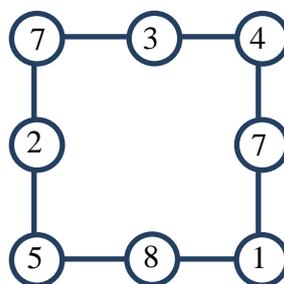
邊和 13(1237)



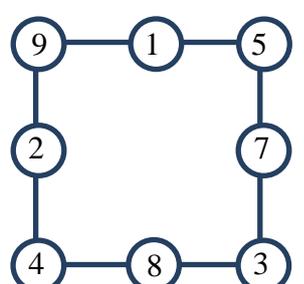
邊和 14(1259)



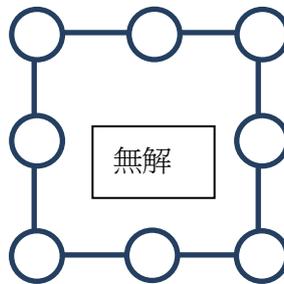
邊和 14(1457)



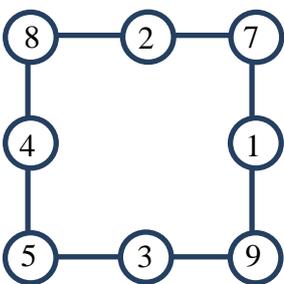
邊和 15(3459)



邊和 16

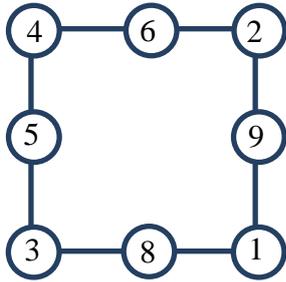


邊和 17(5789)

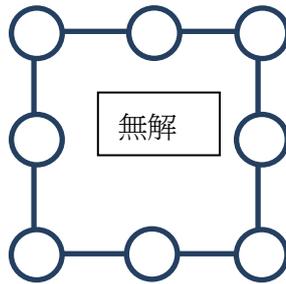


(6) 缺 7，每邊和下限 12 上限 16。

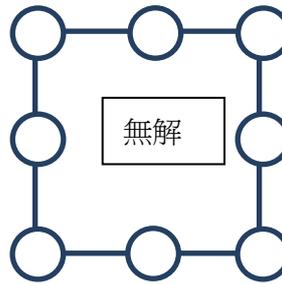
邊和 12(1234)



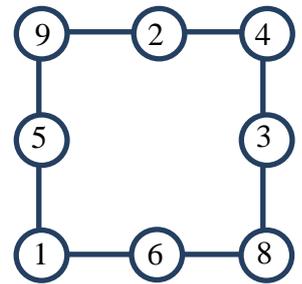
邊和 13



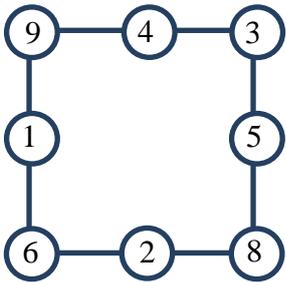
邊和 14



邊和 15(1489)

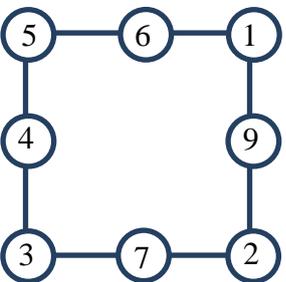


邊和 16(3689)

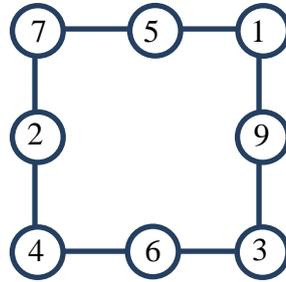


(7) 缺 8，每邊和下限 12 上限 16。

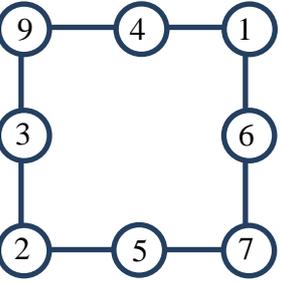
邊和 12 (1235)



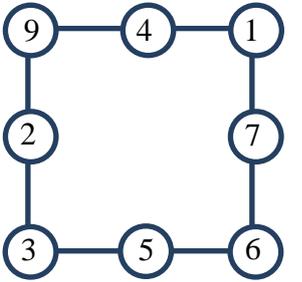
邊和 13 (1347)



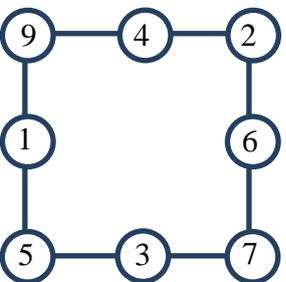
邊和 14 (1279)



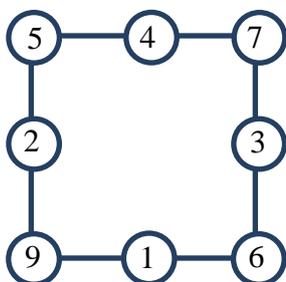
邊和 14 (1369)



邊和 15 (2579)



邊和 16 (5679)



(8) 小結：四邊形空數字發現：

1. 不用做頭尾兩數。
2. 答案可以平移。

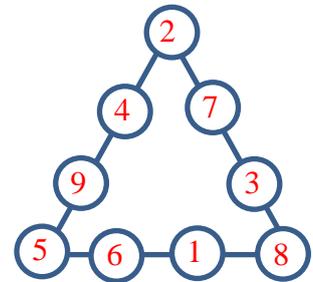
- 3.答案會互補，如：缺 2 至 4 互補會變成缺 6 至 8 的答案，但缺 5 是中間數不算在內。
- 4.前半段的答案數量（缺 2 至 4）會和後半段（缺 6 至 8）一樣，但同樣的缺 5 不算在內。

三、平方和相等的研究：利用電腦試算軟體，同時檢驗放入三個圈與四個圈時邊長和與平方和的關係，主要針對「加入每邊平方和也要相等的規則後，改變每邊數字為四個圈的三角形有沒有解？」、「加入每邊平方和也要相等的規則後，改變每邊數字為四個，同時允許數字不連續，有沒有解？」兩部份進行討論，內容如下。

(1) 加入每邊平方和也要相等的規則後，改變每邊數字為四個圈的三角形有沒有解？

在原有的規則裡加入新條件：每邊上所有數字的平方和也要相等。先嘗試使用原本每邊三個數字的三角形卻發現無解，後來透過詢問得到建議，試著將每邊改為四個數字嘗試。

先找出原規則下，每邊四個數的三角形所有的解，然後用同樣方法，逐一帶入平方來作測試，經過嘗試我們發現新規則只有一組解（如右圖）。



(2) 加入每邊平方和也要相等的規則後，改變每邊數字為四個，同時允許數字不連續，有沒有解？

在原本的問題中，可使用的數字範圍僅限於原有圖形的圈數，例:三角形每邊 4 個圈時可用數字就是 1~9，求平方和時我們把數字的範圍加大。

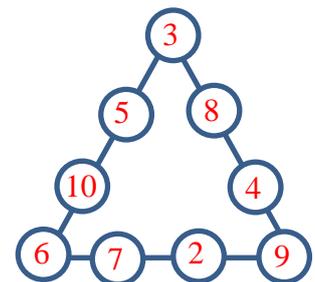
#### 1. 平移關係解

在加大範圍為 1~10 的問題中找到一個解（如右圖）。而此解與 1~9 的解相似。觀察發現此解使用的數字是 2~10(1 沒用到)，剛好是把原有的解每個數字都加 1。

以代數來看，假設左邊的四個數字是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ ，那麼原本 1~9 的三角形，左邊的平方和就是  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

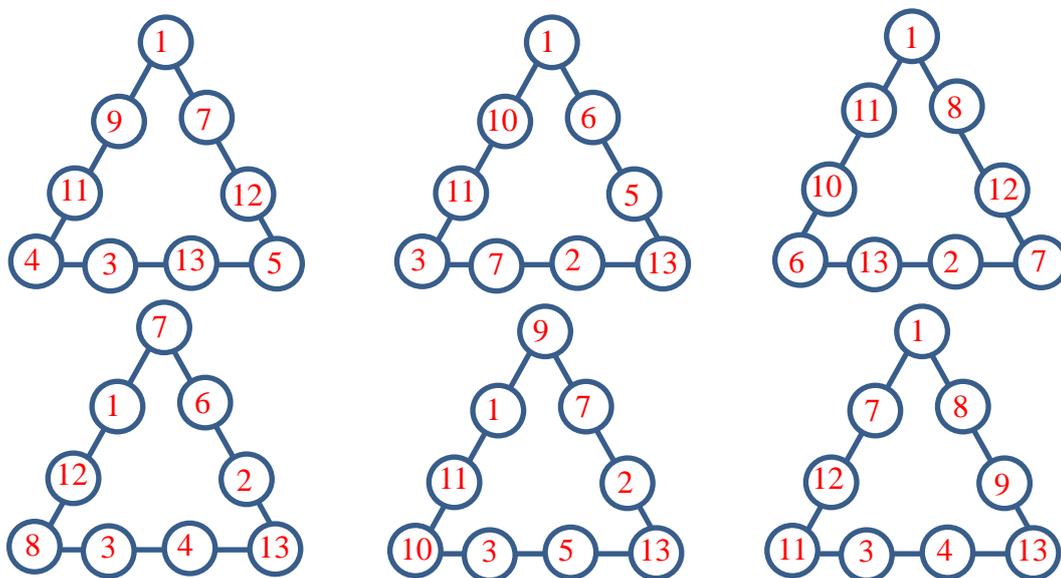
而 2~10 的三角形，左邊的平方和就是  $(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 + (d+1)^2$   
利用乘法分配律展開後變成  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(a+b+c+d) + 4$

和原 1~9 的三角形相比，只多了  $2(a+b+c+d) + 4$ ，另外兩邊也有相同的關係，而每邊和本來就一樣，所以數字平移後並不影響平方和相等的結果。因此得到「平移關係」在平方和相等時也成立。



## 2.數字範圍更大的缺號解

在數字 1~12 的範圍內，只找到由 1~9 的唯一解依照「平移關係」延伸出的三個解。而 1~13 的範圍內找到另外六個解，結果如下：



利用這些解也可以經由平移找到更多的其他解。然而找解的方法除了平移，我們仍然沒有辦法發現任何有規律的找法，只能一組一組的測試和計算。這是我們今後努力的目標，未來可再找數字範圍更大的解來分析是不是有什麼規則存在。

## 捌、參考資料

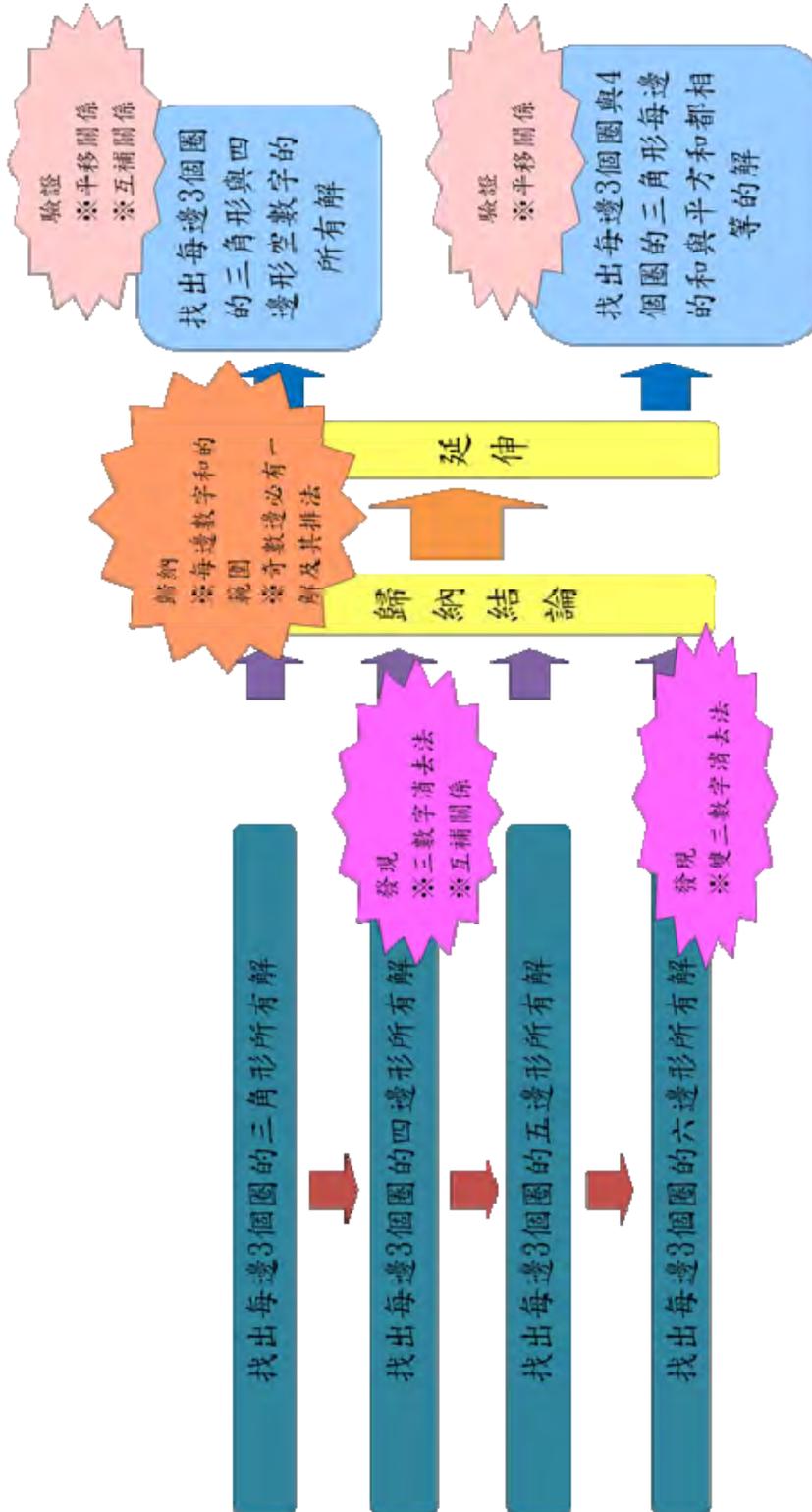
國立台灣科學教育館歷屆作品：<http://science.ntsec.edu.tw/Science.aspx?cat=21&a=6821>

康軒文教事業(2011)。國民小學數學學習領域第 9 冊第 5 單元異分母分數加減。新北市：康軒。

康軒文教事業(2011)。國民小學數學學習領域第 11 冊第 5 單元數量關係。新北市：康軒。

玖、附錄：

研究流程圖



## 【評語】 080402

1. 本研究探討的主題在深度與廣度都可再加強以提高價值。
2. 本研究的成果略顯單薄，宜再繼續努力。