中華民國第52屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080401

三催四請－從畢氏定理到N元畢氏數

學校名稱：彰化縣員林鎮員林國民小學

作者：	指導老師：
小五 賴昱維	楊秀倩 王文君

關鍵詞：方陣、畢氏定理、畢氏數

三催四請—從畢氏定理到N元畢氏數

摘要

符合畢氏定理${X_1}^2+{X_2}^2={X_3}^2$的正整數解 (X_1,X_2,X_3)我們稱為三元畢氏數；符合N元不定方程式${X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_{n-1}}^2={X_n}^2$的正整數解$(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1},X_n)$被稱為$N$元畢氏數。本研究更正陳揚叡同學在台灣2008國際科展中對N元不定方程式${X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_{n-1}}^2={X_n}^2$所提出的$N$元畢氏數一般解，並利用對圓點方陣的降階分奇偶數組加以探討，其中，奇數組是在$(M+1)$階方陣中透過一次降一階來探討三元畢氏數中$X_1=2k+1$的情況，而偶數組是在$(M+2)$階方陣中透過一次降二階來探討三元畢氏數中$X_1=2k+2$的情況。在獲得初步的成果後，又藉著直角三角形的擴充依遞迴定義的方式來進一步來探討N元畢氏數。最後，我得到N元畢氏數$(X_1,X_2,\cdots,X_m,\cdots,X_{n-1},X_n)$的關係式（表一）。

表一　N元畢氏數的關係式

	奇數組	偶數組	m
$X_m=$	$2k+1$	$2^{(n-3)}\ (2k+2)$	1
	$\frac{{X_1}^2}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{{X_1}^2}{2^{(n-1)}}-2^{(n-3)}$	2
	$\frac{{X_{m-1}}^2}{2}+X_{m-1}$	$\frac{{X_{m-1}}^2}{2^{(n-m+1)}}+2X_{m-1}+3\times 2^{(n-m-1)}$	$3,4,\cdots,n-1$
	$X_{n-1}+1$	$X_{n-1}+2$	n

註：設k，m，n為正整數，其中$n>3$，$n\geq m$

壹、 研究動機

最基本的三元畢氏數是（3,4,5）， 接下來是（5,12,13）；（7,24,25）；（9,40,41）；（11,60,61）；（13,84,85）;（15,112,113）。觀察與比較這七組數字，我發現每組第一個數的平方數減去 1 後，所產生新的數再除以 2，就可以得到每組第二個數，每組第二個數再加上 1 就可以得到每組第三個數。因此，我想進一步了解這些數字之間互相取代的可能性。經由網路搜尋畢氏數的相關資料，古希臘的數學家畢達哥拉斯和希臘的數學家丟番圖、魏晉時期中國的數學家劉徽和近代數學家費馬和高斯都已經知道三元畢氏數的一般解。接著，現代中國數學家盛立人及嚴鎮軍也知道四元畢氏數的一般解。

我從閱讀近幾年台灣國際科展的作品中，陳揚叡同學在台灣 2008 國際科展也提出N元畢氏數一般解，可是我發現其中有瑕疵，而且陳揚叡同學的研究方法似乎只需要用到畢氏定理，由於我對畢氏定理也有一定的了解，因此對於進一步來探討N元畢氏數的關係式，充滿期待。

貳、 研究目的

本研究的目的是探討N元畢氏數$(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}, X_n)$中$X_i$之間的關係式，為達成此一目的，本研究由簡入繁依照下列順序漸次討論：

一、探討三元畢氏數。

二、探討四元畢氏數。

三、探討五元畢氏數。

四、探討N元畢氏數。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Office word 2007、小算盤和 GeoGebra4.0 繪圖軟體。

肆、 研究過程與方法

一、 文獻探討

（一） 三元畢氏數

1. 如果三個正整數a, b, c滿足畢氏定理$a^2 + b^2 = c^2$ 時，(a, b, c)稱為三元畢氏數。
2. 丟番圖以代數的方法證明了三元畢氏數一般解：設$m > n$，m和n均是正整數，$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$（黃文達，2009）。
3. 畢達哥拉斯以堆石子法證明了三元畢氏數一般解：設n是正整數，$a = 2n + 1, b = 2n^2 + 2n, \mathrm{c} = 2n^2 + 2n + 1$（黃文達）。
4. 費馬和高斯分別以斜率和複整數證明了丟番圖三元畢氏數一般解（黃文達）。
5. 劉徽以出入相補原理證明了三元畢氏數一般解：設m和n均是正整數，$a = 2mn + n^2, b = 2m^2 + 2mn, \mathrm{c} = 2m^2 + 2mn + n^2$（黃文達）。
6. 三元畢氏數同乘以任何大於 1 的正整數可以產生新的三元畢氏數。三元畢氏數

一般解可以表示如下：

$a = k(m^2 - n^2), b = 2kmn, c = k(m^2 + n^2)$，$k$，$m$和$n$皆為正整數，$m > n$。

7. 類似的，有公因數的三元畢氏數可以同除以公因數產生新的三元畢氏數。如果a、b、c有公因數k時，三元畢氏數一般解可以表示如下：

$a = \frac{m^2 - n^2}{k}, b = \frac{2mn}{k}, c = \frac{m^2 + n^2}{k}$，$k$，$m$和$n$皆為正整數，$m > n$。

（二） 四元畢氏數

在西元 2001 年，盛立人及嚴鎮軍對$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$提出四元畢氏數一般解（陳揚叡，2008）：$x = mn, y = m^2 + mn, z = mn + n^2, w = m^2 + mn + n^2$，$m$和$n$皆為正整數，這從三元擴展到四元的境界，令我耳目一新。

（三） 多元畢氏數

在四十二屆全國科展國中組數學科第二名「哈哈鏡前的費馬最後定理—多元畢氏數的研究」中提出畢氏定理的變形，如式①：方程式從二次方提高為n次方就是著名的費馬最後定理；方程式從三元提高為多元就是多元的二次不定方程式（洪碩甫，2002）。這是相當有趣的觀點，也提供我可以進一步思考的方向。

$$X_1^{\ n} + X_2^{\ n} = X_3^{\ n} \rightleftarrows X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + \cdots + X_m^{\ 2} + \cdots\cdots + X_{n-1}^{\ 2} = X_n^{\ 2} \text{—①}$$

（四） N元畢氏數一般解的瑕疵

1. 陳揚叡同學的N元畢氏數一般解

台灣 2008 國際科展數學科作品（陳揚叡）：「N元不定方程式的整數解探討」中，陳揚叡同學對 $X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + X_3^{\ 2} + \cdots + X_{n-1}^{\ 2} = X_n^{\ 2}$提出$N$元畢氏數一般解：

$$\begin{cases} X_1 = m_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} + \cdots + m_{n-1}^{\ 2} - m_n^{\ 2} \\ X_2 = 2m_1 m_{\mathrm{n}} \\ X_3 = 2\, m_2 m_{\mathrm{n}} \\ \vdots \\ X_{n-1} = 2\, m_{n-1} m_{\mathrm{n}} \\ X_n \quad = m_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} + \cdots + m_{n-1}^{\ 2} + m_n^{\ 2} \end{cases}$$

2. 驗算

我驗算N元不定方程式 $X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + X_3^{\ 2} + \cdots + X_{n-1}^{\ 2} = X_n^{\ 2}$ —①，在等式① 的兩邊各減去$X_1^{\ 2}$，得到：$X_2^{\ 2} + X_3^{\ 2} + \cdots + X_{n-1}^{\ 2} = X_n^{\ 2} - X_1^{\ 2}$ —②，再將

$X_1 = m_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} + \cdots + m_{n-1}^{\ 2} - m_n^{\ 2}$和$X_n = m_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} + \cdots + m_{n-1}^{\ 2} + m_n^{\ 2}$

代入等式②　，可以知道：

$$X_2{}^2+X_3{}^2+\cdots+X_{n-1}{}^2$$

$$=X_\mathrm{n}{}^2-X_1{}^2$$

$$=(X_n+X_1)(X_n-X_1)$$

$$=[（m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-1}{}^2+m_n{}^2）+（m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-1}{}^2-m_n{}^2）]$$

$$[\left(m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-1}{}^2+m_n{}^2\right)-\left(m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-1}{}^2-m_n{}^2\right)]$$

$$=2m_n{}^2\left(2m_1{}^2+2m_2{}^2+\cdots+2m_{n-1}{}^2\right)$$

$$=4m_1{}^2m_\mathrm{n}{}^2+4m_2{}^2m_\mathrm{n}{}^2+\cdots+4m_{n-1}{}^2m_\mathrm{n}{}^2$$

$$=（2m_1m_\mathrm{n}）^2+（2m_2m_\mathrm{n}）^2+\cdots+（2m_{n-1}m_\mathrm{n}）^2。$$

3. 發現瑕疵

將上列式子中的 X_2與 $2m_1m_\mathrm{n}$，X_3與 $2\,m_2m_\mathrm{n}$，⋯ 分別對應後，我發現X_{n-1}應與 $2\,m_{n-2}m_\mathrm{n}$對應而非 $2\,m_{n-1}m_\mathrm{n}$，也就是$X_2=2m_1m_\mathrm{n}$，$X_3=2\,m_2m_\mathrm{n}$，⋯，，$X_{n-1}=2\,m_{n-2}m_\mathrm{n}\neq 2\,m_{n-1}m_\mathrm{n}$。因此，我發現瑕疵：$X_{n-1}\neq 2\,m_{n-1}m_\mathrm{n}$。

4. 瑕疵更正

因此，N元畢氏數一般解應更正如下：

$$\begin{cases} X_1=m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-2}{}^2-m_{n-1}{}^2 \\ X_2=2m_1m_{n-1} \\ X_3=2\,m_2m_{n-1} \\ \vdots \\ X_{n-1}=2\,m_{n-2}m_{n-1} \\ X_n=m_1{}^2+m_2{}^2+\cdots+m_{n-2}{}^2+m_{n-1}{}^2 \end{cases}$$

這個發現更激發了我對擴展到N元畢氏數的企圖心。

（五）　直角三角形的擴充產生多元畢氏數

1. 直角三角形的推廣

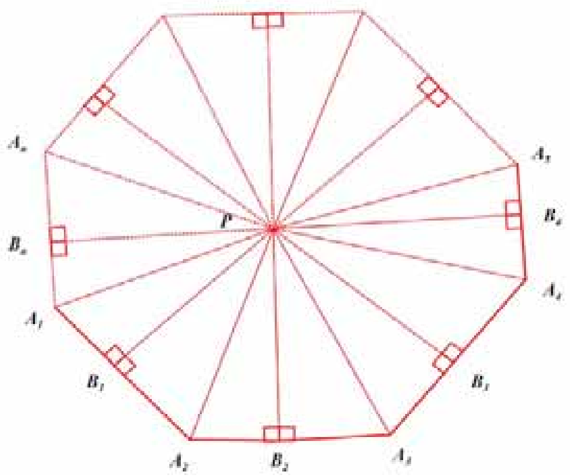
研讀黃家禮編著的幾何明珠第一章「勾股定理」（黃家禮，2000），作者利用直角三角形與另外兩個直角三角形分別共用股邊和弦邊，提出推廣直角三角形的構想（圖一），證明了以下的邊長關係式。

$$\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_2B_2}^2+\cdots+\overline{A_nB_n}^2$$

$$=(\overline{PA_1}^2-\overline{PB_1}^2)+(\overline{PA_2}^2-\overline{PB_2}^2)+\cdots+(\overline{PA_n}^2-\overline{PB_n}^2)$$

$$=(\overline{PA_2}^2-\overline{PB_1}^2)+(\overline{PA_3}^2-\overline{PB_2}^2)+\cdots+(\overline{PA_1}^2-\overline{PB_n}^2)$$

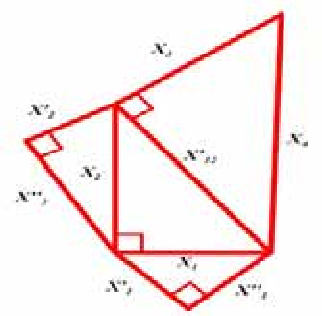
$$=\overline{B_1A_2}^2+\overline{B_2A_3}^2+\cdots+\overline{B_nA_1}^2$$



圖一　由直角三角形推廣至多邊形

2. 直角三角形的擴充

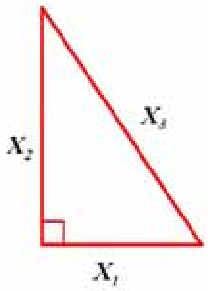
我想仿照前面的想法，來擴充直角三角形（圖二）。首先利用三邊長為X_1,X_2,X'_{12}的直角三角形之斜邊X'_{12}作為另一個直角三角形的股邊，延伸出三邊長為X'_{12},X_3,X_4的直角三角形。再分別利用股邊X_1,X_2各作為另兩個直角三角形的斜邊，各延伸出三邊長各為X_1,X'_1,X''_1和X_2,X'_2,X''_2的兩個直角三角形。接下來，以這種方式，將三邊長X_1,X_2,X'_{12}的直角三角形推廣到由$X_4,X_3,X'_2,X''_2,X'_1,X''_1$組成的六元畢氏數。



圖二　直角三角形的推廣

3. 直角三角形的三元畢氏數

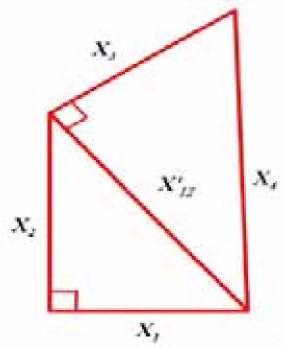
這裡假設正整數X_1, X_2, X_3是直角三角形的邊長（圖三），所以$X_1{}^2+X_2{}^2=X_3{}^2$，也就是說X_1, X_2, X_3是三元畢氏數。



圖三　直角三角形的三元畢氏數

4. 由兩個直角三角形得到的四元畢氏數

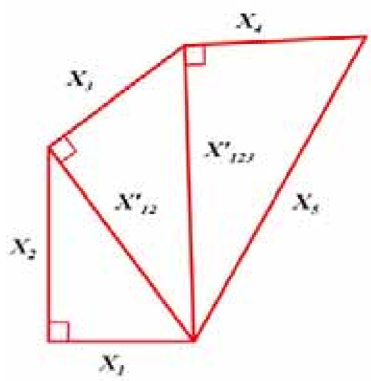
這裡假設正整數$X_1, X_2, X'_{12}, X_3, X_4$是兩個直角三角形的邊長（圖四），所以$X_1{}^2+X_2{}^2= X'_{12}{}^2$，而且$X'_{12}{}^2+X_3{}^2=X_4{}^2$，也就是說$X_1, X_2, X'_{12}$和$X'_{12}, X_3, X_4$都是三元畢氏數。又因為$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2= X'_{12}{}^2+X_3{}^2=X_4{}^2$，所以$X_1, X_2, X_3, X_4$也是四元畢氏數。



圖四　由兩個直角三角形得到的四元畢氏數

5. 由三個直角三角形得到的五元畢氏數

這裡假設正整數$X_1, X_2, X'_{12}, X_3, X'_{123}, X_4, X_5$是三個直角三角形的邊長(圖五)，所以$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2= X'_{123}{}^2$，而且$X'_{123}{}^2+X_4{}^2=X_5{}^2$，也就是說$X_1, X_2, X_3, X'_{123}$是四元畢氏數和$X'_{123}, X_4, X_5$是三元畢氏數。因為$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2+X_4{}^2= X'_{123}{}^2+X_4{}^2=X_5{}^2$，所以$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$是五元畢氏數。



圖五　由三個直角三角形得到的五元畢氏數

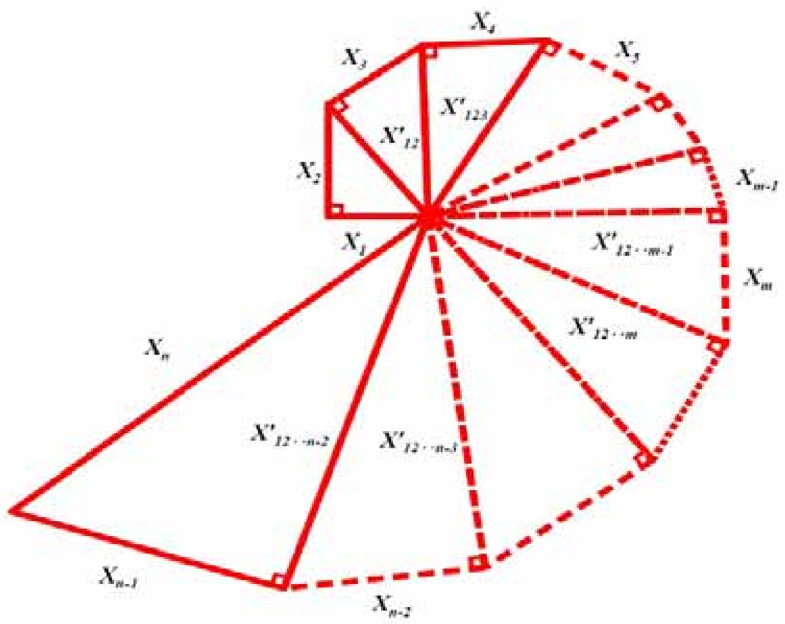
6. 由（$N-2$）個直角三角形推廣得到的N元畢氏數

這裡假設正整數$X_1,X_2,X'_{12},\cdots,X_{m-1},X'_{12\cdots m-1},X_m,\cdots,X'_{12\cdots n-2},X_{n-1},X_n$是

$(N-2)$個直角三角形的邊長（圖六），所以${X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_{n-2}}^2={X'_{12\cdots n-2}}^2$。

而且${X'_{12\cdots n-2}}^2+{X_{n-1}}^2={X_n}^2$，也就是說$X_1,X_2,\cdots,X_{n-2},X'_{12\cdots n-2}$是$(N-1)$元畢氏數和$X'_{12\cdots n-2},X_{n-1},X_n$是三元畢氏數。因為${X_1}^2+{X_2}^2+\cdots+{X_m}^2+\cdots+{X_{n-1}}^2$

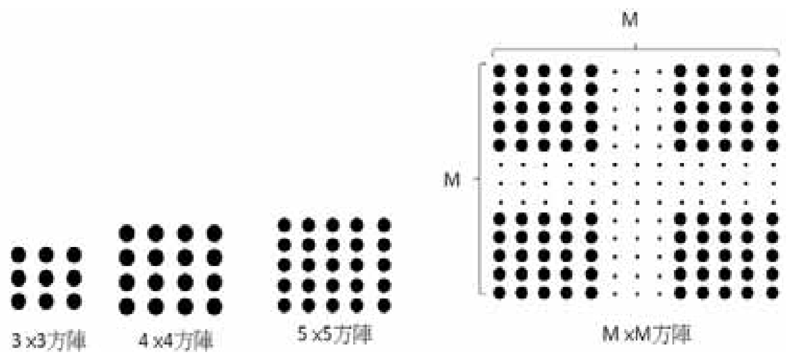
$={X'_{12\cdots n-2}}^2+{X_{n-1}}^2={X_n}^2$，所以$X_1,X_2,\cdots,X_m,\cdots,X_{n-1},X_n$是$N$元畢氏數。



圖六　由（$N-2$）個直角三角形推廣得到的N元畢氏數

（六） 圓點方陣

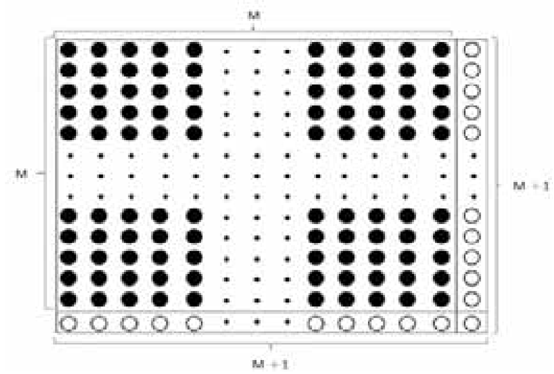
1. 因為畢氏數的關係為平方的形態，因此每一個平方數可以想像成方陣的點數來思考。這裡定義圓點方陣是將圓點以行列等圓點數的方式排列。例如 3 階，4 階，5 階和M階方陣各有$3^2,4^2,5^2$和M^2個圓點，M是正整數（如圖七）。



圖七　 3 階，4 階，5 階和M階方陣

2. $(M+1)$階方陣

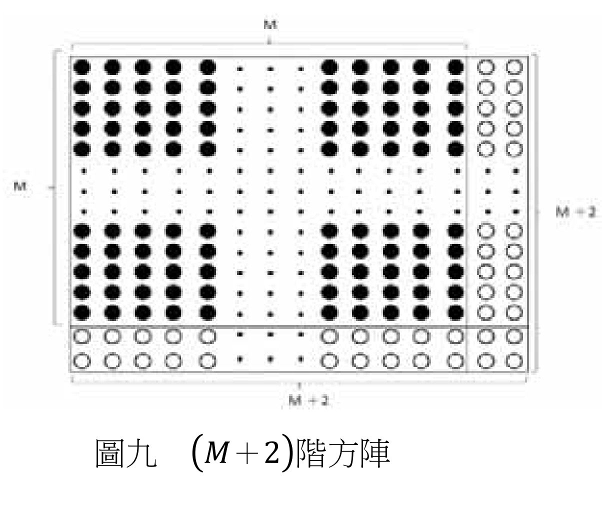
畢達哥拉斯的堆石子法類似於大家常用的四角數的方法，也就是這裡所要使用的$(M+1)$階方陣的方法（圖八），方陣中全部的圓點有：$(M+1)^2$個，實心的圓點（•）有：M^2個，空心的圓點（。）有：$[(M+1)^2-M^2]$個$=(M^2+2M+1-M^2)$個$=(2M+1)$個。亦即$(2M+1)+M^2=(M+1)^2$，在這裡可以發現$(2M+1)$是一個奇數。這是透過一次降一階的方式來看三元畢氏數中X_1是奇數的情況。



圖八　$(M+1)$階圓點方陣

3. $(M+2)$階方陣

$(M+2)$階方陣（圖九）中全部的圓點有：$(M+2)^2$個，實心的圓點（•）有：M^2個，空心的圓點（。）有：$[(M+2)^2-M^2]$個$=(M^2+4M+4-M^2)$個$=(4M+4)$個。亦即$(4M+4)+M^2=(M+2)^2$，在這裡可以發現$(4M+4)$是一個偶數。這是透過一次降兩階的方式來看三元畢氏數中X_1是偶數的情況。



圖九　$(M+2)$階方陣

4. 奇偶分組探討

因為所有正整數可以分為奇數和偶數，又因為奇數的平方數還是奇數，偶數的平方數還是偶數，因此，本研究分成奇數組與偶數組來探討。

二、 奇數組的觀察與探討

（一） （$M+1$）階方陣的三元畢氏數

1. 三元畢氏數關係式的推論

假設X_1, X_2, X_3是三元畢氏數，也就是說${X_1}^2+{X_2}^2={X_3}^2$。又因為從（$M+1$）階方陣可以得到：$(2M+1)+M^2=(M+1)^2$。

假設${X_1}^2=2M+1$，可以得到${X_2}^2=M^2$，${X_3}^2=(M+1)^2$，所以：

$$\begin{cases} M=\frac{{X_1}^2-1}{2}=X_2 & \text{—①} \\ M+1=X_2+1=X_3 & \text{—②} \end{cases}$$

因此，由①及②可以得到奇數組三元畢氏數之間的關係式：

$$\begin{cases} X_2=\frac{{X_1}^2-1}{2} \\ X_3=X_2+1 \end{cases}$$

2. 三元畢氏數關係式的檢驗

這裡檢驗三元畢氏數關係式的正確性（表二），發現（1,0,1）這組數字中，0不是正整數，所以這組數字不是三元畢氏數。接下來的組合全是三元畢氏數。也就是說，X_1是除了 1 以外的奇數。為使上面的三元畢氏數關係式正確，設定k是正整數，$X_1=2k+1$。

表二 三元畢氏數關係式的檢驗

X_1	$X_2=\frac{{X_1}^2}{2}-\frac{1}{2}$	$X_3=X_2+1$	${X_1}^2+{X_2}^2$	${X_3}^2$	成立
1	0	1	1	1	否
3	4	5	25	25	是
5	12	13	169	169	是
7	24	25	625	625	是
9	40	41	1681	1681	是
11	60	61	3721	3721	是
13	84	85	7225	7225	是
15	112	113	12769	12769	是
17	144	145	21025	21025	是
19	180	181	32761	32761	是
21	220	221	48841	48841	是

3. 從三元畢氏數關係式到三元畢氏數特殊解

以$X_1=2k+1$代入三元畢氏數關係式$X_2=\frac{{X_1}^2-1}{2}$，$X_3=X_2+1$：

$$\begin{cases} X_2=\frac{(2k+1)^2-1}{2}=\frac{4k^2+4k+1-1}{2}=2k^2+2k & \text{—③} \\ X_3=X_2+1=2k^2+2k+1 & \text{—④} \end{cases}$$

因此，由③及④可以得到奇數組三元畢氏數特殊解：

$$\begin{cases} X_1 = 2k+1 \\ X_2 = 2k^2+2k \\ X_3 = 2k^2+2k+1 \end{cases}$$

4. 三元畢氏數特殊解的驗算

$$\begin{cases} X_1{}^2 + X_2{}^2 = (2k+1)^2 + (2k^2+2k)^2 \\ \qquad\qquad = 4k^2+4k+1+4k^4+8k^3+4k^2 \\ \qquad\qquad = 4k^4+8k^3+8k^2+4k+1 \quad —⑤ \\ \\ X_3{}^2 = (2k^2+2k+1)^2 = 4k^4+8k^3+8k^2+4k+1 \quad —⑥ \end{cases}$$

因此，由⑤及⑥可以知道$X_1{}^2 + X_2{}^2 = X_3{}^2$。

（二） 利用三元畢氏數特殊解來探討四元畢氏數關係式

1. 求四元畢氏數的特殊解

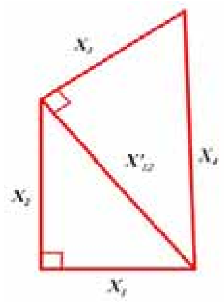
（1） 假設X_1, X_2, X_3, X_4是四元畢氏數（圖十），也就是說：$X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 = X_4{}^2$。

（2） 又從三元畢氏數特殊解得知：

當$X_1 = 2k+1$ ，$X_2 = 2k^2+2k$

與 $X'_{12} = 2k^2+2k+1$時，

可得到： $X_1{}^2 + X_2{}^2 = X'_{12}{}^2$ —①。



圖十 以四元畢氏數為邊長的四邊形

（3） 如果在等式①的兩邊各再加上$X_3{}^2$，

可得：$X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 = X'_{12}{}^2 + X_3{}^2$，

所以$X_4{}^2 = X'_{12}{}^2 + X_3{}^2$。

（4） 又$X'_{12} = 2k^2+2k+1 = 2(k^2+k)+1$，

由（3）比照三元畢氏數特殊解，得到：

$$\begin{cases} X_3 = 2(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) \\ \\ X_4 = 2(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) + 1 \end{cases}$$

（5） 由（1）、（2）、（3）和（4）可以獲得四元畢氏數特殊解是：

$$\begin{cases} X_1 = 2k+1 \\ \\ X_2 = 2k^2+2k \\ \\ X_3 = 2(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) \\ \\ X_4 = 2(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) + 1 \end{cases}$$

2. 四元畢氏數的關係式

（1） 因為$X_1=2k+1$，也就是說$k=\frac{X_1}{2}-\frac{1}{2}$。所以

$$X_2=2k^2+2k=2\left(\frac{X_1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{X_1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{{X_1}^2}{2}-\frac{1}{2}$$

（2） 因為$X_2=2k^2+2k$，也就是說$k^2+k=\frac{X_2}{2}$，所以

$$X_3=2\left(k^2+k\right)^2+2\left(k^2+k\right)=2\left(\frac{X_2}{2}\right)^2+2\left(\frac{X_2}{2}\right)=\frac{{X_2}^2}{2}+X_2$$

（3） $X_4=X_3+1$

（4） 由（1）、（2）和（3）得到四元畢氏數關係式：

$$\begin{cases} X_1=2k+1 \\ X_2=\frac{{X_1}^2}{2}-\frac{1}{2} \\ X_3=\frac{{X_2}^2}{2}+X_2 \\ X_4=X_3+1 \end{cases}$$

3. 這裡檢驗了四元畢氏數關係式的正確性（表三）：

表三 四元畢氏數關係式檢驗

k	$X_1=2k+1$	$X_2=\frac{{X_1}^2}{2}-\frac{1}{2}$	$X_3=\frac{{X_2}^2}{2}+X_2$	$X_4=X_3+1$	${X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2$	${X_4}^2$	成立
1	3	4	12	13	169	169	是
2	5	12	84	85	7225	7225	是
3	7	24	312	313	97969	97969	是
4	9	40	840	841	707281	707281	是
5	11	60	1860	1861	3463321	3463321	是
6	13	84	3612	3613	13053769	13053769	是
7	15	112	6384	6385	40768225	40768225	是
8	17	144	10512	10513	110523169	110523169	是
9	19	180	16380	16381	268337161	268337161	是
10	21	220	24420	24421	596385241	596385241	是

（三） 利用四元畢氏數特殊解來探討五元畢氏數關係式

1. 五元畢氏數的特殊解

（1） 假設X_1,X_2,X_3,X_4,X_5是五元畢氏數（圖十一），也就是說：${X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2+{X_4}^2={X_5}^2$。

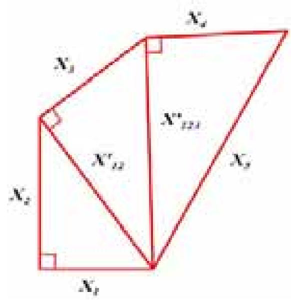
（2） 從四元畢氏數特殊解得知：

當$X_1=2k+1$，$X_2=2k^2+2k$與

$$X_3=2\left(k^2+k\right)^2+2\left(k^2+k\right)時，$$

$$X'_{123}=2\left(k^2+k\right)^2+2\left(k^2+k\right)+1，$$

可得到： ${X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2={X'_{123}}^2$ —①。



圖十一 以五元畢氏數為邊長的五邊形

（3） 在等式①兩邊在各加上$X_4{}^2$，可得到：$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2+X_4{}^2=X'_{123}{}^2+X_4{}^2$，

所以$X_5{}^2=X'_{123}{}^2+X_4{}^2$。

（4） $X'_{123}=2(k^2+k)^2+2(k^2+k)+1=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]+1$

（5） 由（4）比照三元畢氏數特殊解，得到：

$$\begin{cases} X_4=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)] \\ X_5=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]+1 \end{cases}$$

（6） 由（1）、（2）、（3）、（4）和（5）得到五元畢氏數特殊解：

$$\begin{cases} X_1=2k+1 \\ X_2=2k^2+2k \\ X_3=2(k^2+k)^2+2(k^2+k) \\ X_4=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)] \\ X_5=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]+1 \end{cases}$$

2. 五元畢氏數關係式的推論

（1） 因為$X_1=2k+1$，也就是說$k=\frac{X_1-1}{2}$。所以

$$X_2=2k^2+2\mathrm{k}=2\left(\frac{X_1-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{X_1-1}{2}\right)=\frac{X_1{}^2}{2}-\frac{1}{2}$$

（2） 因為$X_2=2k^2+2k$，也就是說$k^2+k=\frac{X_2}{2}$，所以

$$X_3=2(k^2+k)^2+2(k^2+k)=2\left(\frac{X_2}{2}\right)^2+2\left(\frac{X_2}{2}\right)=\frac{X_2{}^2}{2}+X_2$$

（3） 因為$X_3=2(k^2+k)^2+2(k^2+k)$，也就是說：$(k^2+k)^2+(k^2+k)=\frac{X_3}{2}$

所以 $X_4=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]$

$$=2\left(\frac{X_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{X_3}{2}\right)=\frac{X_3{}^2}{2}+X_3$$

（4） $X_5=2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]^2+2[(k^2+k)^2+(k^2+k)]+1=X_4+1$

（5） 由（1）、（2）、（3）和（4）得到五元畢氏數關係式

$$
\begin{cases}
X_1 = 2k+1 \\
X_2 = \frac{{X_1}^2}{2} - \frac{1}{2} \\
X_3 = \frac{{X_2}^2}{2} + X_2 \\
X_4 = \frac{{X_3}^2}{2} + X_3 \\
X_5 = X_4 + 1
\end{cases}
$$

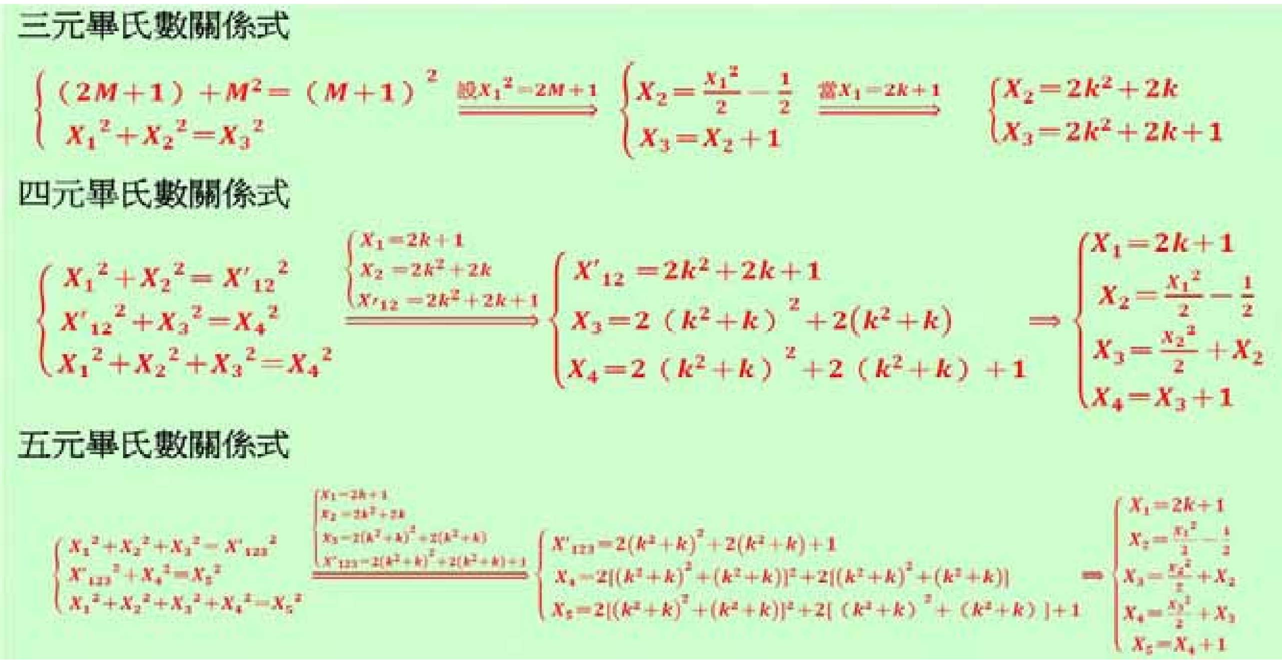
3. 這裡檢驗了五元畢氏數關係式的正確性（表四）：

表四 五元畢氏數關係式檢驗

k	$X_1 = 2k+1$	$X_2 = \frac{{X_1}^2}{2} - \frac{1}{2}$	$X_3 = \frac{{X_2}^2}{2} + X_2$	$X_4 = \frac{{X_3}^2}{2} + X_3$	$X_5 = X_4 + 1$	${X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 + {X_4}^2$	${X_5}^2$	成立
1	3	4	12	84	85	7225	7225	是
2	5	12	84	3612	3613	13053769	13053769	是
3	7	24	312	48984	48985	2399530225	2399530225	是
4	9	40	840	353640	353641	125061956881	125061956881	是
5	11	60	1860	1731660	1731661	2998649818921	2998649818921	是
6	13	84	3612	6526884	6526885	42600227803225	42600227803225	是
7	15	112	6384	20384112	20384113	415512062796769	415512062796769	是
8	17	144	10512	55261584	55261585	3053842776712225	3053842776712225	是
9	19	180	16380	134168580	134168581	18001208127553561	18001208127553561	是
10	21	220	24420	298192620	298192621	88918839218849641	88918839218849641	是

（四） N元畢氏數關係式

1. 觀察三、四和五元畢氏數關係式的產生（圖十二）可推得六、七和八元畢氏數的關係式（表五）:



圖十二　三、四和五元畢氏數關係式的產生流程圖

表五　三至八元畢氏數的關係式

多元	畢氏數關係式
三元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=X_2+1$
四元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2, X_4=X_3+1$
五元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2, X_4=\frac{X_3^2}{2}+X_3, X_5=X_4+1$
六元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2, X_4=\frac{X_3^2}{2}+X_3, X_5=\frac{X_4^2}{2}+X_4, X_6=X_5+1$
七元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2, X_4=\frac{X_3^2}{2}+X_3, X_5=\frac{X_4^2}{2}+X_4, X_6=\frac{X_5^2}{2}+X_5, X_7=X_6+1$
八元	$X_1=2k+1, X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}, X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2, X_4=\frac{X_3^2}{2}+X_3, X_5=\frac{X_4^2}{2}+X_4, X_6=\frac{X_5^2}{2}+X_5, X_7=\frac{X_6^2}{2}+X_6, X_8=X_7+1$

2. 如果m，n是正整數，$n>m$，$m>2$，$n>3$，

   假設$X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots X_{n-1}, X_n$是$N$元畢氏數（圖十三），也就是說：

   $X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+\cdots+X_m^2+\cdots+X_{n-1}^2=X_n^2$。

3. N元畢氏數關係式可透過表五中三至八元畢氏數關係式以遞迴定義的方式獲得：

$$X_1=2k+1$$

$$X_2=\frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$X_3=\frac{X_2^2}{2}+X_2$$

$$X_4=\frac{X_3^2}{2}+X_3$$

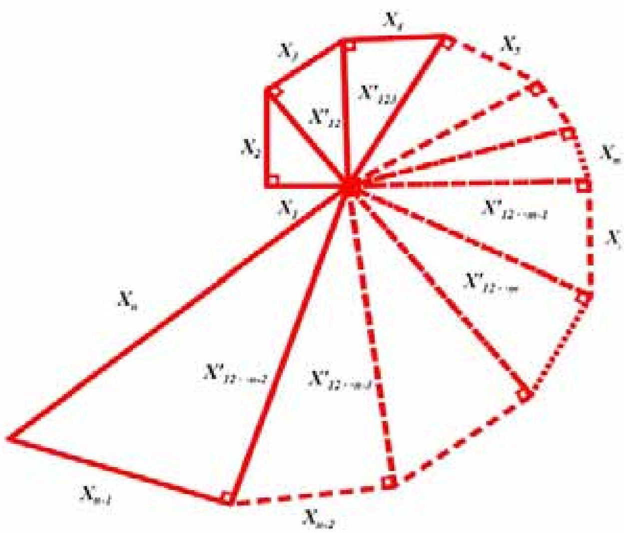
$$\vdots$$

$$X_m=\frac{X_{m-1}^2}{2}+X_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1}=\frac{X_{n-2}^2}{2}+X_{n-2}$$

$$X_n=X_{n-1}+1$$



圖十三　以N元畢氏數為邊長的N邊形

4. 因此，N元畢氏數關係式（k，m，n都是正整數，$n>3$，$n\geq m$）可寫成：

$$X_m=\begin{cases} 2k+1 & m=1 \\ \frac{X_1^2}{2}-\frac{1}{2} & m=2 \\ \frac{X_{m-1}^2}{2}+X_{m-1} & m=3，4，\cdots，n-1 \\ X_{n-1}+1 & m=n \end{cases}$$

5. 這裡檢驗了N元畢氏數關係式的正確性。因為：

$$X_n{}^2 = \left(X_{n-1}+1\right)^2$$

$$= X_{n-1}{}^2 + 2X_{n-1} + 1$$

$$= X_{n-1}{}^2 + 2\left(\frac{X_{n-2}{}^2}{2} + X_{n-2}\right) + 1$$

$$= X_{n-1}{}^2 + X_{n-2}{}^2 + 2X_{n-2} + 1$$

$$\vdots$$

$$= X_{n-1}{}^2 + X_{n-2}{}^2 + \cdots + X_m{}^2 + 2X_m + 1$$

$$\vdots$$

$$= X_{n-1}{}^2 + X_{n-2}{}^2 + \cdots + X_m{}^2 + \cdots + X_4{}^2 + X_3{}^2 + X_2{}^2 + 2X_2 + 1$$

$$= X_{n-1}{}^2 + X_{n-2}{}^2 + \cdots + X_m{}^2 + \cdots + X_4{}^2 + X_3{}^2 + X_2{}^2 + 2\left(\frac{X_1{}^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= X_{n-1}{}^2 + X_{n-2}{}^2 + \cdots + X_m{}^2 + \cdots + X_4{}^2 + X_3{}^2 + X_2{}^2 + X_1{}^2$$

三、 偶數組的觀察與探討

（一）（$M+2$）階方陣的三元畢氏數

1. 三元畢氏數關係式的推論

假設X_1、X_2、X_3是三元畢氏數，也就是說$X_1{}^2 + X_2{}^2 = X_3{}^2$。又因為從$(M+2)$階方陣得到：$(4M+4) + M^2 = (M+2)^2$。假設$X_1{}^2 = 4M+4$， 可以得到：$X_2{}^2 = M^2$，$X_3{}^2 = (M+2)^2$，所以

$$\begin{cases} M = \frac{X_1{}^2}{4} - 1 = \left(\frac{X_1}{2}\right)^2 - 1 = X_2 & \text{—①} \\ M+2 = X_2 + 2 = X_3 & \text{—②} \end{cases}$$

因此，由①及②可以得到偶數組三元畢氏數之間的關係式：

$$\begin{cases} X_2 = \left(\frac{X_1}{2}\right)^2 - 1 \\ X_3 = X_2 + 2 \end{cases}$$

2. 三元畢氏數關係式的檢驗

我們檢驗了三元畢氏數關係式的正確性（表六），發現（4，0，4）這組數字中，因為0不是正整數，所以這組數字不是三元畢氏數，接下來的組合全是三元畢氏數。也就是說，X_1是除了 2 以外的偶數。為使上面的三元畢氏數關係式正確，設定k是正整數，$X_1 = 2k+2$。

表六 三元畢氏數關係式的檢驗

X_1	$X_2=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2-1$	$X_3=X_2+2$	$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}$	$X_3^{\ 2}$	成立
2	0	2	4	4	否
4	3	5	25	25	是
6	8	10	100	100	是
8	15	17	289	289	是
10	24	26	676	676	是
12	35	37	1369	1369	是
14	48	50	2500	2500	是
16	63	65	4225	4225	是
18	80	82	6724	6724	是
20	99	101	10201	10201	是
22	120	122	14884	14884	是

3. 從三元畢氏數關係式到三元畢氏數特殊解

以$X_1=2k+2$代入三元畢氏數關係式$X_2=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2-1$，$X_3=X_2+2$，得到：

$$\begin{cases} X_2=\left(\frac{2k+2}{2}\right)^2-1=(k+1)^2-1=(k^2+2k+1)-1=k^2+2k & —③ \\ X_3=X_2+2=k^2+2k+2 & —④ \end{cases}$$

因此，由③及④可以得到偶數組三元畢氏數特殊解：

$$\begin{cases} X_1=2k+2 \\ X_2=k^2+2k \\ X_3=k^2+2k+2 \end{cases}$$

4. 三元畢氏數特殊解的驗算

$$\begin{cases} X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}=(2k+2)^2+(k^2+2k)^2=4k^2+8k+4+k^4+4k^3+4k^2 \\ \qquad\qquad =k^4+4k^3+8k^2+8k+4 \quad —⑤ \\ X_3^{\ 2}=(k^2+2k+2)^2=k^4+4k^3+8k^2+8k+4 \quad —⑥ \end{cases}$$

因此，由⑤及⑥可以得到$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}=X_3^{\ 2}$。

（二）利用三元畢氏數特殊解來探討四元畢氏數關係式

1. 求四元畢氏數的特殊解

（1）假設X_1,X_2,X_3,X_4是四元畢氏數（圖十四），

也就是說：$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+X_3^{\ 2}=X_4^{\ 2}$，

（2）從三元畢氏數特殊解得知：

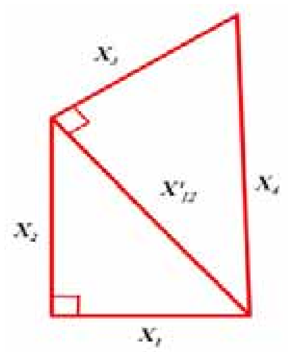
當$X_1=2k+2$，$X_2=k^2+2k$，$X'_{12}=k^2+2k+2$

可得到：$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}=X'^{\ 2}_{12}$ —①

（3）如果在等式① 的兩邊再各加上$X_3^{\ 2}$，

可得到：$X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+X_3^{\ 2}=X'^{\ 2}_{12}+X_3^{\ 2}$，

所以$X_4^{\ 2}=X'^{\ 2}_{12}+X_3^{\ 2}$ —②。



圖十四 以四元畢氏數為邊長的四邊形

（4）這時候X'_{12}不能表示為偶數的形式，不能比照三元畢氏數特殊解，也不能得到四元畢氏數特殊解。

（5）為了解決（4）的困難，我嘗試更改（2）的假設為：
當$X_1=2(2k+2)$，$X_2=2(k^2+2k)$，$X'_{12}=2(k^2+2k+2)$。

（6）這時候$X'_{12}=2(k^2+2k+2)=2(k^2+2k+1)+2$，
由（3）比照三元畢氏數特殊解，得到：

$$\begin{cases} X_3=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1) \\ X_4=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+2 \end{cases}$$

（7）由（1）、（3）、（5）和（6）可以獲得四元畢氏數特殊解：

$$\begin{cases} X_1=2(2k+2) \\ X_2=2(k^2+2k) \\ X_3=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1) \\ X_4=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+2 \end{cases}$$

2. 四元畢氏數的關係式

（1） 因為$X_1=2(2k+2)$，也就是說$k=\frac{X_1}{4}-1$，所以

$$X_2=2(k^2+2k)=2[\left(\frac{X_1}{4}-1\right)^2+2\left(\frac{X_1}{4}-1\right)]$$

$$=2\left(\frac{X_1{}^2}{16}-\frac{X_1}{2}+1+\frac{X_1}{2}-2\right)=\frac{X_1{}^2}{8}-2$$

（2） $X_2=2（k^2+2k）$，也就是說$k^2+2k=\frac{X_2}{2}$，所以

$$X_3=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)$$

$$=\left(\frac{X_2}{2}+1\right)^2+2\left(\frac{X_2}{2}+1\right)=\frac{X_2{}^2}{4}+2X_2+3$$

（3） $X_4=(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+2=X_3+2$

（4） 由（1）、（2）和（3）可以獲得四元畢氏數關係式：

$$\begin{cases} X_1=2(2k+2) \\ X_2=\frac{X_1{}^2}{8}-2 \\ X_3=\frac{X_2{}^2}{4}+2X_2+3 \\ X_4=X_3+2 \end{cases}$$

3. 這裡檢驗了四元畢氏數關係式的正確性（表七）：

表七 四元畢氏數關係式檢驗

k	$X_1=2(2k+2)$	$X_2=\frac{X_1^2}{8}-2$	$X_3=\frac{X_2^2}{4}+2X_2+3$	$X_4=X_3+2$	$X_1^2+X_2^2+X_3^2$	X_4^2	成立
1	8	6	24	26	676	676	是
2	12	16	99	101	10201	10201	是
3	16	30	288	290	84100	84100	是
4	20	48	675	677	458329	458329	是
5	24	70	1368	1370	1876900	1876900	是
6	28	96	2499	2501	6255001	6255001	是
7	32	126	4224	4226	17859076	17859076	是
8	36	160	6723	6725	45225625	45225625	是
9	40	198	10200	10202	104080804	104080804	是
10	44	240	14883	14885	221563225	221563225	是

（三）利用四元畢氏數特殊解來探討五元畢氏數關係式

1. 五元畢氏數的特殊解

（1）假設X_1,X_2,X_3,X_4,X_5是五元畢氏數（圖十五），也就是說：$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2+X_4{}^2=X_5{}^2$。

（2）比照求四元畢氏數特殊解的模式：

當$X_1=4(2k+2)$、$X_2=4(k^2+2k)$和$X_3=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)]$時，$X'_{123}=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+2]$，

可得到：$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2=X'_{123}{}^2$ —①。

（3）在等式①兩邊再各加上$X_4{}^2$，可得到：$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2+X_4{}^2=X'_{123}{}^2+X_4{}^2$，

所以$X_5{}^2=X'_{123}{}^2+X_4{}^2$。

（4） 又因為$X'_{123}=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+2]$，

$$=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]+2$$

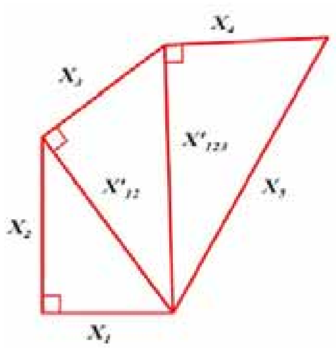
（5）由（3）比照三元畢氏數特殊解，得知：

$$X_4=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2$$
$$+2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]$$

$$X_5=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2$$
$$+2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]+2$$

（6）由（1）、（2）、（3）、（4）和（5）可以獲得五元畢氏數特殊解：

$$\begin{cases} X_1=4(2k+2) \\ X_2=4(k^2+2k) \\ X_3=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)] \\ X_4=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2 \\ \quad +2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1] \\ X_5=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2 \\ \quad +2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]+2 \end{cases}$$



圖十五 以五元畢氏數為邊長的五邊形

2. 五元畢氏數關係式的推論

（1） $X_1=4(2k+2)$，也就是說$k=\frac{X_1}{8}-1$。所以

$$X_2=4(k^2+2k)=4[\left(\frac{X_1}{8}-1\right)^2+2\left(\frac{X_1}{8}-1\right)]=\frac{{X_1}^2}{16}-4。$$

（2） 因為$X_2=4(k^2+2k)$，也就是說$k^2+2k=\frac{X_2}{4}$，所以

$$X_3=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)]$$

$$=2[\left(\frac{X_2}{4}+1\right)^2+2\left(\frac{X_2}{4}+1\right)]=\frac{{X_2}^2}{8}+2X_2+6$$

（3） 又因為$X_3=2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)]$

也就是說：$(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)=\frac{X_3}{2}$

所以，$X_4=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2$

$$+2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]$$

$$=\left(\frac{X_3}{2}+1\right)^2+2\left(\frac{X_3}{2}+1\right)=\frac{{X_3}^2}{4}+2X_3+3$$

（4） $X_5=[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]^2$

$$+2[(k^2+2k+1)^2+2(k^2+2k+1)+1]+2=X_4+2$$

（5） 由（1）、（2）、（3）和（4）可以獲得五元畢氏數關係式：

$$
\begin{cases}
X_1 = 4(2k+2) \\
X_2 = \frac{X_1{}^2}{16} - 4 \\
X_3 = \frac{X_2{}^2}{8} + 2X_2 + 6 \\
X_4 = \frac{X_3{}^2}{4} + 2X_3 + 3 \\
X_5 = X_4 + 2
\end{cases}
$$

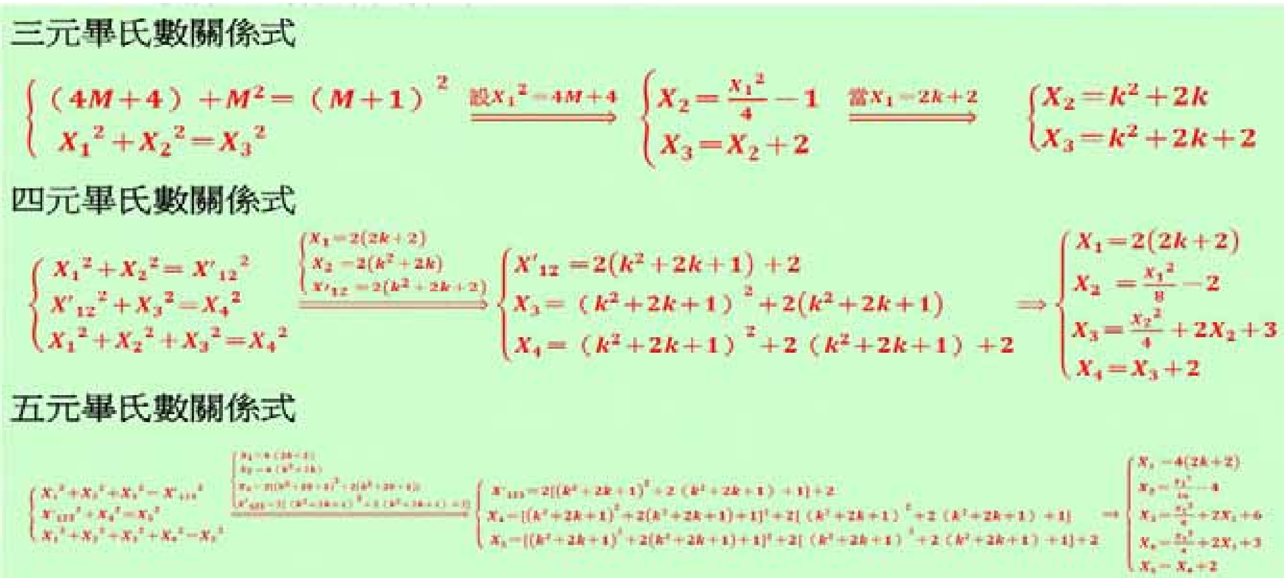
3. 這裡檢驗了五元畢氏數關係式的正確性（表八）：

表八 五元畢氏數關係式檢驗

k	$X_1 = 4(2k+2)$	$X_2 = \frac{X_1{}^2}{16} - 4$	$X_3 = \frac{X_2{}^2}{8} + 2X_2 + 6$	$X_4 = \frac{X_3{}^2}{4} + 2X_3 + 3$	$X_5 = X_4 + 2$	$X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 + X_4{}^2$	$X_5{}^2$	成立
1	16	12	48	675	677	458329	458329	是
2	24	32	198	10200	10202	104080804	104080804	是
3	32	60	576	84099	84101	7072978201	7072978201	是
4	40	96	1350	458328	458330	210066388900	210066388900	是
5	48	140	2736	1876899	1876901	3522757363801	3522757363801	是
6	56	192	4998	6255000	6255002	39125050020004	39125050020004	是
7	64	252	8448	17859075	17859077	318946631291929	318946631291929	是
8	72	320	13446	45225624	45225626	2045357247091876	2045357247091876	是
9	80	396	20400	104080803	104080805	10832813969448025	10832813969448025	是
10	88	480	29766	221563224	221563226	49090263115527076	49090263115527076	是

（四）N元畢氏數關係式

1. 觀察三、四和五元畢氏數關係式的產生（圖十六）可推得六、七和八元畢氏數的關係式（表九）：



圖十六 三、四和五元畢氏數關係式的產生流程圖

表九　三至八元畢氏數的關係式

多元	畢氏數關係式
三元	$X_1=2k+2, X_2=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2-1, X_3=X_2+2$
四元	$X_1=2(2k+2), X_2=\frac{{X_1}^2}{8}-2, X_3=\frac{{X_2}^2}{4}+2X_2+3, X_4=X_3+2$
五元	$X_1=4(2k+2), X_2=\frac{{X_1}^2}{16}-4, X_3=\frac{{X_2}^2}{8}+2X_2+6,\ X_4=\frac{{X_3}^2}{4}+2X_3+3, X_5=X_4+2$
六元	$X_1=8(2k+2), X_2=\frac{{X_1}^2}{32}-8, X_3=\frac{{X_2}^2}{16}+2X_2+12,\ X_4=\frac{{X_3}^2}{8}+2X_3+6,$ $X_5=\frac{{X_4}^2}{4}+2X_4+3, X_6=X_5+2$
七元	$X_1=16(2k+2), X_2=\frac{{X_1}^2}{64}-16, X_3=\frac{{X_2}^2}{32}+2X_2+24,\ X_4=\frac{{X_3}^2}{16}+2X_3+12,$ $X_5=\frac{{X_4}^2}{8}+2X_4+6,\ X_6=\frac{{X_5}^2}{4}+2X_5+3, X_7=X_6+2$
八元	$X_1=32(2k+2), X_2=\frac{{X_1}^2}{128}-32, X_3=\frac{{X_2}^2}{64}+2X_2+48,\ X_4=\frac{{X_3}^2}{32}+2X_3+24,$ $X_5=\frac{{X_4}^2}{16}+2X_4+12,\ X_6=\frac{{X_5}^2}{8}+2X_5+6,\ X_7=\frac{{X_6}^2}{4}+2X_6+3, X_8=X_7+2$

2. 如果m，n是正整數，$n>m$，$m>2$，$n>3$，

假設$X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots X_{n-1}, X_n$是$N$元畢氏數（圖十七），

也就是說： ${X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2+{X_4}^2+{X_5}^2+\cdots+{X_m}^2+\cdots+{X_{n-1}}^2={X_n}^2$，

3. N元畢氏數關係式可透過三至八元畢氏數關係式以遞迴定義的方式獲得：

$$X_1=2^{(n-3)}(2k+2)$$

$$X_2=\frac{{X_1}^2}{2^{(n-1)}}-2^{(n-3)}$$

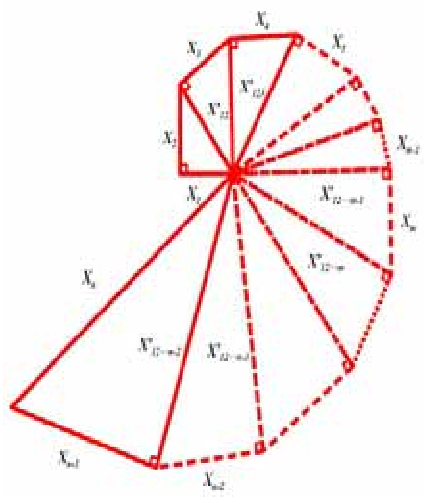
$$X_3=\frac{{X_2}^2}{2^{(n-2)}}+2X_2+3\times 2^{(n-4)}$$

$$X_4=\frac{{X_3}^2}{2^{(n-3)}}+2X_3+3\times 2^{(n-5)}$$

$$X_5=\frac{{X_4}^2}{2^{(n-4)}}+2X_4+3\times 2^{(n-6)}$$

$$\vdots$$

$$X_m=\frac{{X_{m-1}}^2}{2^{(n-m+1)}}+2X_{m-1}+3\times 2^{(n-m-1)}$$



圖十七　以N元畢氏數為邊長的N邊形

$\vdots$

$$X_{n-1}=\frac{X_{n-2}{}^{2}}{4}+2X_{n-2}+3$$

$$X_n\quad=X_{n-1}+2$$

4. 因此，N元畢氏數關係式（k,m,n都是正整數，$n>3$，$n\geq m$）可寫成：

$$X_m=\begin{cases}2^{(n-3)}\left(2k+2\right) & m=1\\ \frac{X_1{}^2}{2^{(n-1)}}-2^{(n-3)} & m=2\\ \frac{X_{m-1}{}^{2}}{2^{(n-m+1)}}+2X_{m-1}+3\times2^{(n-m-1)} & m=3，4，\cdots，n-1\\ X_{n-1}+2 & m=n\end{cases}$$

5. 檢驗N元畢氏數關係式的正確性。

$$X_n{}^2=\left(X_{n-1}+2\right)^2$$

$$=X_{n-1}{}^2+4X_{n-1}+4$$

$$=X_{n-1}{}^2+4\left(\frac{X_{n-2}{}^{2}}{4}+2X_{n-2}+\mathbf{3}\right)+4$$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+8X_{n-2}+16$$

$\vdots$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+\cdots+X_m{}^2+2^{(n-m+1)}X_m+2^{(2n-2m)}$$

$\vdots$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+\cdots+X_m{}^2+\cdots+X_4{}^2+X_3{}^2+X_2{}^2+2^{(n-1)}X_2+2^{(2n-4)}$$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+\cdots+X_m{}^2+\cdots+X_4{}^2+X_3{}^2+X_2{}^2$$

$$+2^{(n-1)}\left[\frac{X_1{}^2}{2^{(n-1)}}-2^{(n-3)}\right]+2^{(2n-4)}$$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+\cdots+X_m{}^2+\cdots+X_4{}^2+X_3{}^2+X_2{}^2+X_1{}^2$$

$$-2^{(2n-4)}+2^{(2n-4)}$$

$$=X_{n-1}{}^2+X_{n-2}{}^2+\cdots+X_m{}^2+\cdots+X_4{}^2+X_3{}^2+X_2{}^2+X_1{}^2$$

伍、研究結果

因此本研究共獲得兩組N元畢氏數關係式（表十）：

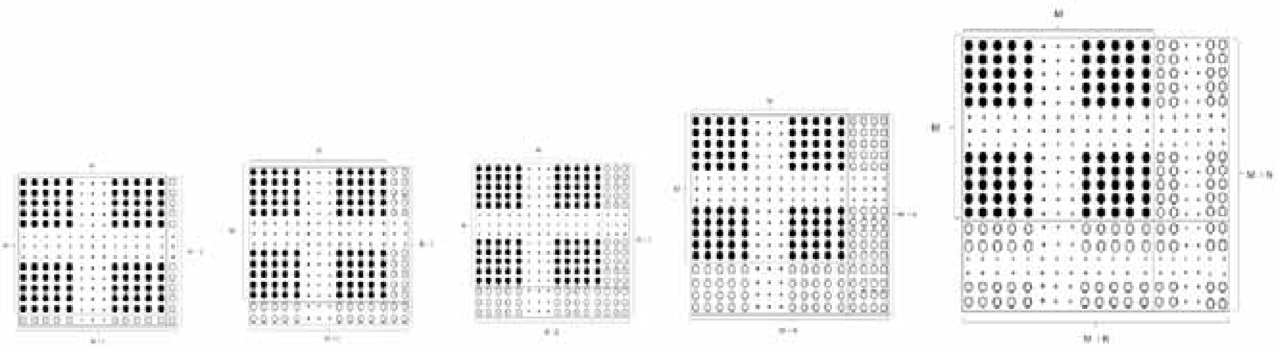
表十　N元畢氏數的關係式

	奇數組	偶數組	m
$X_m=$	$2k+1$	$2^{(n-3)}(2k+2)$	1
	$\frac{X_1^{\,2}}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{X_1^{\,2}}{2^{(n-1)}}-2^{(n-3)}$	2
	$\frac{X_{m-1}^{\,2}}{2}+X_{m-1}$	$\frac{X_{m-1}^{\,2}}{2^{(n-m+1)}}+2X_{m-1}+3\times 2^{(n-m-1)}$	$3,4,\cdots,n-1$
	$X_{n-1}+1$	$X_{n-1}+2$	n

註：設k，m，n為正整數，其中$n>3$，$n\geq m$

陸、討論

一、這裡（$M+1$）階方陣的方法，是透過一次降一階來討論三元畢氏數中X_1是奇數的情況；（$M+2$）階方陣的方法，是透過一次降二階討論三元畢氏數中X_1是偶數的情況。如果透過一次降三或四階、甚至N階（圖十八）的話，或許可以當作以後研究的路徑（表十一）。

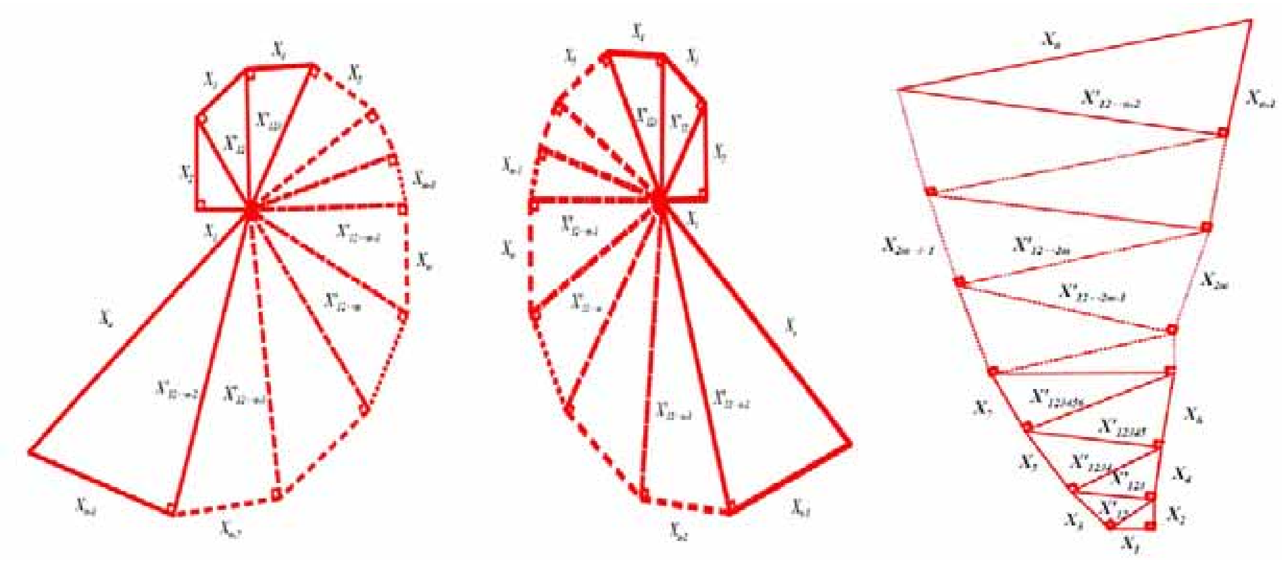


圖十八　各種圓點圖案方陣

表十一　畢氏數與方陣降階數的關係（M，N是正整數，$M>N$）

畢氏數	降一階	降二階	降三階	降四階	降N階
$X_1^{\,2}$	$2M+1$	$4M+4$	$6M+9$	$8M+16$	$2MN+N^2$
X_2	M	M	M	M	M
X_3	$M+1$	$M+2$	$M+3$	$M+4$	$M+N$

二、以N元畢氏數為邊長，不管是以順時針、逆時針或交錯的方式來連接，可以構成的三種N邊形（圖十九），這三種是相當有趣的形狀，如果有一天我是建築師，看可不可以建造出這種樣子的建築物（圖二十）。



圖十九　以N元畢氏數為邊長的N邊形

三、本來以為找到了不同的三元畢氏數的拼湊方法，後來才發現三元畢氏數關係式和特殊解是一樣的公式，只是不一樣的形式。而且三元畢氏數關係式是三元畢氏數一般解的特殊形式，例如三元畢氏數（20,21,29）無法以三元畢氏數關係式求得；四元畢氏數關係式是四元畢氏數一般解的特殊形式，例如四元畢氏數（1,2,2,3）無法以四元畢氏數關係式求得；五元畢氏數關係式是五元畢氏數一般解的特殊形式，例如五元畢氏數（1,1,1,1,2）無法以五元畢氏數關係式求得。同樣的情形，N元畢氏數關係式也是N元畢氏數一般解的特殊形式。

四、在四元畢氏數中的X'_{12}或是五元畢氏數中的X'_{123}不是質數時，可以將X'_{12}和X'_{123}提出因數後的數，再重新利用畢氏數關係式來產生新的畢氏數。例如利用畢氏數關係式可以找到的一組的五元畢氏數是（5,12,84,3612,3613），這時候$X'_{123}=85=5\times 17$，可以提出因數5 或 17後的17 或 5，再重新利用畢氏數關係式來產生新的畢氏數，找到另外新的畢氏數：（5,12,84,720,725）和（5,12,84,204,221）。這種方法推廣到N元畢氏數也是同樣適用的。

柒、結論

一、數學之父泰勒斯先生曾說：「在數學天地裡，重要的不是我們知道什麼，而是我們如何知道。」利用畢氏定理、畢氏數、圓點圖案方陣、直角三角形、多邊形、奇數、偶數與多項式的運算，我找到了N元畢氏數關係式。

二、為了這次的科展，我不但上網查資料，並且查閱了相關的書籍，讓我獲益良多，也讓我學習更多的數學知識，更讓我體認科展不只是參加比賽，還能讓我汲取更多的經驗，真是好處多多！

捌、參考資料

朱浩瑋（1998）。從畢氏定理談起。中華民國第三十八屆中小學展覽會國中組數學科第一名。
吳振奎、吳旻（2002）。名人趣題妙解。台北市：九章。
洪碩甫（2002）。哈哈鏡前的費馬最後定理 －「多元」畢氏數的研究。中華民國第四十二屆中小學展覽會國中組數學科第二名。
黃家禮（2000）。幾何明珠。台北市：九章。
黃文達（2009）。勾股三元數組。台灣數學博物館。2009 年 9 月 7 日，取自：
http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?menuID=55
陳冒海（2010A）國民中學數學第一冊。南一。
陳冒海（2010B）國民中學數學第三冊。南一。
陳揚叡（2007）。廣義的畢氏定理探討。中華民國第四十七屆中小學展覽會國中組數學科佳作。
陳揚叡（2008）。N元二次不定方程式的整數解探討。臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會。
羅伯・克里斯（2011）。科學的高點，方程式之美：改變世界的十個方程式的故事和科學家的探險。台北市：臉譜。
齊斯・德福林（2011）。數學的語言。台北市：商周。

圖二十 新加坡河畔的建築物

【評語】080401

本研究主要是探討 N 元畢氏數之間的關係，作者先對三元畢氏數、四元畢氏數以及五元畢氏數的關係式做了很完整的探討，再由此推出六至八元畢氏數的關係式繼而以遞迴定義的方式獲得 N 元畢氏數的關係式。討論過程詳盡，研究日誌內容豐富，值得嘉許。